15/01/2013

Exposé : Nouveau critère pour la non-existence du zéro de Siegel.

I. Introduction :

Le but de cet exposé est de vous présenter une possible approche au problème du zéro de Siegel via une méthode d'analyse fonctionnelle dont l'origine remonte aux travaux de Beurling et Nyman.

I.1. Le critère de Beurling-Nyman.

Rappelons que dans sa thèse, Nyman a donné une reformulation de l'hypothèse de Riemann dans un langage d'analyse fonctionnelle. Plus précisément, soit $\{\cdot\}$ la partie fractionnaire, i.e $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$, et soit $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions de la forme

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\ell} c_j \left\{\frac{\alpha_j}{t}\right\}, \quad t > 0,$$

où $0 < \alpha_j \leq 1$, $c_j \in \mathbb{C}$ et

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{\ell} c_j \alpha_j = 0.$$

Remarquons que la condition (1) implique que f est à support dans $(0,1)$.

La fonction ζ de Riemann est définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

et il est bien connu que ζ se prolonge méromorphiquement au plan complexe tout entier avec un unique pôle en $s=1$ de résidu égal à 1. En dehors des zéros triviaux aux entiers pairs négatifs $-2n$, $n \geq 1$ (qui proviennent du facteur Γ de l'équation fonctionnelle), l'hypothèse de Riemann conjecture que tous les zéros de zêta se situent sur $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$.

<u>Théorème (Nyman, 1950) :</u> Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) ζ ne s'annule pas sur $\mathrm{Re}(s) > 1/2$

(ii) $\chi_{(0,1)} \in \overline{\mathcal{N}}^{L^2(0,1)}$, i.e $\exists f_n \in \mathcal{N}$ tq

$$\| f_n - \mathbb{1} \|_{L^2(0,1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

(iii) $\mathcal{N}$ est dense dans $L^2(0,1)$

Ce théorème a par la suite été étendu au cas L^p par Beurling qui a montré que si $1 < p < +\infty$, alors ζ ne s'annule pas sur $\mathrm{Re}(s) > 1/p$ si et seulement si $\chi_{(0,1)} \in \overline{\mathcal{N}}^{L^p(0,1)}$.

Il semble à l'heure actuelle hors de portée de montrer que $\chi_{(0,1)}$ est dans l'adhérence de $\mathcal{N}$ pour la norme $\|\cdot\|_2$ et il est donc naturel de se demander ce qu'on peut dire si on sait que $\mathrm{dist}_{L^2(0,1)}(\chi_{(0,1)}, \mathcal{N})$ est petite ....

I.2. Une version effective du critère de Beurling-Nyman.

En 1995, Nikolski a répondu à cette dernière question en donnant une région sans zéro pour zeta qui s'exprime en fonction de la distance de $\chi_{(0,1)}$ au sous-espace $\mathcal{N}$.

Précisément soit $r>0$ et soit $\tilde{K}_r$ l'espace des fonctions de la forme $f(t)=t^r \sum_{j=1}^{\ell} c_j \left\{\frac{\alpha_j}{t}\right\}$, $t>0$ où $0<\alpha_j\leq 1$, $c_j\in\mathbb{C}$ et (c_j,α_j) vérifient (1). Autrement dit,

$$\boxed{\tilde{K}_r = t^r \mathcal{N}}$$

Comme $t \longmapsto \left\{\frac{\alpha_j}{t}\right\}$ est bornée, on voit que

$$f\in L^2\left((0,1),\frac{dt}{t}\right) := \left\{ h:(0,1)\longrightarrow\mathbb{C} \text{ mesurable tq } \|h\|_2^2=\int_0^1 |h(t)|^2\frac{dt}{t}<+\infty\right\}$$

On note alors pour $\underline{\mathrm{Re}\,\lambda>0}$:

$$\tilde{d}_r(\lambda)=\mathrm{dist}(t^{\bar{\lambda}},\tilde{K}_r)=\inf_{\sum_{j=1}^{\ell} c_j\alpha_j=0}\left(\int_0^1 \left|t^{\bar{\lambda}}-t^r\sum_{j=1}^{\ell} c_j\left\{\frac{\alpha_j}{t}\right\}\right|^2\frac{dt}{t}\right)^{1/2}$$

<u>Théorème (Nikolski, 1995)</u>: ζ ne s'annule pas sur $r+D_r(\lambda)$

où $D_r(\lambda)=\left\{\mu\in\mathbb{C} : \left|\frac{\mu-\lambda}{\mu+\bar{\lambda}}\right| < \sqrt{1-2(\mathrm{Re}\,\lambda)\tilde{d}_r^2(\lambda)}\right.$

Si $\lambda=a+ib$, $a>0$ et $0\leq R\leq 1$,

l'ensemble $\left\{\mu\in\mathbb{C} : \left|\frac{\mu-\lambda}{\mu+\bar{\lambda}}\right|<R\right\}$ est :

$$\begin{cases} * \ \emptyset \quad \text{si} \quad R = 0 \\ * \ \text{le disque euclidien ouvert de centre } \Omega = \left(\frac{1+R^2}{1-R^2}a, b\right) \text{ et} \\ \qquad \text{de rayon } r = \frac{2Ra}{1-R^2} \qquad \text{si } 0<R<1 \\ * \ \text{le demi plan } \mathrm{Re}\,\mu > 0 \quad \text{si} \quad R = 1 \end{cases}$$

Remarquons que si on prend $c_j = 0$ dans le calcul de l'inf, on obtient que $\tilde{d}_r^{\,2}(\lambda) \leq \int_0^1 t^{2\mathrm{Re}\,\lambda} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2\mathrm{Re}\,\lambda}$.

D'où $\quad 1 - 2(\mathrm{Re}\,\lambda)\,\tilde{d}_r^{\,2}(\lambda) \geq 0$.

Si $\tilde{d}_r^{\,2}(\lambda) < \frac{1}{2\mathrm{Re}\,\lambda}$ alors on obtient une "vraie" région sans zéro.

D'autre part, remarquons que :

si $\tilde{d}_r(\lambda) = 0$ alors on obtient que ζ ne s'annule pas sur $\mathrm{Re}\,s > r$.

De +, pour $\lambda = r = \frac{1}{2}$, on a

$$\tilde{d}_{1/2}^{\,2}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \inf_{f \in \mathcal{P}} \left(\int_0^1 \left| t^{1/2} - t^{1/2} f(t) \right|^2 \frac{dt}{t} \right)$$

$$= \inf_{f \in \mathcal{P}} \left(\int_0^1 |1 - f(t)|^2 dt \right)$$

$$= \mathrm{dist}^2_{L^2(0,1)} (\mathbb{1}, \mathcal{P}).$$

Donc si $\mathbb{1} \in \overline{\mathcal{P}}$ alors $\tilde{d}_{1/2}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et ζ ne s'annule pas sur

$\mathrm{Re}\, s > 1/2$. Ainsi Nikolski retrouve une partie du critère de Beurling-Nyman.

Le but de cet exposé est de donner un analogue du théorème de Nikolski pour les séries L de Dirichlet et de l'appliquer au problème du zéro de Siegel.

II. Les séries L de Dirichlet:

II.1. Quelques rappels élémentaires:

Soit χ un caractère de Dirichlet modulo m. On rappelle que

$\chi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est un caractère de groupes multiplicatifs

qu'on prolonge par

$$\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$a \longmapsto \chi(a) := \begin{cases} \chi(a+m\mathbb{Z}) & , \text{ si } (a,m)=1 \\ 0 & , \text{ si } (a,m)>1 . \end{cases}$$

Le caractère <u>trivial modulo m</u> est le caractère

$$\varepsilon_m : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$a \longmapsto \varepsilon_m(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } (a,m)=1 \\ 0 & \text{si } (a,m)>1 . \end{cases}$$

A tout caractère χ modulo m, on associe la série de Dirichlet

$$L(\chi, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s} , \quad \mathrm{Re}\, s > 1 .$$

Comme $|\chi(n)| = 1$, on vérifie immédiatement que

La série converge absolument pour $\mathrm{Re}\, s > 1$.

Ainsi $s \longmapsto L(\chi, s)$ est analytique sur le demi plan $\mathrm{Re}\, s > 1$.

En fait, on a le résultat suivant:

__Lemme 1__: Soit χ un caractère de Dirichlet modulo m non trivial. Alors la série

$$\sum_n \frac{\chi(n)}{n^s}$$

converge pour $\mathrm{Re}\, s > 0$. En particulier, $s \longmapsto L(\chi, s)$ définit une fonction holomorphe sur $\mathrm{Re}\, s > 0$.

__preuve__: Grâce aux relations d'orthogonalité classique, on a

$$\sum_{n=u}^{u+m-1} \chi(n) = 0 ,$$

d'où $$\left|\sum_{n=u}^{v} \chi(n)\right| \leq \varphi(m) = \mathrm{card}\,\{a : (a, m) = 1\}$$

On utilise le résultat suivant sur les séries de Dirichlet

__Fait__: Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\left|\sum_{n=0}^{k} a_n\right| \leq M , \quad \forall k \geq 0 .$$

alors $$\sum_n \frac{a_n}{n^s}$$ converge pour $\mathrm{Re}\, s > 0$.

En effet, posons $A_{n,N} = \sum_{k=n}^{N} a_k$, $n \leq N$

et $S_{n,N} = \sum_{k=n}^{N} \frac{a_k}{k^s}$.

Par une transformation d'Abel, on a :

$$S_{n,N} = \sum_{k=n}^{N} A_{n,k}\left(k^{-s} - (k+1)^{-s}\right) + \frac{A_{n,N}}{N^s}.$$

D'où

$$|S_{n,N}| \leq 2M\left(\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^{\mathrm{Re}s}} - \frac{1}{(k+1)^{\mathrm{Re}s}}\right) + \frac{2M}{N^{\mathrm{Re}s}}$$

$$= \frac{2M}{n^{\mathrm{Re}s}} \longrightarrow 0 \quad , n \to +\infty.$$

Ceci prouve donc que $\sum_n \frac{a_n}{n^s}$ converge dès que $\mathrm{Re}s > 0$

L'holomorphie de $L(\chi, s)$ provient d'un raisonnement classique.

Si K est un compact du demi plan $\mathrm{Re}s > 0$ alors les estimations précédentes montrent que la série $\sum \frac{a_n}{n^s}$ converge uniformément sur K. Ainsi par le théorème de Weierstrass, on obtient que L est holomorphe sur $\mathrm{Re}s > 0$.

$\blacksquare$

En fait, on peut montrer que si χ n'est pas trivial alors $s \longmapsto L(\chi, s)$ se prolonge en une fonction entière. Mais dans la suite, on utilisera uniquement le lemme 1.

II.2. Notre sous espace de fonctions de $L^2((0,1), dt/t)$:

On introduit maintenant la fonction sommatoire

$$\psi(u) = \sum_{n<u} \chi(n), \quad u>0.$$

Pour chaque $A=(\alpha, c)$, $l \geq 0$, $\alpha \in [0,1]^l$, $c \in \mathbb{C}^l$,

on associe la fonction

$$f_{A,r}(t) = t^r \sum_{j=1}^{l} c_j \, \psi\left(\frac{\alpha_j}{t}\right), \quad t>0.$$

$$= t^r \sum_{j=1}^{l} c_j \sum_{n<\frac{\alpha_j}{t}} \chi(n).$$

Remarquons qu'ici, on n'impose pas la condition (1), à savoir

que $\displaystyle\sum_{j=1}^{l} c_j \alpha_j = 0$.

Ces fonctions jouent le rôle de fonctions du sous-espace $\tilde{K}_r$ qui apparaissent dans le résultat de Nikolski.

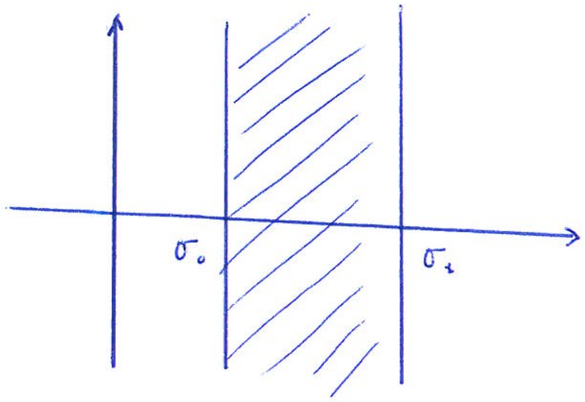
Leurs liens avec la série L de Dirichlet vient de la transformée de Mellin.

II.2.1. Transformée de Mellin.

Soit $\varphi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurable. La transformée de Mellin de φ est la fonction $\hat{\varphi}$ définie par

$$\hat{\varphi}(s) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\, t^{s-1}\, dt, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\varphi(t)|\, t^{\sigma-1}\, dt$ converge pour tout $\sigma_0 < \sigma < \sigma_1$, alors $\hat{\varphi}$ est holomorphe dans la bande $\sigma_0 < \mathrm{Re}\, s < \sigma_1$



II.2.2. Un lemme clé :

Le lien entre les fonctions $f_{A,r}$ et la série L est donné par le résultat suivant.

Lemme 2 : Pour tout $A = (\alpha, c)$ et tout $r > 0$, on a :

(a) $f_{A,r}(t) = 0 \;,\quad t > 1$

(b) $f_{A,r} \in L^2\big((0,1), dt/t\big)$

(c) $\widehat{f_{A,r}}$ est holomorphe sur $\Pi_0 = \{\mathrm{Re}\, s > 0\}$

et
$$\widehat{f_{A,r}}(s) = \frac{L(\chi, s+r)}{s+r}\, g_A(s+r) \;,\quad s \in \Pi_0$$

avec
$$g_A(z) = \sum_{j=1}^{\ell} c_j\, \alpha_j^{\,z}.$$

preuve : (a) est trivial avec la définition.

(b) Comme ψ est bornée, on a :

$$\int_0^1 |f_{A,r}(t)|^2 \frac{dt}{t} \lesssim \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-2r}} < +\infty \quad \text{si } r > 0.$$

(c) On a :

$$\int_0^{+\infty} |f_{A,r}(t)|\, t^{\sigma-1}\, dt = \int_0^1 |f_{A,r}(t)|\, t^{\sigma-1}\, dt$$

$$\lesssim \int_0^1 t^{r+\sigma-1}\, dt$$

et la dernière intégrale converge dès que $r+\sigma > 0$.

Donc en particulier $\hat{f}_{A,r}$ est holomorphe sur Π_0.

De plus, on a :

$$\hat{f}_{A,r}(s) = \int_0^{+\infty} f_{A,r}(t)\, t^{s-1}\, dt = \sum_{j=1}^{\ell} c_j \int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n<\alpha_j/t} \chi(n)\Big) t^{r+s-1}\, dt$$

Posons $t = \frac{\alpha_j}{u}$, i.e. $u = \frac{\alpha_j}{t}$.

D'où

$$\hat{f}_{A,r}(s) = \sum_{j=1}^{\ell} c_j \alpha_j \int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n<u} \chi(n)\Big) \frac{\alpha_j^{r+s-1}}{u^{r+s-1}} \frac{du}{u^2}$$

$$= \sum_{j=1}^{\ell} c_j \alpha_j^{r+s} \int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n<u} \chi(n)\Big) \frac{du}{u^{r+s+1}}.$$

$$= g_A(r+s) \int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n<u} \chi(n)\Big) \frac{du}{u^{r+s+1}}.$$

Il reste à montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n<u} \chi(n)\Big) \frac{du}{u^{r+s+1}} = \frac{L(\chi, s+r)}{s+r}.$$

Pour $\sigma := \operatorname{Re} s > 1$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n<u} |\chi(n)| \frac{du}{u^{r+\sigma+1}} \leq \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{r+\sigma}}$$

et la dernière intégrale converge car $r+\sigma > 1$.

On peut donc appliquer le théorème de Fubini qui donne

pour $\operatorname{Re} s > 1$ que :

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n<u} \chi(n) \right) \frac{du}{u^{r+s+1}} = \sum_{n\geq 1} \chi(n) \int_n^{+\infty} \frac{du}{u^{r+s+1}}$$

$$= \frac{1}{r+s} \sum_{n\geq 1} \frac{\chi(n)}{n^{r+s}}$$

$$= \frac{L(\chi, r+s)}{r+s}.$$

D'où

$$\hat{f}_{A,r}(s) = g_A(r+s) \frac{L(\chi, r+s)}{r+s}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

On conclut en utilisant le principe du prolongement analytique et le lemme ① qui implique que la dernière égalité est en fait valable sur Π_0. ∎

III. Des régions explicites sans zéros pour les séries L.

La suite de l'exposé va être de démontrer le résultat suivant.

On notera $K_r = \text{Span}_{L^2((0,1),\frac{dt}{t})} \left(f_{A,r} : A = (\alpha, c) \right)$

et pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Re}\,\lambda > 0$, on pose

$$d_r(\lambda) = \text{dist}_{L^2((0,1),\frac{dt}{t})} \left(t^{\bar{\lambda}}, K_r \right).$$

Autrement dit,

$$d_r^2(\lambda) = \inf_{l, c_j, \alpha_j} \left(\int_0^1 \left| t^{\bar{\lambda}} - t^r \sum_{j=1}^{l} c_j \sum_{n \leq \frac{\alpha_j}{t}} \chi(n) \right|^2 \frac{dt}{t} \right).$$

<u>Théorème 3</u> : Pour $r > 0$ et $\lambda \in \Pi_0$, la fonction

$s \longmapsto L(\chi, s)$ ne s'annule pas sur $r + D_r(\lambda)$,

où $$D_r(\lambda) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \left| \frac{\mu - \lambda}{\mu + \bar{\lambda}} \right| < \sqrt{1 - 2(\text{Re}\,\lambda) d_r^2(\lambda)} \right\}$$

Outre le lemme 2, l'autre élément clé de la preuve du théorème va être les espaces de Hardy qui apparaissent naturellement via la transformée de Mellin.

III.1. Espaces de Hardy.

<u>L'espace de Hardy</u> $H^2(\Pi_0)$ du demi-plan $\Pi_0 = \{ s \in \mathbb{C} : \text{Re}\, s > 0 \}$ est l'espace formé des fonctions $f : \Pi_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique et

telles que $$\|f\|_2 = \sup_{x>0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+it)|^2 dt \right)^{1/2} < +\infty.$$

Si $L^2_*\left((0,1), \frac{dt}{t}\right) = \left\{ f \in L^2\left((0,\infty), \frac{dt}{t}\right) : f(t) = 0 \text{ pp tout } t > 1 \right\}$,

alors la transformée de Mellin normalisée

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : L^2_*\left((0,1), \tfrac{dt}{t}\right) &\longrightarrow H^2(\Pi_0) \\ f &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{\varphi} \end{aligned}$$

est un opérateur unitaire (on utilise le thm de Paley Wiener et le changement de variable qui permet de passer de la transformée de Mellin à la transformée de Fourier ; cf par exemple Rudin).

Rappelons que si $h \in H^2(\Pi_0)$, alors

$$h^*(it) = \lim_{\sigma \to 0} h(\sigma + it) \text{ existe pour presque tout } t \in \mathbb{R}$$

De plus, $h^* \in L^2(i\mathbb{R})$ et $\|h\|_2 = \|h^*\|_2$.

Enfin on a : $$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\sigma+it) - h^*(it)|^2 dt \xrightarrow[\sigma \to 0]{} 0.$$

On peut donc identifier $H^2(\Pi_0)$ avec un sous espace fermé de $L^2(i\mathbb{R})$ et dans la suite le symbole h désignera aussi bien la fonction de $H^2(\Pi_0)$ que sa limite "radiale" (en d'autres termes, on oubliera l'étoile de h^* !)

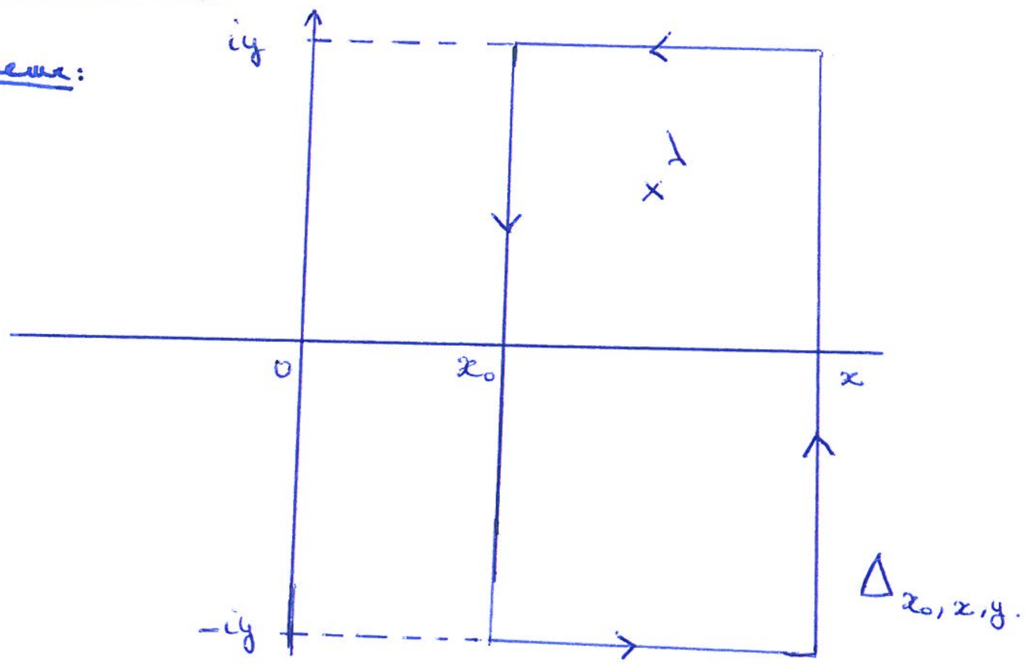
Cette identification nous permet de munir $H^2(\Pi_0)$ d'une structure d'espace de Hilbert en posant

$$\langle h, g \rangle_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} h(it)\overline{g(it)}\, dt \quad , \quad h, g \in H^2(\Pi_0).$$

Lemme 4. Pour $\lambda \in \Pi_0$, on a :

$$(2) \qquad h(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(it)}{\lambda - it}\, dt$$

preuve :



Soient x_0, x, y tel que $0 < x_0 < \operatorname{Re}\lambda < x$ et $-y < \operatorname{Im}\lambda < y$.

D'après la formule de Cauchy appliquée à h sur le rectangle $\Delta_{x_0,x,y}$, on a :

$$h(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Delta_{x_0,x,y}} \frac{h(z)}{z-\lambda}\, dz$$

D'où

$$2i\pi\, h(\lambda) = \int_{x_0}^{x} \frac{h(s-iy)}{s-iy-\lambda}\, ds + i\int_{-y}^{y} \frac{h(x+it)}{x+it-\lambda}\, dt + $$

$$- \int_{x_0}^{x} \frac{h(s+iy)}{s+iy-\lambda}\, ds - i\int_{-y}^{y} \frac{h(x_0+it)}{x_0+it-\lambda}\, dt$$

Notons $I_1(x,y) = i\displaystyle\int_{-y}^{y} \frac{h(x+it)}{x+it-\lambda}\,dt$,

et $I_2(x,x_0,y) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{h(s-iy)}{s-iy-\lambda}\,ds$.

D'où $2i\pi h(\lambda) = I_1(x,y) - I_1(x_0,y) + I_2(x,x_0,y) - I_2(x,x_0,-y)$.

Choisissons Y grand, disons $Y \geq 2|\mathrm{Im}\,\lambda|$. Nous allons calculer la moyenne de $2i\pi h(\lambda)$ sur l'intervalle $(Y, 2Y)$.

Tout d'abord notons que

$$\frac{1}{Y}\int_{Y}^{2Y} |I_2(x,x_0,\pm y)|\,dy \leq \frac{1}{Y}\int_{Y}^{2Y}\int_{x_0}^{x} \frac{|h(s\pm iy)|}{|s\pm iy-\lambda|}\,ds\,dy$$

Or pour $Y \leq y \leq 2Y$, on a:

$$|s\pm iy-\lambda| \geq |y\pm \mathrm{Im}\,\lambda| \geq Y - |\mathrm{Im}\,\lambda| \geq \frac{Y}{2}.$$

D'où

$$\frac{1}{Y}\int_{Y}^{2Y} |I_2(x,x_0,\pm y)|\,dy \leq \frac{2}{Y^2}\int_{x_0}^{x}\left(\int_{Y}^{2Y} |h(s\pm iy)|\,dy\right)ds$$

On rappelle que $h \in H^2(\Gamma_0)$, d'où

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |h(s+iy)|^2\,dy\right)^{1/2} \leq M := \|h\|_2.$$

D'où par Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\int_{Y}^{2Y} |h(s\pm iy)|\,dy \leq M\left(\int_{Y}^{2Y} 1.dy\right)^{1/2} = M\,Y^{1/2}.$$

D'où $$\frac{1}{Y}\int_{Y}^{2Y} |I_2(x, x_0, \pm y)|\, dy \leq \frac{2M}{Y^{3/2}}(x - x_0) \xrightarrow[Y \to +\infty]{} 0 .$$

On en déduit que :

$$2i\pi\, h(\lambda) = \lim_{Y \to +\infty} \left(\frac{1}{Y} \int_{Y}^{2Y} \left(I_1(x, y) - I_1(x_0, y) \right) dy \right) .$$

Or $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|h(x+it)|}{|x+it-\lambda|}\, dt < +\infty \quad \text{car } h \in H^2 .$$

D'où

$$\lim_{Y \to +\infty} \frac{1}{Y} \int_{Y}^{2Y} I_1(x, y)\, dy = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x+it)}{x+it-\lambda}\, dt$$

$$=: I_1(x, +\infty)$$

De même

$$\lim_{Y \to +\infty} \frac{1}{Y} \int_{Y}^{2Y} I_1(x_0, y)\, dy = I_1(x_0, +\infty)$$

D'où

$$2i\pi\, h(\lambda) = I_1(x, +\infty) - I_1(x_0, +\infty)$$

Faisons maintenant tendre $x \longrightarrow +\infty$.

On obtient :

$$|I_1(x,+\infty)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x+it)}{x+it-\lambda}\,dt \right|$$

$$\leq M \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{|x+it-\lambda|^2} \right)^{1/2}$$

Or $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{|x+it-\lambda|^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(x-\operatorname{Re}\lambda)^2+(t-\operatorname{Im}\lambda)^2}$$

$$= \frac{1}{(x-\operatorname{Re}\lambda)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+\left(\frac{t-\operatorname{Im}\lambda}{x-\operatorname{Re}\lambda}\right)^2}$$

$$= \frac{x-\operatorname{Re}\lambda}{(x-\operatorname{Re}\lambda)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{\pi}{x-\operatorname{Re}\lambda}$$

D'où $$|I_1(x,+\infty)| \leq \frac{M\sqrt{\pi}}{\sqrt{x-\operatorname{Re}\lambda}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Donc

$$2i\pi\, h(\lambda) = -\, I_1(x_0,+\infty) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x_0+it)}{x_0+it-\lambda}\,dt.$$

i.e

$$h(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x_0+it)}{\lambda-x_0-it}\,dt$$

On fait tendre maintenant $x_0 \underset{>}{\longrightarrow} 0$ et on utilise

que $h(x_0+it) \xrightarrow[x_0 \underset{>}{\to} 0]{} h(it)$ dans $L^2(\mathbb{R})$, ce qui donne

$$h(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(it)}{\lambda-it}\,dt.$$

On peut réécrire la formule (2) sous la forme suivante:

$$h(\lambda)=\langle h,k_\lambda\rangle_2\,,$$

où k_λ est la fonction de $H^2(\Pi_0)$ définie par

$$k_\lambda(z)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{z+\bar\lambda}\,,\qquad z\in\Pi_0.$$

Cette fonction k_λ s'appelle le noyau reproduisant de $H^2(\Pi_0)$ et on a $\|k_\lambda\|_2^2=\langle k_\lambda,k_\lambda\rangle_2=k_\lambda(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\lambda+\bar\lambda}$

i.e $\boxed{\|k_\lambda\|_2=\frac{1}{2\sqrt{\pi\,\mathrm{Re}\,\lambda}}.}$

<u>Lemme 5.</u> Soient $\mu\in\Pi_0$ et $h\in H^2(\Pi_0)$. Supposons que $h(\mu)=0$. Alors $\exists\, g\in H^2(\Pi_0)$, $\|g\|_2=\|h\|_2$ et $h(z)=\frac{z-\mu}{z+\bar\mu}\,g(z)$, $z\in\Pi_0$.

<u>preuve</u>: Posons $g(z)=(z+\bar\mu)\,\frac{h(z)}{z-\mu}=\frac{h(z)}{b_\mu(z)}$,

où $b_\mu(z)=\frac{z-\mu}{z+\bar\mu}$. Il est clair que g est analytique sur Π_0. Montrons que $g\in H^2(\Pi_0)$ et $\|g\|_2=\|h\|_2$.

La fonction b_μ est telle que :

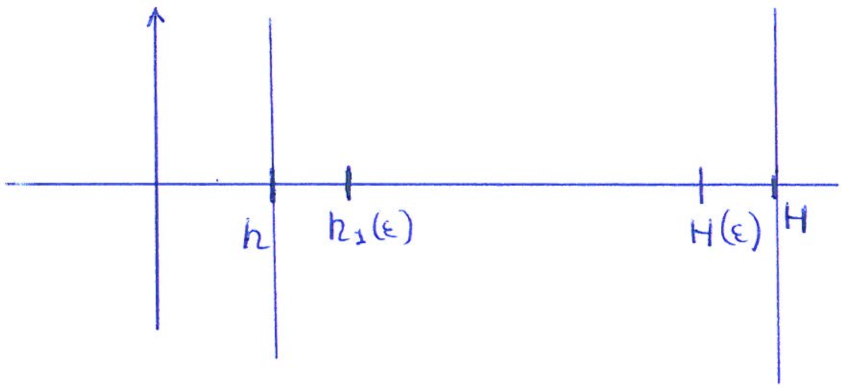
$$|b_\mu(z)| \longrightarrow 1 \quad \text{si} \quad |z| \longrightarrow +\infty$$

et $$|b_\mu(z)| \longrightarrow 1 \quad \text{si} \quad \operatorname{Re} z \longrightarrow 0.$$

Donc si $\varepsilon > 0$, il existe $h_1(\varepsilon)$ et $H(\varepsilon)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} & |b_\mu(z)| \geqslant 1 - \varepsilon \ , \quad 0 < \operatorname{Re} z \leq h_1(\varepsilon) \\ \text{et} & \\ & |b_\mu(z)| \geqslant 1 - \varepsilon \ , \quad |z| \geqslant H(\varepsilon). \end{array} \right.$$

Choisissons h tel que $0 < h \leq h_1(\varepsilon)$ et $H \geqslant H(\varepsilon)$



Alors

$$(\cdot) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |g(h+it)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|h(h+it)|^2}{|b_\mu(h+it)|^2} \, dt$$

$$\leq (1-\varepsilon)^{-2} \, \|h\|_2^2$$

$$(\cdot\cdot) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |g(H+it)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|h(H+it)|^2}{|b_\mu(H+it)|^2} \, dt$$

$$\leq (1-\varepsilon)^{-2} \, \|h\|_2^2 .$$

$(\cdot\cdot\cdot)$ Montrons maintenant que g est bornée dans la bande

$\{s : h \leq \operatorname{Re} s \leq H\}$.

Tout d'abord, g est bornée sur $\left\{ s : \begin{array}{l} h \leq \operatorname{Re} s \leq H \text{ \& } \\ |\operatorname{Im} s| \leq H \end{array} \right\}$

car continue sur un compact !

D'autre part, si $h \leq \operatorname{Re} s \leq H$ et $|\operatorname{Im} s| > H$, on a :

$$|g(s)| = \frac{|h(s)|}{|b_\mu(s)|} \leq (1-\varepsilon)^{-1} |h(s)|.$$

D'après le lemme 4, on a :

$$|h(s)| = |\langle h, k_s \rangle| \leq \|h\|_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi \operatorname{Re} s}}$$

$$\leq \frac{\|h\|_2}{\sqrt{4\pi h}}.$$

d'où

$$h \leq \operatorname{Re} s \leq H, \ |\operatorname{Im} s| > H \Longrightarrow |g(s)| \leq \frac{(1-\varepsilon)^{-1} \|h\|_2}{\sqrt{4\pi h}}.$$

On obtient finalement que g est bornée sur la bande.

Un résultat de type Phragmen-Lindelöf implique alors que pour tout $x \in [h, H]$, $g \in L^2(x + i\mathbb{R})$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+it)|^2 \, dt \leq \frac{\|h\|_2^2}{(1-\varepsilon)^2}.$$ (*) cf appendice !

En faisant tendre $h \longrightarrow 0$ et $H \longrightarrow +\infty$, on obtient que $\forall x > 0$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+it)|^2 \, dt \leq \frac{\|h\|_2^2}{(1-\varepsilon)^2}$

Donc $g \in H^2(\Pi_0)$ et $\|g\|_2 \leq \dfrac{\|h\|_2}{1-\varepsilon}$.

En faisant tendre $\varepsilon \to 0$, on obtient finalement que

$\|g\|_2 \leq \|h\|_2$.

Pour l'autre inégalité, il suffit de remarquer que

$$|b_\mu(z)| \leq 1 \quad , \forall z \in \Pi_0 .$$

D'où $|h(z)| \leq |g(z)|$, ce qui donne

$$\|h\|_2 \leq \|g\|_2 .$$

$\blacksquare$

III.2. Preuve du Théorème 3:

Rappelons que $K_r = \mathrm{span}\left(f_{A,r} : A = (\alpha, c)\right)$ et d'après le lemme 1,

$f_{A,r} \in L^2_*\left((0,1), \frac{dt}{t}\right)$ et on a:

$$\mathcal{M} f_{A,r}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{L(\chi, s+r)}{s+r} g_A(s+r) \quad , \mathrm{Re}\, s > 0 .$$

Notons $E_r = \mathcal{M} K_r \underset{\substack{\uparrow \\ \mathcal{M} \text{ unitaire de } L^2_*\left((0,1),\frac{dt}{t}\right) \text{ sur } H^2(\Pi_0)}}{=} \mathrm{Span}_{H^2(\Pi_0)}\left(h_{A,r} : A = (\alpha, c)\right)$

où $h_{A,r}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{L(\chi, s+r)}{s+r} g_A(s+r) \quad , \mathrm{Re}\, s > 0$

Supposons qu'il existe $\mu \in \Pi_0$ tel que $L(\chi, \mu + r) = 0$.

Alors $h_{A,r}(\mu) = 0 \quad , \forall A = (\alpha, c)$.

Comme $h \longmapsto h(\mu)$ est continue sur $H^2(\Pi_0)$, on a:

$$h(\mu) = 0 \qquad , \forall h \in E_r .$$

Puisque $h \in E_r \subset H^2(\Pi_0)$, d'après le lemme 5, il existe $g \in H^2(\Pi_0)$, $\|g\|_2 = \|h\|_2$ et

$$h(z) = \frac{z-\mu}{z+\bar{\mu}}\, g(z) , \qquad \operatorname{Re} z > 0.$$

Fixons maintenant $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|h(\lambda)| = \left|\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\bar{\mu}}\right| |g(\lambda)| \leq \left|\frac{\mu-\lambda}{\mu+\bar{\lambda}}\right| \cdot \|g\|_2 \, \|k_\lambda\|_2$$

$$= \left|\frac{\mu-\lambda}{\mu+\bar{\lambda}}\right| \|h\|_2 \, \|k_\lambda\|_2 ,$$

d'où $$\sup_{\substack{h \in E_r \\ \|h\|_2 = 1}} |h(\lambda)| \leq \left|\frac{\mu-\lambda}{\mu+\bar{\lambda}}\right| \|k_\lambda\|_2 .$$

Par contraposé, on obtient que $s \longmapsto L(x, s)$ ne s'annule pas sur $r + \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \left|\frac{\mu-\lambda}{\mu+\bar{\lambda}}\right| < \sup_{\substack{h \in E_r \\ \|h\|_2 = 1}} |h(\lambda)| \Big/ \|k_\lambda\|_2 \right\}$.

Il reste à montrer que :

$$(3) \qquad \boxed{\frac{\sup_{h \in E_r, \|h\|_2 = 1} |h(\lambda)|^2}{\|k_\lambda\|^2} = 1 - 2(\operatorname{Re}\lambda)\, d_r^2(\lambda)}$$

Pour montrer cette inégalité, remarquons tout d'abord que

$$\sup_{\substack{h\in E_r \\ \|h\|_2=1}} |h(\lambda)| = \sup_{\substack{h\in E_r \\ \|h\|_2=1}} |\langle h, k_\lambda \rangle_2| = \| P_{E_r} k_\lambda \|_2 ,$$

où $P_E : H^2(\Pi_0) \longrightarrow E$ est la projection orthogonale de $H^2(\Pi_0)$ sur $E \subset H^2(\Pi_0)$.

Le théorème de Pythagore implique alors que

$$\sup_{\substack{h\in E_r \\ \|h\|_2=1}} |h(\lambda)|^2 = \|k_\lambda\|_2^2 - \|P_{E_r^\perp} k_\lambda\|_2^2$$

$$= \|k_\lambda\|_2^2 - \mathrm{dist}^2(k_\lambda, E_r)$$

D'où :

$$\frac{\sup_{h\in E_r, \|h\|_2=1} |h(\lambda)|^2}{\|k_\lambda\|^2} = 1 - \frac{\mathrm{dist}^2(k_\lambda, E_r)}{\|k_\lambda\|_2^2} .$$

Rappelons alors que $\|k_\lambda\|_2^2 = (4\pi \,\mathrm{Re}\,\lambda)^{-1}$, ce qui donne

$$\frac{\sup_{h\dots} |h(\lambda)|^2}{\|k_\lambda\|_2^2} = 1 - 4\pi(\mathrm{Re}\,\lambda)\,\mathrm{dist}^2(k_\lambda, E_r).$$

Or comme $\mathcal{M}$ est une isométrie de $L^2_*\left((0,1), \frac{dt}{t}\right)$ sur $H^2(\Pi_0)$,

on a :

$$\mathrm{dist}^2(k_\lambda, E_r) = \mathrm{dist}\left(\mathcal{M}^{-1}(k_\lambda), K_r\right) , \quad K_r = \mathcal{M}^{-1}(E_r).$$

Or

$$k_\lambda(s) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{s+\bar\lambda} = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 t^{\bar\lambda+s-1}\,dt$$

i.e $$k_\lambda(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \left(t^{\bar\lambda}\chi_{(0,1)}(t)\right) t^{s-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathcal{M}\left(t^{\bar\lambda}\chi_{(0,1)}(t)\right)(s)$$

$$\Longrightarrow \left(\mathcal{M}^{-1}k_\lambda\right)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, t^{\bar\lambda}\chi_{(0,1)}(t).$$

D'où $$\mathrm{dist}^2(k_\lambda, E_r) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{dist}^2\left(t^{\bar\lambda}\chi_{(0,1)}(t), K_r\right)$$

$$= \frac{d_r^2(\lambda)}{2\pi}.$$

Donc

$$\frac{\displaystyle\sup_{\substack{h\in E_r\\ \|h\|_2=1}} |h(\lambda)|^2}{\|k_\lambda\|_2^2} = 1 - \cancel{4\pi}^{\,2}.(\mathrm{Re}\,\lambda)\,\frac{d_r^2(\lambda)}{\cancel{2\pi}}$$

$$= 1 - 2(\mathrm{Re}\,\lambda)\,d_r^2(\lambda) \qquad \blacksquare$$

IV. Applications au problème du zéro de Siegel.

IV.1. Zéro de Siegel:

Rappelons tout d'abord la notion de conducteur d'un caractère de Dirichlet. Etant donné un caractère χ modulo q, on peut en construire un disons χ_1 modulo dq pour tout $d \geq 2$, en posant

$$\chi_1(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } (n, dq) > 1 \\ \chi(n) & \text{si } (n, dq) = 1. \end{cases}$$

Autrement dit, le caractère χ_1 est associé à χ par la composition

$$(\mathbb{Z}/dq\mathbb{Z})^* \longrightarrow (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^* \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}^*$$

et la premier application est la réduction modulo q.

On dit que le caractère χ_1 est induit par χ.

Un caractère de Dirichlet χ modulo q est dit primitif s'il n'est pas induit par un caractère modulo q' où $q'|q$, q' diviseur propre de q. On dit que q est le conducteur de χ et on le note $\mathrm{cond}(\chi) = q$.

Tout caractère de Dirichlet χ est induit par un unique caractère primitif χ^*. On pose

$$\mathrm{cond}(\chi) = \mathrm{cond}(\chi^*) = q.$$

Exemples:

(a) Le caractère trivial modulo q

$$\begin{aligned} \varepsilon_q : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ a+q\mathbb{Z} &\longmapsto \varepsilon_q(a+q\mathbb{Z}) = 1 \end{aligned}$$

est induit par le caractère trivial modulo 1

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 : (\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ a+\mathbb{Z} &\longmapsto \varepsilon_1(a+\mathbb{Z}) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_q : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^* &\longrightarrow (\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^* \xrightarrow{\varepsilon_1} \mathbb{C}^* \\ a+q\mathbb{Z} &\longmapsto a+\mathbb{Z} \longmapsto 1 \end{aligned}$$

De plus ε_1 est primitif et

$$\mathrm{cond}(\varepsilon_q) = \mathrm{cond}(\varepsilon_1) = 1.$$

(b) Le caractère $\chi_4(n) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$

Alors χ_4 est primitif.

En effet, on vérifie facilement qu'il n'y a qu'un caractère modulo 2 qui est $\chi_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$

Supposons que χ_4 ne soit pas primitif. Alors il est induit par χ_2, autrement dit :

$$\chi_4(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } (n,4) > 1 \\ \chi(n) & \text{si } (n,4) = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } (n,4) > 1 \\ 1 & \text{si } (n,4) = 1 \end{cases}$$

ceci est absurde car $\chi_4(-1) = -1$ ....

Donc χ_4 est primitif et $\mathrm{cond}(\chi_4) = 4$.

<u>Définition</u>

Si χ est un caractère de Dirichlet, on dit que

χ est <u>pair</u> si $\chi(-1) = 1$

et χ est <u>impair</u> si $\chi(-1) = -1$.

Proposition : Soit χ un caractère de Dirichlet modulo q.

(1) La fonction $L(\chi, s)$ n'a pas de zéros pour $\operatorname{Re} s > 1$

(2) Si χ est primitif et pair alors $L(\chi, s)$ a des zéros simples en $s = -2k$, $k \geq 1$ entier et si χ est non trivial également en $s = 0$.

(3) Si χ est primitif et impair, alors $L(\chi, s)$ a des zéros simples en $s = -2k-1$, $k \geq 0$ entier.

(4) Si χ est non primitif, induit par le caractère primitif χ^* modulo q^*, $L(\chi, s)$ a de plus une infinité de zéros sur la droite verticale $\operatorname{Re} s = 0$ donnés par

$$s = s_p + \frac{2ik\pi}{\log p}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

où s_p vérifie $\chi(p) = p^{s_p}$, $p \mid \frac{q}{q^*}$.

(5) Pour tout χ primitif, il existe une infinité de zéros de $L(\chi, s)$ satisfaisant $s \neq 0$ et $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$.

Tous les zéros donnés par (1), (2), (3) et (4) sont appelés les zéros triviaux de $L(\chi, s)$.

"preuve": (1) provient de la représentation en produit Eulérien

$$L(\chi, s) = \prod_p \left(1 - \chi(p) p^{-s}\right)^{-1}, \text{ pour } \operatorname{Re} s > 1.$$

(2) et (3) découlent de l'équation fonctionnelle.

(4) provient de la factorisation

$$L(\chi, s) = L(\chi^*, s) \prod_{p \mid \frac{q}{q^*}} \left(1 - \chi^*(p) p^{-s}\right).$$

(5) provient du théorème de factorisation d'Hadamard pour les fonctions entières. ∎

On conjecture que les zéros non triviaux sont tous situés sur la droite $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

On a le résultat partiel suivant :

Théorème (Landau) : Il existe une constante absolue c telle que pour tout entier $q \geq 1$, il existe au plus un caractère χ modulo q telle que $L(\chi, s)$ ait un zéro $\rho = \beta + i\gamma$ dans la région :

$$(*) \qquad \operatorname{Re} s > 1 - \frac{1}{c \log(q(|t| + 2))}, \quad s = \sigma + it$$

Le caractère exceptionnel s'il existe est un caractère réel χ_e et $L(\chi_e, s)$ a un zéro unique β_e dans la région $(*)$; de plus, ce zéro est réel et simple.

Le zéro exceptionnel qui vérifie

$$\beta_e > 1 - \frac{1}{c \log(2q)}$$

est appelé le zéro de Siegel.

IV. Critère de type Beurling-Nyman

Appliquons maintenant notre critère. Rappelons qu'on a montré que $L(\chi, s)$ ne s'annule pas sur

$$r + \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \left| \frac{\mu - \lambda}{\mu + \bar{\lambda}} \right|^2 < 1 - 2(\mathrm{Re}\,\lambda)\, d_r^2(\lambda) \right\} \text{ pour tout } \lambda,$$

$\mathrm{Re}(\lambda) > 0$.

On va choisir $\frac{1}{2} \leq r < 1$ et $\lambda = 1 - r$.

On pose également $d_r^2 = d_r^2(1-r) = \inf\limits_{c_j, \alpha_j} \left(\int_0^1 \left| t^{1-r} - t^r \sum_{j=1}^{\ell} c_j \sum_{n < \frac{\alpha_j}{t}} \chi(n) \right|^2 dt/t \right)$

Alors $L(\chi, s)$ ne s'annule pas sur

$$\Omega_r := r + \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \left| \frac{\mu + r - 1}{\mu - r + 1} \right|^2 < 1 - 2(1-r) d_r^2 \right\}$$

Proposition : on a $d_r^2 < \frac{1}{2(1-r)}$

En particulier, $\Omega_r \neq \emptyset$!

preuve : soit $c \in \mathbb{C}$ et $0 < \alpha \leq 1$. Alors

$$d_r^2 \le \int_0^1 \left| t^{1-r} - c\, t^r \sum_{n<\alpha/t} \chi(n) \right|^2 \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^1 \left(t^{1-2r} + |c|^2\, t^{2r-1} \left| \sum_{n<\frac{\alpha}{t}} \chi(n) \right|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(c \sum_{n<\frac{\alpha}{t}} \chi(n) \right) \right) dt$$

$$= \frac{1}{2(1-r)} + |c|^2 \int_0^1 t^{2r-1} \left| \sum_{n<\frac{\alpha}{t}} \chi(n) \right|^2 dt$$

$$- 2\,\mathrm{Re}\left(c \int_0^1 \sum_{n<\frac{\alpha}{t}} \chi(n)\, dt \right)$$

Or :

* $$\int_0^1 t^{2r-1} \left| \sum_{n<\frac{\alpha}{t}} \chi(n) \right|^2 dt = \alpha^{2r+1} \int_1^{+\infty} \left| \sum_{n<u} \chi(n) \right|^2 \frac{du}{u^{1+2r}}.$$

et

* $$\int_0^1 \sum_{n<\frac{\alpha}{t}} \chi(n)\, dt = \alpha \int_\alpha^{+\infty} \sum_{n<u} \chi(n) \frac{du}{u^2}$$

$$= \alpha \sum_{n\geq 1} \chi(n) \int_n^{+\infty} \frac{du}{u^2}$$

$$= \alpha \sum_{n\geq 1} \frac{\chi(n)}{n} = \alpha\, L(\chi, 1).$$

D'où

$$d_r^2 \le \frac{1}{2(1-r)} - 2\alpha\, \mathrm{Re}\left(c\, L(\chi,1)\right) + |c|^2 \alpha^{2r+1} \int_1^{+\infty} \left| \sum_{n<u} \chi(n) \right|^2 \frac{du}{u^{1+2r}}$$

Or $L(\chi, 1) \neq 0$

$\Longrightarrow \exists\, c$ tq $d_r^2 < \frac{1}{2(1-r)}$ $\blacksquare$

Remarquons que $1 \in \Omega_r$:

En effet $1 \in \Omega_r \iff 1 - r \in \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \left| \dfrac{\mu + r - 1}{\mu - r + 1} \right|^2 < \dots \right\}$

et $$\left| \frac{1 - r + r - 1}{1 - r - r + 1} \right| = 0 < \sqrt{1 - 2(1-r) d_r^2} \quad !$$

Notons s_0 le centre et r_0 le rayon du disque Ω_r.

On a : $$s_0 = r + \frac{(1-r)\left(1 + 1 - 2(1-r) d_r^2\right)}{1 - \left(1 - 2(1-r) d_r^2\right)}$$

$$= r + \frac{(1-r)\left(2 - 2(1-r) d_r^2\right)}{2(1-r) d_r^2}$$

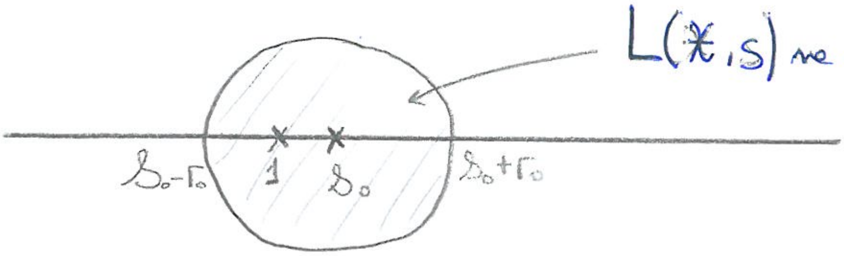
$$\boxed{s_0 = r + \frac{1 - (1-r) d_r^2}{d_r^2}}$$

et $$r_0 = \frac{\cancel{2(1-r)} \sqrt{1 - 2(1-r) d_r^2}}{\cancel{2(1-r)} d_r^2}$$

i.e $$\boxed{r_0 = \frac{\sqrt{1 - 2(1-r) d_r^2}}{d_r^2}}$$

On vérifie alors que $1 < s_0$.

$L(\chi, s)$ ne s'annule pas sur ce disque.



En effet $$s_0 - 1 = r - 1 + \frac{1 - (1-r) d_r^2}{d_r^2} = \frac{1 - 2(1-r) d_r^2}{d_r^2} > 0,$$

d'après la proposition.

Donc finalement, on obtient que

$L(\chi,\sigma)$ ne s'annule pas sur l'intervalle réel $\sigma > s_0 - r_0$.

Or
$$s_0 - r_0 = r + \frac{1-(1-r)d_r^2}{d_r^2} - \frac{\sqrt{1-2(1-r)d_r^2}}{d_r^2}$$
$$= 1 + (r-1) + \frac{1-(1-r)d_r^2}{d_r^2} - \frac{\sqrt{1-2(1-r)d_r^2}}{d_r^2}$$
$$= 1 + \frac{1-2(1-r)d_r^2 - \sqrt{1-2(1-r)d_r^2}}{d_r^2}$$
$$= 1 - \sqrt{1-2(1-r)d_r^2}\,.\,\frac{1-\sqrt{1-2(1-r)d_r^2}}{d_r^2}$$
$$= 1 - \sqrt{1-2(1-r)d_r^2}\,.\,\frac{1-(1-2(1-r)d_r^2)}{d_r^2\left(1+\sqrt{1-2(1-r)d_r^2}\right)}$$
$$= 1 - \sqrt{1-2(1-r)d_r^2}\,(1-r).\frac{2}{1+\sqrt{1-2(1-r)d_r^2}}.$$

Or $\dfrac{2}{1+\sqrt{1-2(1-r)d_r^2}} > 1$, donc on en déduit

que $L(\chi,\sigma)$ ne s'annule pas sur l'intervalle réel

$$\sigma > 1 - (1-r)\sqrt{1-2(1-r)d_r^2}.$$

<u>Corollaire</u> : Supposons qu'il existe une constante $c > 0$ / pour tout caractère χ de Dirichlet, il existe $r \in [1/2, 1]$ avec

$$(*) \quad d_r^2 < \frac{1}{2(1-r)} - \frac{c}{(\log(2\operatorname{cond}(\chi)))^2 (1-r)^3}.$$

Alors le zéro de Siegel n'existe pas.

<u>preuve</u> : Notons $q = \operatorname{cond}(\chi)$.

$$(*) \Longrightarrow \quad 2(1-r)d_r^2 < 1 - \frac{c}{(\log(2q))^2 (1-r)^2}.$$

$$\Longrightarrow (1-r)\sqrt{1 - 2(1-r)d_r^2} > \frac{c}{\log(2q)}$$

Les calculs précédents le corollaire impliquent que $L(\chi, \sigma)$ ne s'annule pas sur

$$\sigma > 1 - \frac{c}{\log(2q)}$$

et donc le zéro de Siegel n'existe pas. $\blacksquare$

Appendice :

Lemme (Hardy, Ingham, Polya, 1929) :

Soit $B = \{\alpha < \mathrm{Re}\, s < \beta\}$ une bande verticale et soit f une fonction continue sur $\overline{B}$, holomorphe et bornée sur B.

Supposons que pour $x = \alpha$ et $x = \beta$, l'intégrale

$$J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2 dy \quad \text{converge.}$$

Alors :

a) $J(x)$ converge pour tout $x \in (\alpha, \beta)$

b) $J(x) \leq \max(J(\alpha), J(\beta))$

Nous allons voir que ce lemme se déduit aisément du théorème des trois droites d'Hadamard.

preuve : Fixons $a > 0$ et $\varphi \in L^2(-a, a)$. On définit alors

$$\Theta(z) = \int_{-a}^{a} \varphi(t) f(z+it)\, dt \quad , \quad z \in B.$$

Il est clair que Θ est holomorphe et bornée sur B.

D'autre part :

$$|\Theta(\alpha+iy)| \leq \int_{-a}^{a} |\varphi(t)|\, |f(\alpha+i(t+y))|\, dt$$

D'où avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\Theta(\alpha+iy)| \leq \|\varphi\|_2 \left(\int_{-a}^{a} |f(\alpha+i(t+y))|^2 dt \right)^{1/2}$$

$$\leq \|\varphi\|_2 \left(J(\alpha)\right)^{1/2}.$$

De même, on a : $|\Theta(\beta+iy)| \leq \|\varphi\|_2 \left(J(\beta)\right)^{1/2}$.

Le théorème des trois droites d'Hadamard implique alors que

$$|\Theta(z)| \leq \|\varphi\|_2 \max\left((J(\alpha))^{1/2}, (J(\beta))^{1/2} \right), \quad \forall z \in B.$$

i.e $$\left| \int_{-a}^{a} \varphi(t)\, f(z+it)\, dt \right| \leq \|\varphi\|_2 \max\left((J(\alpha))^{1/2}, (J(\beta))^{1/2} \right).$$

Appliquons cette inégalité à $\varphi(t) = \overline{f(z+it)}$.

Alors $$\int_{-a}^{a} |f(z+it)|^2 dt \leq \left(\int_{-a}^{a} |f(z+it)|^2 dt \right)^{1/2} \max\left((J(\alpha))^{1/2}, (J(\beta))^{1/2} \right)$$

i.e $$\int_{-a}^{a} |f(z+it)|^2 dt \leq \max\left(J(\alpha), J(\beta) \right).$$

Ceci étant vraie pour tout $a > 0$, il reste à faire tendre $a \to +\infty$ pour obtenir le résultat. $\blacksquare$