Sommes sur nombres premiers

Il est essentiel de savoir comment manipuler des sommes du style $\sum_p g(p)$ pour des fonctions $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ bornées en module. D'une certaine façon, nous pouvons même dire que toute l'étude des nombres premiers se résume à celle de telles sommes. Nous établissons ici une identité qui permet d'une part de donner une majoration de la somme en question si g est positive ou nulle, et cela constitue la base du *crible* de Brun de 1916 dont nous donnerons un aperçu au chapitre, et d'autre part, de traiter le cas de sommes oscillantes, comme lorsque $g(p) = \exp(ip)$ par exemple. L'idée revient ici à Vinogradov en 1937, la présentation très simplifiée ci-dessous étant elle due à l'auteur.

Théorème 8.1 *Nous nous donnons deux paramètres réels z et P tels que $4 \le z^2 \le P$. Soit $r(n)$ le nombre de facteurs premiers de l'entier n qui sont dans l'intervalle $]z, \sqrt{P}]$ et $Q = \prod_{p \le z} p$. Nous définissons ensuite $\rho(n) = 1/(1 + r(n))$ si n est premier à Q et 0 sinon. Alors*

$$\sum_{P/4 < p \le P} g(p) = \sum_{\substack{P/4 < \ell \le P \\ \mathrm{pgcd}(\ell, Q) = 1}} g(\ell) - \sum_{\substack{z < p \le \sqrt{P} \\ \frac{P}{4p} < d \le \frac{P}{p}}} \sum \rho(d) g(dp) + R$$

avec $|R| \le 3P/(2z)$ si $|g(n)| \le 1$ pour tout n.

Les terminologies ont évoluées et il existe plusieurs méthodes combinatoires qui permettent d'atteindre de telles identités. Le point commun est d'avoir une première somme que l'on sait étudier (ce que lecteur découvrira aux prochains chapitres !) et une seconde somme qui porte sur deux variables. Vinogradov parlait initialement de sommes de type I et de sommes de type II ; la terminologie plus moderne tend à parler de partie linéaire, ce qui anticipe sur le traitement que nous lui donnerons, ou de partie criblée et appelle partie bilinéaire l'autre terme. Notons finalement que la variable d reste première à Q puisque $\rho(d)$ s'annule sinon.

Preuve. Nous détectons les nombres premiers parmi les entiers ℓ qui sont premiers à Q en enlevant à cette suite ceux qui admettent un facteur premier p dans $]z, \sqrt{P}]$, i.e. qui s'écrivent $\ell = dp$. Mais il faut aussi diviser par le nombre de telles écritures, soit $r(dp)$. Cela nous donne

$$\sum_{P/4 < p \le P} g(p) = \sum_{\substack{P/4 < \ell \le P \\ \mathrm{pgcd}(\ell, Q) = 1}} g(\ell) - \sum_{z < p \le \sqrt{P}} \sum_{\substack{P/(4p) < d \le P/p \\ \mathrm{pgcd}(d, Q) = 1}} \frac{g(dp)}{r(dp)}.$$

Comme $r(dp) = r(d) + 1$ dès que d n'est pas divisible par p, nous pouvons remplacer $r(dp)$ par $r(d) + 1$ pourvu que nous corrigions la formule pour les dp de la forme tp^2. Cela nous donne précisément la formule annoncée avec

$$R = \sum_{z<p\leq\sqrt{P}} \sum_{\frac{P}{4p^2}<t\leq\frac{P}{p^2}} \frac{\rho(tp^2)g(tp^2)}{r(tp^2)}. \tag{8.1}$$

Il nous suffit de majorer ce terme qui doit être regardé comme un terme d'erreur. Pour cela nous étendons la sommation sur p à tous les entiers, la simplifions en majorant $|g(tp^2)/r(tp^2)|$ par 1 et $|\rho(tp^2)|$ par $1/2$, puis concluons en comparant la somme résultante à une intégrale :

$$|R| \leq \frac{3P}{4} \sum_{z<p\leq\sqrt{P}} \frac{1}{p^2} \leq \frac{3P}{2z}. \tag{8.2}$$

◇ ◇ ◇

