Notes sur un article de Vaughan de 1946

Bruno Martin

16 mai 2011

Résumé

Soit A_n le plus grand coefficient en valeur absolue du polynôme cyclotomique d'ordre n. Vaughan [9] montre qu'il existe une infinité d'entiers n tels que

$$A_n > \exp\left(n^{\frac{\log 2}{\log_2 n}}\right).$$

Dans cette note, nous détaillons les calculs de [9].

1 Introduction

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Φ_n le n-ième polynôme cyclotomique soit

$$\Phi_n(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ (k,n)=1}} \big(X - e(k/n)\big)$$

Le polynôme Φ_n est unitaire de degré $\varphi(n)$ et l'on pose

$$\Phi_n(X) = \sum_{m=0}^{\varphi(n)} a(m,n) X^m.$$

Rappelons que Φ_n est à coefficients entiers et que l'on dispose de la formule

$$\Phi_n(X) = \prod_{d \mid n} (X^d - 1)^{\mu(n/d)},$$

qui se déduit *via* la formule d'inversion de Möbius de l'identité

$$X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d(X).$$

On peut constater numériquement que pour $n < 105$, les coefficients de Φ_n ne prennent que les valeurs 0, 1 ou -1. On note dans la suite

$$A_n = \max_{1 \leqslant m \leqslant \varphi(m)} |a(m, n)|.$$

Lehmer [5] fournit en 1937 une démonstration due à Schur du fait que A_n peut prendre des valeurs arbitrairement grandes. La démonstration étant élémentaire et courte, nous la reproduisons en annexe.

Proposition 1 (Schur) *On a*

$$\limsup_{n \to \infty} A_n = +\infty.$$

Erdős établit dans [2] qu'il existe $c_1 > 0$ et une infinité d'entiers n pour lesquels

$$A_n > \exp\Big(c_1 (\log n)^{4/3}\Big).$$

Il conjecture qu'il existe $c_2 > 0$ tel que pour une infinité d'entiers n

$$A_n > \exp\left(n^{\frac{c_2}{\log_2 n}}\right). \tag{1}$$

Il prouve lui-même cette conjecture de deux manières différentes ([3], [4]). Par ailleurs Erdős conjecture dans [2] que (1) est essentiellement optimale, autrement dit qu'il existe $c_3 > 0$ telle que pour tout entier n,

$$A_n < \exp\left(n^{\frac{c_3}{\log_2 n}}\right).$$

Cette dernière estimation est obtenue très simplement par Bateman [1]. Là encore nous restituons la preuve de ce résultat en annexe.

Proposition 2 (Bateman) *Pour tout $\varepsilon > 0$, $n \geqslant n_0(\varepsilon)$,*

$$A_n < \exp\left(n^{(1+\varepsilon)\frac{\log 2}{\log_2 n}}\right). \tag{2}$$

La constante $\log 2$ figurant dans (2) est en fait optimale, c'est ce qu'établit Vaughan [9].

Théorème 1 (Vaughan) *Il existe une infinité d'entiers n tels que*

$$A_n > \exp\left(n^{\frac{\log 2}{\log_2 n}}\right). \tag{3}$$

En particulier un ordre maximal* pour $\log_2 A_n$ est $\frac{\log 2 \log n}{\log_2 n}$.

Remarque 1 *En fait, Vaughan établit (à peu de prix) un résultat plus fort, à savoir qu'il existe une infinité d'entiers n tels que*

$$\max_m a(m,n) > \exp\left(n^{\frac{\log 2}{\log_2 n}}\right).$$

L'objectif de cette note est de fournir les détails de la preuve du théorème 1.

2 Démonstration du théorème 1

Dans tout ce qui suit, on désigne par $\tau(k)$ le nombre diviseurs de l'entier k.

La famille d'entiers n satisfaisant à (3) est construite de la manière suivante. On note χ le symbole de Legendre modulo 5. Pour y assez grand, on pose

$$n = n(y) = \prod_{\substack{p \leqslant y \\ \chi(p)=-1}}^{*} p \tag{4}$$

où l'étoile * signifie que l'on rajoute ou non le facteur 2, de manière à ce que le nombre de facteurs premiers de n soit toujours impair, et donc $\mu(n) = -1$.

Il sera utile de disposer d'une estimation relativement précise du nombre de facteurs premiers de tels entiers n.

Lemme 1 *On a pour $n \geqslant 10$, de la forme (4),*

$$\omega(n) = \sum_{\substack{p \leqslant y \\ \chi(p)=-1}} 1 + O(1) = \frac{\log n}{\log_2 n}\Big(1 + \frac{1-\log 2}{\log_2 n} + O\Big(\frac{1}{(\log_2 n)^2}\Big)\Big).$$

Démonstration On a

$$\begin{aligned}\log n &= \sum_{\substack{p \leqslant y \\ \chi(p)=-1}} \log p + O(1) \\ &= \sum_{\substack{p \leqslant y \\ p \equiv 1 \text{ ou } 4 \bmod 5}} \log p\end{aligned}$$

*. cf chapitre I.5 de [8] par exemple pour la définition d'un ordre maximal.

D'après le théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques, pour $(a,5)=1$,

$$\pi(t,a;5)=\frac{\mathrm{li}(t)}{\pi(5)}+R(t),$$

avec

$$\mathrm{li}(t)=\int_2^t\frac{du}{\log u},$$

et

$$R(t)=O\Big(\frac{t}{(\log t)^3}\Big)\quad(t\geqslant 2).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\log n&=\frac{1}{2}\int_2^y\log t\,d\mathrm{li}(t)+O\Big(\int_2^y\log t\,dR(t)\Big)\\&=\frac{1}{2}y\Big(1+O\Big(\frac{1}{(\log y)^2}\Big)\Big),\end{aligned}$$

d'où

$$\log_2 n=\log y-\log 2+O\Big(\frac{1}{(\log y)^2}\Big)$$

À présent, on a toujours d'après le théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p\leqslant y\\ \chi(p)=-1}}1&=\sum_{\substack{p\leqslant y\\ p\equiv 1\text{ ou }4\bmod 5}}1\\&=\frac{1}{2}\frac{y}{\log y}+O\Big(\frac{y}{(\log y)^3}\Big).\end{aligned}$$

D'après ce qui précède (sans oublier $y\sim\log n$ quand $n,y\to\infty$),

$$\begin{aligned}\frac{y}{\log y}&=\frac{2\log n\Big(1+O(1/(\log_2 n)^2)\Big)}{\log_2 n\Big(1+\log 2/\log_2 n+O\Big(1/\log_2 n)^3\Big)\Big)}\\&=\frac{2\log n}{\log_2 n}\Big(1-\frac{\log 2}{\log n}+O\Big(\frac{1}{(\log_2 n)^2}\Big)\Big),\end{aligned}$$

de sorte que l'on obtient bien la conclusion souhaitée. $\square$

En quelques mots, la preuve du théorème 1 consiste à fournir une minoration de $\sup_{|z|\leqslant 1}|\Phi_n(z)|$, puis à appliquer la majoration triviale

$$\sup_{|z|\leqslant 1}|\Phi_n(z)| \leqslant (\varphi(n)+1)A_n.$$

Il est donc utile de disposer d'une représentation de $|\Phi_n(z)|$. Dans la suite, on pose

$$c_m = c_m(n) = \frac{1}{m}\sum_{r|(m,n)} r\mu(r),$$

où n est un entier de la forme (4). Nous donnons dans le lemme suivant les principales propriétés de c_m dont nous aurons l'usage.

Lemme 2 *On suppose que n est entier de la forme* (4)*.*

i) On a pour tout $m \geqslant 1$,

$$|c_m| < 1.$$

ii) La fonction $m \mapsto c_m$ est multiplicative.

iii) On a pour $m \in \mathbb{N}^*$,

$$c_{5m} = \frac{1}{5}c_m.$$

iv) Lorsque p est premier, $\nu \in \mathbb{N}^*$,

$$c_{p^\nu} = \begin{cases} \frac{1-p}{p^\nu} & \textit{si } p \mid n \\ \frac{1}{p^\nu} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration

i) Cela résulte de ii) et iv).

ii) C'est facile. : écrire que tout diviseur de (mm', n) avec $(m, m') = 1$ est de la forme uv avec $(u, v) = 1$, $u \mid m$, $v \mid m'$.

iii) Remarquons que 5 ne divise pas n. Par conséquent,

$$c_{5m} = \frac{1}{5m}\sum_{d|(5m,n)} d\mu(d) = \frac{1}{5m}\sum_{d|(m,n)} d\mu(d) = \frac{1}{5}c_m.$$

iv) C'est un calcul élémentaire.

$\square$

Lemme 3 *Pour $|z|<1$, $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mu(n)=-1$, on a*

$$|\Phi_n(z)| = \exp\Big(\Re\sum_{m=1}^{\infty} c_m z^m\Big),$$

Démonstration Maintenant et dans la suite, log désigne la détermination principale du logarithme. On a pour $|z|<1$,

$$\begin{aligned}
|\Phi_n(z)| &= \Big|\prod_{d|n}(z^d-1)^{\mu(n/d)}\Big| \\
&= \Big|\prod_{d|n}(1-z^d)^{\mu(n/d)}\Big| \quad (\text{car } \sum_{d|n}\mu(n/d)=0) \\
&= \prod_{d|n}\Big|(1-z^d)^{\mu(n/d)}\Big| \\
&= \exp\Big(\sum_{d|n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\log\Big|1-z^d\Big|\Big) \\
&= \exp\Big(\Re\sum_{d|n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\log(1-z^d)\Big) \quad (\text{car pour } z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-,\ \log|z|=\Re\log z) \\
&= \exp\Big(-\Re\sum_{d|n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\sum_{k\geqslant 1}\frac{z^{kd}}{k}\Big) \quad (\text{car } |\text{z}|<1).
\end{aligned}$$

On peut réarranger les termes de la double somme (c'est aisé à justifier) :

$$\begin{aligned}
&\sum_{d|n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\sum_{k\geqslant 1}\frac{z^{kd}}{k} \\
&\qquad = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{d|n}\sum_{kd=m}\mu(n/d)\frac{z^{kd}}{k} \\
&\qquad = \sum_{m=1}^{\infty} z^m \sum_{d|n,d|m}\mu(n/d)\sum_{k=m/d}\frac{d}{m} \\
&\qquad = \mu(n)\sum_{m=1}^{\infty} z^m \sum_{d|n,d|m}\mu(d)\sum_{k=m/d}\frac{d}{m} \quad (\text{car pour } n \text{ de la forme (4), } \mu(n/d)=\mu(d)\mu(n)) \\
&\qquad = -\sum_{m=1}^{\infty} c_m z^m \quad (\text{car } \mu(n)=-1).
\end{aligned}$$

$\square$

En posant $z = e(a)e^{-1/x}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $x > 0$ nous avons

$$|\Phi_n(z)| = \exp\Big(\Re \sum_{m=1}^{\infty} c_m e(am) e^{-m/x}\Big). \tag{5}$$

Dans la suite, on choisit $a = 1/5$, et nous minorons

$$\sup_{x \geqslant 1} F(x)$$

avec

$$F(x) = F(x, n) = \Re \sum_{m=1}^{\infty} c_m e\Big(\frac{m}{5}\Big) e^{-m/x} \quad (x > 0).$$

Lemme 4 *On a pour $x > 0$, n de la forme* (4),

$$|F(x)| \leqslant x.$$

Démonstration D'après le lemme 2, on a

$$|F(x)| \leqslant \Big| \sum_{m=1}^{\infty} c_m e\Big(\frac{m}{5}\Big) e^{-m/x} \Big| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m/x} = \frac{1}{e^{1/x} - 1} \leqslant x,$$

où la dernière majoration résulte de l'inégalité de convexité $e^u - 1 \geqslant u \quad (u \in \mathbb{R})$. □

La stratégie de Vaughan consiste alors à considérer

$$M_F(\sigma) := \int_0^{\infty} F(x) \frac{dx}{x^{\sigma+1}} \quad (\sigma > 0).$$

Proposition 3 *On a*

$$\sup_{x \geqslant 1} F(x) \geqslant \limsup_{\sigma \to 0} \sigma M_F(\sigma).$$

Démonstration Notant $K = \sup_{x \geqslant 1} F(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} M_F(\sigma) &\leqslant \int_0^1 \frac{dx}{x^{\sigma}} + K \int_0^1 \frac{dx}{x^{\sigma+1}} \quad \text{(d'après le lemme 4)} \\ &= \frac{1}{1-\sigma} + \frac{K}{\sigma}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$K \geqslant \sigma M_F(\sigma) - \frac{\sigma}{1-\sigma},$$

ce qui fournit le résultat espéré. □

On pourra alors compléter la preuve après avoir démontré la proposition suivante.

Proposition 4 *Pour n de la forme* (4), *on a*

$$\lim_{\sigma\to 0} \sigma M_F(\sigma) = \frac{\sqrt{5}}{4} L(1,\chi)\tau(n),$$

où $s \mapsto L(s,\chi)$ désigne la série de Dirichlet associée à χ.

Preuve du théorème 1

D'après les propositions 3 et 4, on a pour n de la forme (4)

$$\sup_{x\geqslant 1} F(x) \geqslant \frac{\sqrt{5}}{4} L(1,\chi)\tau(n),$$

et donc, comme

$$A_n(\varphi(n)+1) \geqslant \sup_{|z|\leqslant 1} |\Phi_n(z)| \geqslant \sup_{x\geqslant 1} \Big|\Phi_n\Big(e(1/5)e^{-1/x}\Big)\Big|$$

on obtient

$$A_n \geqslant \frac{1}{\varphi(n)+1} \sup_{x\geqslant 1} \exp\big(F(x)\big) \geqslant \exp\Big(\frac{\sqrt{5}}{4} L(1,\chi)\tau(n) - \log(\varphi(n)+1)\Big).$$

Or, comme n est sans facteur carré, $\tau(n) = 2^{\omega(n)}$, et d'après le lemme 1, on obtient en posant $B = \frac{\sqrt{5}}{4} L(1,\chi)$,

$$\begin{aligned} A_n &\geqslant \exp\left(B\exp\Big(\log 2\frac{\log n}{\log_2 n}\Big(1 + \frac{1-\log 2}{\log_2 n} + O\Big(\frac{1}{(\log_2 n)^2}\Big)\Big)\Big) - \log(\varphi(n)+1)\right) \\ &= \exp\left(\exp\Big(\log 2\frac{\log n}{\log_2 n} + \frac{1-\log 2}{(\log_2 n)^2} + O\Big(\frac{1}{(\log_2 n)^3}\Big)\Big)\right), \end{aligned}$$

l'égalité résultant du fait que $\varphi(n) \leqslant n$. Comme $1 - \log 2 > 0$, on obtient pour n assez grand,

$$A_n > \exp\left(\exp\Big(\log 2\frac{\log n}{\log_2 n}\Big)\right),$$

ce qui est exactement le résultat souhaité.

La suite de cette section est dévolue à la preuve de la proposition 4.

Lemme 5 *Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\Re e\Big(\frac{m}{5}\Big) = \frac{1}{4}\Big(4[m \mid 5] - [m \nmid 5] + \sqrt{5}\chi(m)\Big),$$

où l'on a utilisé la notation d'Iverson : $[P]$ vaut 1 ou 0 suivant que la propriété P est satisfaite ou non.

Démonstration On a

$$\begin{aligned}
&\Re e\Big(\frac{m}{5}\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(e\Big(\frac{m}{5}\Big) + e\Big(-\frac{m}{5}\Big)\Big)\\
&= \frac{1}{4}\Big(\sum_{k=1}^{4} e\Big(\frac{km}{5}\Big) + \sum_{k=1}^{4} \chi(k) e\Big(\frac{km}{5}\Big)\Big) \quad \text{(car les carrés inversibles modulo 5 sont 1 et 4.)}
\end{aligned}$$

Or d'une part, d'après la classique relation d'orthogonalité, on a

$$\sum_{k=0}^{4} e\Big(\frac{km}{5}\Big) = \begin{cases} 5 & \text{si } m \mid 5 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et par conséquent

$$\sum_{k=1}^{4} e\Big(\frac{km}{5}\Big) = \begin{cases} 4 & \text{si } m \mid 5 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'autre part, comme χ est primitif, on a

$$\sum_{k=1}^{4} \chi(k) e\Big(\frac{km}{5}\Big) = \tau(\chi)\chi(m),$$

où $\tau(\chi) = \sum_{k=1}^{4} \chi(r) e\Big(\frac{k}{5}\Big)$. On a $\tau(\chi) = \sqrt{5}$ (calcul élémentaire ou bien theorem 9.17 de [6]). On obtient bien le résultat souhaité. $\square$

Lemme 6 *Pour $x > 0$, on a*

$$F(x) = \frac{1}{4}\Big(\sum_{m=1}^{\infty} c_m \Big(e^{-5m/x} - e^{-m/x}\Big) + \sqrt{5} \sum_{m=1}^{\infty} c_m \chi(m) e^{-m/x}\Big).$$

Démonstration On a

$$\begin{aligned}
F(x) &= \Re \sum_{m=1}^{\infty} c_m e\Big(\frac{m}{5}\Big) e^{-m/x} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} c_m \Re e\Big(\frac{m}{5}\Big) e^{-m/x} \quad \text{(par convergence absolue et continuité de } \Re \text{)} \\
&= \frac{1}{4}\Big(4 \sum_{5|m} c_m e^{-m/x} - \sum_{5\nmid m} c_m e^{-m/x} + \sqrt{5} \sum_{m=1}^{\infty} c_m \chi(m) e^{-m/x}\Big) \quad \text{(d'après le lemme 5).}
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
4 \sum_{5|m} c_m e^{-m/x} - \sum_{5\nmid m} c_m e^{-m/x} &= 5 \sum_{m=1}^{\infty} c_{5m} e^{-5m/x} - \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-m/x} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-5m/x} - \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-m/x}, \quad \text{(d'après le lemme 2)}
\end{aligned}$$

ce qui achève le calcul. □

Lemme 7 *Pour $\sigma > 0$, on a*

$$\sum_{m=1} \frac{\chi(m) c_m}{m^{\sigma}} = L(1+\sigma, \chi) \prod_{p|n} (1 + p^{-\sigma}), \tag{6}$$

et

$$\sum_{m=1} \frac{c_m}{m^{\sigma}} = \zeta(1+\sigma) \prod_{p|n} (1 - p^{-\sigma}).$$

Démonstration Démontrons la première de ces égalités, la deuxième pouvant s'obtenir par des calculs similaires. Rappelons que d'après le lemme 2, la fonction $m \mapsto c_m$ est multiplicative et par conséquent la fonction $m \mapsto \chi(m) c_m m^{-\sigma}$ l'est aussi. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{p} \sum_{\nu \geqslant 1} \Big| \frac{\chi(p^{\nu}) c_{p^{\nu}}}{p^{\sigma\nu}} \Big| &= \sum_{p|n} \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{1-p}{p^{\nu(\sigma+1)}} + \sum_{p\nmid n} \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{1}{p^{\nu(\sigma+1)}} \\
&\leqslant C(n) + \sum_{p} \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{1}{p^{\nu(\sigma+1)}} < \infty.
\end{aligned}$$

Par conséquent la série de Dirichlet figurant en (6) est absolument convergente pour $\sigma > 0$ et

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1} \frac{\chi(m)c_m}{m^\sigma} &= \prod_p \sum_{\nu\geqslant 0} \frac{c_{p^\nu}\chi(p^\nu)}{p^\nu\sigma} \\
&= \prod_{p|n} \Big(1+\sum_{\nu\geqslant 1} \frac{(1-p)\chi(p^\nu)}{p^{\nu(\sigma+1)}}\Big) \prod_{p\nmid n} \sum_{\nu\geqslant 0} \frac{\chi(p^\nu)}{p^{\nu(\sigma+1)}} \\
&= \prod_{p|n} \Big(1+\frac{1-p}{p^{\sigma+1}}\Big(1-\frac{\chi(p)}{p^{\sigma+1}}\Big)^{-1}\Big) \prod_{p\nmid n} \Big(1-\frac{\chi(p)}{p^{\sigma+1}}\Big)^{-1} \\
&= L(1+\sigma,\chi) \prod_{p|n} \Big(1-\frac{\chi(p)}{p^{\sigma+1}}+\frac{\chi(p)}{p^{\sigma+1}}(1-p)\Big).
\end{aligned}$$

Comme $\chi(p) = -1$ lorsque $p \mid n$, cela donne le résultat escompté. $\square$

Lemme 8 *On a pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$,*

$$\int_0^\infty e^{-m/x} \frac{dx}{x^{\sigma+1}} = \frac{\Gamma(\sigma)}{m^\sigma} \quad (\sigma > 0).$$

Démonstration Il suffit d'effectuer le changement de variables $u = m/x$ dans la formule classique

$$\Gamma(\sigma) = \int_0^\infty e^{-u} u^{\sigma-1} du \quad (\sigma > 0).$$

$\square$

Lemme 9 *Pour $\sigma > 0$, on a*

$$M_F(\sigma) = \frac{\Gamma(\sigma)}{4}\Big(\sqrt{5}L(1+\sigma,\chi)\prod_{p|n}(1+p^{-\sigma}) - (1-5^{-\sigma})\zeta(1+\sigma)\prod_{p|n}(1-p^{-\sigma})\Big).$$

Démonstration Pour $\sigma > 0$, on a (l'interversion est aisée à justifier, je ne donne pas les détails)

$$\begin{aligned}
&M_F(\sigma)\\
&= \frac{1}{4}\int_0^\infty \left(\sum_{m=1}^\infty c_m\Big(e^{-5m/x}-e^{-m/x}\Big)+\sqrt{5}\sum_{m=1}^\infty c_m\chi(m)e^{-m/x}\right)\frac{dx}{x^{\sigma+1}} \quad \text{(d'après le lemme 6)}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{m=1}^\infty c_m\int_0^\infty \big(e^{-5m/x}-e^{-m/x}\big)\frac{dx}{x^{\sigma+1}}+\sqrt{5}\sum_{m=1}^\infty c_m\chi(m)\int_0^\infty e^{-m/x}\frac{dx}{x^{\sigma+1}}\\
&= \frac{\Gamma(\sigma)}{4}\Big((5^{-\sigma}-1)\sum_{m=1}^\infty \frac{c_m}{m^\sigma}+\sqrt{5}\sum_{m=1}^\infty \frac{c_m\chi(m)}{m^\sigma}\Big) \quad \text{(d'après le lemme 8)}\\
&= \frac{\Gamma(\sigma)}{4}\left(\sqrt{5}L(1+\sigma,\chi)\prod_{p|n}(1+p^{-\sigma})-(1-5^{-\sigma})\zeta(1+\sigma)\prod_{p|n}(1-p^{-\sigma})\right),
\end{aligned}$$

la dernière égalité résultant du lemme 7. □

Preuve de la proposition 4.

On emploie le lemme 9 : sachant que $\lim_{\sigma\to 0}\sigma\Gamma(\sigma)=1$ (Γ a un pôle simple en 0 de résidu 1), que la fonction $\sigma\mapsto(1-5^{-\sigma})\zeta(1+\sigma)$ est bornée au voisinage de 0, et que

$$\lim_{\sigma\to 0}\prod_{p|n}(1+p^{-\sigma})=2^{\omega(n)}=\tau(n), \qquad \lim_{\sigma\to 0}\prod_{p|n}(1-p^{-\sigma})=0,$$

on obtient bien la limite souhaitée.

Annexe

Preuve de la proposition 1

Soit $t\in\mathbb{N}$, $t\geqslant 2$ et impair. Notons tout d'abord qu'il existe une suite de nombre premiers $p_1<p_2<\ldots<p_t$ telle que $p_1+p_2>p_t$. En effet, supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas. Dans ce cas, pour tout entier naturel k, l'intervalle $[2^{k-1},2^k[$ contient au plus $t-1$ nombres premiers (dans le cas contraire, on aurait $2^{k-1}\leqslant p_1<p_2<\ldots<p_t<2^k\leqslant 2p_1<p_1+p_2$). Par conséquent, on aurait $\pi(2^k)<kt$ pour tout k, ce qui irait à l'encontre de la minoration du nombre de nombres premiers de Tchebycheff. À présent considérons $n=p_1p_2\ldots p_t$ et la réduction de Φ_n modulo X^{p_t+1} de manière à

pouvoir déterminer le coefficient d'ordre p_t :

$$
\begin{aligned}
\Phi_n(X) &= \prod_{d|n} (X^d - 1)^{\mu(n/d)} \\
&\equiv \frac{\prod_{i=1}^t (X^{p_i} - 1)}{X - 1} \bmod X^{p_t+1} \quad \text{(car } t \text{ est impair et } p_1p_2 > p_t\text{)} \\
&\equiv \frac{\prod_{i=1}^t (1 - X^{p_i})}{1 - X} \bmod X^{p_t+1} \quad \text{(car } t \text{ est impair)} \\
&\equiv (1 + X + X^2 + \ldots + X^{p_t})(1 - X^{p_1} - X^{p_2} - \ldots - X^{p_t}) \bmod X^{p_t+1} \quad \text{(car } p_1 + p_2 > p_t\text{).}
\end{aligned}
$$

On constate que le coefficient d'ordre p_t de Φ_n vaut $1 - t$, ce qui achève la preuve.

Remarque 2 *Cette preuve peut être adaptée pour montrer que tout entier relatif est coefficient d'au moins un polynôme cyclotomique (cf [7]). En revanche il ne semble pas connu que A_n puisse prendre toutes les valeurs entières positives.*

Preuve de la proposition 2

Dans cette démonstration, on dit qu'une série entière formelle $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ majore $\sum_{n \geqslant 0} b_n x^n$ si $a_n - b_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 0$. Considérons l'identité

$$\Phi_n(x) = \prod_{p|n} (1 - x^d)^{\mu(n/d)}.$$

Suivant que $\mu(n/d)$ vale 0, 1 ou -1, le facteur $(1 - x^d)^{\mu(n/d)}$ est toujours majoré par $1 + x^d + x^{2d} + \ldots$. Comme $\Phi_n(x)$ est un polynôme de degré $\varphi(n)$ et donc de degré strictement inférieur à n, on obtient (là c'est un peu bancal) que $\Phi_n(x)$ est majoré par

$$F_n(x) = \prod_{d|n} \left(1 + x^d + x^{2d} + \ldots + x^{(n/d-1)d}\right).$$

Par conséquent, on a A_n n'excède pas la somme des coefficients de $F_n(x)$ c'est-à-dire $F_n(1)$. Ainsi,

$$A_n \leqslant F_n(1) = \prod_{d|n} \frac{d}{n} = \prod d \mid nd = n^{\tau(n)/2}.$$

Or, on connaît l'ordre maximal de $\tau(n)$ ou plus rigoureusement de $\log \tau(n)$ (cf par exemple [6] theorem 2.11) : pour $n \geqslant 3$, on a

$$\tau(n) \leqslant \exp\left(\frac{\log n}{\log_2 n}\left(\log 2 + O\Big(\frac{1}{\log_2 n}\Big)\right)\right).$$

Donc pour $\varepsilon > 0$, $n \geqslant n_0(\varepsilon)$,

$$\tau(n) \leqslant \exp\Big(\frac{\log n}{\log_2 n}(1+\varepsilon/2)\log 2\Big),$$

et par suite,

$$\begin{aligned} A_n &\leqslant \exp\Big(\frac{1}{2}\tau(n)\log n\Big) \\ &\leqslant \exp\left(\exp\Big(\frac{\log n}{\log_2 n}(1+\varepsilon)\log 2\Big)\right) \quad (n \geqslant n_1(\varepsilon)). \end{aligned} \qquad \square$$

Références

[1] P. T. Bateman – « Note on the coefficients of the cyclotomic polynomial », *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), p. 1180–1181.

[2] P. Erdös – « On the coefficients of the cyclotomic polynomial », *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946), p. 179–184.

[3] — , « On the coefficients of the cyclotomic polynomial », *Portugaliae Math.* **8** (1949), p. 63–71.

[4] — , « On the growth of the cyclotomic polynomial in the interval $(0,1)$ », *Proc. Glasgow Math. Assoc.* **3** (1957), p. 102–104.

[5] E. Lehmer – « On the order of magnitude of the coefficients of the cyclotomic polynomial », *Bull. Amer. Math. Soc.* **42** (1936), p. 389–392.

[6] H. L. Montgomery & R. C. Vaughan – *Multiplicative number theory. I. Classical theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 97, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[7] J. Suzuki – « On coefficients of cyclotomic polynomials », *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **63** (1987), no. 7, p. 279–280.

[8] G. Tenenbaum – *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, second éd., Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 1, Société Mathématique de France, Paris, 1995.

[9] R. C. Vaughan – « Bounds for the coefficients of cyclotomic polynomials », *Michigan Math. J.* **21** (1974), p. 289–295 (1975).