GRANDES VALEURS DES POLYNÔMES DE DIRICHLET

Olivier Ramaré

I. Présentation de la chose.

Nous regardons des sommes de la forme

$$f(t) = \sum_{N<n\le 2N} a_n n^{it}$$

que nous appelons un polynôme de Dirichlet. Il faut noter dès à présent qu'il s'agit d'une somme sur un intervalle bien particulier. Les résultats que nous présenterons s'étendent mutatis mutandis au cas d'un intervalle $]N, cN]$ où c est une constante.

Nous nous donnons un ensemble $\mathcal{R} \subset [0, T]$ qui vérifie $|t-t'| \geq 1$ si $t, t' \in \mathcal{R}$, $t \neq t'$ (un ensemble "bien espacé") et nous supposons que $|f(t)| \geq V$ sur cet ensemble. La question qui nous concerne est de majorer $|\mathcal{R}| = R$. Une mesure de la taille est donnée par

$$G = G(f) = \sum_n |a_n|^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt.$$

Nous avons $|f(t)|^2 \leq NG$ et notre quotient de base est GN/V^2, ce qui fait que nous posons $V = (GN)^{\frac{1}{2}} N^{-1+\alpha}$. Remarquons dès à présent que $GN/V^2 = N^{2(1-\alpha)}$. La conjecture de densité forte dit :

(Conjecture de densité forte) $\qquad R \ll_\varepsilon N^{2(1-\alpha)+\varepsilon} \qquad (\forall \varepsilon > 0)$

alors que la conjecture de densité dit :

(Conjecture de densité) $\qquad R \ll_\varepsilon (N+T)^{2(1-\alpha)+\varepsilon} \qquad (\forall \varepsilon > 0).$

Ces conjectures sont impliquées par d'autres conjectures plus fortes et plausibles, essentiellement dues à Montgomery. Le cas qui nous intéresse est lorsque $N \leq T$ est une puissance de T. De même seule les puissances de T et de N nous intéressent, ce qui fait que nous n'hésiterons pas à introduire des termes T^ε. Histoire de fixer les esprits, dans le cas des estimées de densité, α et T sont ceux du $\mathrm{N}(\alpha, T)$ et la longueur N est comprise entre $T^{1/4+\varepsilon}$ et $T^{1/2+\varepsilon}$.

Comme nous verrons que nous savons traiter le cas N proche de T de façon optimale, nous utiliserons beaucoup

$$f^k(t) = \sum_{N^k<n\le 2^k N^k} \left(\sum_{n_1 n_2 \dots n_k = n} a_{n_1} a_{n_2} \dots a_{n_k} \right) n^{it}$$

qui vérifie
$$G(f^k) \ll_\varepsilon N^\varepsilon G(f)^k$$
et qui nous permet de remplacer N par N^k (ok, ce n'est plus un intervalle diadique: la remarque ci-dessus trouve ici sa raison).

Pour ce qui est des notations, les lettres R, V, G, T et α ont traditionnellement les sens ci-dessus et dépendent fortement du contexte. Elles permettent des énoncés (relativement) concis. En cours de route, nos énoncés auront la forme

$$R \ll T^\varepsilon \sum_i N^{u_i} R^{v_i} T^{w_i} \tag{$\dagger$}$$

dont il faudra tirer une borne pour R. Cette inégalité est impliquée (et à constante près équivalente à) par le système $(R \ll T^\varepsilon N^{u_i} R^{v_i} T^{w_i})_i$. Les v_i appartiennent à $[0,1]$. Si $v_i < 1$, l'inéquation se résoud facilement et il suffit alors de faire la somme des inégalités obtenues de cette façon. Les inégalités avec $v_i = 1$ fournissent les conditions dans lesquelles nous n'avons pas de résultats : il s'agit des négations des conditions d'application. Par exemple $RV^2 \ll_\varepsilon T^\varepsilon G(N + RT^{1/2})$ donne $R \ll_\varepsilon T^\varepsilon GN/V^2$ valable pour $V \gg_\varepsilon T^\varepsilon G^{1/2}T^{1/4}$.

II. Comparaison à une intégrale.

Le premier résultat consiste à comparer notre somme à une intégrale, ce qui se fait à l'aide du lemme de Gallagher:

Lemme (Gallagher 1967).

$$|f(0)|^2 \leq \delta^{-1} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \big(|f(v)|^2 + |f(v)f'(v)|\big) dv$$

Preuve. Nous partons de

$$|g(0)| \leq \int_{-1/2}^{1/2} \big(|g(u)| + \tfrac{1}{2}|g'(u)|\big) du$$

et considérons $g(u) = f^2(u\delta)$. $\diamond\diamond$

Une utilisation directe donne

Lemme 1 (Orthogonalité — Davenport).

$$\sum_{t\in\mathcal{R}} \Bigg| \sum_{N<n\leq 2N} a_n n^{it} \Bigg|^2 \ll \sum_n |a_n|^2 (N+T).$$

Montgomery en 1969 attribue ce lemme sous une forme légèrement moins forte à une communication orale de Davenport, qui le déduisait aussi du lemme de Gallagher. Le lemme 1 est optimal si $N \gg T$.

Grandes Valeurs :

(1) Direct : $R \ll N^{\varepsilon}(GN/V^2)(1+T/N)$
(2) Conjecture de densité forte : ok si $N \gg T$.

III. Introduction des majorants de Halász.

Comme le lecteur l'aura compris, tout repose sur la quasi-orthogonalité supposée des suites $(n^{it})_n$ tout comme les inégalités de grand crible reposent sur la quasi-orthogonalité des $(e(nx))_n$.

Il existe essentiellement trois preuves de l'inégalité du grand crible sous une forme plus ou moins affaiblie. Nous venons d'utiliser la comparaison à une intégrale. La seconde façon consiste à utiliser une inégalité de "quasi-orthogonalité" (la méthode de Selberg et celle d'Elliott avec des disques de Gershgöring se ramène à ce cas) et est celle que nous allons appliquer. Signalons que la troisième méthode (dûe à Montgomery et Vaughan) qui passe par une inégalité de Hilbert n'a pas vraiment d'équivalent dans le cadre des polynômes de Dirichlet.

Commençons par les deux inégalités de quasi-orthogonalité:

Lemme PS1 (Selberg).

$$\sum_i \frac{|\langle f|\varphi_i\rangle|^2}{\sum_j |\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle|} \leq \|f\|^2.$$

Preuve. Utiliser $\|f - \sum_i \xi_i \varphi_i\|^2 \geq 0$. $\diamond\diamond$

Ce lemme précise un lemme de Bombieri. Dans le cadre des inégalités de grand crible, ce lemme a le même effet avec les mêmes calculs que l'utilisation des disques de Gershgöring.

Lemme PS2 (Halász).

$$\left(\sum_i |\langle f|\varphi_i\rangle|\right)^2 \leq \|f\|^2 \sum_{i,j} |\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle|.$$

Preuve. Utiliser $\sum_i |\langle f|\varphi_i\rangle| = \sum_i c_i \langle f|\varphi_i\rangle$. where $c_i = \mathrm{sgn}\langle f|\varphi_i\rangle$. $\diamond\diamond$

L'utilisation de ces lemmes appelle deux techniques : *la subdivision* de l'ensemble $\mathcal{R}$ et un lissage. Pour justifier rapidement la subdivision (dûe à Huxley), il suffit de remarquer que ces inégalités sont de types Cauchy-Schwarz. Nous séparons donc $\mathcal{R}$ en plus petits paquets $\mathcal{R}_k$ où les points t vérifient $kT_0 \leq t < (k+1)T_0$ où T_0 est à choisir optimalement. En pratique cela revient à multiplier la borne obtenue par $1 + T/T_0$ (il vaut mieux ajouter 1 au cas où le T_0 optimal serait $> T$). Ceci ne peut donc avoir d'effet que si la borne obtenue n'est pas linéaire en T. Il faut se souvenir que cet argument permet de diminuer T.

Passons à la fonction de *lissage*, disons Ω, qui est une fonction positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $]N, 2N]$. Nous écrivons alors

$$\langle f|\varphi_i\rangle = \sum_n a_n \Omega(n)^{-1/2} \cdot \Omega(n)^{1/2} n^{it}$$

avec des notations évidentes. Huxley appelle “majorant de Halász” une fonction Ω vérifiant les hypothèses ci-dessus auxquelles on ajoute $\min_{n\in]N,2N]}\Omega(n)\gg 1$.

Pour construire une telle fonction, nous procédons de façon standard. Soit ω une fonction $C^2(\mathbb{R})$ dont le support est dans $[\frac{1}{2},3]$ et u un nombre réel. Nous avons

$$\omega(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\check{\omega}(s)x^{-s}ds \quad , \quad \check{\omega}(s)=\int_0^\infty \omega(x)x^{s-1}dx$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\sum_n \omega(n/N)n^{iu} &= \frac{1}{2i\pi}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\check{\omega}(s)\zeta(s-iu)N^s ds\\ &= \check{\omega}(1+iu)N^{1+iu}+\frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\check{\omega}(s)\zeta(s-iu)N^{s-iu}ds\end{aligned}$$

où $0\le\sigma<1$. En combinant cela à PS1 (et au fait qu’une double intégration par parties nous donne $|\check{\omega}(1+iu)|\ll(1+|u|)^{-2}$), nous obtenons
(†)

$$\sum_{t\in\mathcal{R}}\Bigl|\sum_{N<n\le 2N}a_n n^{it}\Bigr|^2 \ll \sum_n |a_n|^2\left(N+N^\sigma\max_{t'\in\mathcal{R}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{t\in\mathcal{R}}|\zeta(\sigma+i(t-t'+x))|\frac{dx}{1+x^2}\right).$$

En utilisant l’exposant de Lindelöf de ζ, cela donne:

Lemme 2 (Quasi-orthogonalité — Montgomery 1969).

$$\sum_{t\in\mathcal{R}}\Bigl|\sum_{N<n\le 2N}a_n n^{it}\Bigr|^2 \ll \sum_n |a_n|^2(N+N^\sigma R T^{\mu(\sigma)+\varepsilon}),$$

où $0\le\sigma<1$.

Le résultat initial de Montgomery correspond au choix $\sigma=0$.

Grandes Valeurs (avec $\sigma=0$) :

(1) Direct : $R\ll N^\varepsilon(GN/V^2)$ si $V\gg G^{1/2}T^{1/4}$.
(2) Conjecture de densité forte : ok si $N\gg T$.
(3) Ce lemme montre que l’hypothèse de Lindelöf implique l’hypothèse de densité pour $\alpha>\frac{3}{4}$.

À l’aide de l’argument de subdivision et du résultat précédent avec $\sigma=0$, nous obtenons:

Lemme 3 (Quasi-orthogonalité + Dissection — Huxley 1973).

$$R\ll\frac{GN}{V^2}+\left(\frac{GN}{V^2}\right)^3\frac{T}{N^2}\operatorname{Log}^4(2T)$$

si $V\gg G^{1/2}\operatorname{Log}(2T)$ *(i.e.* $\alpha\ge\frac{1}{2}$*).*

Les preuves précédentes n’utilisent pas la sommation sur $\mathcal{R}$ qui apparaît dans (†). Il nous faut d’abord passer par une digression.

IV. Passage à une somme finie. Méthode de reflexion.

Au lieu de (†) nous avons aussi

(†′)

$$\sum_{t\in\mathcal{R}}\Big|\sum_{N<n\le 2N} a_n n^{it}\Big|^2 \ll \sum_n |a_n|^2\ N^\sigma \max_{t'\in\mathcal{R}} \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{t\in\mathcal{R}} |\zeta_{3N}(\sigma+i(t-t'+x))|\frac{dx}{1+x^2},$$

où

$$\zeta_L(s)=\sum_{\ell\le L}\ell^{-s}.$$

La méthode de réflexion de Huxley revue par Jutila est autrement plus efficace et repose sur un choix spécial de lissage (déjà utilisé par Montgomery en 1969)

$$\omega_0(x)=\exp(-(x/2)^\beta)-\exp(-x^\beta) \qquad (\beta\ge 1)$$

où β va être pris très grand (et variable). Nous avons

$$\breve{\omega}_0(s)=(2^s-1)\int_0^\infty \exp(-x^\beta)x^{s-1}dx=(2^s-1)\frac{1}{\beta}\Gamma\Big(\frac{s}{\beta}\Big)=\frac{2^s-1}{s}\Gamma\Big(1+\frac{s}{\beta}\Big).$$

Nous avons alors le merveilleux lemme suivant:

Lemme R (Réflexion — Huxley 1973). *Pour* $u\ge 1$, *et* $2\pi NM\ge u+4\beta^2$, *nous avons*

$$\sum_n \omega_0(n/N)n^{iu}\ll \frac{N}{u}+2^{-\beta}u^{1/2}+N^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi|x|}{4\beta}}|\zeta_M(\tfrac12+i(u+x))|dx.$$

Ce lemme transforme N en T/N, et la conjonction de (†) et du lemme précédent avec $\beta=5\operatorname{Log}T$ donne

(‡)

$$\Big(\sum_{t\in\mathcal{R}}\Big|\sum_{N<n\le 2N} a_n n^{it}\Big|\Big)^2 \ll \sum_n |a_n|^2\Big(RN\operatorname{Log}(T)+R^2T^{-1}$$
$$+N^{1/2}\int_{-T}^{T}\sum_{t,t'\in\mathcal{R}}|\zeta_{\min(3N,T/N)}(\tfrac12+i(t-t'+x))|\frac{dx}{1+x^2}\Big)$$

V. Une idée de Jutila.

Nous pourrions utiliser la sommation sur $\mathcal{R}$ à l'aide du lemme suivant :

Lemme M4 (Moment d'ordre 4 — Littlewood 1910 ??).

$$\sum_{t\in\mathcal{R}}|\zeta(\tfrac12+it)|^4\ll T\operatorname{Log}^8(2T) \qquad et \qquad \sum_{t\in\mathcal{R}}|\zeta_L(\tfrac12+it)|^2\ll L+(RT)^{1/2}\operatorname{Log}^4(2T).$$

Une utilisation directe à partir de (†) avec $\sigma=\frac12$ donne

$$\sum_{t\in\mathcal{R}}\Big|\sum_{N<n\le 2N} a_n n^{it}\Big|^2 \ll \sum_n |a_n|^2\big(N+(N^2R^3T)^{1/4}\big)\operatorname{Log}^8(2T).$$

Qui s'avère extrêment décevant en ce qui concerne les grandes valeurs, puisque ce lemme n'implique que

$$R \ll \left(\frac{GN}{V^2} + \left(\frac{GN}{V^2}\right)^4 \frac{T}{N^2}\right) \operatorname{Log}^{16}(2T),$$

borne qui est plus faible que celle de Huxley.

Lemme J (— Jutila 1975). *Soit $(a_n)_n$ et $(x_{m,n})$ des cuites de complexes. Nous avons*

$$\sum_{r,s} \left|\sum_n a_n x_{r,n}\overline{x_{s,n}}\right|^2 \leq \max_n |a_n|^2 \quad \sum_{r,s}\left|\sum_n x_{r,n}\overline{x_{s,n}}\right|^2.$$

Preuve. Le membre de gauche est égal à

$$\sum_{n,m} a_n \overline{a_m} \left|\sum_r x_{r,m}\overline{x_{r,n}}\right|^2.$$

$\diamond\diamond$

Lemme Jbis (— Jutila 1975). *Soit $(a_n)_n$ des complexes majorés en module par A et $(t_r)_r$ des nombres réels. Nous avons*

$$\sum_{r,s}\left|\sum_{n\leq N} a_n n^{\frac{-1}{2}+i(t_r-t_s)}\right|^2 \leq A^2 \sum_{r,s}\left|\sum_{n\leq N} n^{\frac{-1}{2}+i(t_r-t_s)}\right|^2.$$

Lemme Mm$2k$ (Moment moyen d'ordre $2k$ — Jutila 1975). *Pour tout entier $k \geq 1$, nous avons pour $x \in [-T,T]$*

$$\sum_{t,t'\in\mathcal{R}} |\zeta_L(\tfrac12 + i(t-t'+x))|^{2k} \ll_{\varepsilon,k} (LT)^\varepsilon R(L^k + (RT)^{1/2}).$$

À l'aide du lemme de Halász PS2 et en utilisant un moyen similaire à celui qui donne ($\dagger'$), nous obtenons

$$\begin{aligned}\left(\sum_{t\in\mathcal{R}}\left|\sum_{N<n\leq 2N} a_n n^{it}\right|\right)^2 &\ll_{\varepsilon,k} (NT)^\varepsilon \sum_n |a_n|^2 N^{1/2} R^{2-\frac1k}\Big(R(N^k+(RT)^{1/2})\Big)^{\frac{1}{2k}} \\ &\ll_{\varepsilon,k} (NT)^\varepsilon \sum_n |a_n|^2 R^2\Big(R^{\frac{-1}{2k}}N + N^{1/2}R^{\frac{-1}{4k}}T^{\frac{1}{4k}}\Big)\end{aligned}$$

d'où

$$R \ll_{\varepsilon,k} (NT)^\varepsilon\left(\left(\frac{GN}{V^2}\right)^{2k} + \left(\frac{GN}{V^2}\right)^{4k}\frac{T}{N^{2k}}\right)$$

ce qui est simplement pire que notre borne précédente appliquée à f^k et qui est donc légèrement inférieure à la borne de Huxley.

Par contre, en utilisant la réflexion (‡), nous obtenons une amélioration :

$$\left(\sum_{t\in\mathcal{R}}\left|\sum_{N<n\leq 2N} a_n n^{it}\right|\right)^2 \ll \sum_n |a_n|^2 \Bigg(RN\operatorname{Log}(T) + R^2T^{-1} \\ + N^{1/2}R^{2(1-\frac{1}{2k})}\left(\sum_{t,t'\in\mathcal{R}} |\zeta_{\min(T/N)}(\tfrac12 + i(t-t'))|^{2k}\right)^{1/(2k)}\Bigg)$$

ce qui donne

$$R^2V^2 \ll T^\varepsilon G\left(RN + R^2T^{-1} + N^{1/2}R^{2(1-\frac{1}{2k})}\left(R(\frac{T^k}{N^k} + (RT)^{1/2})\right)^{1/(2k)}\right)$$

soit encore

$$R^2V^2T^{-\varepsilon}/G \ll RN + R^2T^{-1} + R^{2-\frac{1}{2k}}T^{1/2} + N^{1/2}R^{2-\frac{1}{4k}}T^{1/(4k)}.$$

En “résolvant”, cela implique

$$R \ll T^\varepsilon\left(\frac{NG}{V^2} + \left(\frac{NG}{V^2}\right)^{2k}\frac{T^k}{N^{2k}} + \left(\frac{NG}{V^2}\right)^{4k}\frac{T}{N^{2k}}\right).$$

Nous pouvons encore utiliser la dissection sur cette borne (et donc diminuer T, ce qui rendra T/N encore plus petit). Cela donne

$$R \ll T^\varepsilon\left(\frac{NG}{V^2} + \left(\frac{NG}{V^2}\right)^{3-(1/k)}\frac{T}{N^2} + \left(\frac{NG}{V^2}\right)^{4k}\frac{T}{N^{2k}}\right).$$

Cette borne améliore la borne de Huxley si $\alpha \geq \frac{3k-2}{4k-3}$ et cette dernière quantité est strictement supérieure à $\frac34$.

VI. Vers un théorème de densité.

Il s'agit de déduire un théorème de densité pour la fonction ζ de Riemann à partir d'un théorème qui borne le nombre de grandes valeurs prises par un polynôme de Dirichlet. Cette approche a été mise en place par Halász et Montgomery aux alentours de 1970.

Lemme. *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une constante entière K ayant la propriété suivante. Pour tout $T \geq 1$ et tout $\alpha \in]\frac12 + 2\varepsilon, 1[$, il existe $\mathcal{O}_\varepsilon(\operatorname{Log} T)$ polynômes $\sum_{L_i<\ell\leq 2L_i} c_{\ell,i}(u)\ell^{it}$ (où u parcourt $[1,T]$) tels que $|c_{\ell,i}(u)| \leq d_K(\ell)$, $T^{(\frac12+\varepsilon)/2} \leq L_i < T^{\frac12+\varepsilon}$ et*

$$\mathrm{N}(\alpha,T) \ll_\varepsilon \sum_i L_i^{-\alpha+\varepsilon}\int_1^T \sum_{\substack{|\gamma|\leq T,\\ \beta\geq\alpha}}\left|\sum_{L_i<\ell\leq 2L_i} c_{\ell,i}(u)\ell^{i\gamma}\right|\frac{du}{u}$$

Ce lemme est un analogue du lemme 1.1 de [Forti & Viola, 1973], à ceci près que seule les ordonnées des zéros apparaissent. En utilisant la preuve du lemme 11 de [Jutila & Huxley, 1977], on pourrait adapter le résultat de Forti & Viola pour ressembler au nôtre. La localisation dans le résultat de Forti & Viola est (à T^ε près) entre T^ν et $T^{\frac{1}{2}+\nu}$. Le raisonnement du paragraphe 8 de [Huxley, 1973] permet une localisation entre X et Y avec $2 \leq X \leq Y \leq T^2$, mais ajoute une condition ((8.10) du papier considéré) : il faut aussi considérer les zéros tels que

$$\max_{|\gamma-t|\leq c_1} \left|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)\sum_{m\leq X}\frac{\mu(m)}{m^{\frac{1}{2}+it}}\right| \geq c_2 Y^{\alpha-1/2}.$$

Il ne semble pas qu'une méthode soit meilleure qu'une autre.

Preuve. Il existe (d'après [Iwaniec, Topics in Analytic Number Theory, II, chapter 15]) $\mathcal{O}(\operatorname{Log} T)$ inégalités du style

$$\int_1^T \left|\sum_{L<\ell\leq 2L} C_\ell(u)\ell^{-\frac{1}{2}-i\gamma}\right| \frac{du}{u} \gg L^{(\alpha-\frac{1}{2})(1-\varepsilon)}/\operatorname{Log} T \qquad \big(T^\varepsilon \leq L \leq T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, |C_\ell(u)| \leq d(\ell)\big)$$

telles que tout zéro $\rho = \beta + i\gamma$ de ζ vérifie l'une d'elles. Il nous suffit alors de prendre un système bien espacé de zéros. Avançons un peu. Si L vérifie

$$Z^{1/(\nu+1)} \leq L < Z^{1/\nu} \quad \text{où} \quad Z = T^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad \text{et} \quad \nu \in \mathbb{N}$$

alors $L^\nu \geq Z^{1/2}$ et l'on a encore

$$\int_1^T \left|\sum_{L^\nu<\ell\leq 2^\nu L^\nu} C'_\ell(u)\ell^{-\frac{1}{2}-i\gamma}\right| \frac{du}{u} \gg L^{\nu(\alpha-\frac{1}{2})(1-\varepsilon)}/\operatorname{Log}^\nu T$$
$$\big(T^\varepsilon \leq L \leq T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, |C'_\ell(u)| \leq d_{\nu+2}(\ell)\big)$$

tant et si bien que nous pouvons nous restreindre au cas où $T^{(\frac{1}{2}+\varepsilon)/2} \leq L < T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ (qu'il faudra de toute façon considérer). ⋄⋄

Bien sûr, nous pouvons restreindre la somme sur les zéros ρ à un sous-ensemble bien espacés. Ce lemme a plusieurs conséquences. Tout d'abord, les majorations de de la cardinalité de l'ensemble où f prend de "grandes valeurs" passe toujours par une majoration de $\sum_{\mathcal{R}} |f(t)|$ (même lorsque l'on passe par la norme L^2, car en utilisant Cauchy $R^2V^2 \leq R\sum_{\mathcal{R}} |f(t)|^2$; la majoration de R que cela donne pour R est identique), et donc moyennant ce credo, les résultats sur les grandes valeurs sont directement utilisables. En particulier si l'on sait démontrer la conjecture de densité pour N entre $T^{1/2+\varepsilon}$ et $T^{1+\varepsilon}$ pour tout $\alpha \geq \alpha_0$, alors $\mathrm{N}(\alpha, T) \ll T^{2(1-\alpha)+\varepsilon}$ pour ces mêmes α.

Une application :

Donnons nous $X \in [T^{1/2+\varepsilon}, T]$. Classons les L_i de notre lemme selon $X^{1/n} < L_i \leq X^{1/(n-1)}$, avec $n \in \{2, 3, 4\}$. Si $n \neq 2$, nous élevons notre somme à la puissance n et $L_i^n \leq X^{3/2}$. Si $n = 2$, nous élevons encore notre somme à la puissance n, mais nous avons ici $L_i^2 \leq T^{1+2\varepsilon}$. Bref notre somme est localisée entre X et $X^{3/2} + T^{1+2\varepsilon}$. En utilisant le résultat de Huxley sous la forme

$$R \ll_\varepsilon T^\varepsilon \left(\frac{GN}{V^2} + \frac{GN}{V^2} \min\left(1, \left(\frac{GN}{V^2}\right)^2\right) \frac{T}{N^2} \right)$$

et en prenant $X = T^{1/(2-\alpha)}$ si $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{3}{4}$ et $X = T^{1/(3\alpha-1)}$ si $\frac{3}{4} \leq \alpha \leq 1$, nous obtenons

$$\mathrm{N}(\alpha, T) \ll T^{c(\alpha)(1-\alpha)+\varepsilon} \qquad c(\alpha) = \frac{3}{2-\alpha}.$$

References

M. Forti & C. Viola, *Density estimates for zeros of L-functions*, Acta Arith. **23** (1973), 379–391.

M. N. Huxley, *Large values of Dirichlet polynomials*, Acta Arith. **24** (1973), 329–346.

M. N. Huxley, *Large values of Dirichlet polynomials, II*, Acta Arith. **27** (1975), 159–170.

M. N. Huxley, *Large values of Dirichlet polynomials, III*, Acta Arith. **26** (1975), 435–444.

M. N. Huxley & M. Jutila, *Large values of Dirichlet polynomials, IV*, Acta Arith. **32** (1977), 297–312.

H. L. Montgomery, *Mean and Large Values of Dirichlet Polynomials*, Inv. Math. **8** (1969), 334–345.

H. L. Montgomery, Lecture Notes in Mathematics **227** (1971).