Le Jeu Des Captures

Une ébauche d'étude mathématique

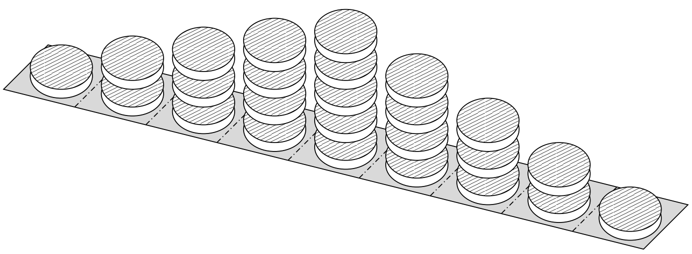
Olivier Ramaré

Voici des notes rapides concernant une étude mathématique du jeu des Captures. Cette version demande un bon bagage de culture mathématique et j'espère écrire une version plus légère et/ou plus détaillée bientôt. Ces notes sont très inspirées au début par les travaux sur le solitaire de Leibniz en 1710, de E. Lucas en 1882 dans ses « Récréations mathématiques », de M. Reiss en 1883, de N ; de Bruijn en 1972, de E.R. Berlekamp, J.H. Conway et R.K. Guyde dans leur livre sur les jeux, de J.D. Beasley en 1985 et je ne citerai pour finir que A. Deza en 2002, bien que d'autres auteurs devraient être ici cités si je cherchais l'exhaustivité !

1. Une modélisation

Commençons par donner des noms aux cases de notre barrette, soit C_1, C_2, ... et finalement C_9, dans l'ordre, et nous notons $\mathfrak{S}$ leur ensemble. Nous considérons $\mathscr{F}(\mathfrak{S}, \mathbb{Z})$ l'ensemble des fonctions de $\mathfrak{S}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et de même $\mathscr{F}(\mathfrak{S}, \mathbb{Q})$, $\mathscr{F}(\mathfrak{S}, \mathbb{R})$ et $\mathscr{F}(\mathfrak{S}, \mathbb{F}_2)$.

Au lieu d'une position, nous considérons la fonction F qui à chaque case associe le nombre de pion sur cette case, et par exemple la fonction associée à la position



est donnée par

$$F(C_1) = F(C_9) = 1, \quad F(C_2) = F(C_8) = 2,$$
$$F(C_3) = F(C_7) = 3, \quad F(C_4) = F(C_6) = 4, \quad F(C_5) = 5.$$

Lorsque nous partons de deux fonctions sur $\mathfrak{S}$, disons F et G à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et même à valeurs positives ou nulles (puisque les piles de pions ne contiennent jamais de nombre *négatif* de pions !), la question générale que nous nous posons est de savoir si nous pouvons passer de l'une à l'autre par des coups *légaux*, encore que cette légalité doive encore être convenablement définie. Avant de faire cela, nous avons besoin d'un peu plus de matériel. Pour chaque case C_i (où i varie donc entre 1 et 9), nous considérons $\check{C}_i$ qui est la fonction qui vaut 1 au poin C_i et 0 ailleurs. Nous introduisons ensuite les *coups* suivants :

$$\begin{aligned}
f^{(2)} &= \check{C}_1 + \check{C}_2 - \check{C}_3 & f^{(2)\prime} &= -\check{C}_1 + \check{C}_2 + \check{C}_3,\\
f^{(3)} &= \check{C}_2 + \check{C}_3 - \check{C}_4 & f^{(3)\prime} &= -\check{C}_2 + \check{C}_3 + \check{C}_4,\\
f^{(4)} &= \check{C}_3 + \check{C}_4 - \check{C}_5 & f^{(4)\prime} &= -\check{C}_3 + \check{C}_4 + \check{C}_5,\\
f^{(5)} &= \check{C}_4 + \check{C}_5 - \check{C}_6 & f^{(5)\prime} &= -\check{C}_4 + \check{C}_5 + \check{C}_6,\\
f^{(6)} &= \check{C}_5 + \check{C}_6 - \check{C}_7 & f^{(6)\prime} &= -\check{C}_5 + \check{C}_6 + \check{C}_7,\\
f^{(7)} &= \check{C}_6 + \check{C}_7 - \check{C}_8 & f^{(7)\prime} &= -\check{C}_6 + \check{C}_7 + \check{C}_8,\\
f^{(8)} &= \check{C}_7 + \check{C}_8 - \check{C}_9 & f^{(8)\prime} &= -\check{C}_7 + \check{C}_8 + \check{C}_9,
\end{aligned}$$

et nous désignons par $\mathscr{D}(\mathfrak{S})$ leur ensemble (lequel contient donc 14 éléments). Nous disons que nous pouvons passer de F à G par un coup élémentaire si il existe f dans $\mathscr{D}(\mathfrak{S})$, disons $f = \check{A} + \check{B} - \check{C}$, tel que

$$F(A) - 1 = G(A), \quad F(B) - 1 = G(B), \quad F(C) + 1 = G(C),$$
$$\text{et} \quad \forall E \in \mathfrak{S} \setminus \{A, B, C\}, F(E) = G(E).$$

De façon fonctionnelle, cela signifie que nous avons $F = G + f$. Nous pouvons ensuite faire se succéder les coups, disons f_1, f_2, ..., f_n disons, et nous disons que nous pouvons *dériver de façon légale* G de F si il existe une telle suite f_1, f_2, ..., f_n telle que $F = G + f_1 + f_2 + \cdots + f_n$, de telle sorte que chacune des fonctions $G + f_1 + \cdots + f_k$ ne prenne que des valeurs positives ou nulles pour tout k variant entre 1 et n.

2. Quelques espaces vectoriels et modules

Nous définissons les ensembles suivants. Tout d'abord $V^+(\mathbb{Z})$ est l'ensemble de toutes les sommes $f_1 + \cdots + f_n$, ou, dit de façon plus stricte, l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions de $\mathscr{D}(\mathfrak{S})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ mais aussi positifs ou nuls. Le second ensemble est $V(\mathbb{Z})$ qui l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions de $\mathscr{D}(\mathfrak{S})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$, sans cette fois-ci imposer la condition de positivité. Nous aurons aussi besoin de $V^+(\mathbb{Q})$ où nous imposons cette fois-ci à nos coefficients d'être positifs mais pas spécialement entiers, et nous les autorisons à appartenir à $\mathbb{Q}$. Regardons quelques éléments spéciaux de ces ensembles.

L'élément $2\check{C}_2 = f^{(2)}+f^{(2)\prime}$ appartient à $V^+(\mathbb{Z})$, et l'élément $2\check{C}_1-2\check{C}_3 = f^{(2)} - f^{(2)\prime}$ appartient à $V(\mathbb{Z})$ mais, a priori, pas à $V^+(\mathbb{Z})$. Enfin l'élément $\check{C}_2 = \frac{1}{2}(f^{(2)} + f^{(2)\prime})$ est dans $V^+(\mathbb{Q})$.

> *D'après le premier paragraphe, si nous pouvons passer de la position F à la position G, alors $F - G \in V^+(\mathbb{Z})$, et c'est la clé d'une bonne partie du travail qui suit !*

Il se trouve que la condition $F - G \in V^+(\mathbb{Z})$ est difficile à traiter et nous n'obtiendrons que des résultats partiels. Voici notre plan d'attaque :

- Étudier à quelles conditions $F - G \in V(\mathbb{Z})$.
- Étudier à quelles conditions $F - G \in V^+(\mathbb{Q})$.
- Essayer d'étudier à quelles conditions $F - G \in V^+(\mathbb{Z})$.

3. L'espace vectoriel ambiant

Nous quittons ici le domaine élémentaire et supposons beaucoup plus de connaissances de la part de notre lectrice !

Remarquons ici que tous les ensembles de fonctions considérés jusqu'à présent sous des sous-ensembles de $\mathscr{F}(\mathfrak{S},\mathbb{Q})$, lequel est un espace vectoriel de dimension 9 sur $\mathbb{Q}$, dont la famille $\check{C}_1, \cdots, \check{C}_9$ constitue une base. L'ensemble $V(\mathbb{Z})$ est un sous $\mathbb{Z}$-module. Nous commençons par déterminer son rang.

Théorème 1 *Le $\mathbb{Z}$-module $\mathscr{V}(\mathbb{Z})$ est de rang 9 et $2\mathscr{F}(\mathfrak{S}) \subset V(\mathbb{Z})$.*

Preuve. En effet, nous avons vu que chacune des fonctions $2\check{C}_2$, ..., $2\check{C}_8$ était la combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ d'éléments de $\mathscr{D}(\mathfrak{S})$. Il nous reste à remarquer que $2\check{C}_1 = f^{(2)} - f^{(2)\prime} + f^{(3)} + f^{(3)\prime}$ et de même pour $2\check{C}_9$. $\diamond\diamond\diamond$

4. Réduction modulo 2

Avant d'énoncer ce résultat nous avons besoin d'un peu plus de matériel. Si g appartient à $\mathscr{F}(\mathfrak{S},\mathbb{Z})$, nous lui associons $\tilde{g}$ dans $\mathscr{F}(\mathfrak{S},\mathbb{F}_2)$, qui est définie par

$$\tilde{g}(P) = \begin{cases} 0 & \text{si } g(P) \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } g(P) \text{ est impair.} \end{cases}$$

Nous constatons alors $\widetilde{g+h} = \tilde{g}+\tilde{h}$ ce qui est la propriété fondamentale dans ce qui suit, bien qu'elle soit assez triviale à montrer : comme il s'agit d'une propriété entre fonctions, il suffit de la vérifier en chaque point ; prenons par conséquent un point P de $\mathfrak{S}$; si $g(P)$ et $h(P)$ est pair alors $h(P)+g(P)$ est pair et nous avons bien $0+0=0$; les trois autres cas sont tout aussi simples à prouver. En fait la définition de l'addition dans $\mathbb{F}_2$ est faite de façon à ce que cette propriété soit vérifiée ! Nous constatons alors que $\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2$ si et seulement si il existe $g_3 \in \mathcal{F}(\mathfrak{S}, \mathbb{Z})$ telle que $g_1 = g_2 + 2g_3$, puisque la seule façon de ne pas changer la parité de $g_1(P)$ en chaque point consiste à lui ajouter un entier pair, tout simplement.

Remarquons que dans $\mathbb{F}_2$, nous avons $2 = 1+1 = 0$ et aussi $-1 = -1+0 = -1+2 = 1$. Si nous prenons $\mathfrak{f}$ dans $\mathscr{D}(\mathfrak{S})$, alors $\tilde{f}$ ne prend que les valeurs 1 et 0 puisque la valeur -1 devient identique dans $\mathbb{F}_2$ à 1. En particulier nous ne distinguons plus le pion d'où l'on part, où f prend la valeur 1, du pion où l'on arrive, où f prend la valeur -1. Et partant, $\tilde{f}' = \tilde{f}$. Nous posons alors

$$\mathscr{D}_2(\mathfrak{S}) = \left\{\widetilde{f^{(2)}}, \widetilde{f^{(3)}}, \widetilde{f^{(4)}}, \widetilde{f^{(5)}}, \widetilde{f^{(6)}}, \widetilde{f^{(7)}}\right\} \tag{1}$$

qui est donc l'ensemble des *coups modulo 2*.

Théorème 2 *Soit g et h deux fonctions de $\mathscr{F}(\mathfrak{S}, \mathbb{Z})$. Alors*

$$g-h \in V(\mathfrak{S}, \mathbb{Z}) \quad \text{si et seulement si} \quad \tilde{g}-\tilde{h} \in V(\mathfrak{S}, \mathbb{F}_2).$$

En fait, nous avons alors $2\mathscr{F}(\mathfrak{S}, \mathbb{Z}) \subset V(\mathfrak{S}, \mathbb{Z})$.

Preuve. D'après le théorème 1, nous savons que $2\mathscr{F}(\mathfrak{S}, \mathbb{Z}) \subset V(\mathfrak{S}, \mathbb{Z})$ ce qui est en fait le point clé.

Le reste de la preuve est alors facile. Tout d'abord, si $g-h \in V(\mathfrak{S}, \mathbb{Z})$, alors $\tilde{g}-\tilde{h} = \widetilde{g-h} \in \widetilde{V(\mathfrak{S}, \mathbb{Z})} = V(\mathfrak{S}, \mathbb{F}_2)$. Réciproquement, si $\tilde{g}-\tilde{h} \in V(\mathfrak{S}, \mathbb{F}_2)$, alors $g-h$ est dans $V(\mathfrak{S}, \mathbb{Z}) + 2\mathscr{F}(\mathfrak{S}, \mathbb{Z})$. Mais puisque $2\mathscr{F}(\mathfrak{S}, \mathbb{Z}) \subset V(\mathfrak{S}, \mathbb{Z})$, cela se simplifie en $g-h \in V(\mathfrak{S}, \mathbb{Z})$ comme requis. $\diamond\diamond\diamond$

Théorème 3 *$\mathscr{F}(\mathfrak{S}, \mathbb{F}_2)$ est en un* espace vectoriel *de dimension 9 sur $\mathbb{F}_2$, et $V(\mathfrak{S}, \mathbb{F}_2)$ en est un sous-espace de dimension 7.*

Preuve. La première assertion est facile et il est tout aussi facile de montrer que la dimension de $V(\mathfrak{S}, \mathbb{F}_2)$ est inférieure à 7 puisque cet espace est engendré par $\mathscr{D}_2(\mathfrak{S})$ qui contient moins de 7 éléments. Pour montrer que la dimension est effectivement 7, montrons que le sous-ensemble engendrant $\mathscr{D}_2(\mathfrak{S})$ constitue une famille linéairement indépendante. Considérons une relation

$$\sum_{2 \le i \le 7} \lambda_i \widetilde{f^{(i)}} = 0.$$

En regardant la valeur du membre de droite (λ_2) et celle du membre de gauche (0) en C_1, nous constatons que $\lambda_3 = 0$. Nous montrons de même que $\lambda_3 = 0$, puis $\lambda_4 = 0$, etc, jusqu'à $\lambda_7 = 0$. La preuve est ici complète. $\diamond\diamond\diamond$

Le sous-espace $V(\mathfrak{S}, \mathbb{F}_2)$ peut être déterminé par deux équations (puisqu'il est de codimension $9-7=2$). Comment déterminer deux telles équations ? Considérons l'ensemble des $F \in \mathscr{F}(\mathfrak{S}, \mathbb{F}_2)$ qui sont tels que

$$F(C_1)+F(C_2)+F(C_4)+F(C_5)+F(C_7)+F(C_8)=0. \qquad (2)$$

Il s'agit là d'un hyperplan qui contient chaque $\tilde{f}$ de $\mathscr{D}_2(\mathfrak{S})$, et qui contient donc $V(\mathfrak{S}, \mathbb{F}_2)$. Avec un peu de travail, nous atteignons le théorème suivant :

Théorème 4 *Soit g et h deux fonctions de $\mathscr{F}(\mathfrak{S}, \mathbb{Z})$. Alors $g-h \in V(\mathfrak{S}, \mathbb{Z})$ si et seulement si*

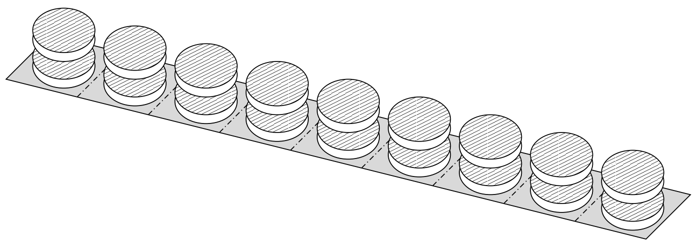
$$\begin{cases} g(C_1)+g(C_2)+g(C_4)+g(C_5)+g(C_7)+g(C_8) \equiv \\ \qquad h(C_1)+h(C_2)+h(C_4)+h(C_5)+h(C_7)+h(C_8) \mod 2, \\ g(C_2)+g(C_3)+g(C_5)+g(C_6)+g(C_8)+g(C_9) \equiv \\ \qquad h(C_2)+h(C_3)+h(C_5)+h(C_6)+h(C_8)+h(C_9) \mod 2. \end{cases}$$

La lectrice qui aura suivi nos histoires de coloriages les comprendra certainement mieux à la lumière de ce qui précède ! En particulier, si nous partons de la position Pyramide, disons g_0, nous avons

$$g_0(C_1)+g_0(C_2)+g_0(C_4)+g_0(C_5)+g_0(C_7)+g_0(C_8)=17 \equiv 1[2].$$

Ceci permet de *démontrer* qu'il est impossible de finir avec un seul pion sur l'un des cases C_3, C_6 ou C_9 ! Le lecteur montrera en utilisant l'autre équation (ou par symétrie) qu'il est impossible de finir sur l'une des cases C_1, C_4 ou C_7.

À l'aide de cet outil (je nomme la valeur modulo 2 de la somme $g_0(C_1)+g_0(C_2)+g_0(C_4)+g_0(C_5)+g_0(C_7)+g_0(C_8)$ la *première caractéristique* de la position, et la valeur modulo 2 de la somme $g_0(C_2)+g_0(C_3)+g_0(C_5)+g_0(C_6)+g_0(C_8)+g_0(C_9)$ la *seconde caractéristique*), le lecteur pourra aussi montrer de cette manière qu'il est impossible de réduire la position



Le muret

à un seul pion ... Et réussira avec un peu de persévérance à réduire cette position à deux pions. Où peuvent être posés ces deux derniers pions ?

Terminons cette section par l'étonnant *problème des bases*. L'une de difficultés que nous rencontrons vient de ce que notre ensemble de générateurs $\mathscr{D}(\mathfrak{S})$ contient 14 éléments, alors que la dimension de l'espace ambiant $V(\mathfrak{S},\mathbb{Q})$ est plus petite, et vaut 9 en l'occurence. Supposons que nous prenions dans $\mathscr{D}(\mathfrak{S})$ 9 vecteurs qui engendrent $V(\mathfrak{S},\mathbb{Q})$, et notons $\mathcal{B}$ cette collection. Que peut-on dire de l'ensemble $V(\mathcal{B})$ des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des vecteurs de $\mathcal{B}$? Bien sûr, nous avons $V(\mathcal{B}) \subset V(\mathfrak{S},\mathbb{Z})$ mais est-il possible de trouver $\mathcal{B}$ telle que $2V(\mathfrak{S},\mathbb{Z}) \not\subset V(\mathcal{B})$? De façon plus faible, est-il possible de trouver $\mathcal{B}$ pour laquelle il n'existe aucune puissance de 2, disons 2^k, telle que $2^k V(\mathfrak{S},\mathbb{Z}) \subset V(\mathcal{B})$?

De façon plus lapidaire, $V(\mathcal{B})$ est un sous $\mathbb{Z}$-module de $V(\mathfrak{S},\mathbb{Z})$. Est-il possible que son indice ne soit pas une puissance de 2 ? Est-il possible que 2 ne soit pas l'exposant de $V(\mathfrak{S},\mathbb{Z})/V(\mathcal{B})$? Ou encore : le cardinal du groupe $\mathscr{F}(\mathfrak{S},\mathbb{Z})/V(\mathcal{B})$ est-il contraint à être une puissance de 2, et son exposant est-il au plus 4 ?

C'est le problème que j'appelle *le problème des bases* et dont je ne connais à ce jour pas de solution !

5. L'écriture à coefficients rationnels positifs

L'étude précédente répond de façon satisfaisante à la première question, qui était de déterminer quand une différence appartient-elle à $V(\mathfrak{S},\mathbb{Z})$. Nous nous tournons à présent vers la question de la positivité des coefficients. Commençons par introduire un *produit scalaire* sur $\mathscr{F}(\mathfrak{S},\mathbb{Q})$. Nous définissons le produit scalaire des deux fonctions g et γ appartenant $\mathscr{F}(\mathfrak{S},\mathbb{Q})$ par

$$\begin{aligned}\langle g,\gamma\rangle = g(C_1)\gamma(C_1)+g(C_2)\gamma(C_2)+g(C_3)\gamma(C_3)+g(C_4)\gamma(C_4)+g(C_5)\gamma(C_5)\\ + g(C_6)\gamma(C_6)+g(C_7)\gamma(C_7)+g(C_8)\gamma(C_8)+g(C_9)\gamma(C_9).\end{aligned}$$

Prenons pour γ la fonction qui vérifie

$$\begin{aligned}\gamma(C_1)=0, \gamma(C_2)=1, \gamma(C_3)=1, \gamma(C_4)=2, \gamma(C_5)=3,\\ \gamma(C_6)=5, \gamma(C_7)=8, \gamma(C_8)=13, \gamma(C_9)=21.\end{aligned}$$

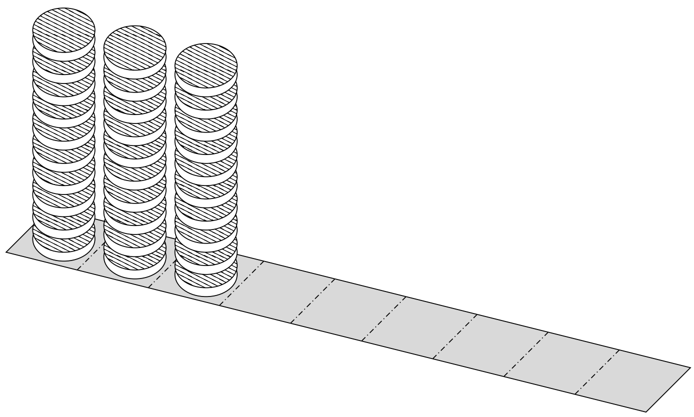
Cette façon de décrire γ est vraiment très longue, aussi nous contenterons-nous dorénavant à écrire $\gamma = \boxed{0 \mid 1 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 5 \mid 8 \mid 13 \mid 21}$. Pourquoi un tel choix ? Et bien la lectrice vérifiera sans peine la propriété fondamentale suivante :

$$\forall f \in \mathscr{D}(\mathfrak{S}), \quad \langle \gamma, f\rangle \geq 0. \tag{3}$$

Mais puisque toute fonction de $V^+(\mathfrak{S},\mathbb{Q})$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire à coefficients *positifs ou nuls* de f, cette positivité s'étend à $V^+(\mathfrak{S},\mathbb{Q})$, de telle sorte que nous avons

$$\forall F \in V^+(\mathfrak{S},\mathbb{Q}), \quad \langle \gamma, F\rangle \geq 0. \tag{4}$$

Quelles sont donc les conséquences sur le jeu d'une telle inégalité ? Disons que nous voulions essayer, en partant de la position



L'invasion

de mettre un pion en C_9, quelque soit ce qui reste sur les autres cases. Soit g_1 cette position initiale. Choisissons g_2 une position qui contienne au moins un pion en C_9. Si nous pouvons passer de g_1 à g_2, alors $g_1 - g_2 \in V^+(\mathfrak{S}, \mathbb{Q})$ et par conséquent

$$\langle \gamma, g_1 - g_2 \rangle \geq 0$$

i.e. $\langle \gamma, g_1 \rangle \geq \langle \gamma, g_2 \rangle$, c'est à dire que la valeur de ce produit scalaire *décroît* ! Au départ, cette valeur est $\langle \gamma, g_1 \rangle = 20$ et à la fin, nous avons

$$\langle \gamma, g_2 \rangle \geq \gamma(C_9) g_2(C_9)$$

parce que γ et g_2 sont toutes les deux à valeurs positives ou nulles. Par ailleurs $g_2(C_9) \geq 1$, ce qui implique que $\langle \gamma, g_2 \rangle \geq 21$, nous amenant à une contradiction. Il est donc *impossible* d'amener un pion en C_9 à partir de g_1 ! En fait, nous pouvons regarder la valeur $\langle \gamma, g \rangle$ comme une forme d'*énergie* de la position g, laquelle énergie ne peut faire que diminuer lorsque nous jouons. Si une fonction π vérifie (3) ci-dessus, ou de façon équivalente (4), nous disons que π est un *potentiel.* Certains de ces potentiels sont évidents, comme $\pi_0 = \boxed{1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1}$. La valeur $\langle \pi_0, g \rangle$ est simplement le nombre de pions sur notre barette, et ce nombre décroît bien évidemment lorsque nous jouons !

Les quatorze inégalités (il suffit de faire varier f dans $\mathscr{D}(\mathfrak{S})$ pour les obtenir) contenues dans (3) définissent un *cône polyhédral convexe*, c'est à dire a priori un sous-ensemble de $\mathscr{F}(\mathfrak{S}, \mathbb{Q})$ défini par un nombre fini d'inégalités linéaires du genre $\langle g, \theta \rangle \geq 0$, ou, géométriquement, comme l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces. Un lemme plus difficile qu'il n'y paraît et dû à Farkas en 1902 affirme qu'un tel cône polyhédral convexe peut aussi se décrire comme l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients rationnels positifs ou nuls d'un nombre fini de vecteurs que l'on nomme *générateurs*. Nous avons alors à notre disposition deux cônes polyhédraux convexes : d'un côté $V^+(\mathfrak{S}, \mathbb{Q})$ et de l'autre l'ensemble des potentiels

$$\Pi = \Big\{\pi \in \mathscr{F}(\mathfrak{S}, \mathbb{Q}),\ \forall u \in V^+(\mathfrak{S}, \mathbb{Q}), \quad \langle u, \pi\rangle \geq 0\Big\}. \tag{5}$$

Nous sautons quelques étapes, mais ces cônes polyhédraux possèdent des demi-droites extrêmales. Si nous prenons un vecteur non nul sur chacune de ces demi-droites extrêmales, nous obtenons un système de générateurs, et même un système *minimal*. Je laisse à la lectrice le soin de montrer que l'ensemble $\mathscr{D}(\mathfrak{S})$ est aussi un système minimal. Un système de générateurs minimal pour Π, disons $\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(K)}$ donne lieu à un nombre fini d'inéquations ($\langle u, \pi^{(i)}\rangle \geq 0$) définissant $V^+(\mathfrak{S}, \mathbb{Q})$. Combien d'inéquations sont-elles nécessaires ? Ou en d'autres termes, que prendre pour K ci-dessus ? Et quelles sont ces inéquations ? Nous laissons au lecteur le plaisir de montrer que Π est l'intersection de 14 demi-espaces !

Déterminer les demi-droites extrêmales d'un cône polyhédral convexe constitue un problème classique d'algorithmique, et la lectrice trouvera dans la littérature les algorithmes de Motzkin et celui dit de double description. Construire des potentiels « intéressants » est un beau problème, dont l'exploration reste à faire !

6. Une approche directe

Les sections précédentes ont mis en place toute une série d'éléments théoriques qui permettent de comprendre le problème sous un certain angle (lequel est sûrement illuminant !) Nous nous sommes ensuite tournés vers des méthodes de résolution générales, ce que nous continuerons dans la section qui suit. Mais il est aussi important de simplement s'arrêter et d'essayer de résoudre une partie du problème à la main ! Soit $h \in V^+(\mathfrak{S}, \mathbb{Z})$. Par définition, nous pouvons l'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} h = {}& x_2 f^{(2)} + x_3 f^{(3)} + x_4 f^{(4)} + x_5 f^{(5)} + x_6 f^{(6)} + x_7 f^{(7)} + x_8 f^{(8)} + \\ & + x'_2 f^{(2)\prime} + x'_3 f^{(3)\prime} + x'_4 f^{(4)\prime} + x'_5 f^{(5)\prime} + x'_6 f^{(6)\prime} + x'_7 f^{(7)\prime} + x'_8 f^{(8)\prime}. \end{aligned}$$

Le problème que nous avons en général est plutôt l'inverse : nous connaissons h et nous cherchons è déterminer si il existe de tels x_2, x'_2, ..., x'_8 qui soient à la fois entiers et positifs ou nuls. Un idée est d'essayer de résoudre ce système ! Écrivons h_i au lieu $h(C_i)$. Nous obtenons que l'égalité précédente est équivalente au système suivant.

$$\begin{cases} h_1 = x_2 - x'_2 \\ h_2 = x_2 + x'_2 + x_3 - x'_3 \\ h_3 = -x_2 + x'_2 + x_3 + x'_3 + x_4 - x'_4 \\ h_4 = -x_3 + x'_3 + x_4 + x'_4 + x_5 - x'_5 \\ h_5 = -x_4 + x'_4 + x_5 + x'_5 + x_6 - x'_6 \\ h_6 = -x_5 + x'_5 + x_6 + x'_6 + x_7 - x'_7 \\ h_7 = -x_6 + x'_6 + x_7 + x'_7 + x_8 - x'_8 \\ h_8 = -x_7 + x'_7 + x_8 + x'_8 \\ h_9 = -x_8 + x'_8 \end{cases}$$

Nous connaissons $h_1, \dots, h_9$ et nous cherchons si une solution existe. Nous pouvons exprimer neuf des variables, que nous nommons principales, en fonction des paramètres $h_1, \dots, h_9$ et des 5 variables restantes et exprimer les conditions de positivité des variables principales à partir de ces expressions ... Nous laissons le lecteur continuer !

7. Un peu de programmation linéaire entière

Le problème d'écrire $h = g_1 - g_2$ sous forme de combinaison linéaire positive et à coefficients entiers d'éléments de $\mathscr{D}(\mathfrak{S})$ peut se formuler de la manière suivante. Nous cherchons à résoudre

$$\begin{cases} \text{Minimiser} \quad \sum_{f \in \mathscr{D}(\mathfrak{S})} x_f, \\ \text{sous} \quad x_f \geq 0, \quad x_f \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \sum_{f \in \mathscr{D}(\mathfrak{S})} x_f f = h. \end{cases} \tag{6}$$

Notons que nous savons la valeur de la forme linéaire à minimiser : il s'agit tout simplement de $\langle h, \mathbb{1}_{\mathfrak{S}} \rangle$. Un tel problème de minimisation (6) s'appelle un *programme linéaire* auquel on ajoute le qualificatif *en points entiers* : il s'agit de minimiser une application linéaire sous diverses conditions d'égalité ou d'inégalités linéaires. Ces dernières conditions sont ordinairement appelées *les contraintes.*

La théorie et la pratique des programmes linéaires ont explosé aux alentours des années 50 lorsqu'un premier algorithme dû à Dantzig en 1947 (l'algorithme du simplexe) a résolu de tels problèmes très rapidement. Ce type de programmes est très utilisé dans de nombreux domaines, et notoirement en économie : les modélisations afférantes demandent de travailler avec des milliers de variables et un nombre similaire de contraintes. Cet algorithme ne s'occupait pas du fait que les points soient entiers ou non, mais une adaptation a assez vite vu le jour.

L'idée utilisée pour passer en points entiers est de calculer une solution rationnelle et de dire que si l'on prend les parties entières des coordonnées de cette solution, on doit obtenir quelque chose d'assez bon ... Ceci fonctionne souvent, mais attention ! ! ! !, les solutions entières *optimales* peuvent être bien plus compliquées ! !

C'est toutefois en partant de l'idée ci-dessus qu'est née la technique dite de "brancher et borner" aussi connu sous son nom anglais "branch and bound" ou encore ... algorithme BB. Le permier calcul est celui d'une solution rationnelle. Si cette solution a de plus le bon gout d'être à coefficients entiers, nous nous arrêtons. Sinon, une variable, disons x_1 est non entière de valeur c dont la partie entière est disons c_0. Et bien nous recommençons la procédure en résolvant les deux programmes linéaires issus du précédent mais auxquels nous ajoutons la contrainte $x_1 \geq c_0 + 1$ d'un côté et $x_1 \leq c_0$. Ce procédé va aboutir sur une solution optimale, Malheureusement cette procèdure de division des problèmes a tendance à les multiplier, et le temps augmente exponentiellement : nous partons d'un problème, nous en déduisons 2, dont nous en déduisons 4, puis 8 ... Il est donc essentiel de disposer de bonnes bornes a priori sur les variables et de bonnes stratégies de choix pour décider si il faut plutôt considérer une branche ou l'autre.

La plupart des système de calculs formel propose des fonctions de résolutions des programmes linéaires. En logiciels libres, le programme lp_solve fontionne très bien et assez rapidement. Nous pouvons y remplacer "Minimiser" par "Maximiser" (il suffit de multiplier la condition par -1 pour s'en rendre compte).

Expliquons ici où de tels problèmes apparaissent à partir du problème classique du sac à dos : un marcheur veut transporter la quantité maximale de nourriture et il peut supporter 22 kilos. Il a le choix entre des paquets de 2 et de 3 kilos chacuns et il souhaite que le nombre de paquets de 3 kilos soit entre une fois le nombre de paquets de 2 et deux fgois ce même nombre. Combien de paquets de 2 kilos et de paquets de 3 kilos doit il emporter ? Et bien si x est le nombre de paquets de 2 kilos et y le nombre de paquets de 3 kilos. Alors le problème est :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Maximiser} \quad 2x + 3y, \\ \text{sous} \quad x, y \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad 2x \geq y \geq x, \quad 2x + 3y \leq 22. \end{array} \right. \tag{7}$$

Nous laissons au lecteur le soin de résoudre ce problème ! Une dessin lui sera sûrement utile ...

Bibliographie papier et électronique

Ce jeu étant nouveau n'est couvert dans aucun livre. La lectrice trouvera cependant dans les ouvrages ou les sites qui suivent des éléments qui l'aideront dans sa réflexion.

∘∘ E.R. Berlekamp, J.H. Conway et R.K. Guy "Winning ways for your mathematical plays" volume 2. Le chapitre 23 traite du solitaire. (1982).

∘∘ J.D. Beasley "The Ins and Out of Peg Solitaire" Oxford University Press (1985)

∘∘ Paul Busschop " Recherches sur le jeu du solitaire : oeuvre posthume", Bruges : Impr. de Daveluy , 1879

∘∘ Jeanine Cabrera & Rene Houot "Traité pratique du jeu de solitaire", Flammarion , 1977

∘∘ É. Lucas "Récréations mathématiques", tome I. Paris, Gauthier-Villars, 1882. En accès libre sur le site de la bibliothèque nationale de France :

`http://gallica.bnf.fr/`

où il suffit de rechercher "Lucas" en auteur et "Récréations" en mot du titre. Le premier tome est celui qui vous intéresse, à partir de la page 114.

∘∘ J. P. Ponte "The History of the Concept of Function and Some Educational Implications". En accès libre à l'adresse :
`http://jwilson.coe.uga.edu/DEPT/TME/issues/v03n2/ponte.html`.
`http://www.geocities.com/gibell.geo/pegsolitaire/index.html`