Moyenne de fonctions arithmétiques

—

Une introduction agrémentée d'exercices et d'applications au crible

—

Cours donnés à l'université de Nouakchott

—

Nouakchott

25 Novembre / 6 Décembre 2012

—

Olivier Ramaré

22 décembre 2012

Introduction

Ce cours portera surtout sur les valeurs moyennes de fonctions arithmétiques et se poursuivra par une introduction au crible de Montgomery et des applications.

Les fonctions arithmétiques sont très souvent mal connues, et possèdent un comportement qui semble irrégulier et sans cohérence. Regardons par exemple la fonction

$$f_0(n) = \prod_{p|n} (p-2).$$

Si la suite de ses valeurs semble très erratique, régularité apparaît lorsque l'on considère $(1/X)\sum_{n\le X} f_0(n)$. Nous allons en effet démontrer que

Théorème *Soit X un réel positif. Nous avons*

$$(1/X) \sum_{n\le X} f_0(n) = \mathscr{C} X + \mathcal{O}(X^{3/4})$$

où la constante $\mathscr{C}$ est donnée par

$$\mathscr{C} = \tfrac{1}{2} \prod_{p\ge 2} \left(1 - \frac{3}{p(p+1)}\right) = 0.14630\cdots$$

Remarquons que dans cet énoncé et de façon systématique dans la suite, la lettre p désigne un nombre premier.

L'ordre moyen a pour effet de dissimuler certaines valeurs aberrantes prises par la fonction considérée.

Nous continuerons ce cours par des applications au crible et nous établirons par exemple le théorème de Brun-Titchmarsh (sous une forme légèrement plus faible) :

Théorème *Pour M et N deux entiers ≥ 1, le nombre de nombres premiers dans l'intervalle $[M+1, M+N]$ est au plus $2N/\log N$.*

D'autres applications concerneront les nombres premiers jumeaux, la conjecture de Goldbach et bien d'autres problèmes concernant les nombres premiers.

Le lecteur pourra consulter les livres (Apostol, 1976) ou (Ellison, 1975). Les livres (Bombieri, 1987/1974a) et (Halberstam & Richert, 1974) sont deux autres références incontournables. D'autres très bons livres : (Vinogradov, 1954), (Davenport, 2000), (Montgomery & Vaughan, 2006) et (Bordellès, 2012).

Un calendrier :

Dimanche 25/11 – 10h00/14h00 Introduction, bestiaire, produit de convolution et multiplicativité.

(a) Introduction : régularité en moyenne. Fonctions multiplicatives. Bestiaire.
(b) Multiplicativité de la fonction de diviseurs. Convolution de fonctions multiplicatives.
(c) Fonction ζ de Riemann, abscisse de convergence absolue, unicité des coefficients de Dirichlet.

Lundi 26/11 – 9h/13h30
(a) Séries de Dirichlet : produit de convolution et multiplicativité.
(b) Sommer des fonctions lisses
(c) Le principe de l'hyperbole de Dirichlet
(d) Valeur moyenne de $\mu^2(n)$. Valeur moyenne du pgcd.

Mardi 27/11 – 9h/13h30 Estimations de Mertens
(a) Estimation de Mertens, sommation par parties,
(b) Théorèmes de Tchebysheff.
(c) Taille de la fonction de diviseurs. Exercices sur les applications
(d) Majorations de moyennes de fonctions multiplicatives positives. Le théorème de Hall en majoration.

Mercredi 28/11 Jour férié.

Jeudi 29/11 – 9h00/13h30 Méthode de convolution
(a) Via un exemple,
(b) Le lemme usuel. Des applications.
(c) Questions, corrections.

Vendredi 28/11 Jour férié.

Samedi 1/11 – 9h00/13h30 Théorème de Levin Fainleib
(a) Le théorème,
(b) Des applications.

Dimanche 2/11 – 2h Introduction au crible, Le théorème de Brun Titchmarsh via l'inégalité de Selberg.
Après midi, 2h : l'inégalité du grand crible.

Lundi 3/12 – 9h00/13h30 Le crible de Montgomery, applications.

Mardi 4/12 – 9h00/13h30 Le groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$
(a) Les notions. Les caractères modulo 3 et 4, $\chi_3(-1) = -1 = \chi_4(-1)$. Non-annulation de $L(1, \chi_3)$ et $L(1, \chi_4)$.
(b) Nombres premiers en progressions arithmétiques par la méthode de Mertens.

Après midi, 1h30 : equation fonctionnelle de la fonction θ, et celle de ζ. Exercice sur le groupe multiplicatif modulo 5.

Mercredi 5/12 – 2h – Selon ce qui a été fait.
Après midi, 1h.

Jeudi 6/12 – 2h Devoir surveillé.

Au total : 32 heures

Table des matières

Chapitre 1

Convolution arithmétique

Il s'agit ici d'une présentation des acteurs.

1.1 Bestiaire

1. La fonction de Moebius $\mu(n)$ vaut -1 sur chaque nombre premier et 0 sur toutes leurs puissances.
2. $\varphi(n)$ est l'indicateur d'Euler, c'est à dire le nombre d'entiers entre 1 et n qui sont premiers à n.
3. $d(n)$ est le nombre de diviseurs (positifs) de n.
4. $\sigma(n)$ est la somme des diviseurs (positifs) de n.
5. La fonction de Liouville $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ en est assez proche : en effet cette dernière est la fonction multiplicative qui vaut $(-1)^\alpha$ sur chaque p^α.
6. $d(n^2)$ est le nombre de diviseurs (positifs) de n^2. Il s'agit aussi d'une fonction multiplicative de n.
7. $\omega(n)$ est le nombre de diviseurs premiers de n et par exemple $\omega(12) = 2$ puisque 2 et 3 sont les deux seuls nombres premiers divisant 12. On dit aussi "sans multiplicité" car, en fait, 2^2 divise aussi 12. Le nombre de diviseurs avec multiplicité est $\Omega(n)$ qui vérifie $\Omega(12) = 3$. Ces deux fonctions sont *additives*, i.e. $\omega(nm) = \omega(n) + \omega(m)$ si $(n, m) = 1$ et de même pour Ω. Cette notion est bien sûr le pendant additif de la notion de fonction multiplicative introduite ci-après.
8. $\mu^2(n)$ vaut 1 si n est divisible par un carré > 1 et 0 sinon.
9. $\Lambda(n)$ est a fonction de van Mangoldt
10. $\delta_{n=1}$ ou δ_1 est la fonction qui vaut 1 en $n = 1$ et 0 ailleurs, alors que $\mathbb{1}$ est la fonction qui vaut uniformément 1 sur tous les entiers.
11. $\pi(X)$ est le nombre de nombres premiers inférieurs à X, de sorte que $\pi(3) = 2$ par exemple.

Nous pouvons aussi considérer

1. la fonction φ_2 qui à chaque entier n associe le nombre d'entiers modulo n qui sont premiers à n et tels que $n + 2$ qui le sont aussi,
2. la fonction qui à chaque entier n associe le nombre de carrés modulo n.

1.2 Fonctions multiplicatives

Une fonction $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ est dite *multiplicative* si

$$\begin{cases} f(1) = 1, \\ f(mn) = f(m)f(n) \qquad \text{si } n \text{ et } m \text{ sont premiers entre eux.} \end{cases} \tag{1.1}$$

De façon équivalente, nous pouvons écrire

$$f\big(\prod_p p^{\alpha_p}\big) = \prod_p f\big(p^{\alpha_p}\big) \tag{1.2}$$

où le produit porte sur tous les nombres premiers et où les α_p sont des entiers positifs ou nuls, dont tous sauf un nombre fini sont nuls. Cette expression montre clairement que la fonction f est complètement déterminée par sa valeur sur les entiers qui sont des puissances de nombres premiers. Réciproquement la donnée de telles valeurs détermine bien une fonction multiplicative, tout simplement en la définissant à partir de l'égalité ci-dessus.

Exercice 1. *Montrer que x, y et z sont trois entiers, et si x est premier à z, alors le pgcd de xy et z est égal au pgcd de y et de z, i.e.*

$$\mathrm{pgcd}(xy, z) = \mathrm{pgcd}(y, z).$$

Indication : *Utiliser les décompositions en facteurs premiers.*

Exercice 2. *Soit a et b deux entiers premiers entre eux.*

◇ 1 ◇ *Montrer que* $\mathrm{pgcd}(a + b, a - b)$ *vaut 1 ou 2. Donner des exemples de chacun des cas.*

◇ 2 ◇ *Montrer que $a + b$ et ab sont premiers entre eux.*

Cette notion de multiplicativité va s'avérer fondamentale. Nous constaterons en particulier que beaucoup de fonctions arithmétiques a priori mystérieuses se comprennent beaucoup mieux lorsque l'on regarde leurs valeurs sur les puissances de nombres premiers. Avant d'examiner des exemples, notons le lemme suivant que nous utiliserons très souvent :

Lemme 1.1

Soit f une fonction multiplicative et m et n deux entiers. Nous avons

$$f([m, n])f((m, n)) = f(m)f(n)$$

où $[m, n]$ et (m, n) désigne respectivement le ppcm et le pgcd des entiers m et n.

Exercice 3. *Démontrer le lemme précédent.*

Indication : *Utiliser les décompositions en facteurs premiers.*

Exercice 4.

◇ 1 ◇ *Montrer que la fonction somme de diviseurs σ est multiplicative.*

◇ 2 ◇ *Soit p un nombre premier et $a \geq 1$ un entier. Montrer que*

$$\sigma(p^a) = \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1}$$

où $\sigma(d)$ est la somme des diviseurs entiers positifs de d.

EXERCICE 5.

◇ 1 ◇ *Montrer que si n et m sont sans facteurs carrés et distincts, alors*

$$\frac{\varphi(m)}{m} \neq \frac{\varphi(n)}{n}.$$

◇ 2 ◇ *Montrer que la fonction $n \mapsto \sigma(n)/n$ vérifie la même propriété (i.e. que celle de $n \mapsto \varphi(n)/n$ exhibée à la question précédente).*

◇ 3 ◇ *Que pensez-vous de la fonction $n \mapsto \sigma(n)/\varphi(n)$ vis à vis de cette propriété ?*

◇ 4 ◇ *Que pensez-vous de la fonction $n \mapsto \prod_{p|n}(p+2)/(p+1)$ vis à vis de cette propriété ?*

EXERCICE 8.

◇ 1 ◇ *Montrer que la fonction f qui à l'entier n associe n admet la fonction g définie par*

$$g(d) = d\mu(d)$$

comme inverse de convolution.

◇ 2 ◇ *Démontrer l'identité suivante*

$$\sigma(n)^2 = n\sum_{d|n}\sigma(d^2)/d.$$

EXERCICE 10. *Pour tout module $r \geq 1$, nous posons*

$$\Xi_r = \Big\{\frac{u}{r}, 1 \leq u \leq r, \mathrm{pgcd}(u,r) = 1\Big\}.$$

Soit q et q' deux entiers premiers entre eux. Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rccc}\Psi: & \Xi_q \times \Xi_{q'} & \rightarrow & \Xi_{qq'} \\ & (a/q, a'/q') & \mapsto & (aq'+a'q)/(qq')\end{array}$$

est une bijection.

INDICATION : *On vérifiera que cette fonction est injective. Pour montrer la surjectivité, ou bien on prendra un argument de cardinalité, ou bien on emploiera le théorème de Bezout : il existe deux entiers u et v tels que $uq + vq' = 1$. Le point $b/(qq')$ de $\Xi_{qq'}$ est alors égal à $\Psi(bv/q \bmod 1, bu/q' \bmod 1)$.*

EXERCICE 11. *Soit $P(X)$ un polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Soit $\rho(q)$ le nombre de solutions de $P(x) \equiv 0[q]$. Montrer que la fonction $q \mapsto \rho(q)$ est multiplicative.*

1.3 La fonction nombre de diviseurs

Commençons par détailler ce pourquoi la fonction qui à n associe son nombre de diviseurs est multiplicative. Ceci repose en fait sur la structure de l'ensemble $\mathcal{D}(n)$ des diviseurs de n. Tout d'abord

$$\mathcal{D}(p^\alpha) = \big\{1, p, p^2, \cdots, p^{\alpha-1} bigr\}. \tag{1.3}$$

Ensuite, si p_1 et p_2 sont deux nombres premiers distincts, chaque diviseur du produit $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ est de la forme $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}$ avec $0 \le \beta_1 \le \alpha_1$ et $0 \le \beta_2 \le \alpha_2$. Par ailleurs, chaque entier de cette forme est bien un diviseur de $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$. Ceci nous donne

$$\mathcal{D}\big(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}\big) = \mathcal{D}\big(p_1^{\alpha_1}\big) \cdot \mathcal{D}\big(p_2^{\alpha_2}\big). \tag{1.4}$$

Nous montrons de la même façon que $\mathcal{D}(mn) = \mathcal{D}(m) \cdot \mathcal{D}(n)$ si m et n sont premiers entre eux. De façon explicite la fonction suivante est une bijection :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(mn) &\to \mathcal{D}(m) \cdot \mathcal{D}(n) \\ d &\mapsto \big((d, m), (d, n)\big). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Il s'agit là d'une forme de multiplicativité au niveau des ensembles, et que nous allons exploiter sous la forme suivante : pour toute fonction F, l'identité suivante a lieu dès que m et n sont deux entiers premiers entre eux

$$\sum_{d|mn} F(d) = \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} F(d_1 d_2). \tag{1.6}$$

Démonstration. Soit $\mathscr{D}(\ell)$ l'ensemble des diviseurs positifs de ℓ. Étant donné deux entiers premiers entre eux m et n, nous considérons

$$\begin{aligned} f : \mathscr{D}(m) \times \mathscr{D}(n) &\to \mathscr{D}(mn) \\ (u, v) &\mapsto uv \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} g : \mathscr{D}(mn) &\to \mathscr{D}(m) \times \mathscr{D}(n) \\ w &\mapsto (\mathrm{pgcd}(w, m), \mathrm{pgcd}(w, n)) \end{aligned}$$

Nous montrons que $g \circ f = \mathrm{Id}$. En effet $(g \circ f)(u, v) = (\mathrm{pgcd}(uv, m), \mathrm{pgcd}(uv, n))$. Comme v divise n et que n est premier à m, les entiers v et m sont premiers entre eux. L'exercice 1 nous donne alors $\mathrm{pgcd}(uv, m) = \mathrm{pgcd}(u, m) = u$ et de même $\mathrm{pgcd}(uv, n) = \mathrm{pgcd}(v, n) = v$. Ce qu'il fallait démontrer.

□

Exercice 12. *Montrer que, pour tout $n \ge 1$, nous avons $d(n) \le 2\sqrt{n}$.*

Indication : *La meilleure constante est $\sqrt{3}$.*

Exercice 13. *(Exercice A) Montrer que, pour tout $n \ge 1$, nous avons $d(n) \le 3\, n^{1/3}$.*

Indication : *La meilleure constante est $18^{1/3}$.*

Exercice 14. *(Exercice B) Montrer que, pour tout $n \ge 1$, nous avons $\varphi(n) \ge \sqrt{n/2}$.*

Exercice 15. *Montrer que, pour tout $n \ge 1$, nous avons $\varphi(n) \ge (9/2)^{1/3} n^{2/3}$.*

Exercice 16. *Montrer que, pour tout $n \ge 1$, nous avons $\sigma(n)\varphi(n) \le n^2$.*

1.4 Convolution et fonctions multiplicatives

Nous définissons le produit de convolution arithmétique $f \star g$ par

$$(f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(n/d)g(d) \tag{1.7}$$

où la somme porte sur les diviseurs d de n. En notant $\mathbb{1}$ la fonction qui vaut 1 sur tous les entiers, nous avons $d(n) = \mathbb{1} \star \mathbb{1}$. La lectrice vérifiera que ce produit est associatif et commutatif. La fonction $\delta_{n=1}$ en est l'élément neutre, puisque pour toute fonction arithmétique g, nous avons

$$(\delta_1 \star g)(n) = \sum_{\ell m = n} \delta_1(\ell)g(m) = g(n).$$

Ce produit est par ailleurs distributif vis-à-vis de l'addition de deux fonctions arithmétiques et ces deux lois permettent de munir l'ensemble de fonctions arithmétiques d'une structure d'algèbre commutative unitaire sur $\mathbb{C}$. Nous pourrions aussi enrichir cette structure en considérant la dérivation

$$\partial : (f(n))_{n\geq 1} \mapsto (f(n)\log n)_{n\geq 1}$$

qui est linéaire et vérifie de surcroît $\partial(f \star g) = (\partial f) \star g + f \star (\partial g)$ mais nous sortons ici de notre cadre. La lectrice trouvera une étude assez détaillée de cette structure dans le livre de Bateman & Diamond (Bateman & Diamond, 2004).

EXERCICE 17. *Montrer que, si $D(f, s)$ converge absolument, il en est de même de $D(\partial f, r)$ pour $r > s$. Que penser de la réciproque ? Peut-on affaiblir cette condition à $r \geq s$?*

Le théorème général suivant nous donne la multiplicativité de toute une kyrielle de fonctions :

Théorème 1.2
Si f et g sont deux fonctions multiplicatives, il en est de même de $f \star g$.

Démonstration. La valeur en 1 est aisée : $f \star g(1) = f(1)g(1) = 1$. Soit ensuite deux entiers m et n premiers entre eux. Nous avons

$$(f \star g)(mn) = \sum_{d|mn} f(mn/d)g(d)$$

et appliquons (1.6) :

$$\begin{aligned}(f \star g)(mn) &= \sum_{d_1|m}\sum_{d_2|n} f\Big(\frac{mn}{d_1 d_2}\Big)g(d_1 d_2) \\ &= \sum_{d_1|m}\sum_{d_2|n} f\Big(\frac{m}{d_1}\Big)f\Big(\frac{n}{d_2}\Big)g(d_1)g(d_2) = (f \star g)(m)(f \star g)(n)\end{aligned}$$

comme requis. □

Ceci nous donne d'un seul coup la multiplicativité de beaucoup de fonctions, en partant des exemples simples que sont les fonctions $\mathbb{1}$ et plus généralement $X^a : n \mapsto n^a$. En particulier, le lecteur vérifiera que

$$d(n) = (\mathbb{1} \star \mathbb{1})(n), \quad \sigma(n) = (\mathbb{1} \star X)(n).$$

Cette convolution nous permet aussi d'exprimer simplement certaines relations, comme $\mu^2(n) = (\mathbb{1} \star \mathbb{1}_{X^2})(n)$ où $\mathbb{1}_{X^2}$ est la fonction caractéristique des carrés.

Exercice 18. *(Exercice C) Montrer que* $d(n^2) = \sum_{d|n} 2^{\omega(d)}$.

Exercice 19. *Soit* $\mathscr{F}$ *l'espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$ *des fonctions de* $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ *dans* $\mathbb{C}$. *Si* f *et* g *sont dans* $\mathscr{F}$, *rappelons que* $f \star g$ *est défini par*

$$f \star g(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d).$$

Alors

1. *Montrer que* $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$.
2. *Montrer que* $(\mathscr{F}, +, \star)$ *est une algèbre commutative sur* $\mathbb{C}$.
3. *Déterminer une unité* δ *pour* $\star$.
4. *Montrer que* $\mathbb{1}$ *(la suite constante égale à 1) et* μ *sont inverses l'un de l'autre.*

Exercice 20.

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Montrer que pour tout entier* d *sans facteurs carrés, le nombre de solutions en* d_1 *et* d_2 *de* $[d_1, d_2] = d$ *est* $3^{\omega(d)}$.

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Soit* q *un entier. Nous notons* $f(q)$ *le nombre de solutions en* q_1 *et* q_2 *de* $[q_1, q_2] = q$. *Montrer que* f *est multiplicative.*

$\diamond$ 3 $\diamond$ *Montrer que* $\mathbb{1} \star f(n)$ *est le nombre de couples* (q_1, q_2) *tels que* $[q_1, q_2]|n$.

Exercice 21. *On rappelle que* f *est complètement multiplicative si et seulement si* $f(mn) = f(m)f(n)$ *pour tout couple d'entiers* m *et* n.

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Déterminer toutes les fonctions complètement multiplicatives* f *qui sont telles que* $\mathbb{1} \star f$ *est encore complètement multiplicatif.*

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Déterminer l'inverse de la fonction complètement multiplicative* f.

$\diamond$ 3 $\diamond$ *Montrer que l'inverse de l'inverse de convolution de la fonction* $\mathbb{1} \star f$ *n'est en général pas* $\mu \cdot (\mathbb{1} \star f)$, *même si nous nous restreignons aux fonctions complètement multiplicatives* f.

Exercice 24. *Montrer que la fonction qui à l'entier* $n > 1$ *associe le double de la somme des entiers entre* 1 *et* n *qui lui sont premiers, et qui à 1 associe 1, est multiplicative.*

Indication : *On pourra calculer cette somme directement en utilisant le fait que la fonction caractéristique des entiers* m *premiers à* n *s'écrit aussi*

$$\sum_{\substack{d|n,\\ d|m}} \mu(d),$$

ce que l'on prendra soin de démontrer.

Exercice 25. *Nous posons* $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$. *Montrer que*

$$\sigma_k(n) \leq n^k \zeta(k)$$

dès que $k > 1$.

Exercice 26. *Nous souhaitons montrer le lemme de Thue qui dit : soit* $a \geq 1$ *un entier et* $p \geq 3$ *un nombre premier tel que* $p \nmid a$. *L'équation* $au \equiv v[p]$ *admet une solution* $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ *telle que*

$$1 \leq |u| < \sqrt{p}, \quad 1 \leq |v| < \sqrt{p}.$$

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Considérons* $\mathcal{S} = \{0, \cdots, [\sqrt{p}]\}$ *et l'application*

$$\begin{aligned} f : S^2 &\to \{0, \cdots, p-1\}, \\ (u, v) &\mapsto f(u, v) \equiv au - v[p]. \end{aligned}$$

Montrer que f *n'est pas injective.*

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Soit deux paires* (u_1, v_1) *et* (u_2, v_2) *telles que* $f(u_1, v_1) = f(u_2, v_2)$. *Nous posons* $u = u_1 - u_2$ *et* $v = v_1 - v_2$. *Montrer que* $au \equiv v[p]$, *puis que* $|u| < \sqrt{p}$ *et* $|v| < \sqrt{p}$, *et enfin que ni* u *ni* v *n'est nul.*

Exercice 27. *(Exercice D) Montrer que*

$$\sum_{m|n} d(m)^3 = \Big(\sum_{m|n} d(m)\Big)^2.$$

Exercice 28. *Montrer que*

$$\sum_{d|n} \mu^2(d) k^{\omega(d)} = (k+1)^{\omega(d)}.$$

Exercice 29. *(Exercice E)*

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Montrer que, pour tout entier* $n \geq 1$, *on a*

$$\frac{n^{n+1}}{\zeta(n+1)} \leq \varphi(n)\sigma(n^n) \leq n^{n+1}.$$

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Déterminer si la série*

$$\sum_{n\geq 1} \Big(\frac{n}{\varphi(n)} - \frac{\sigma(n^n)}{n^n}\Big)$$

est convergente ou non.

Chapitre 2

Initiation aux séries de Dirichlet

Le lecteur peut ici se restreindre aux séries de Dirichlet d'argument réel. Nous nous bornerons de plus à rester dans des domaines de *convergence absolue*, ce qui nous suffira ici. Pour une étude plus complète, voir (Tenenbaum, 1995) ou (Ellison, 1975).

2.1 Abscisse de convergence absolue

Lorsque nous disposons d'une fonction arithmétique, disons f, nous pouvons former sa *série de Dirichlet* qui est, pour tout argument réel s :

$$D(f, s) = \sum_{n \geq 1} f(n)/n^s. \tag{2.1}$$

Cette définition est a priori formelle, puisqu'il n'est pas toujours vrai qu'il existe au moins un s pour lequel cette série converge (il n'en existe d'ailleurs pas quand $f(n) = e^n$).

Lemme 2.1 *Soit f une fonction arithmétique telle que sa série de Dirichlet converge absolument pour un certain nombre complexe s. Alors, pour tout nombre réel $r > \Re s$, la série $D(f, r)$ converge absolument, et donc, pour tout nombre complexe s' tel que $\Re s' > \Re s$, la série $D(f, s')$ converge absolument.*

Démonstration. Nous avons

$$D(f, r) = \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} \frac{n^s}{n^r}.$$

Or $r > s$ donc $n^s/n^r < 1$, d'où $D(|f|, r) < D(|f|, s)$, i.e. la série de Dirichlet de f converge pour tout $r > s$. □

Cette propriété nous donne accès à la notion d'abscisse de convergence.

Définition 2.2 *On appelle* abscisse de convergence *de la fonction f, le plus petit réel s tel que la série de Dirichlet $D(f, s)$ converge. Si $D(f, s)$ converge pour tout s, on dit alors que l'abscisse de convergence est $-\infty$.*

Notons qu'il n'est pas acquis que la série en question converge en son abscisse de convergence. D'après un théorème de Landau, voir (Dress, 1983/84), cette situation n'arrive même jamais dès que cette abscisse est finie et que que f est positive ou nulle. Notons ici que l'abscisse de convergence peut valoir $-\infty$ et la fonction f être positive ou nulle, sans que cela n'implique que f soit à support borné, i.e. qu'elle s'annule partout sauf sur un nombre fini de valeurs. Le cas $f(n) = e^{-n}$ fournit un contre-exemple.

Nous pouvons associer à chaque fonction arithmétique f une série de Dirichlet, et cette série convergera au moins en un point si la fonction f croît *raisonnablement*. Une telle série de Dirichlet définit en fait parfaitement la fonction dont elle est issue comme le montre la propriété suivante. Nous ne l'utiliserons pas dans la suite.

Lemme 2.3 *Soit f et g deux fonctions arithmétiques telles que leurs séries de Dirichlet respectives convergent absolument pour un certain s. Supposons en outre que $D(f, r) = D(g, r)$ pour tout $r > s$. Alors $f = g$.*

Démonstration. En posant $h_1 = f - g$, nous avons $D(h_1, r) = 0$ pour tout $r > s$. Comme cette série converge en $r = s + 1$, nous en déduisons que $h_2(n) = h_1(n)/n^{r+1}$ est bornée en valeur absolue et vérifie $D(h_2, r) = 0$ pour tout $r > -1$ et il nous faut établir que $h_2 = 0$. Supposons que ce ne soit pas le cas, et nommons n_0 le plus petit entier n tel que $h_2(n) \neq 0$. Une comparaison à une intégrale nous donne directement, pour $r > 1$:

$$\begin{aligned} |n_0^r D(h_2, r) - h_2(n_0)| &\leq \max_n |h_2(n)| \sum_{n \geq n_0+1} \frac{n_0^r}{n_r} \\ &\leq \max_n |h_2(n)| n_0^r \int_{n_0}^{\infty} \frac{dt}{t^r} \leq n_0 \max_n |h_2(n)|/(r-1), \end{aligned}$$

quantité qui tend vers 0 quand r tend vers l'infini. Mais $D(h_2, r) = 0$, ce qui nous garantit que $h_2(n_0) = 0$ contrairement à notre hypothèse. Le lecteur pourra modifier cette démonstration de deux façons : tout d'abord remplacer le recours à un raisonnement par l'absurde par une démonstration par récurrence. Ensuite, une petite modification donne $n_0^r D(h_2, r) - h_2(n_0) = \mathcal{O}((1 + n_0^{-1})^{-r})$ alors que la preuve ci-dessus ne donne que $\mathcal{O}(1/r)$. □

2.2 Séries de Dirichlet et produit de convolution

Les deux lois internes sur les fonctions arithmétiques se traduisent agréablement en termes de séries de Dirichlet :

- Concernant l'addition $(+)$: étant donné deux fonctions f et g dont les séries de Dirichlet convergent absolument pour s, nous avons
$$D(f + g; s) = D(f; s) + D(g; s).$$
- Concernant la multiplication $(\star)$: étant donné deux fonctions f et g dont les séries de Dirichlet convergent absolument pour s, alors celle de $f \star g$ est également absolument convergente, et nous avons
$$D(f \star g; s) = D(f; s)D(g; s).$$

Cette dernière égalité est facile à vérifier de ce que les séries convergent absolument, ce qui nous permet d'en déplacer les termes comme bon nous semble. Elle montre en particulier que l'opérateur qui, à une fonction arithmétique, lui associe sa série de Dirichlet trivialise le produit de convolution arithmétique, de la même façon que la transformée de Fourier trivialise le produit de convolution des fonctions de la droite réelle.

Il est clair que l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet de $f \star g$ est majorée par le maximum des abscisses de convergence absolue des séries de Dirichlet associées à de f et g. Cette majoration est souvent une égalité *lorsque* ces deux abscisses ne sont pas égales ... et qu'aucun des facteurs n'est nul !

Exercice 30. *Montrer que*

1. $D(\varphi, s) = \zeta(s-1)/\zeta(s)$,
2. $D(\lambda, s) = \zeta(2s)/\zeta(s)$,
3. $D(\mu^2, s) = \zeta(s)/\zeta(2s)$.

Exercice 31. *Montrer que la série de Dirichlet associée à la fonction de Moebius μ est $1/\zeta(s)$ et en déduire un exemple montrant que l'abscisse de convergence absolue d'un produit peut être strictement inférieure à la plus grande des deux abscisses des deux facteurs (considérer $\mathbb{1} \star \mu$).*

Exercice 32. *(Exercice F) Exprimer la série de Dirichlet de la fonction qui à n associe $2^{\omega(n)}$ en fonction de la fonction ζ de Riemann. Ici $\omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers de n comptés sans multiplicité.*

Exercice 33. *Exprimer la série de Dirichlet de la fonction qui à n associe $2^{\omega(n)}\lambda(n)$ en fonction de la fonction ζ de Riemann. Ici, λ est la fonction de Liouville définie par $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ où $\Omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers de n comptés avec multiplicité.*

Exercice 34. *Dans cet exercice, nous posons $\kappa(n) = \nu_1 \nu_2 \cdots \nu_k$, où Montrer que*

⋄ 1 ⋄ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \kappa(n)/n^s = \zeta(s)\zeta(2s)\zeta(3s)/\zeta(6s)$,

⋄ 2 ⋄ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} 3^{\omega(n)}\kappa(n)/n^s = \zeta^3(s)/\zeta(3s)$.

Indication : *Toutes ces fonctions étant multiplicatives (à montrer), il suffit de calculer chaque facteur eulérien.*

2.3 La fonction ζ de Riemann.

La fonction ζ est très importante en arithmétique puisqu'elle intervient dans la formule d'Euler, elle fait donc un lien entre les entiers naturels et les nombres premiers. C'est aussi la série de Dirichlet la plus simple puisqu'elle est associée à la fonction constante 1 (fonction que nous avons notée $\mathbb{1}$ dans notre bestiaire). Elle est définie pour $s > 1$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}.$$

Si il s'agit de la série de Dirichlet la plus simple et la plus célèbre, cependant elle reste assez mal connue. Pour une étude approfondie de cette fonction, le lecteur pourra se référer à (Tenenbaum, 1995) et (Ellison, 1975).

EXERCICE 35. *Montrer que la série qui définit $\zeta(s)$ est absolument convergente pour $\Re s > 1$.*

INDICATION : *On pourra utiliser une comparaison à une intégrale.*

EXERCICE 36. *Montrer que l'on a*

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \{t\}\frac{dt}{t^{s+1}}$$

et en déduire un équivalent de $\zeta(1+u)$ lorsque u tend vers 0.

INDICATION : *On pourra écrire, pour $n \geq 1$,*

$$\frac{1}{n^s} = s\int_n^\infty \frac{dt}{t^{s+1}}$$

(technique dite de sommation par parties).

EXERCICE 37.

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Nous posons $L(s) = \sum_{n\geq 1}(-1)^n n^{-s}$. Montrer que $L(s)$ est convergente pour $\Re s > 0$, puis que $L(1) < 0$ et enfin que $L'(1) < 0$.*

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Montrer que $-\zeta'(s)/\zeta(s) < 1/(s-1)$ lorsque s est réel et > 1.*

INDICATION : *On pourra utiliser $\zeta(s) = L(s)/(2^{1-s}-1)$, que l'on démontrera.*

EXERCICE 38. *(Exercice G-1) Montrer que, pour $\sigma > 1$, nous avons $1/(\sigma-1) < \zeta(\sigma) < \sigma/(\sigma-1)$.*

EXERCICE 39. *(Exercice G-2) Montrer que, pour $\sigma > 1$, nous avons $\zeta(\sigma) = (\sigma-1)^{-1} + \gamma + \mathcal{O}(\sigma-1)$.*

2.4 Série de Dirichlet et multiplicativité

Théorème 2.4 *Supposons que la série de Dirichlet de la fonction multiplicative f converge absolument pour un certain s. Alors, $D(f,s)$ est développable en produit eulérien :*

$$D(f,s) = \prod_{p\geq 2}\sum_{k\geq 0}\frac{f(p^k)}{p^{ks}}.$$

Le reste de cette section est dédiée à établir cette propriété, mais il est préférable de commencer par quelques commentaires.

Convergence et produit convergent

Nous ouvrons ici une parenthèse sur la signification de (2.9). La suite $1/2$, $(1/2)\times(1/2)$, $(1/2)\times(1/2)\times(1/2)$, et de terme général $(1/2)^n$, est convergente, et de limite 0. Ici, rien de neuf. Toutefois, par une maladresse terminologique, on dit qu'un produit (formel) infini

$$\prod_{n\geq 1} a_n$$

est convergent si et seulement

1. La suite des produits partiels converge vers une limite, disons P ;
2. $P \neq 0$.

L'equation (2.9) donne donc une écriture sous forme de produit, c'est à dire comme la limite d'une suite de produits partiels qui converge vers une limite, mais il faut en général vérifier la condition 2 ci-dessus. Parfois on dit que le produit *converge strictement* lorsque cette condition est vérifiée.

Convergence et produit convergent : le point de vue de Godement

Hervé Queffelec propose d'adopter le point de vue suivant, qui est efficace et limpide. Godement dit que le produit $\prod_{n\geq 1} a_n$ est absolument convergent en tant que produit si $\sum_{n\geq 1} |a_n - 1| = M < \infty$. Ceci à cause du théorème suivant :

Théorème 2.5 *Supposons que* $\sum_{n\geq 1} |u_n| = M < \infty$. *Alors*

1. $P_n = \prod_{1\leq j\leq n}(1+u_j) \to P \in \mathbb{C}$.

2. Si $1+u_j \neq 0$ *pour tout* j *alors* $P \neq 0$.

Démonstration. Nous avons $P_n - P_{n-1} = u_n P_{n-1}$ et donc

$$|P_n - P_{n-1}| \leq |u_n||P_{n-1}| \leq |u_n| \prod_{1\leq j\leq n-1} e^{|u_j|} \leq |u_n| e^M.$$

Il en résulte que la série $\sum_n (P_n - P_{n-1})$ est absolument convergente, et donc la suite P_n converge, disons vers $P \in \mathbb{C}$.

Pour montrer que $P \neq 0$, on exhibe Q tel que $PQ = 1$. Quoi de plus naturel que de chercher Q sous la forme d'un autre produit infini $Q = \prod_{j\geq 1}(1+v_j)$, avec $\sum_{j\geq 1} |v_j| < \infty$? L'idéal serait d'ajuster v_j pour avoir $(1+u_j)(1+v_j) = 1$ pour tout j. Or c'est possible car $1+u_j \neq 0$. Et ça donne

$$v_j = \frac{1}{1+u_j} - 1 = \frac{-u_j}{1+u_j}, \quad \text{d'où } |v_j| \sim |u_j|$$

et tout est dit. □

Les logarithmes sont cachés dans les majorations $1+x \leq e^x$ et $P_{n-1} \leq e^M$. Mais leur présence reste discrète.

Nouvel énoncé et preuve

Théorème 2.6 *Supposons que la série de Dirichlet de la fonction multiplicative* f *converge absolument pour un certain* s. *Alors,* $D(f,s)$ *est développable en produit eulérien :*

$$D(f,s) = \prod_{p\geq 2} \sum_{k\geq 0} \frac{f(p^k)}{p^{ks}}$$

où le produit est absolument convergent au sens de Godement.

Démonstration. Nous constatons que le produit en question s'écrit $\prod_p(1+u_p)$ avec

$$u_p = \sum_{k\geq 1} \frac{f(p^k)}{p^{ks}}. \tag{2.2}$$

Or

$$\sum_p |u_p| \leq \sum_p \sum_{k\geq 1} \frac{|f(p^k)|}{|p^{ks}|} \leq \sum_{n\geq 1} |f(n)|/|n^s|$$

et le théorème s'applique. □

Il s'agit véritablement de la bonne notion qui accompagne la notion de série absolument convergente. Notons que le produit peut être convergent et nul, mais alors l'un des facteurs est nul. Voici un exemple. Nous définissons la fonction multiplicative f_4 par

$$f_4(2) = 1, f_4(4) = -6,\ \forall k \geq 3,\ f_4(2^k) = 0,$$
$$forallp \geq 3, \forall k \geq 1,\ f_4(p^k) = 1.$$

En conséquence $\sum_{n\geq 1} f_4(n)/n^s$ est absolument convergent pour $\Re s > 1$ et l'on a

$$\sum_{n\geq 1} f_4(n)/n^s = \Big(1 + \frac{2}{2^s} - \frac{6}{2^{2s}}\Big) \prod_{p\geq 3} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)^{-1}.$$

qui s'annule effectivement pour $s = 2$.

2.5 Une variation populaire

Nous nous donnons ici une fonction arithmétique multiplicative f que nous supposons bornée en valeur absolue par 1. Nous pouvons dans tous les cas pratiques nous ramener à ce cas, quitte à considérer une fonction auxiliaire de la forme $f(n)/n^a$ qui est, elle aussi, multiplicative (dès lors que f l'est).

Soit $y \geq 1$ un paramètre réel. Nous considérons la fonction multiplicative f_y définie par

$$\begin{cases} \forall p \leq y, \forall \alpha \geq 1, f_y(p^a) = f(p^a), \\ \forall p > y, \forall \alpha \geq 1, f_y(p^a) = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

(p est ici un nombre premier) et, de façon symétrique,

$$\begin{cases} \forall p \leq y, \forall \alpha \geq 1, f^y(p^a) = 0, \\ \forall p > y, \forall \alpha \geq 1, f^y(p^a) = f(p^a). \end{cases} \tag{2.4}$$

Notons que nous avons l'équation

Lemme 2.7

$$f = f_y \star f^y \tag{2.5}$$

Démonstration. En effet, les sommants de la somme

$$\sum_{d_1 d_2 = n} f_y(d_1) f^y(d_2)$$

sont presque tous nuls puisque l'entier n admet une unique écriture sous la forme $n = \ell m$ où tous les facteurs premiers de ℓ sont inférieurs y et tous ceux de m sont strictement supérieurs à y. La somme ci-dessus se réduit donc à $f_y(\ell)f^y(m)$ qui vaut bien $f(n)$. □

Nous posons alors

$$D_y^\flat(f,s) = D(f_y,s), \quad D_y^\sharp(f,s) = D(f^y,s) \tag{2.6}$$

de telle sorte que $D(f,y) = D_y^\flat(f,s)D_y^\sharp(f,s)$. La série de Dirichlet $D_y^\flat(f,s)$ se réduit à un produit, pour $\Re s > 1$:

$$D_y^\flat(f,s) = \prod_{p\le y}\Big(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \frac{f(p^3)}{p^{3s}} + \cdots\Big). \tag{2.7}$$

La série $D_y^\sharp(f,s)$ tend à devenir petite lorsque y tend vers l'infini. En effet, avec $\sigma = \Re s$,

$$|D_y^\sharp(f,s) - 1| \le \sum_{n>y} 1/n^\sigma \le y^{-\sigma} + \int_y^\infty dt/t^\sigma \le \frac{\sigma}{(\sigma-1)y^{\sigma-1}}. \tag{2.8}$$

En laissant y tendre vers l'infini, nous obtenons donc l'expression de $D(f,s)$ sous forme d'un produit dit *eulérien*

$$D(f,s) = \prod_{p\ge 2}\Big(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \frac{f(p^3)}{p^{3s}} + \cdots\Big), \quad (\Re s > 1), \tag{2.9}$$

où chaque facteur est dit le facteur *local*, ou *eulérien*, en p.

Un détour historique

La décomposition (2.5) a été beaucoup exploitée, notamment par (Daboussi, 1984) (voir aussi (Daboussi, 1996) et (Daboussi & Rivat, 2001)) et permet dans l'article cité de donner une preuve élémentaire du théorème des nombres premiers. Cette décomposition est au cœur du travail récent (Granville & Soundararajan, 2001) où les auteurs développent la philosophie suivante : le comportement de la fonction f_y est très bien décrit par son produit eulérien alors que le comportement de f^y est lui décrit par des équations fonctionnelles (ce que nous ne décrivons pas ici). Essayer de réduire la compréhension d'une fonction multiplicative f à la composante f_y est l'essence des méthode dites probabilistes, notoirement développées par Kubilius.

EXERCICE 40. *Soit a un réel ≥ 0. Nous posons $\lambda_a(n) = \sum_{d|n} d^a\lambda(d)$ où $\lambda(d)$ est la fonction de Liouville. Montrer que*

$$\sum_{n\ge1}\frac{\lambda_a(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(2s-2a)}{\zeta(s-a)} \quad \textit{et} \quad \sum_{n\ge1}\frac{\lambda(n)\lambda_a(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)\zeta(s-a)}{\zeta(s)}$$

pour $\Re s > 1 + a$.

Exercice 41. *Montrer que l'on a, pour $\Re s > 1$,*

$$\zeta(s) = \prod_{p \geq 2} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

où le produit est absolument convergent au sens de Godement.

2.6 Quelques digressions sans preuve

Les séries des Dirichlet ont été introduites dans (Dirichlet, 1937) par P.G. Lejeune-Dirichlet en 1937 pour montrer de l'existence d'une infinité de nombres premiers dans les progressions arithmétiques (de type $a + nq$ avec a et q premiers entre eux). Dedekind, d'abord un élève puis un ami de Dirichlet, a établi plusieurs propriétés de ces séries enrichissant ainsi le livre (Lejeune-Dirichlet, 1871). L'étape de structuration suivante est due à un mémoire de Cahen (Cahen, 1894), qui est notamment célèbre pour ... l'inexactitude de ses preuves ! L'élaboration de la théorie est allée bon train à cette période, et en 1915 parut la splendide petite monographie (Hardy & Riesz, 1964) de Hardy & Riesz qui reste à ce jour l'ouvrage de base sur la question. La lectrice pourra retrouver dans (Tenenbaum, 1995) une partie de ce matériel.

Nous nous intéressons ici à deux points :

1. Dans quelle mesure l'ordre moyen et l'abscisse de convergence sont-ils liés ?
2. L'écriture $D(f, s) = D(h, s)D(g, s)$ nous permet-elle de conclure que l'abscisse de convergence absolue de $D(f, s)$ est le maximum de celle de $D(h, s)$ et de celle de $D(g, s)$?

En ce qui concerne le premier point, nous avons vu dans la section 7.1 que la connaissance de l'ordre moyen de la fonction f permettait d'en déduire l'abscisse de convergence de $D(f, s)$. La réciproque est fausse, tout simplement parce qu'il est tout à fait possible que f n'admette pas d'ordre moyen. Ces deux notions sont tout de même liées par le théorème suivant (dû à Cahen (Cahen, 1894)) :

Théorème 2.8 *Si l'abscisse de convergence absolue σ_0 de $D(f, s)$ est strictement positive, elle est donnée par*

$$\sigma_0 = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \sum_{1 \leq n \leq N} |f(n)|}{\log N}.$$

Il existe un théorème analogue pour déterminer l'abscisse de convergence (mais nous n'avons pas établi son existence !), et il est aussi possible de traiter le cas où σ_0 est négative ou nulle (mais la formule est différente). La lectrice remarquera que cette formule est l'exact pendant de la formule de Hadamard donnant le rayon de convergence d'une série entière, moyennant de rappeler l'identité que nous avons (presque !) démontrée en (7.4) :

$$D(|f|, s) = s \int_1^\infty \Big(\sum_{n \leq t} |f(n)|\Big) dt/t^{s+1}.$$

Tournons-nous à présent vers la seconde question. Nous supposons ici que nous disposons d'une décomposition de la forme $D(f, s) = D(h, s)D(g, s)$, où nous connaissons l'abscisse de convergence absolue, disons σ_0, de $D(g, s)$ et où celle de $D(h,s)$ est strictement plus petite. Pouvons-nous en conclure que σ_0 est encore l'abscisse de convergence absolue σ_0' de $D(f,s)$? Il est clair que $\sigma_0' \le \sigma_0$, mais peut-elle être plus petite ? C'est évidemment le cas si $h=0$, amis qu'en est-il si $h \neq 0$? Les auteurs de cet article ne savent pas répondre à cette question générale, mais il est loisible dans notre cas d'application d'ajouter une hypothèse : nous supposons que, pour tout $\delta > 0$, le module de $D(h,s)$ est minoré lorsque s décrit le demi-plan complexe $\Re s \ge \sigma_0 + \delta$. Cette hypothèse ne nous coûte rien en pratique puisque nous obtenons $D(h,s)$ sous la forme d'un produit eulérien, qui en tant que produit convergent, n'est ni infini, ni nul. Mais il nous faut maintenant considérer les s du domaine complexe, ce que nous avions réussi à éviter jusqu'à présent ! Voici le théorème (Hewitt & Williamson, 1957) de Hewitt & Williamson qui nous intéresse :

Théorème 2.9 *Soit $D(h,s)$ une série de Dirichlet absolument convergente pour $\Re s \ge \sigma$ et minorée en module par une constante > 0, alors $1/D(h,s)$ est encore une série de Dirichlet absolument convergente pour $\Re s \ge \sigma$.*

Ce résultat nous permet d'écrire $D(g,s) = D(h,s)^{-1}D(f,s)$ et d'en conclure que $\sigma_0' \ge \sigma_0$, ce qui nous donne bien $\sigma_0 = \sigma_0'$.

De nombreux travaux comparent les abscisses de convergence simple, absolue ou uniforme des trois constituants de l'égalité $D(f,s) = D(h,s)D(g,s)$; la lectrice en trouvera un exposé ainsi que leurs extensions au cas de plusieurs facteurs et les dernières améliorations (optimales) dans (Kahane & Queffélec, 1997).

Exercice 42. *Montrer que $\mathbb{1} \star \lambda$ est la fonction caractéristique des carrés et en déduire la série de Dirichlet de λ. Ici, λ est la fonction de Liouville, définie par $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ où $\Omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers de n comptés avec multiplicité.*

Exercice 43. *Exprimer la série de Dirichlet de la fonction qui à n associe $\varphi(n)$ en fonction de la fonction ζ de Riemann.*

Exercice 44.

◇ 1 ◇ *Déterminer la série de Dirichlet de $d(n^2)$.*

◇ 2 ◇ *Déterminer la série de Dirichlet de $d(n)^2$.*

◇ 3 ◇ *En utilisant les deux questions précédentes, montrer que*

$$d(n)^2 = \sum_{m|n} d(m^2).$$

Chapitre 3

Sommer des fonctions lisses

The main objects in analytic number theory often look like

$$\sum_{n \le X} a(n)$$

for some function of "arithmetical" nature $a(n)$, where the adjective "arithmetical" needs to be defined. This is the case when a is C^1. A hidden hypothesis we will comment later on is that a' is bounded. A first example of this situation is

$$\sum_{n \le X} \frac{1}{n} = \log X + \gamma + \mathcal{O}(1/X), \quad (X \ge 1). \tag{3.1}$$

An even simpler example is given by

$$\sum_{n \le X} 1 = X + \mathcal{O}(1), \quad (X \ge 1). \tag{3.2}$$

Preuve de (3.1) *:* Commençons par rappeler que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\sum_{n \le t} 1 = t + \mathcal{O}(1).$$

Supposons à présent que nous souhaitions obtenir une approximation de $\sum_{n \le X} 1/n$. Et bien il nous suffit de remarquer que :

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{X} + \int_n^X \frac{dt}{t^2}. \tag{3.3}$$

Il vient alors :

$$\sum_{n \le X} \frac{1}{n} = \frac{\sum_{n \le X} 1}{X} + \int_1^X \sum_{n \le t} 1 \frac{dt}{t^2} = \log X + \mathcal{O}(1).$$

□

We prove here that

Lemme 3.1

$$\sum_{n\le X}\frac{\log n}{n} = \tfrac12\log^2 X + \gamma_1 + \mathcal{O}(\log(2X)/X), \quad (X\ge 1)$$

for some constant γ_1 that is called the Laurent-Stieltjes constant of index 1.

A preliminary remark on uniformity : In all three previous estimates, we have written "$X \ge 1$" while the estimate is most interesting when X is large. However, we need an estimate that is uniform in some range, and, for instance here, there exists a constant C such that, for any $X \ge 1$, we have

$$\left|\sum_{n\le X}\frac{\log n}{n} - \tfrac12\log^2 X - \gamma_1\right| \le C\,\log(2X)/X.$$

This would be **false** if we had written $+\mathcal{O}((\log X)/X)$ in (3.1), for it cannot hold when $X = 1$. Such problems are usually trivial to sort, but a slip at this level may lead to mighty mistakes later on. There is nothing magic in the "$\log(2X)$" and we may as well have written "$1+\log X$" or "$\log(3X)$".

Démonstration. We simply write

$$\frac{\log n}{n} = \frac{\log X}{X} + \int_n^X \frac{\log t - 1}{t^2}dt.$$

This gives us

$$\begin{aligned}\sum_{n\le X}\frac{\log n}{n} &= [X]\frac{\log X}{X} + \sum_{n\le X}\int_n^X\frac{\log t-1}{t^2}dt\\ &= [X]\frac{\log X}{X} + \int_1^X\Bigl(\sum_{n\le t}1\Bigr)\frac{\log t-1}{t^2}dt\end{aligned}$$

where $[X]$ denotes the integer part of X. We continue by using (3.2) in the form $[t] = t - \{t\}$ ($\{t\}$ being the fractionnal part of t) :

$$\sum_{n\le X}\frac{\log n}{n} = \int_1^X \frac{\log t-1}{t}dt + \log X - \int_1^\infty \{t\}\frac{\log t - 1}{t^2}dt + \mathcal{O}\Bigl(\frac{\log(2X)}{X}\Bigr).$$

and (3.1) follows readily. □

The technique we have developped in the above proof is known as *summation by parts*. The reader will find different versions of this, usually more intricate than the one above, relying either on Abel summation process or on Stieltjes integration. We have relied on (3.2), but see exercise 126 for a more general usage. We recommend to the reader the following two exercises **??** and 47. This case is thus well-understood. If we want to gain precision in the error term, then we appeal to the Euler-MacLaurin summation formula, but as the reader will see by analysing the example we treated, there is no way one can avoid fractionnal parts in the development. Note however that

- We do not know how to evaluate $\sum_{n\le X} n^{it}$ with enough precision when t is large with respect to X.

– The error term in (3.2) (i.e. the fractionnal part) is much more important than it looks. In our proofs, we want very often to show that the resulting error term is very small but, if it simply did not exist, then we would have $\zeta(s)$ "=" $1/(s-1)$. This implies that this error term is responsible for the functionnal equation of the Riemann zeta function as well as for its Euler-product !

Exercice 47. *Montrer que*

$$\sum_{n\le X}\Bigl(\log\frac{X}{n}\Bigr)^2 \ll X,\quad (X\to\infty).$$

Exercice 48. *(Exercice H) Montrer que, pour tout entier $k\ge 1$,*

$$\sum_{n\le X}\Bigl(\log\frac{X}{n}\Bigr)^k \ll X,\quad (X\to\infty).$$

Exercice 49. *Nous définissons*

$$T(N)=\sum_{y\le (N/2)^{1/3}/2}\log(N-8y^3).$$

◇ 1 ◇ *Montrer que*

$$T(N)=\tfrac12(N/2)^{1/3}\log N+c_0N^{1/3}+\mathcal{O}(\log N)$$

pour une certaine constante c_0.

◇ 2 ◇ *Montrer que*

$$T(N)=\tfrac16(N/2)^{1/3}\log N+\sum_{\substack{(N/2)^{1/3}<m\le N,\\ \exists y\le (N/2)^{1/3}/2, m|N-8y^3}}\Lambda(m)+\mathcal{O}(N^{1/3})$$

◇ 3 ◇ *En déduire qu'il existe une infinité d'entiers de la forme $n=N-8y^3$ où y est un entier qui vérifie $8y^3\le N/2$ qui admettent un facteur premier $p\ge n^{1/6}$.*

Exercice 52. *(Exercice corrigé I) Montrer que*

$$\sum_{n\le x}\{x/n\}=(1-\gamma)x+\mathcal{O}(\sqrt{x})$$

où $\{y\}$ est la partie fractionnaire de y.

Exercice 53. *Pour des entiers $N\ge 1$ et $d\ge 1$, nous avons*

$$(1/d)\sum_{\substack{n,m\le N\\ d|n-m}}1=\frac{N^2}{d^2}+\bigl\{N/d\bigr\}-\bigl\{N/d\bigr\}^2.$$

Indication : *Le cas $N < d$ est facile. Dans le cas $N \geq d$, soit b l'entier dans $[1, d]$ qui est congruent à N modulo d. On trouve que d fois la somme en question vaut*

$$\sum_{1 \leq a \leq b} \left(\frac{N-a}{d} - \frac{b-a}{d} + 1 \right)^2 + \sum_{b+1 \leq a \leq d} \left(\frac{N-a}{d} - \frac{b-a}{d} \right)^2 .$$

Chapitre 4

Le principe de l'hyperbole de Dirichlet

4.1 Un premier terme d'erreur pour la moyenne de la fonction de nombre de diviseurs

Théorème 4.1 *Nous avons*

$$\sum_{n \le x} d(n) = x \log x + \mathcal{O}^*(2x).$$

Démonstration. La preuve est sans surprise :

$$\sum_{n \le x} d(n) = \sum_{\ell \le x} \sum_{m \le x/\ell} 1 = \sum_{\ell \le x} \Big(\frac{x}{\ell} + \mathcal{O}^*(1) \Big)$$
$$= x \log x + \mathcal{O}^*(2x).$$

en utilisant

$$\sum_{\ell \le L} \frac{1}{\ell} = \log L + \mathcal{O}^*(1)$$

que l'on obtient par comparaison à une intégrale. □

Le terme d'erreur est très proche du terme principal. Et par exemple, lorsque $x = 10^6$, nous calculons

$$\sum_{n \le 10^6} d(n) = 13\,970\,034$$

alors que $10^6 \log(10^6) = 13\,815\,510.557 \cdots$. Peut-on faire mieux ?

4.2 Le principe de l'hyperbole de Dirichlet

Soit f et g deux fonctions définies sur les entiers. Nous rappelons que $f \star g$ est la fonction h définie sur les entiers par

$$h(\ell) = \sum_{\substack{m,n \ge 1, \\ mn = \ell}} f(m) g(n)$$

où m (et n) parcourt l'ensemble des diviseurs positifs de ℓ. Nous notons $\mathbb{1}$ la fonction définie sur les entiers par $\mathbb{1}(n) = 1$ pour tout n.

Lemme 4.2 *Soit L, M et N trois paramètres réels positifs tels que $L = MN$. Nous avons*

$$\sum_{\ell \le L} h(\ell) = \sum_{m \le M} f(m) \sum_{n \le L/m} g(n) + \sum_{n \le N} g(n) \sum_{m \le L/n} f(m) - \Bigl(\sum_{m \le M} f(m)\Bigr)\Bigl(\sum_{n \le N} g(n)\Bigr)$$

Démonstration. Nous écrivons

$$\begin{aligned}\sum_{\ell \le L} h(\ell) = \sum_{mn \le L} f(m)g(n) &= \sum_{m \le M} \sum_{n \le L/m} f(m)g(n) + \sum_{M < m \le L} \sum_{n \le L/m} f(m)g(n) \\ &= \sum_{m \le M} \sum_{n \le L/m} f(m)g(n) + \sum_{n \le N} \sum_{M < m \le L/n} f(m)g(n)\end{aligned}$$

d'où l'on conclut aisément. Quand on utilise cette formule, on dit que l'on utilise *la méthode de l'hyperbole de Dirichlet.* □

4.3 Un meilleur terme d'erreur pour le nombre de diviseurs

Théorème 4.3 *Nous avons*

$$\sum_{n \le x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + \mathcal{O}^*(2\sqrt{x}).$$

Pour $x = 10^6$, nous vérifions que $10^6 \log(10^6) + (2\gamma - 1)10^6 = 13\,969\,941.887\cdots$ qui ne différe que de $92.112\cdots$ de la vraie valeur ! Comme $2\sqrt{10^6} = 2000$, nous constatons sur cet exemple que le terme d'erreur est peut être même d'ordre plus petit que ce que nous démontrons. C'est vrai.

Nous avons déjà introduit la méthode de l'hyperbole de Dirichlet. Elle nous conduit ici à la formule suivante, en notant $S(x)$ la somme en question et $\sqrt{x} = \sqrt{x}$:

$$S(x) = \sum_{\ell m \le x} 1 = 2 \sum_{\ell \le \sqrt{x}} [x/\ell] - [\sqrt{x}]^2$$

où $[y]$ désigne la partie entière du réel y. En utilisant

$$[y] = y - \tfrac{1}{2} - \{y\} + \tfrac{1}{2} \tag{4.1}$$

il vient

$$S(x) = 2x \sum_{\ell \le \sqrt{x}} 1/\ell - [\sqrt{x}] - [\sqrt{x}]^2 - 2 \sum_{\ell \le \sqrt{x}} \bigl(\{x/\ell\} - \tfrac{1}{2}\bigr). \tag{4.2}$$

Nous allons montrer que la dernière somme est petite, mais il nous faut d'abord traiter les premiers termes. Ce n'est pas difficile, mais il est utile de signaler au lecteur qu'un peu de doigté est nécessaire et qu'il n'est a priori absolument pas évident qu'un terme de la forme $x\{\sqrt{x}\}$ n'apparaisse pas, puisque

$$[\sqrt{x}] + [\sqrt{x}]^2 = \sqrt{x} + x - 2\sqrt{x}\{\sqrt{x}\} + \{\sqrt{x}\}^2$$

en écrivant $[\sqrt{x}] = \sqrt{x} - \{\sqrt{x}\}$. Par ailleurs, en utilisant la formule d'Euler Maclaurin, nous obtenons

$$\sum_{\ell \le \sqrt{x}} 1/\ell = \log[\sqrt{x}] + \gamma + \frac{1}{2[\sqrt{x}]} + \mathcal{O}(1/\sqrt{x}^2)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} 2x \sum_{\ell \le \sqrt{x}} 1/\ell &= 2x\log[\sqrt{x}] + 2\gamma x + \frac{x}{[\sqrt{x}]} + \mathcal{O}(x/\sqrt{x}^2) \\ &= x\log x + 2\gamma x + 2x\log\bigl(1 - \{\sqrt{x}\}/\sqrt{x}\bigr) + \frac{\sqrt{x}}{1 - \{\sqrt{x}\}/\sqrt{x}} + \mathcal{O}(1) \\ &= x\log x + 2\gamma x - \sqrt{x}\{\sqrt{x}\} + \sqrt{x} + \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

EXERCICE 54. *Soit* $q \ge 2$ *un entier* que l'on suppose premier dans cette partie.

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Exprimer*

$$T_q(L) = \sum_{\substack{\ell \le L \\ q \mid \ell}} d(\ell)$$

en fonction T_1 *et en déduire que, si* $L \ge q$*, nous avons*

$$T_q(L) = \frac{2q-1}{q^2} L\log L - 2\frac{q-1}{q^2} L\log q + \frac{2q-1}{q^2}(2\gamma - 1)L + \mathcal{O}(\sqrt{L/q}).$$

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Montrer que l'estimation de la question précédente est en fait valable pour* $L > 0$.

EXERCICE 56. *Soit* X *un paramètre réel positif. Soit* f *une fonction. Nous supposons qu'il existe trois constantes* $M(f)$, $M^+(f)$ *et* $\delta > 0$ *(qui peuvent toutes dépendre de* X*, tout comme* f *d'ailleurs), telles que*

$$\sum_{d \le y} f(d) = M(f)y + \mathcal{O}(y^{1-\delta}) \qquad (1 \le y \le X)$$

et

$$\sum_{d \le X^{\frac{1}{1+\delta}}} |f(d)| \ll (M^+(f) + \delta^{-1})\, X^{\frac{1}{1+\delta}}.$$

Nous supposons aussi que $|M(f)| \ll M^+(f)$.

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Montrer que nous pouvons prendre* Λ *ou* μ *comme fonction* f*, avec* $\delta = 10(\log\log X)/\log X$.

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Pour $\lambda > 0$, nous définissons*

$$c_1(\lambda) = \lambda \int_\lambda^\infty \{t\} \frac{dt}{t^2}$$

de telle sorte que $c_1(1) = 1 - \gamma$. Montrer que c_1 est dérivable sauf aux points entiers et que l'on a $|c_1(\lambda) - \frac{1}{2}| \leq 1/(4\lambda)$.

$\diamond$ 3 $\diamond$ *Montrer que*

$$\sum_{\ell \leq \lambda} \Big(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{\lambda} \Big) = \int_1^\lambda [t] \frac{dt}{t^2} = \log \lambda - \int_1^\lambda \{t\} \frac{dt}{t^2}.$$

$\diamond$ 4 $\diamond$ *Montrer que, pour $\lambda > 0$, nous avons*

$$\sum_{d \leq X/\lambda} f(d)\{X/d\} = c_1(\lambda) M(f) \frac{X}{\lambda} + \mathcal{O}\big((M^+(f) + \delta^{-1}) X^{\frac{1}{1+\delta}}\big).$$

Indication : *Le principe de l'hyperbole de Dirichlet nous donne*

$$\sum_{d \leq X/\lambda} f(d)[X/d] = \sum_{d \leq D} f(d) \sum_{\ell \leq X/d} 1 + \sum_{\ell \leq L} \sum_{d \leq \min(X/\lambda, X/\ell)} f(d) - \sum_{\ell \leq L} 1 \sum_{d \leq D} f(d).$$

Ensuite, il faut atteindre

$$\sum_{d \leq X/\lambda} f(d)[X/d] = X(M(f) \log X + C(f)) - M(f) X \Bigg(1 - \gamma + \sum_{\ell \leq \lambda} \Big(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{\lambda} \Big) \Bigg) + \mathcal{O}(R)$$

où R est un terme d'erreur.

$\diamond$ 5 $\diamond$ *Nous définissons*

$$c_2(\lambda) = \lambda \int_\lambda^\infty \{t\} \log t \frac{dt}{t^2}.$$

Montrer que pour $\lambda \geq 1$, nous avons

$$\sum_{d \leq X/\lambda} f(d)\{X/d\} \log \frac{X}{d} = c_2(\lambda) M(f) \frac{X}{\lambda} + \mathcal{O}\big((M^+(f) + \delta^{-1}) X^{\frac{1}{1+\delta}} \log X\big).$$

◇ 6 ◇ *Montrer que, pour $\lambda \geq 1$, nous avons*

$$\sum_{d \leq X/\lambda} \mu^2(d) \{X/d\} = \frac{6}{\pi^2} c_1(\lambda) \frac{X}{\lambda} + \mathcal{O}(X^{2/3}).$$

◇ 7 ◇ *Montrer que nous avons*

$$\sum_{d \leq X} \mu^2(d) \left\{ \frac{X}{d} \right\} \log \frac{X}{d} = \frac{6}{\pi^2} c_2(1) X + \mathcal{O}(X^{2/3} \log X).$$

Indication : *Il faut aller voir la section 7.3.*

Chapitre 5

Les estimations de Mertens sur les nombres premiers

Nous allons évidemment avoir besoin de quantifier le nombre de nombres premiers dans un intervalle. De telles estimations existent depuis longtemps, et le travail consistant à les rendre explicite numériquement a débuté dans les années quarante. Nous disposons maintenant de bonnes estimations pour les quantités simples. Nous en profitons aussi pour introduire deux techniques simples et efficaces.

5.1 La fonction de von Mangoldt

Nous avons besoin ici d'une fonction nommée d'après Hans von Mangoldt. Celui-ci a publié en 1894 un mémoire important sur les nombres premiers où il introduit notamment cette fonction sous la notation $L(n)$. Nous la notons $\Lambda(n)$ comme il est usuel à l'heure actuelle. Elle est définie par :

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^a \text{ avec } a \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.1}$$

Par exemple $\Lambda(2) = \Lambda(4) = \log 2$ et $\Lambda(15) = 0$. Notons explicitement que $\Lambda(1) = 0$. L'apparition de cette fonction n'est pas du tout mystérieuse si l'on raisonne en termes de séries de Dirichlet mais nous évitons ce point de vue ici. Du coup, la justification de son introduction vient de deux aspects. Tout d'abord, elle permet d'isoler les puissances des nombres premiers des autres entiers tout en leur attribuant un poids assez peu fluctuant $\log p$, et nous verrons au lemme 5.5 que la contribution des p^2, p^3, … est négligeable devant celle des nombres premiers p.

Cela étant, son intérêt véritable résulte de l'identité :

$$\forall n \text{ (entier) } \geq 1, \quad \sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n, \tag{5.2}$$

où la somme porte sur tous les diviseurs $d \geq 1$ de n.

Démonstration. Pour $n = 1$, cette identité est évidente. Pour n plus grand, nous le décomposons en facteurs premiers $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_K^{a_K}$ où les p_i sont des nombres premiers distincts et les a_i des entiers ≥ 1. Il vient alors

$$\log n = a_1 \log p_1 + a_2 \log p_2 + \cdots + a_K \log p_K$$

et les diviseurs d de n pour lesquels $\Lambda(d) \neq 0$ sont les $p_1^{b_1}$ avec $1 \leq b_1 \leq a_1$ (il y en a a_1 de cette forme), puis les $p_2^{b_2}$ avec $1 \leq b_2 \leq a_2$ (il y en a a_2 de cette forme), etc. Et bien sûr, $a_1 \log p_1 = \sum_{b_1} \log p_1$, ce qui permet de clore la preuve. □

5.2 De la fonction log à la fonction Λ

Commençons par un lemme classique d'analyse :

Lemme 5.1 *Pour $x \geq 1$, nous avons*

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \log n = x \log x - x + \mathcal{O}^*(\log(2x)).$$

Démonstration. Soit N la partie entière de x. Nous procédons par comparaison à une intégrale, c'est à dire que nous utilisons les inégalités

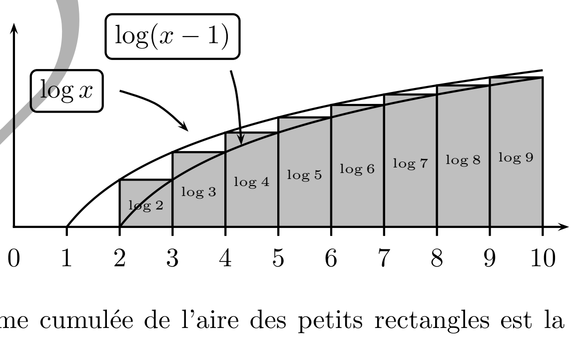
$$\int_{n-1}^{n} \log t \, dt \leq \log n \leq \int_{n}^{n+1} \log t \, dt$$

qui sont une simple conséquence du caractère croissant du logarithme. En les sommant, nous obtenons

$$\int_{1}^{N} \log t \, dt \leq \sum_{2 \leq n \leq N} \log n \leq \int_{2}^{N+1} \log t \, dt \tag{5.3}$$

et un peu de travail permet de conclure, moyennant de se souvenir que $x \mapsto x \log x - x$ est une primitive de $x \mapsto \log x$.

Voici une interprétation graphique de l'encadrement :



La somme cumulée de l'aire des petits rectangles est la quantité qui nous interesse. Nous constatons graphiquement qu'elle est majorée par l'intégrale de la fonction ce qui est le membre de droite de 5.3 et minorée par l'intégrale de cette fonction translatée d'une unité vers la gauche, soit le membre de gauche de 5.3. □

Nous écrivons alors

$$\sum_{n\le x}\log n=\sum_{n\le x}\sum_{d|n}\Lambda(d)=\sum_{d\le x}\Lambda(d)[x/d]$$

et l'idée de tout ce qui suit est basée sur l'égalité :

$$\sum_{d\le x}\Lambda(d)[x/d]=x\log x-x+\mathcal{O}^*(\log(2x)). \tag{5.4}$$

Exercice 61. *(Exercice J)*

⋄ 1 ⋄ *Montrer que, pour* $\Re s>1$*, nous avons* $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=\sum_{n\ge1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$.

⋄ 2 ⋄ *Montrer que, pour* $s>1$*, nous avons* $\log\zeta(s)=\sum_{n\ge2}\frac{\Lambda(n)}{n^s\log n}$.

5.2.1 Une majoration à la Chebyshev

Théorème 5.2 *Nous avons pour tout* $x\ge1$*,*

$$\sum_{x/2<d\le x}\Lambda(d)\le 7x/10.$$

Démonstration. Une utilisation directe de 5.4 donne

$$\sum_{d\le x}\Lambda(d)\bigl([x/d]-2[x/(2d)]\bigr)=x\log 2+\mathcal{O}^*(2\log(2x)).$$

Nous remarquons maintenant que $[x]-2[x/2]\ge0$ pour tout x réel : en effet, cette quantité vaut 0 si x est dans $[0,1[$, puis 1 si x est dans $[1,2[$ et enfin est périodique de période 2. Par conséquent, l'équation ci-dessus implique

$$\sum_{x/2<d\le x}\Lambda(d)\bigl([x/d]-2[x/(2d)]\bigr)\le x\log 2+2\log(2x).$$

Pour les d entre $x/2$ et x, nous avons $[x/d]-2[x/(2d)]=1$ ce qui aboutit à

$$\sum_{x/2<d\le x}\Lambda(d)\le x\log 2+2\log(2x).$$

Cette inégalité permet de prouver le théorème si $x\ge1150$ et une vérification numérique permet d'étendre ce résultat à tout x réel ≥1. □

En découpant l'intervalle $[1,x]$ entre $]x/2,x]$ union $]x/4,x/2]$ union etc, nous obtenons le corollaire classique :

Corollaire 5.3 *Nous avons* $\sum_{d\le x}\Lambda(d)\le 7x/5$ *pour tout* $x\ge1$.

Pafnouty Chebyshev est le premier à avoir établi en 1848 une telle estimation, par une méthode d'ailleurs proche de celle que nous avons développée. Notons ici que John Rosser a montré en 1941 que le maximum de la fonction $\sum_{d\le x}\Lambda(d)/x$ était atteint en $x=113$ et était un peu inférieur à 1.04.

Ceci nous donne aussi une majoration du nombre de nombres premiers inférieurs à une borne donnée :

Corollaire 5.4 *Pour tout $x \geq 1$, le nombre de nombres premiers inférieurs à x est au plus $3x/(2\log x)$.*

Signalons les notations traditionnelles $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$ et $\psi(x) = \sum_{d \leq x} \Lambda(d)$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que ce nombre de nombres premiers s'écrit aussi $\sum_{p \leq x} 1$. Or, nous tirons du corollaire précédent la majoration : $\sum_{p \leq x} \log p \leq 7x/5$. Nous nous débarrassons alors du poids $\log p$ par une technique que l'on appelle *la sommation par parties* du fait que, dans le formalisme de l'intégrale de Stieltjes, il s'agit effectivement de l'extension de la technique du même nom standard au niveau du calcul intégral. Une version souple et élémentaire s'obtient en écrivant :

$$\frac{1}{\log p} = \frac{1}{\log x} + \int_p^x \frac{dt}{t \log^2 t}$$

ce qui nous donne

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{\log p} \leq \frac{7x}{5 \log x} + \int_2^x \frac{7dt}{5 \log^2 t}.$$

Pour la dernière intégrale, nous commençons par remarquer qu'une intégration par parties (classique !) implique, pour $k \geq 0$, que :

$$J_k = \int_2^x \frac{dt}{\log^k t} \leq \frac{x}{\log^k x} + \int_2^x \frac{k\,dt}{\log^{k+1} t}$$

d'où nous déduisons que $(\log x - 3)(\log^2 x) J_3 \leq x$ et $J_2 \leq x/\log^2 x + J_3$. Ce qui à termes nous donne le résultat annoncé si $x \geq \exp(5)$. Un calcul finit. $\square$

Exercice 62. *Montrer que la série $\sum_p 1/(p \log p)$ est convergente.*

La fonction Λ donne aussi un poids non nul à des entiers qui ne sont pas de nombres premiers mais des puissances de ceux-ci. Leur contribution est la plupart du temps négligeable grâce au lemme suivant :

Lemme 5.5 *Pour $x \geq 1$, nous avons*

$$\sum_{\substack{d \leq x \\ d \text{ non premier}}} \Lambda(d) \leq 3\sqrt{x}/2.$$

Démonstration. En effet, les d comptés s'écrivent p^a avec $a \geq 2$ et $p \leq \sqrt{x}$. Un nombre premier va apparaître en p, puis p^2, et caetera jusqu'à p^a où $a \leq (\log x)/\log p$. Le corollaire précédent conclut. $\square$

Exercice 63. *(Exercice K) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4m + 3$.*

Indication : *On pourra montrer que l'entier $4 \cdot m! + 3$ admet au moins un facteur premier $\equiv 3[4]$.*

Exercice 64. *Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6m + 5$.*

Indication : *On pourra montrer que l'entier $6 \cdot m! + 5$ admet au moins un facteur premier $\equiv 5[6]$.*

5.2.2 Un théorème à la Mertens

Nous en arrivons à un théorème dans l'esprit d'un résultat de Franz Mertens issu d'un mémoire de 1874. Il contient en essence une *minoration* du nombre de nombres premiers comme nous le montrons ci-après.

Théorème 5.6 *Pour $x \geq 2$, l'égalité suivante a lieu*

$$\sum_{d \leq x} \Lambda(d)/d = \log x - \tfrac{2}{3} + \mathcal{O}^*(\tfrac{1}{2})$$

Démonstration. Nous partons toujours de (5.4) et écrivons cette fois-ci $[x] = x - \{x\}$ où nous majorons la partie fractionnaire par 1 et la minorons par 0. Il vient

$$\tfrac{7}{10} + \log(2x)/x \geq \sum_{d \leq x} \Lambda(d)/d - \log x + 1 \geq -\log(2x)/x.$$

Pour $x \geq 120$, cela donne la borne supérieure $\log x - \frac{4}{15}$ et la borne inférieure $\log x - \frac{21}{20}$, ce qui est meilleur que le résultat annoncé. Pour x plus petit, une vérification numérique conclut. □

Exercice 65.

◇ 1 ◇ *(A. Selberg) Montrer que $\Lambda \star \Lambda + \Lambda \log = \mu \star \log^2$ où $\Lambda \log$ est la fonction qui à n, associe $\Lambda(n) \log n$.*

◇ 2 ◇ *Montrer que $\Lambda \star \Lambda - \Lambda \log = \mathbb{1} \star \mu \log^2$ où $\mu \log^2$ est la fonction qui à n, associe $\mu(n)(\log n)^2$.*

5.3 Un résultat de type postulat de Bertrand

Le mathématicien français Joseph Bertrand conjecturait en 1845 qu'il y a toujours un nombre premier dans l'intervalle $[n, 2n-3]$ si n est un entier ≥ 4, conjecture qui devait être démontrée par Chebyshev en 1850. Les résultats que nous avons montrés sont un peu plus faibles que ceux dont disposaient Chebyshev mais nous permettent de démontrer un résultat du même genre, à savoir :

Théorème 5.7 *Pour $x \geq 2$, nous avons*

$$C(x) = \sum_{x/4 < p \leq x} 1 \geq 2x/(25 \log x).$$

Il existe donc un nombre premier dans l'intervalle $]x/4, x]$ pour tout $x \geq 2$. Pour arriver au postulat de Bertrand, nous pourrions rechercher une autre inégalité sur les parties entières, ce qui est le chemin suivi par Chebyshev. Ou inclure dans le théorème 5.2 la contribution des entiers entre $x/4$ et $x/8$ et modifier conséquemment le théorème 5.6.

Démonstration. En appliquant le théorème 5.6 en x et $x/4$, nous obtenons

$$\sum_{x/4 < d \leq x} \Lambda(d)/d \geq \log 4 - 1 \tag{5.5}$$

et par conséquent $\sum_{x/4<d\leq x}\Lambda(d) \geq x(\log 4 - 1)/4 \geq x/11$ pour $x \geq 16$. Nous étendons cette inégalité à $x \geq 2$ par le calcul et il s'agit ensuite de passer de $\Lambda(d)$ à une somme sur les nombres premiers, ce que nous effectuons à l'aide du lemme 5.5, obtenant

$$\sum_{x/4<p\leq x} \log p \geq \frac{x}{11} - \frac{3\sqrt{x}}{2} \geq 2x/25$$

si $x \geq 19\,000$ d'où le théorème dans ce cas. Un calcul numérique permet d'étendre ce résultat. $\square$

Concernant de bonnes approximations de la somme des nombre premiers $\leq x$, signalons ici que dans la continuité des travaux de Rosser, Pierre Dusart a établi en 1999 que, pour $x \geq 598$

$$1 + \frac{0.992}{\log x} < \frac{\log x}{x}\sum_{p\leq x} 1 < 1 + \frac{1.2762}{\log x}. \tag{5.6}$$

Nous aurons encore besoin à la fin de ce livre d'un dernier résultat que voici.

Lemme 5.8 *Pour $x \geq 2$, nous avons*

$$\sum_{p\leq x} 1/p = \log\log x - \tfrac{1}{5} + \mathcal{O}^*(7/5).$$

Démonstration. Le théorème de Mertens implique que

$$-\tfrac{7}{6} - \sum_{k\geq 2, p\geq 2} \frac{\log p}{p^k} \leq \sum_{p\leq x} \frac{\log p}{p} - \log x \leq -\tfrac{1}{6}.$$

En sommant d'abord sur k et en utilisant un peu de calcul numérique, nous montrons que la somme sur k et p qui apparaît vaut au plus 0.8. Pour obtenir le lemme, nous utilisons une sommation par parties comme page 36. Il en résulte la majoration

$$\sum_{p\leq x} 1/p \leq \log\log x + 1 - \frac{1}{6\log 2} - \log\log 2$$

et la minoration $\log\log x + 1 - \frac{59}{30\log 2} - \log\log 2$. $\square$

Exercice 66. *Montrer que*

$$\sum_{n\leq X} \omega(n) = X\log\log X + \mathcal{O}(X)$$

où $\omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers de n.

Exercice 67.

◇ 1 ◇ *Montrer qu'il existe une constante b telle que*

$$\sum_{p\le x} 1/p = \log\log x + b + \mathcal{O}(1/\log x)$$

et telle que

$$-\sum_{p\le x}\log\Big(1-\frac{1}{p}\Big) = \log\log x + c + \mathcal{O}(1/\log x)$$

où la constante c est donnée par

$$c = b + \sum_{p\ge 2}\sum_{k\ge 2}\frac{1}{kp^k}.$$

◇ 2 ◇ *Montrer que, pour $x\ge 1$,*

$$\sum_{2\le n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n\log n} = \sum_{n\le \log x}\frac{1}{n} + c - \gamma + \mathcal{O}(1/\log(2x)).$$

◇ 3 ◇ *Montrer que, pour $\delta > 0$,*

$$\delta\int_1^\infty \sum_{2\le n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n\log n}\frac{dx}{x^{1+\delta}} = \log\zeta(1+\delta) = -\log\delta + \mathcal{O}(\delta).$$

◇ 4 ◇ *Montrer que, pour $\delta > 0$,*

$$\delta\int_1^\infty \sum_{1\le n\le x}\frac{1}{n}\frac{dx}{x^{1+\delta}} = \log(1-e^{-\delta})^1 = -\log\delta + \mathcal{O}(\delta)$$

et en conclure que $c=\gamma$.

5.4 Le théorème des nombres premiers

En 1896, Hadamard d'un côté et De la Vallée-Poussin de l'autre (de la Vallée-Poussin, 1899) démontraient le théorème suivant :

Théorème 5.9 (Théorème des nombres premiers)

Nous avons, pour tout constante $A\ge 1$,

$$\sum_{p\le X}\log p = X + \mathcal{O}(X/(\log X)^A).$$

La constante impliquée dans le symbole $\mathcal{O}$ dépend bien sûr du choix de A.

Nous ne le démontrerons pas ici. Sa preuve est assez simple mais demande du matériel théorique dont nous ne disposons pas ici.

Exercice 71.

⋄ 1 ⋄ *Montrer que* $\sum_{p\le X} 1 \sim X/\log X$.

⋄ 2 ⋄ *Montrer que* $\sum_{p\le X} 1 - X/\log X = \mathcal{O}\big(X/(\log X)^2\big)$.

⋄ 3 ⋄ *Montrer que* $\sum_{p\le X} 1 - X/\log X = X/(\log X)^2 + \mathcal{O}\big(X/(\log X)^3\big)$. *Ceci montre que le terme d'erreur de la question précédente ne peut pas être amélioré.*

Exercice 72. *Montrer que*

$$\sum_{n\le X} \Lambda(n) = X + \mathcal{O}\big(X/(\log X)^{10}\big)$$

Exercice 73. *Montrer que*

$$\sum_{n\le X} \Lambda(n)\Big(1 - \frac{n}{X}\Big) = \tfrac{1}{2}X + \mathcal{O}(X/\log^2 X).$$

Indication : *Une sommation par parties résoud le problème, c'est à dire que l'on utilise* $1 - u = \int_u^1 dt$.

Exercice 74. *Montrer que*

$$\sum_{n+m\le X} \Lambda(n)\Lambda(m) = \tfrac{1}{2}X^2 + \mathcal{O}(X^2/\log^2 X).$$

Indication : *L'exercice 73 peut aider.*

Exercice 75. *(Théorème de Mertens)*

⋄ 1 ⋄ *Montrer qu'il existe une constante* $B > 0$ *telle que*

$$\prod_{p\le X} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) \sim B/\log X$$

⋄ 2 ⋄ *Montrer que*

$$\prod_{p\le X} \Big(1 + \frac{1}{p}\Big) \sim \frac{\pi^2}{6B}/\log X.$$

Voir l'exercice 67 pour la valeur $B = e^{-\gamma}$.

Exercice 76. *Nous définissons* $m(D) = \sum_{d\le D} \mu(d)/d$ *et* $M(D) = \sum_{d\le D} \mu(d)$. *Montrer que*

$$m(D) = \frac{M(D)}{D} + \frac{1}{D}\int_1^D \Big\{\frac{D}{t}\Big\}\frac{M(t)dt}{t} + \frac{\log D}{D}$$

pour $D \ge 1$.

Indication : *On pourra démontrer l'identité annexe :*

$$\int_1^D \left[\frac{D}{t}\right] \frac{M(t)dt}{t} = \log D.$$

Exercice 77. *(Exercice L) Montrer que*

$$-\sum_{d|q} \frac{\mu(d)\log d}{d} \geq 0$$

en utilisant $\log = \Lambda \star \mathbb{1}$.

Exercice 78. *Montrer que*

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{1/2}) + \vartheta(x^{1/3}) + \vartheta(x^{1/4}) + \cdots$$

où $\vartheta(y) = \sum_{p\leq y} \log p$.

Exercice 79. *En notant* $M(z) = \sum_{d\leq z} \mu(d)$, *montrer que*

$$M(x) + M(x/2) + M(x/3) + M(x/4) + \cdots = 1$$

pour tout réel $x \geq 1$.

Exercice 80. *(Iseki & Tatuzawa) Soit F une fonction de la variable réelle. Nous définissons*

$$G(x) = (\log x) \sum_{n\leq x} F(x/n).$$

Montrer que

$$F(x)\log x + \sum_{n\leq x} F(x/n)\Lambda(n) = \sum_{d\leq x} \mu(d)G(x/d).$$

Indication : *On pourra partir de*

$$F(x)\log x = \sum_{n\leq x} F(x/n) \sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{x}{n}$$

et utiliser

$$\sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{n}{d} = \Lambda(n).$$

Exercice 81.

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Utiliser la formule d'Iseki & Tatuzawa de l'exercice précédent avec* $F_1(x) = \psi(x)$ *et* $F_2(x) = x - \gamma - 1$ *pour montrer la formule de Selberg :*

$$\psi(x)\log x + \sum_{n\leq x} \Lambda(n)\psi(x/n) = 2x\log x + \mathcal{O}(x).$$

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Utiliser la formule d'Iseki & Tatuzawa de l'exercice précédent pour montrer :*

$$M(x)\log x + \sum_{n\le x} \Lambda(n) M(x/n) = \mathcal{O}(x).$$

Chapitre 6

Taille de la fonction nombre de diviseurs

Commençons par l'expression explicite de la fonction (nombre) de diviseurs :

$$n = \prod_i p_i^{\alpha_i}, \quad (p_i \neq p_j \text{ si } i \neq j), \quad d(n) = \prod_i (\alpha_i + 1). \tag{6.1}$$

Théorème 6.1

$$\log d(n) \ll \log(3n)/\log\log(3n)$$

Démonstration. Nous écrivons

$$\log d(n) = \sum_{p_i^{\alpha_i} \| n} \log(\alpha_i + 1) \leq \sum_{\substack{p_i^{\alpha_i} \| n, \\ p_i \leq P}} \log(\alpha_i + 1) + 2 \sum_{\substack{p_i^{\alpha_i} \| n, \\ p_i \geq P}} \alpha_i.$$

Posons $q_i = p_i^{\alpha_i}$. Les q_i sont premiers entre eux. Par conséquent, la deuxième somme, disons R, vérifie $P^R \leq n$, i.e.

$$\sum_{\substack{p_i^{\alpha_i} \| n, \\ p_i \geq P}} \alpha_i \leq (\log n)/\log P.$$

Concernant la première somme, nous écrivons simplement

$$\sum_{\substack{p_i^{\alpha_i} \| n, \\ p_i \leq P}} \log(\alpha_i + 1) \leq \log\log(3n) \sum_{p \leq P} 1 \ll \log\log(3n) \frac{P}{\log P}.$$

Le choix

$$P = \frac{\log(3n)}{(\log\log(3n))^2}$$

donne le résultat. □

Exercice 83. *Montrer qu'il existe une suite (n_k) tendant vers l'infini et telle que*

$$\liminf \frac{d(n_k)\log\log n_k}{\log n_k} > 0.$$

Quelle est la meilleure minoration possible ?

Exercice 84. *Montrer qu'il existe une constante $c_1 > 0$ telle que, pour tout entier q, on a*

$$q/\varphi(q) \leq c_1 \log\log 3q.$$

Indication : *On peut partir de $\log(q/\varphi(q)) = -\sum_{p|q} \log(1-1/p)$ puis séparer le traitement des $p \leq P = \log q$ de ceux qui sont plus grands. Ces derniers sont peu nombreux.*

Exercice 85. *Montrer qu'il existe une constante $c_2 > 0$ telle que, pour tout entier q, on a*

$$\sum_{p|q} \frac{1}{p} \leq c_2 \log\log\log 9q.$$

Indication : *On pourra utiliser un procédé similaire à celui de l'exercice 84.*

Exercice 86. *Montrer pour tout entier q, on a $\sigma(q) \leq q(1+\log q)$ Montrer en outre qu'il existe une constante $c_3 > 0$ telle que, pour tout entier q, on a*

$$\sigma(q) = \sum_{d|q} d \leq c_3 q \log\log(9q).$$

Montrer que cette majoration est la meilleure possible à la constante multiplicative c_3 près.

Indication : *On pourra d'abord montrer que σ est multiplicative, en déduire une expression explicite et enfin considérer $\log(\sigma(n)/n)$. On pourra utiliser un procédé similaire à celui de l'exercice 84 ou utiliser l'exercice 85.*

Exercice 87.

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des entiers n'ayant que des facteurs premiers $\leq D$ où D est un paramètre ≥ 1. Montrer que*

$$\sum_{d\in\mathcal{D}} 1/d \ll \log(2D).$$

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Montrer que, pour tout $q \geq 1$, nous avons*

$$\tau(m)^q \leq \sum_{dk=m} \tau(d)^{q-1}\tau(k)^{q-1}$$

$\diamond$ 3 $\diamond$ *Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des entiers n'ayant que des facteurs premiers $\leq D$ où D est un paramètre ≥ 1. Montrer que, pour tout q paramètre entier ≥ 1, nous avons*

$$\sum_{m\in\mathcal{D}} \tau(m)^q/m \ll (\log(2D))^{2^q}.$$

Indication : *On pourra procéder par récurrence sur q.*

$\diamond$ 4 $\diamond$ *Soit D est un paramètre ≥ 1 fixé et soit $\tau_D(n)$ le nombre de diviseurs de n qui sont $\leq D$. Soit $q \geq 1$ un paramètre. Montrer que*

$$\sum_{n\leq X} \tau_D(n)^q \ll X(\log(2D))^{2^q}.$$

Indication : *On pourra noter $k(n)$, pour tout entier n, le plus grand diviseur de n dans $\mathcal{D}$.*

Exercice 91. *Nous notons ici $\tau_r(n)$ le nombre r-uplets d'entiers $(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ tels que $n_1 n_2 \cdots n_r = n$.*

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Calculer $\tau_r(p^a)$ lorsque p est un nombre premier.*

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Montrer que*

$$\sum_{n \leq N} \tau_r(n)^2/n \leq (\log N + 1)^{r^2}$$

Indication : *On pourra utiliser $\tau_r(n_1 n_2 \cdots n_r) \leq \tau_r(n_1)\tau_r(n_2)\cdots\tau_r(n_r)$ que l'on prendra soin de démontrer.*

$\diamond$ 3 $\diamond$ *Montrer que*

$$\sum_{n \leq N} \tau_r(n)^2 \ll_r N(\log N + 1)^{r^2-1}$$

où le symbole $\ll_r$ signifie que la valeur absolue du membre de gauche est inférieure au membre de droite multiplié par une constante qui peut dépendre de r.

Exercice 94. *Montrer que la série*

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}\right)^r$$

est convergente pour tout entier $r \geq 2$.

Exercice 95. *Montrer que*

$$d(n) \leq 2 \sum_{\substack{\delta | n, \\ \delta \leq \sqrt{n}}} 1.$$

Exercice 96. *(B. Landreau sur une idée de van der Corput) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, et tout réel $s > 0$, nous avons*

$$d^s(n) \leq k^{k(k-1)s} \sum_{\substack{\delta | n, \\ \delta \leq n^{1/k}}} d^{ks}(\delta).$$

Indication : *On définira la fonction auxiliaire*

$$G(n) = \sum_{\substack{\delta \mid n, \\ \delta \leq n^{1/k}}} d^{ks}(\delta)$$

et on montrera d'abord que cette fonction est sur-multiplicative, i.e. que $G(n_1 n_2) \geq G(n_1)G(n_2)$ *si* $\mathrm{pgcd}(n_1, n_2) = 1$. *On établira ensuite que* $d^s(p^\nu) \leq d^{ks}(p^{[\nu/k]}) \leq G(p^\nu)$ *lorsque* $\nu \geq k$ *et que* $d^s((p_1 \cdots p_r)^\nu) \leq k^{ks} G((p_1 \cdots p_r)^\nu)$ *lorsque* $\nu < k$, *car, si* $r < k$, *nous avons* $d^s(n) \leq k^{ks}$ *et si* $r \geq k$, $d^s(n) \leq k^{ks} d^{ks}((p_1 \cdots p_{[r/k]})^\nu)$ *(et en rangeant* $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$, *on a* $(p_1 \cdots p_{[r/k]})^\nu \leq n^{1/k}$*).*

Voir (Bordellès, 2006) pour une application.

Chapitre 7

La méthode de convolution

Nous présentons ici une méthode classique sur un exemple qui concerne la fonction

$$f_0(n) = \prod_{p|n}(p-2). \tag{7.1}$$

La suite de ses valeurs sur les entiers entre 1 et 54, que voici

$$1, 0, 1, 0, 3, 0, 5, 0, 1, 0, 9, 0, 11, 0, 3, 0, 15, 0, 17, 0, 5, 0, 21, 0, 3, 0, 1, 0, 27,$$
$$0, 29, 0, 9, 0, 15, 0, 35, 0, 11, 0, 39, 0, 41, 0, 3, 0, 45, 0, 5, 0, 15, 0, 51, 0,$$

ne nous informe que peu, même si nous nous contentons de cette suite sur les entiers impairs de ce même intervalle :

$$1, 1, 3, 5, 1, 9, 11, 3, 15, 17, 5, 21, 3, 1, 27, 29, 9, 15, 35, 11, 39, 41, 3, 45, 5, 15, 51.$$

Pour obtenir plus d'informations, nous pouvons chercher à déterminer son ordre moyen, soit une approximation de $(1/X)\sum_{n\le X} f_0(n)$. Et une régularité apparaît ici. Nous allons en effet démontrer que

Théorème 7.1 *Soit X un réel positif. Pour tout σ réel dans $]1/2, 1]$, nous avons*

$$(1/X)\sum_{n\le X} f_0(n) = \mathscr{C}X + \mathcal{O}(X^\sigma)$$

où la constante impliquée dans le symbole $\mathcal{O}$ dépend de σ et où

$$\mathscr{C} = \tfrac{1}{2}\prod_{p\ge 2}\left(1 - \frac{3}{p(p+1)}\right) = 0.14630\cdots$$

Remarquons que comme cela est le cas pour les équivalents, nous choisissons comme ordre moyen une fonction “bien comprise” et “assez simple”, qui permette de surcroît d'avoir un terme d'erreur assez petit. Quant à savoir ce qu'est une fonction “assez simple”, cela dépend évidemment des auteurs !

Dans cet énoncé et de façon systématique dans la suite, la lettre p désigne un nombre premier.

La méthode que nous proposons appartient au folklore et n'a fait lieu d'aucune exposition systématique, pour autant que nous sachions. Elle est très souple dans son utilisation et donne accès à de très bons termes d'erreur. Il s'est développé depuis les années 50 une théorie complète pour évaluer les ordres moyens de fonctions multiplicatives (voir plus loin pour une définition), mais celle-ci s'est surtout orientée vers une extension maximale de la classe considérée plutôt que vers la qualité du terme d'erreur. Citons les théorèmes de Ikehara généralisé par Delange (Delange, 1954), le théorème de Wirsing (Wirsing, 1961), un autre résultat de Delange (Delange, 1961), et le travail exceptionnel de (Halász, 1968). Le lecteur trouvera dans les livres de Ellison & Mendès France (Ellison, 1975) et de Tenenbaum (Tenenbaum, 1995) des expositions pédagogiques de ce matériel.

Signalons encore qu'il nous serait très facile de remplacer le $\mathcal{O}$ dans ce théorème par une inégalité effective. Il est un peu plus difficile de certifier la valeur numérique de $\mathscr{C}$ que nous avançons, mais nous laissons ici ce problème de côté.

Présentons à présent les grandes lignes de la méthode de convolution. Il s'agit de déterminer l'ordre moyen d'une fonction arithmétique f. Pour cela, nous prenons une fonction “modèle” g, qui ressemble à f et dont nous connaissons l'ordre moyen. Le modèle pour f_0 sera la fonction qui à n associe n, dont nous connaissons évidemment un ordre moyen. Comment qualifier le fait que g soit un modèle pour f ? Nous allons définir un produit de convolution $\star$ et montrer qu'il existe une fonction h vérifiant $f = h \star g$, et où h sera “plus petite” que f. L'ordre moyen de f s'obtiendra alors en déterminant celui de $h \star g$, lequel sera essentiellement gouverné par celui de g.

Glissons ici un mot à propos du choix de la fonction f_0. Cette fonction n'a a priori aucune interprétation géométrique ; ce n'est pas tout à fait vrai puisque sa valeur sur un entier sans facteurs carrés, disons q, est le nombre de caractères de Dirichlet primitifs modulo q. Nous avons précisément choisi f_0 pour son côté “quelconque” ; sa forme particulière nous permet aussi de simplifier certaines parties de l'exposition.

La preuve en elle-même est très courte et fait l'objet de la section 7.1, mais nous détaillons avant les notions utilisées.

Nous tenons ici à remercier chaleureusement Hervé Queffelec pour ses indications et ses remarques qui nous ont été essentielles pour rédiger cet article.

7.1 Preuve du théorème 7.1

Première étape

Commençons par expliciter la série de Dirichlet de f_0, et notamment son expression sous forme de produit eulérien. Nous avons, par définition :

$$D(f_0, s) = \prod_{p\geq 2}\sum_{k\geq 0}\frac{\prod_{\ell | p^k}(\ell-2)}{p^{ks}}.$$

Regardons de plus près chaque facteur. Dans la somme portant sur k, la contribution correspondant à $k = 0$ est exceptionnelle et vaut 1 ; le facteur eulérien en p devient :

$$1 + \sum_{k\geq 1}\frac{\prod_{\ell | p^k}(\ell-2)}{p^{ks}}.$$

Or ℓ et p sont des nombres premiers, ce qui implique que $\ell = p$. Il nous reste

$$\sum_{k\geq 1}(p-2)/p^{ks} = \frac{p-2}{p^s-1}.$$

Voici donc la série de Dirichlet associée à f_0 :

$$D(f_0, s) = \prod_{p\geq 2}\Big(1 + \frac{p-2}{p^s-1}\Big). \tag{7.2}$$

Nous remarquons que ce produit *ressemble* à $\prod_{p\geq 2}(1+\frac{1}{p^{s-1}-1})$ qui, lui, correspond à $\zeta(s-1)$. Entreprenons par conséquent de sortir ce facteur de notre produit. Nous écrivons

$$\begin{aligned} D(f_0, s) &= \prod_{p\geq 2}\Big(1 + \frac{p-2}{p^s-1}\Big) = \prod_{p\geq 2}\Big(1 - \frac{2p^{s-1}+p-3}{(p^s-1)p^{s-1}}\Big)\Big(\frac{1}{1-1/p^{s-1}}\Big) \\ &= H(s)\zeta(s-1). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Le produit définissant $H(s)$ converge absolument pour les s pour lesquels la série $\sum \frac{2p^{s-1}+p-3}{(p^s-1)p^{s-1}}$ converge absolument, ce qui a lieu au moins, en étendant cette somme à tous les entiers, pour $s > 3/2$. L'abscisse de convergence absolue de $\zeta(s-1)$ est égale à 2, c'est aussi *probablement* celle de $D(f_0, s)$, tant et si bien que la série H converge effectivement dans un domaine plus large. Si nous réalisons la série H comme la série de Dirichlet d'une fonction, alors celle-ci sera bel et bien plus petite que f_0, au sens que nous avons donné à cette expression au paragraphe 2.2. Commentons plus avant le terme *probablement* ci-dessus. Remarquons tout d'abord que nous n'utilisons cette notion de taille que pour nous guider dans les calculs et qu'un contrôle heuristique nous suffit. Mais nous pouvons aussi montrer à posteriori que l'abscisse de convergence (et donc de convergence absolue ici puisque f_0 est positive ou nulle) est effectivement égale à 2. En effet, supposons le théorème 7.1 démontré. Une sommation par parties nous donne

$$\begin{aligned} \sum_{1\leq n\leq N} f_0(n)/n^s &= \sum_{1\leq n\leq N} f_0(n)\Big(\frac{1}{N^s} + s\int_n^N \frac{dt}{t^{s+1}}\Big) \\ &= \frac{\sum_{1\leq n\leq N} f_0(n)}{N^s} + s\int_n^N \sum_{1\leq n\leq t} f_0(n)\frac{dt}{t^{s+1}} \\ &= \mathscr{C}N^{2-s} + s\mathscr{C}\int_1^N \frac{dt}{t^{s-1}} + \mathcal{O}(N^{1+\sigma-s}) + \mathcal{O}\Big(\int_1^N dt/t^{s-\sigma}\Big). \end{aligned} \tag{7.4}$$

En prenant $\sigma = 0.6$ par exemple, nous constatons bien que la série définissant $D(f_0, s)$ converge pour $s > 2$ et diverge pour $s < 2$. Nous poursuivons cette discussion dans la dernière section de cet article.

Deuxième étape

Il faut maintenant transformer les deux fonctions obtenue $H(s)$ et $G(s) = \zeta(s-1)$ en série de Dirichlet. Le cas de G est facile puisque $G(s) = D(\theta_1, s)$.

Tournons-nous à présent vers H. Nous cherchons une fonction h telle que

$$H(s) = \sum_{n \geq 1} h(n)/n^s \tag{7.5}$$

et nous limitons notre recherche à des fonctions multiplicatives. Nous cherchons donc h telle que :

$$\sum_{k \geq 0} \frac{h(p^k)}{p^{ks}} = 1 - \frac{2p^{s-1} + p - 3}{(p^s - 1)p^{s-1}}. \tag{7.6}$$

La condition $h(1) = 1$ permet de régler le cas $k = 0$. Il nous reste à nous occuper de la somme correspondant à $k \geq 1$. Nous posons $z = 1/p^s$, et obtenons pour le membre de droite de (7.6) la fraction rationnelle en z suivante :

$$-\frac{\frac{2}{pz} + p - 3}{(\frac{1}{z} - 1)\frac{1}{pz}} = \frac{2z + p^2 z^2 - 3pz^2}{z - 1} = -2 \sum_{k \geq 1} z^k - (p^2 - 3p) \sum_{k \geq 2} z^k.$$

En identifiant termes à termes, nous constatons alors que la fonction multiplicative h définie par

$$\begin{cases} h(p) = -2, \\ h(p^k) = -(p^2 - 3p + 2) \quad \text{pour } k \geq 2, \end{cases} \tag{7.7}$$

résout notre problème.

Troisième étape

Comme $D(f_0, s) = H(s)\zeta(s-1)$, et que l'on sait développer en série de Dirichlet $H(s)$ et $\zeta(s-1)$, on a un produit de deux séries de Dirichlet, qui correspond donc à un produit de convolution arithmétique. La propriété 3 nous permet d'identifier termes à termes et de conclure que $f_0 = \theta_1 \star h$.

Nous présentons ici une autre méthode plus pédestre. Considérons la fonction multiplicative h définie par (7.7) et rappelons que θ_1 est la fonction $n \mapsto n$. Nous remarquons que : $\theta_1 \star h$ est encore une fonction multiplicative, qui est par conséquent définie par ses valeurs prises sur les puissances des nombres premiers. Or, pour p nombre premier et k entier naturel ≥ 1 :

$$\begin{aligned}(\theta_1 \star h)(p^k) &= \sum_{\ell / p^k} \theta_1(\frac{p^k}{\ell}) h(\ell) = \sum_{\ell / p^k} \frac{p^k}{\ell} h(\ell) \\ &= p^k \left(1 - \frac{2}{p} - \sum_{2 \leq t \leq k} \frac{p^2 - 3p + 2}{p^t}\right) = f(p^k).\end{aligned}$$

Par multiplicativité, cela implique bien $f_0(n) = (\theta_1 \star h)(n)$. Nous écrivons cette identité sous forme déployée pour la suite :

$$f_0(n) = \sum_{\ell m = n} h(\ell)\theta_1(m) = \sum_{\ell m = n} h(\ell) m.$$

Amorçons maintenant le calcul de l'ordre moyen de f_0. L'égalité ci-dessus nous donne

$$\sum_{n \leq X} f_0(n) = \sum_{\ell m \leq X} h(\ell) m = \sum_{\ell \leq X} h(\ell) \sum_{m \leq X/\ell} m. \tag{7.8}$$

Or, nous savons que, pour tout entier naturel N :

$$\sum_{n\le N} n = N(N+1)/2,$$

ce qui implique que, pour $M \ge 1$ que nous prenons cette fois-ci réel :

$$\sum_{m\le M} m = \tfrac{1}{2}M(M+1) + \mathcal{O}(M) = \tfrac{1}{2}M^2 + \mathcal{O}(M). \tag{7.9}$$

Remarquons tout d'abord que cette estimée est valable dès que M est positif ou nul. Il se trouve que la méthode que nous proposons se simplifie beaucoup si nous nous contentons d'un terme d'erreur moins fort. L'estimation (7.9) implique en effet aussi que

$$\sum_{m\le M} m = \tfrac{1}{2}M^2 + \mathcal{O}(M^\sigma) \tag{7.10}$$

pour tout $\sigma \in [1,2]$ et tout $M \ge 0$.

Nous disposons alors de tous les outils pour conclure. Nous reprenons la preuve à l'équation (7.8) et constatons que la condition $\ell \le X$ est superflue. Il vient alors directement

$$\sum_{n\le X} f_0(n) = \frac{X^2}{2}\sum_{\ell\ge 1}\frac{h(\ell)}{\ell^2} + \mathcal{O}\Big(X^\sigma \sum_{\ell\ge 1}\frac{|h(\ell)|}{\ell^\sigma}\Big).$$

Comme $H(s)$ converge absolument pour $s > 3/2$, la somme $\sum_{\ell\le 1}|h(\ell)|/\ell^\sigma$ est finie pour tout $\sigma > 3/2$. La preuve du théorème 7.1 est terminée, quitte à renommer σ.

Pour le même prix ...

Le lecteur pourra, en suivant une méthode identique à celle proposée dans la démonstration du théorème 7.1, trouver l'ordre moyen de la fonction φ.

7.2 Un exercice de sommations par parties

Afin d'illustrer plus avant cette technique, anticipons sur la preuve du théorème 7.1 et démontrons dès à présent le corollaire suivant du théorème 7.1 :

Théorème 7.2
Nous avons $\sum_{n\le X} f_0(n)/n = 2\mathscr{C}X + \mathcal{O}(X^\sigma)$ *pour tout* σ *réel dans* $]1/2,1]$.

Voici une façon plus usuelle d'énoncer le théorème précédent :

Théorème 7.3
Pour tout $\varepsilon > 0$, *nous avons* $\sum_{n\le X} f_0(n)/n = 2\mathscr{C}X + \mathcal{O}(X^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$.

Démonstration. En effet, nous utilisons (3.3) pour obtenir :

$$\begin{aligned}\sum_{n\le X} f_0(n)/n &= \sum_{n\le X} f_0(n)\Big(\frac{1}{X} + \int_n^X \frac{dt}{t^2}\Big) = \frac{\sum_{n\le X} f_0(n)}{X} + \int_1^X \sum_{n\le t} f_0(n)\frac{dt}{t^2}\\ &= \mathscr{C}X + \mathcal{O}(X^\sigma) + \mathscr{C}\int_1^X dt + \mathcal{O}\Big(\int_1^X t^{\sigma-1}dt\Big)\end{aligned}$$

ce qui nous donne bien le résultat annoncé. □

7.3 Être sans facteurs carrés

Dans le même ordre d'idées, la condition "être sans facteurs carrés" est elle aussi souvent assez simple à traiter grâce à l'identité

$$\sum_{d^2|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu^2(n) = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{7.11}$$

Démonstration. La fonction qui à n associe $\sum_{d^2|n} \mu(d)$ et la fonction caractéristique des entiers sans facteurs carrés sont toutes les deux multiplicatives. Il suffit dès lors d'établir leur égalité sur les puissances de nombres premiers, mais c'est évident. □

L'identité (7.11) est intéressante en ce que d est beaucoup plus petit que n. Voici une utilisation :

$$\begin{aligned}\sum_{n\le N} \mu^2(n) &= \sum_{n\le N}\sum_{d^2|n} \mu(d) = \sum_{d\le\sqrt{N}} \mu(d) \sum_{\substack{n\le N,\\ d^2|n}} 1 \\ &= \sum_{d\le\sqrt{N}} \mu(d)\left(\frac{N}{d^2} + \mathcal{O}^*(1)\right).\end{aligned}$$

Maintenant, comme $|\mu(d)| \le 1$, nous avons d'une part $\sum_{d\le\sqrt{N}} \mu(d)\mathcal{O}^*(1) = \mathcal{O}^*(\sqrt{N})$ et d'autre part

$$\sum_{d\le\sqrt{N}} \frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{d\ge1} \frac{\mu(d)}{d^2} + \mathcal{O}^*\Bigg(\sum_{d>\sqrt{N}} 1/d^2\Bigg)$$

et une comparaison à une intégrale nous garantit que le dernier $\mathcal{O}$ est au plus $1/(\sqrt{N}-1)$. En définitive

$$\sum_{n\le N} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2}N + \mathcal{O}(\sqrt{N}) \tag{7.12}$$

car

$$\sum_{d\ge1} \frac{\mu(d)}{d^2} = \prod_{p\ge2}(1-p^{-2}) = 1/\zeta(2) = 6/\pi^2. \tag{7.13}$$

Exercice 97. *Montrer qu'il existe une constante C telle que l'on ait*

$$\sum_{n\le X} \frac{\mu^2(n)}{n} = \frac{6}{\pi^2}\log X + C + \mathcal{O}((\log X)/\sqrt{X}).$$

Exercice 98. *Donner un asympotique pour*

$$\sum_{\substack{n\le X,\\ (n,d)=1}} \frac{\mu^2(n)}{n}$$

où d est un paramètre entier.

Chapitre 8

Exemples et pratique

Ce chapitre commence par expliciter la méthode de convolution sur trois exemples, et ce parce que les mécanismes de manipulation des expressions arithmétiques en jeu sont fondamentaux pour comprendre les développements subséquents.

8.1 Trois exemples

Nous partons d'une fonction multiplicative $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ pour laquelle nous définissons

$$D(f,s) = \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p\geq 2}\biggl(\sum_{k\geq 0} \frac{f(p^k)}{p^{ks}}\biggr). \tag{8.1}$$

Souvent, la fonction f est assez "proche" d'une fonction connue, et c'est cette idée que nous mettons ici en pratique sur trois exemples.

Approximation des séries de Dirichlet

Exemple 1. $f_1(n) = \prod_{p|n}(p-2)$. Il vient

$$\begin{aligned} D(f_1,s) &= \prod_{p\geq 2}\biggl(1+\frac{p-2}{p^s-1}\biggr) = \prod_{p\geq 2}\biggl(1-\frac{2p^{s-1}+p-3}{(p^s-1)p^{s-1}}\biggr)\frac{1}{1-1/p^{s-1}} \\ &= C_1(s)\zeta(s-1) \end{aligned}$$

où $C_1(s)$ est holomorphe pour $\Re s > \frac{3}{2}$. Cette écriture montre que $D(f_1,s)$ est méromorphe pour $\Re s > \frac{3}{2}$ et admet un pôle simple en $s=2$. —

Exemple 2. $f_2(n) = \mu^2(n)/\varphi(n)$. Il vient

$$\begin{aligned} D(f_2,s) &= \prod_{p\geq 2}\biggl(1+\frac{1}{(p-1)p^s}\biggr) \\ &= \prod_{p\geq 2}\biggl(1-\frac{1}{(p-1)p^{s+1}}-\frac{1}{(p-1)p^{2s+1}}\biggr)\frac{1}{1-1/p^{s+1}} \\ &= C_2(s)\zeta(s+1) \end{aligned}$$

où $C_2(s)$ est holomorphe pour $\Re s > -\frac{1}{2}$. Cette écriture montre que $D(f_2, s)$ est méromorphe pour $\Re s > -\frac{1}{2}$ et admet un pôle simple en $s = 0$. —

Exemple 3. $f_3(n) = 2^{\Omega(n)}$. Il vient

$$\begin{aligned} D(f_3, s) &= \prod_{p\geq 2} \frac{1}{1-\frac{2}{p^s}} = \prod_{p\geq 2}\Big(1 + \frac{1}{p^{2s}-2p^s}\Big)\zeta^2(s) \\ &= C_3(s)\zeta^2(s) \end{aligned}$$

où $C_3(s)$ est holomorphe pour $\Re s > \frac{1}{2}$. Cette écriture montre que $D(f_3, s)$ est méromorphe pour $\Re s > \frac{1}{2}$ et admet un pôle double en $s = 1$. —

Nous développons alors les C_i en séries de Dirichlet :

$$C_i(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{g_i(n)}{n^s} \tag{8.2}$$

où les fonctions g_i sont bien sûr multiplicatives. Pour obtenir leurs valeurs exactes, il suffit d'identifier les coefficients dans le développement du facteur local en série de p^{-s}. Nous obtenons ainsi

$$\begin{cases} g_1(p) = -2 \\ g_1(p^k) = -(p^2-3p+2), \quad (k\geq 2) \end{cases} \qquad \begin{cases} g_2(p) = g_2(p^2) = -\dfrac{1}{p(p-1)} \\ g_2(p^k) = 0, \quad (k\geq 3) \end{cases}$$

ainsi que

$$\begin{cases} g_3(p) = 0 \\ g_3(p^k) = 2^{k-2}, \quad (k\geq 2) \end{cases}$$

Nous posons aussi

$$\overline{C_i}(s) = \sum_n \frac{|g_i(n)|}{n^s} \tag{8.3}$$

et il se trouve que ces séries convergent encore là où nous avons montré que chaque C_i existait, c'est à dire respectivement pour $\Re s > 3/2$, $\Re s > -1/2$ et $\Re s > 1/2$.

Ordre moyen de f_1

Occupons-nous à présent des ordres moyens. La traduction sur les coefficients de $D(f_1, s) = C_1(s)\zeta(s-1)$ nous donne

$$f_1(n) = \sum_{\ell m = n} g_1(\ell) m$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_{n\leq X} f_1(n) &= \sum_{\ell m\leq X} g_1(\ell) m = \sum_{\ell\leq X} g_1(\ell)\Bigg(\frac{1}{2}\Big(\frac{X}{\ell}\Big)^2 + \mathcal{O}\Big(\frac{X}{\ell}\Big)\Bigg) \\ &= \frac{X^2}{2}\sum_{\ell\leq X}\frac{g_1(\ell)}{\ell^2} + \mathcal{O}\Big(X\sum_{\ell\leq X}\frac{|g_1(\ell)|}{\ell}\Big) \end{aligned}$$

Nous utilisons alors *la méthode de Rankin* : Il s'agit de remplacer la fonction indicatrice des $\ell > X$, qui n'est évidemment pas multiplicative, par $(\ell/X)^a$ où $a > 0$ est à choisir. En l'occurrence, ici, nous prenons $a = \frac{1}{2} - \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$ qui va tendre vers 0.

$$\begin{aligned}\sum_{\ell \le X} \frac{g_1(\ell)}{\ell^2} &= \sum_{\ell \ge 1} \frac{g_1(\ell)}{\ell^2} + \mathcal{O}\Big(\sum_{\ell > X} \frac{|g_1(\ell)|}{\ell^2}\Big) \\ &= C_1(2) + \mathcal{O}\Big(\sum_{\ell > X} \frac{|g_1(\ell)|}{\ell^{\frac{3}{2}+\varepsilon}} \frac{1}{X^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\Big)\end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Ensuite nous nous contentons de majorer $\sum_{\ell > X} |g_1(\ell)|/\ell^{\frac{3}{2}+\varepsilon}$ par la somme complète, soit $\overline{C_1}(3/2 + \varepsilon)$. Ce qui nous donne $\sum_{\ell \le X} g_1(\ell)/\ell^2 = C_1(2) + \mathcal{O}_\varepsilon\big(X^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\big)$. Le $\mathcal{O}$ dépend bien sûr de ε car $\overline{C_1}(3/2 + \varepsilon)$ n'est en aucun cas borné lorsque ε tend vers 0.* Pareillement, nous écrivons

$$\sum_{\ell \le X} \frac{|g_1(\ell)|}{\ell} \le X^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \sum_{\ell \le X} \frac{|g_1(\ell)|}{\ell^{\frac{3}{2}+\varepsilon}} \ll_\varepsilon X^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0)$$

où nous avons encore une fois étendu la dernière somme à tous les entiers $\ell > 1$. Soit finalement, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n \le X} f_1(n) = C_1(2)\frac{X^2}{2} + \mathcal{O}_\varepsilon\big(X^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\big). \tag{8.4}$$

Bien sûr, un traitement plus précis que celui que nous donnons par la méthode de Rankin permettrait de remplacer ce X^ε par une puissance de logarithme, ici par $\log X$, mais la méthode ci-dessus a l'avantage d'une grande simplicité.

Ordre moyen de f_2

Pour ce qui est de l'ordre moyen de f_2, nous procédons comme ci-dessus. Il vient

$$\begin{aligned}\sum_{n \le X} f_2(n) = \sum_{\ell m \le X} g_2(\ell)\frac{1}{m} &= \sum_{\ell \le X} g_2(\ell)\Big(\log\frac{X}{\ell} + \gamma + \mathcal{O}\Big(\frac{\ell}{X}\Big)\Big) \\ &= \big(\log X + \gamma\big)\sum_{\ell \le X} g_2(\ell) - \sum_{\ell \le X} g_2(\ell)\log\ell + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{X}\sum_{\ell \le X} |g_2(\ell)|\ell\Big)\end{aligned}$$

où γ est la constante d'Euler. Le programme précédent s'applique moyennant de rappeler que

$$-\sum_{\ell \ge 1} \frac{g_2(\ell)\log\ell}{\ell^s} \qquad \Big(\text{resp. } -\sum_{\ell \ge 1} \frac{|g_2(\ell)|\log\ell}{\ell^s}\Big)$$

*. Pour un traitement plus fin, il suffit de remarquer que $\overline{C_1}$ admet un pôle double en 3/2 ce qui fait que le $\mathcal{O}_\varepsilon\big(X^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\big)$ est en fait $\mathcal{O}\big(X^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}/\varepsilon^2\big)$ et en prenant $\varepsilon = 1/\log X$, nous obtenons $\mathcal{O}\big((\log X)^2/\sqrt{X}\big)$.

est simplement la dérivée de $C_2(s)$ (resp. $\overline{C_2}(s)$) et que cette série admet la même abscisse de convergence absolue que la série initiale. Nous obtenons alors

$$\sum_{n\le X} f_2(n) = \big(\log X + \gamma\big)\big(C_2(0) + \mathcal{O}_\varepsilon(X^{-\frac12+\varepsilon})\big) + C_2'(0) + \mathcal{O}_\varepsilon(X^{-\frac12+\varepsilon}).$$

Ordre moyen de f_3

Il nous reste à nous occuper de $C_3(s)$. Nous avons cette fois-ci

$$\sum_{n\le X} f_3(n) = \sum_{\ell m\le X} g_3(\ell)d(m)$$

où $d(m)$ est le nombre de diviseurs de m. Nous avons de façon classique (voir lemme 8.2) :

$$\sum_{m\le M} d(m) = M\log M + (2\gamma-1)M + \mathcal{O}(M^{1/2})$$

et donc

$$\begin{aligned}\sum_{n\le X} f_3(n) &= \sum_{\ell\le X} g_3(\ell)\left(\frac{X}{\ell}\log(X/\ell) + (2\gamma-1)\frac{X}{\ell} + \mathcal{O}((X/\ell)^{1/2})\right)\\ &= (X\log X + 2\gamma - 1)\sum_{\ell\le X}\frac{g_3(\ell)}{\ell} - X\sum_{\ell\le X}\frac{g_3(\ell)\log\ell}{\ell}\\ &\quad + \mathcal{O}\left(\sqrt{X}\sum_{\ell\le X}|g_3(\ell)|/\sqrt{\ell}\right)\\ &= (X\log X + 2\gamma - 1)C_3(1) + XC_3'(1) + \mathcal{O}_\varepsilon\big(X^{\frac12+\varepsilon}\big)\end{aligned}$$

en suivant les étapes précédentes.

8.2 Un théorème général.

Le lemme suivant est une généralisation d'un lemme de (Riesel & Vaughan, 1983) et se trouve dans (Ramaré, 1995). L'un des aspects essentiels de cette question tient dans la nature complètement explicite des termes d'erreur.

Lemme 8.1 *Soit g, h et k trois fonctions sur $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ à valeurs complexes. Posons $H(s) = \sum_n h(n)n^{-s}$, et $\overline{H}(s) = \sum_n |h(n)|n^{-s}$. Supposons que $g = h\star k$, que $\overline{H}(s)$ soit convergente pour $\Re(s) \ge -1/3$ et enfin qu'il existe quatre constantes A, B, C et D telles que*

$$\sum_{n\le t} k(n) = A\log^2 t + B\log t + C + \mathcal{O}(Dt^{-1/3}) \quad pour \quad t > 0;$$

Alors, pour tout $t > 0$, nous avons :

$$\sum_{n\le t} g(n) = u\log^2 t + v\log t + w + \mathcal{O}(Dt^{-1/3}\overline{H}(-1/3))$$

avec $u = AH(0)$, $v = 2AH'(0) + BH(0)$ *and* $w = AH''(0) + BH'(0) + CH(0)$. *Nous avons aussi*

$$\sum_{n \le t} ng(n) = Ut \log t + Vt + W + \mathcal{O}(2.5Dt^{2/3}\overline{H}(-1/3))$$

avec

$$\begin{cases} U = AH(0), \qquad V = -2AH(0) + 2AH'(0) + BH(0), \\ W = A(H''(0) - 2H'(0) + 2H(0)) + B(H'(0) - H(0)) + CH(0). \end{cases}$$

Démonstration. Écrivons $\sum_{\ell \le t} g(\ell) = \sum_m h(m) \sum_{n \le t/m} k(n)$, et toute la régularité de nos expresions vient de ce qu'il n'est pas nécessaire d'imposer $m \le t$ dans $\sum_m h(m)$. Nous complétons alors la preuve facilement

Pour estimer $\sum_{\ell \le t} \ell g(\ell)$ for $t > 0$, nous écrivons

$$\sum_{\ell \le t} \ell g(\ell) = t \sum_{\ell \le t} g(\ell) - \int_1^t \sum_{\ell \le u} g(\ell) du,$$

et utilisons l'expression asymptotique de $\sum_{\ell \le u} g(\ell)$. □

Pour appliquer le lemme précédent, nous aurons besoin de

Lemme 8.2 *Pour tout* $t > 0$, *nous avons*

$$\sum_{n \le t} \frac{1}{n} = \log t + \gamma + \mathcal{O}\big(0.9105 t^{-1/3}\big).$$

Soit $d(n)$ *le nombre de diviseurs de* n. *Pour tout* $t > 0$, *nous avons*

$$\sum_{n \le t} \frac{d(n)}{n} = \frac{1}{2} \log^2 t + 2\gamma \log t + \gamma^2 - \gamma_1 + \mathcal{O}\big(1.641 t^{-1/3}\big),$$

avec

$$\gamma_1 = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{m \le n} \frac{\log m}{m} - \frac{\log^2 n}{2} \right).$$

($-0.072816 < \gamma_1 < -0.072815$*).*

Démonstration. La preuve de la seconde partie de ce lemme se trouve dans le papier de (Riesel & Vaughan, 1983) cité ci-dessous (Lemma 1).

Pour la première partie, rappelons que

$$\Big|\sum_{n \le t} \frac{1}{n} - \log t - \gamma\Big| \le \frac{7}{12t} \quad \text{pour} \quad t \ge 1.$$

Pour $0 < t < 1$, nous choisissons $a > 0$ tel que $\log t + \gamma + a\, t^{-1/3} \ge 0$. Cette fonction décroît de 0 à $(a/3)^3$ et ensuite croît. Cela nous donne la valeur minimale $a = 3\exp(-\gamma/3 - 1) \le 0.9105$. □

Dans la pratique, la fonction g sera multiplicative et vérifiera $g_p = b/p + o(1/p)$ avec $b = 1$ or 2. Dans ce cas, nous prenons $\sum k(n)n^{-s} = \zeta(s+1)^b$ et h est la fonction multiplicative déterminée par $\sum h(n)n^{-s} = \sum g(n)n^{-s}\zeta(s+1)^{-b}$.

Lorsque h est multiplicative, nous avons

$$H(0) = \prod_p (1 + \sum_m h(p^m)),$$

et

$$\frac{H'(0)}{H(0)} = \sum_p \frac{\sum_m mh(p^m)}{1 + \sum_m h(p^m)}(-\log p),$$

ainsi que

$$\frac{H''(0)}{H(0)} = \left(\frac{H'(0)}{H(0)}\right)^2 + \sum_p \left\{\frac{\sum_m m^2h(p^m)}{1 + \sum_m h(p^m)} - \left(\frac{\sum_m mh(p^m)}{1 + \sum_m h(p^m)}\right)^2\right\} \log^2 p.$$

8.3 Un quatrième exemple détaillé

Lemme 8.3 *Pour tout $X > 0$ et tout entier $d \geq 1$, la fonction*

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ (n,d)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}$$

est approximée par

$$\frac{\varphi(d)}{d}\left\{\log X + \gamma + \sum_{p \geq 2} \frac{\log p}{p(p-1)} + \sum_{p|d} \frac{\log p}{p}\right\} + \mathcal{O}(7.284X^{-1/3}f_1(d))$$

avec

$$f_1(d) = \prod_{p|d}(1 + p^{-2/3})\left(1 + \frac{p^{1/3} + p^{2/3}}{p(p-1)}\right)^{-1}.$$

Remarque : La somme de gauche est $G_d(X)$. Le cas $d = 1$ a déjà été étudié plus haut. La série de Dirichlet associée est

$$\sum_n \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)n^{s-1}} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} \prod_{p \geq 2}\left(1 + \frac{1}{(p-1)(p^s + 1)}\right)$$

ce qui fait que le terme d'erreur $\mathcal{O}(X^{-1/2})$ est admissible (notre méthode pourrait donner $\mathcal{O}(X^{-1/2}\log^2 X)$), et que nous ne pouvons espérer mieux que $\mathcal{O}(X^{-3/4})$.

Rosser & Schoenfeld ((Rosser & Schoenfeld, 1962) équation (2.11)) nous donne

$$\gamma + \sum_{p \geq 2} \frac{\log p}{p(p-1)} = 1.332\ 582\ 275\ 332\ 21...$$

Démonstration. Définissons la fonction multiplicative h_d par

$$h_d(p) = \frac{1}{p(p-1)}, \quad h_d(p^2) = \frac{-1}{p(p-1)}, \quad h_d(p^m) = 0 \quad \text{si} \quad m \geq 3,$$

si p est un nombre premier qui ne divise pas d, et par $h_d(p^m) = \frac{\mu(p^m)}{p^m}$ pour tout $m \geq 1$ si p est un facteur premier de d.

Nous avons alors

$$\sum_{n \geq 1} \frac{h_d(n)}{n^s} \zeta(s+1) = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ (n,d)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n) n^s}$$

ce qui nous permet d'appliquer le lemme 2. Nous vérifions que

$$\prod_{p \geq 2} \left(1 + \frac{p^{1/3} + p^{2/3}}{p(p-1)} \right) \leq 8.$$

$\square$

Exercice 99.

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Montrer que* $\sum_{n \leq x} \varphi(n) = (3/\pi^2)x^2 + \mathcal{O}(x \log x)$ *pour* $x \geq 2$.

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Montrer que*

$$\sum_{\substack{m,n \leq x, \\ \mathrm{pgcd}(m,n)=1}} 1 = -1 + 2 \sum_{n \leq x} \varphi(n)$$

et en conclure que le membre de gauche est égal à $(6/\pi^2)x^2 + \mathcal{O}(x \log x)$.

Exercice 100. *Montrer que* $\sum_{n \leq x} \sigma(n) = (\pi^2/12)x^2 + \mathcal{O}(x \log x)$ *pour* $x \geq 2$.

Exercice 101.

$\diamond$ 1 $\diamond$ *Montrer que* $2^{\omega(n)} = \sum_{d^2 m = n} \mu(d) d(m)$.

$\diamond$ 2 $\diamond$ *Montrer que* $\sum_{n \leq x} 2^{\omega(n)} = (6/\pi^2) x \log x + cx + \mathcal{O}(\sqrt{x} \log x)$ *pour* $x \geq 2$ *et où* $c = 2\gamma - 1 - 2\zeta'(2)/\zeta(2)$.

$\diamond$ 3 $\diamond$ *Montrer que* $\sum_{n \leq x} 2^{\Omega(n)} = Cx(\log x)^2 + \mathcal{O}(x \log x)$ *pour* $x \geq 2$ *pour une constante* $C > 0$.

Chapitre 9

Le théorème de Levin-Fainleib et alia

9.1 Une première borne supérieure

Ce premier théorème est efficace lorsque l'ordre moyen de g sur les puissances de nombres premiers est proche de constant. Il existe de nombreuses versions de ce résultat, dont la plus précise est due à (Halberstam & Richert, 1979). Celle que nous présentons est une légère modification de ce qui est proposé dans le livre de Tenenbaum référencé à la fin de ce papier.

L'idée de départ est tirée du célèbre article (Levin & Fainleib, 1967). Signalons ici l'article (Moree, 2004) qui explore et améliore le caractère explicite des deux théorèmes ci-dessous.

Théorème 9.1 *Soit $D \geq 2$ un paramètre réel fixé. Supposons que g soit multiplicative et positive ou nulle, et que*

$$\sum_{\substack{p\geq 2, \nu\geq 1\\ p^\nu \leq Q}} g\big(p^\nu\big)\log\big(p^\nu\big) \leq KQ + K' \qquad (\forall Q \in [1, D])$$

pour deux constantes $K, K' \geq 0$. Alors

$$\sum_{d\leq D} g(d) \leq (K+1)\frac{D}{\log D - K'}\sum_{d\leq D} g(d)/d$$

pour $D > \exp K'$.

Démonstration. Posons $\tilde{G}(D) = \sum_{d\leq D} g(d)/d$. Alors, en utilisant $\log\frac{D}{d} \leq \frac{D}{d}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} G(D)\log D &= \sum_{d\leq D} g(d)\log\frac{D}{d} + \sum_{d\leq D} g(d)\log d \\ &\leq D\sum_{d\leq D}\frac{g(d)}{d} + \sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq D}} g\big(p^\nu\big)\log\big(p^\nu\big)\sum_{\substack{\ell\leq D/p^\nu\\ (\ell,p)=1}} g(\ell)\end{aligned}$$

où l'on obtient le second sommant en écrivant

$$\log d = \sum_{p^\nu \| d} \log(p^\nu).$$

Finalement

$$\sum_{\substack{p \geq 2, \nu \geq 1 \\ p^\nu \leq D}} g(p^\nu) \log(rp^\nu) \sum_{\substack{\ell \leq D/p^\nu \\ (\ell, p)=1}} g(\ell) = \sum_{\ell \leq D} g(\ell) \sum_{\substack{p \geq 2, \nu \geq 1 \\ p^\nu \leq D/\ell \\ (p,\ell)=1}} g(p^\nu) \log(p^\nu)$$
$$\leq \sum_{\ell \leq D} g(\ell) K \frac{D}{\ell}$$

ce qui nous permet de conclure facilement. □

Théorème 9.2 *Soit $D \geq 2$ un paramètre réel fixé. Supposons que g soit multiplicative et positive ou nulle. Alors*

$$\sum_{d \leq D} g(d)/d \leq \exp\Big(\sum_{\substack{\nu \geq 1, \\ p^\nu \leq D}} g(p^\nu)/p^\nu \Big)$$

où la somme de droite porte sur tous les entiers $\nu \geq 1$ et tous les nombres premiers p, les deux vérifiant $p^\nu \leq D$.

Démonstration. En effet, le développement du produit

$$\prod_{p \leq D} \Big(\sum_{0 \leq \nu} g(p^\nu)/p^\nu \Big)$$

contient tous les termes de la somme $\sum_{d \leq D} g(d)/d$. Il s'agit donc d'une majoration. Nous utilisons alors, à p fixé,

$$\log\Big(\sum_{0 \leq \nu} g(p^\nu)/p^\nu \Big) \leq \sum_{1 \leq \nu} g(p^\nu)/p^\nu.$$

□

Exercice 102. *Supposons que g soit multiplicative et positive ou nulle et vérifie $0 \leq g(p) \leq \lambda < 1$ pour tous nombres premiers p et où λ est un paramètre fixé. Nous avons*

$$\sum_{d \leq D} \frac{\mu^2(d) g(d)}{d} \geq (1-\lambda) \prod_{p \leq D} \Big(1 + \frac{g(p)}{p} \Big).$$

Indication : *On utilisera l'inegalité* $\sum_{p\le D}(\log p)/p \le \log D$, *valable pour* $D \ge 1$. *Nous avons*

$$\sum_{d\le D}\frac{\mu^2(d)g(d)}{d} - \prod_{p\le D}\Bigl(1+\frac{g(p)}{p}\Bigr) = \sum_{\substack{n>D,\\ P^+(n)\le D}}\frac{\mu^2(n)f(n)}{n}$$

où $P^+(n)$ *est le plus grand facteur premier de* n. *On pourra alors majorer le membre de droite par*

$$\sum_{P^+(n)\le D}\frac{\mu^2(n)f(n)}{n}\frac{\log n}{\log D}.$$

Exercice 103. *(A. Selberg) Nous considérons la somme* $S(x) = \sum_{n\le x}\frac{\mu(n)}{n2^{\omega(n)}}$.

◇ 1 ◇ *Montrer qu'il existe une constante* $c_0 > 0$ *telle que* $|S(x)| \le c_0/\sqrt{\log x}$.

◇ 2 ◇ *Montrer l'identité :*

$$xS(x) = \sum_{n\le x}\frac{1}{2^{\omega}(n)} + \sum_{n\le x}\frac{\mu(n)}{2^{\omega(n)}}\Bigl\{\frac{x}{n}\Bigr\}$$

et en déduire que $S(x) \ge 0$.

Exercice 104. *Montrer que*

$$\log x \le \sum_{n\le x}\frac{1}{n} \le \prod_{p\le x}\Bigl(1-1/p\Bigr)^{-1}.$$

En déduire que pour $x \ge 10$, *on a*

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p} \ge \log\log x + \mathcal{O}(1).$$

9.2 Une formule asymptotique

Notre second théorème s'applique lui aux fonctions multiplicatives g telles que $g(p) \simeq \kappa/p$ pour un certain $\kappa > 0$.

Ce second théorème demande des hypothèses bien plus fortes mais en échange nous prouvons une formule asymptotique. Sa preuve est à la base assez simple, mais se complique du fait que (i) nous prenons en compte la dépendance en certains paramètres des termes d'erreur (ii) nous tenons compte des valeurs de g sur les puissances de nombres premiers (iii) nous offrons un résultat complètement explicite. L'essentiel de ce théorème se trouve dans (Halberstam & Richert, 1971), et une présentation légèrement simplifiée dans le livre de ces deux mêmes auteurs.

Théorème 9.3 *Donnons-nous une fonction multiplicative* g *positive ou nulle* *et trois paramètres réels strictement positifs κ, L et A tels que*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{p\ge 2,\nu\ge 1\\ p^\nu\le Q}} g\big(p^\nu\big)\log\big(p^\nu\big) = \kappa\log Q + \mathcal{O}^*(L) \qquad (Q\ge 1),\\ \displaystyle\sum_{p\ge 2}\sum_{\nu,k\ge 1} g\big(p^k\big)g\big(p^\nu\big)\log\big(p^\nu\big)\le A. \end{cases}$$

Alors

$$\sum_{d\le D} g(d) = C\left(\log D\right)^\kappa\left(1+\mathcal{O}^*(B/\log D)\right) \qquad (D\ge \exp(2(L+A)))$$

avec

$$\begin{cases} C = \dfrac{1}{\Gamma(\kappa+1)}\displaystyle\prod_{p\ge 2}\left\{\Big(\sum_{\nu\ge 0} g\big(p^\nu\big)\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^\kappa\right\},\\ B = 2(L+A)\big(1+2(\kappa+1)e^{\kappa+1}\big) \end{cases}$$

Notons que dans la plupart des applications, si la dépendance en L peut s'avérer importante, celle en A est presque toujours sans intérêt. De plus (Rawsthorne, 1982) et (Greaves & Huxley, 1999) donnent des évaluations où seule la majoration est nécessaire.

Démonstration. Le départ est similaire au précédent :

$$\begin{aligned} G(D)\log D &= \sum_{d\le D} g(d)\log\frac{D}{d} + \sum_{d\le D} g(d)\log d\\ &= \sum_{d\le D} g(d)\log\frac{D}{d} + \sum_{\substack{p\ge 2,\nu\ge 1\\ p^\nu\le D}} g\big(p^\nu\big)\log\big(p^\nu\big)\sum_{\substack{\ell\le D/p^\nu\\ (\ell,p)=1}} g(\ell) \end{aligned}$$

et l'on pose

$$\begin{cases} G_p(X) = \displaystyle\sum_{\substack{\ell\le X\\ (\ell,p)=1}} g(\ell)\\ T(D) = \displaystyle\sum_{d\le D} g(d)\log\frac{D}{d} = \int_1^D G(t)\frac{dt}{t}, \end{cases}$$

ce qui nous donne

$$G(D)\log(D) = T(D) + \sum_{\substack{p\ge 2,\nu\ge 1\\ p^\nu\le D}} g\big(p^\nu\big)\log\big(p^\nu\big)G_p(D/p^\nu).$$

De plus, nous vérifions aisément que

$$G_p(X) = G(X) - \sum_{k\ge 1} G_p(X/p^k)$$

ce qui, joint à nos hypothèse, nous donne

$$\begin{aligned}
G(D)\log(D) &= T(D) + \sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq D}} g\big(p^\nu\big)\log\big(p^\nu\big)G(D/p^\nu) + \mathcal{O}^*(AG(D))\\
&= T(D) + \sum_{d\leq D} g(d) \sum_{\substack{p\geq 2,\nu\geq 1\\ p^\nu\leq D/d}} g\big(p^\nu\big)\log\big(p^\nu\big) + \mathcal{O}^*(AG(D))\\
&= T(D)(\kappa+1) + \mathcal{O}^*((L+A)G(D))
\end{aligned}$$

ce que nous réécrivons en

$$(\kappa+1)T(D) = G(D)\log D\ (1+r(D)) \quad \text{avec} \quad r(D) = \mathcal{O}^*\left(\frac{L+A}{\log D}\right)$$

que nous regardons comme une équation différentielle. Posons

$$\exp E(D) = \frac{(\kappa+1)T(D)}{(\log D)^{\kappa+1}} = \frac{G(D)}{(\log D)^\kappa}(1+r(D))$$

ce qui nous donne pour $D \geq D_0 = \exp(2(L+A))$

$$E'(D) = \frac{T'(D)}{T(D)} - \frac{(\kappa+1)}{D\log D} = \frac{r(D)(\kappa+1)}{(1-r(D))D\log D} = \mathcal{O}^*\left(\frac{2(L+A)}{D\log D}\right)$$

puisque $|r(D)| \leq \frac{1}{2}$ si $D \geq D_0$. Il vient ($D \geq D_0$) :

$$E(\infty) - E(D) = \int_D^\infty E'(t)dt = \mathcal{O}^*\left(\frac{2(L+A)}{\log D}\right).$$

Bref

$$\frac{G(D)}{(\log D)^\kappa} = \frac{\exp E(D)}{1+r(D)} = \frac{e^{E(\infty)}}{1+r(D)}\left(1+\mathcal{O}^*\left(\frac{2(L+A)}{\log D}(\kappa+1)e^{\kappa+1}\right)\right).$$

Or $1/(1+x) \leq 1+2x$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ d'où

$$\frac{G(D)}{(\log D)^\kappa} = e^{E(\infty)}\left(1+\mathcal{O}^*\left(\frac{2(L+A)}{\log D}\big(1+2(\kappa+1)e^{\kappa+1}\big)\right)\right)$$

pour $D \geq D_0$, ce qui constitue l'essentiel de la démonstration. Il nous faut à présent expliciter $e^{E(\infty)} = C$. Remarquons tout d'abord que la preuve ci-dessus est a priori fausse car $T'(D) \neq G(D)/D$ aux points de discontinuités de G, mais il nous suffit de travailler avec D non entier et de procéder par continuité.

Expression de C :

Pour ce qui est du calcul de la constante, nous avons pour s réel positif

$$\begin{aligned}
D(g,s) = \sum_{d\geq 1}\frac{g(d)}{d^s} &= s\int_1^\infty G(D)\frac{dD}{D^{s+1}}\\
&= sC\int_1^\infty (\log D)^\kappa \frac{dD}{D^{s+1}} + \mathcal{O}\left(sC\int_1^\infty (\log D)^{\kappa-1}\frac{dD}{D^{s+1}}\right)\\
&= C\big(s^{-\kappa}\Gamma(\kappa+1) + \mathcal{O}(s^{1-\kappa}\Gamma(\kappa))\big)
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$C = \lim_{s\to 0^+} D(g,s)s^\kappa \Gamma(\kappa+1)^{-1} = \lim_{s\to 0^+} D(g,s)\zeta(s+1)^{-\kappa}\Gamma(\kappa+1)^{-1}.$$

Il est alors assez facile de montrer que le produit

$$\prod_{p\ge 2}\Biggl\{\biggl(\sum_{\nu\ge 0} g(p^\nu)\biggr)\biggl(1-\frac{1}{p}\biggr)^\kappa\Biggr\}$$

est convergent et égale donc $C\Gamma(\kappa+1)$ comme voulu.

□

Exercice 105. *Montrer que, lorsque D tend vers l'infini, nous avons*

$$\sum_{d\le D} 9^{\omega(d)}/\varphi(d) \sim C(\log D)^9$$

où C est une constante > 0 que l'on explicitera.

Exercice 106.

◇ 1 ◇ *Donner un asymptotique de*

$$\sum_{n\le N}\sum_{d|n}\mu^2(n/d)3^{-\omega(d)}/n.$$

◇ 2 ◇ *Donner un asymptotique de*

$$\sum_{n\le N}\sum_{d|n}\mu^2(n/d)3^{-\omega(d)}/(n+1).$$

Exercice 107.

◇ 1 ◇ *Montrer que*

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}.$$

◇ 2 ◇ *Montrer que*

$$\sum_{n\le N}\frac{n}{\varphi(n)} = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}N + \mathcal{O}(\log(2N)).$$

◇ 3 ◇ *Montrer qu'il existe une constante C telle que*

$$\sum_{n\le N}\frac{1}{\varphi(n)} = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}\log N + C + \mathcal{O}(\log(2N)/N).$$

◇ 4 ◇ *Montrer que*

$$\sum_{d\geq 1} \frac{\mu^2(d)\log d}{d\varphi(d)} = \sum_{p\geq 2} \frac{\log p}{p^2-p+1} \prod_{p\geq 2}\Big(1+\frac{1}{p(p-1)}\Big)$$

et en déduire que la constante C de la question précédente est donnée par

$$C = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}\bigg(\gamma - \sum_{p\geq 2}\frac{\log p}{p^2-p+1}\bigg).$$

◇ 5 ◇ *Montrer que le terme d'erreur dans l'évaluation de la somme des $1/\varphi(n)$ ne peut être meilleur que $\mathcal{O}(1/N)$.*

EXERCICE 110. *Donner un asymptotique pour*

$$\sum_{d\leq D} 1/(1+\varphi(d)).$$

INDICATION : *On pourra comparer cette série à $\sum_{d\leq D} 1/\varphi(d)$.*

EXERCICE 111.

◇ 1 ◇ *Montrer que*

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}$$

◇ 2 ◇ *Montrer que*

$$\sum_{n\leq N}\frac{\varphi(n)}{n} = CN + \mathcal{O}(\log(2N))$$

pour une certaine constante que l'on calculera.

◇ 3 ◇ *Montrer que*

$$\sum_{n\leq N}\frac{\varphi(n)}{n^2} = C\log N + C_2 + \mathcal{O}(\log(2N)/N)$$

pour une certaine constante C_2 (le tout étant valable pour $N\geq 1$).

Chapitre 10

L'inégalité du grand crible

10.1 Une inégalité de Parseval approchée

Nous nous plaçons dans un espace vectoriel $\mathcal{H}$ complexe muni d'une semi-norme hermitienne $\langle f|g\rangle$, linéaire à gauche et sesqui-linéaire à droite, c'est à dire qui vérifie

$$\langle \lambda f|g\rangle = \lambda\langle f|g\rangle \ , \ \langle f|g\rangle = \overline{\langle g|f\rangle},$$
$$\langle \lambda f + \mu h|g\rangle = \lambda\langle f|g\rangle + \mu\langle h|g\rangle \ , \ \langle f|f\rangle \geq 0$$

pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $f, g, h \in \mathcal{H}$.

Dans ce contexte, nous nous donnons une famille finie $(\varphi_i^*)_{i\in I}$ de points de $\mathcal{H}$, une famille $(M_i)_{i\in I}$ de nombres réels strictement positifs et une famille $(\omega_{i,j})_{i,j\in I}$ de nombres complexes tels que

$$\forall (\xi_i)_i \in \mathbb{C}^I, \quad \|\sum_i \xi_i \varphi_i^*\|^2 \leq \sum_i M_i|\xi_i|^2 + \sum_{i,j} \xi_i\overline{\xi_j}\omega_{i,j}. \tag{10.1}$$

Nous avons alors les deux lemmes suivants :

Lemme 10.1 *Nous pouvons prendre $M_i = \sum_j |\langle \varphi_i^*|\varphi_j^*\rangle|$ et $\omega_{i,j} = 0$.*

Voici une lecture éclairante de ce lemme : la forme hermitenne qui apparaît a une matrice dont les termes diagonaux sont les $\langle \varphi_i^*|\varphi_i^*\rangle$. Un théorème de Gershgorin dit que les valeur propres de la matrice se situent alors dans un disque de centre l'un des $\langle \varphi_i^*|\varphi_i^*\rangle|$ et de rayon $\sum_{j\neq i} |\langle \varphi_i^*|\varphi_j^*\rangle|$ pour le i correspondant, disque qui porte le nom de *disque de Gershgorin*. Cette approche due à (Elliott, 1971) a toutefois un défaut : nous ne savons pas a priori que chaque disque de Gershgorin contient une valeur propre, ce qui est en quelque sorte réparé dans le lemme précédent.

Lemme 10.2 *Pour tout $f \in \mathcal{H}$ et $\xi_i = \langle f|\varphi_i^*\rangle/M_i$, nous avons*

$$\sum_i M_i^{-1}|\langle f|\varphi_i^*\rangle|^2 \leq \|f\|^2 + \sum_{i,j} \xi_i\overline{\xi_j}\omega_{i,j}.$$

Ce lemme sans les $\omega_{i,j}$ est dû à Atle Selberg d'après la section 2 de (Bombieri, 1987/1974b) et (Bombieri, 1971).

Démonstration. La preuve consiste à écrire

$$\Big\| f - \sum_i \xi_i \varphi_i^* \Big\|^2 \geq 0$$

que nous développons. Nous nous débarrassons de $\| \sum_i \xi_i \varphi_i^* \|^2$ en utilisant (10.1), ce qui nous donne

$$\|f\|^2 - 2\Re \sum_i \overline{\xi_i} \langle f|\varphi_i^*\rangle + \sum_i M_i |\xi_i|^2 + \sum_{i,j} \xi_i \overline{\xi_j} \omega_{i,j} \geq 0.$$

Nous choisissons les ξ au meilleur de notre avantage, moyennant de négliger la forme bilinéaire contenant les $\omega_{i,j}$, c'est à dire que nous prenons $\xi_i = \langle f|\varphi_i^*\rangle / M_i$. Le résultat annoncé suit. □

La conjugaison des deux lemmes est ce que l'on appelle usuellement "le lemme de Selberg" dans ce contexte et l'introduction des $\omega_{i,j}$ est due à l'auteur. Dans ce lemme, la valeur exacte des ξ est généralement sans importance, mais leur ordre de grandeur ainsi que la structure de forme quadratique sont eux importants. D'une façon toute aussi générale, M_i est proche de $\|\varphi_i^*\|^2$.

L'introduction des $\omega_{i,j}$ permet d'hybrider les résultats issus de l'inégalité pondérée du grand crible et des résultats du crible de Selberg qui amènent à cribler des suites et non simplement des intervalles.

10.2 L'inégalité du grand crible

Nous notons

$$e(\alpha) = \exp(2i\pi\alpha). \tag{10.2}$$

Théorème 10.3 (Inégalité du grand crible) *Soit $\mathcal{X}$ un ensemble fini de points de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Posons*

$$\delta = \min \{\|x - x'\|, x \neq x' \in \mathcal{X}\}.$$

Pour toute suite $(u_n)_{1 \leq n \leq N}$ de nombres complexes, nous avons

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} \Big| \sum_n u_n e(nx) \Big|^2 \leq \sum_n |u_n|^2 (N - 1 + \delta^{-1}).$$

Nous pouvons voir le membre de gauche comme une somme de Riemann sur les points de $\mathcal{X}$. Au moins si l'ensemble $\mathcal{X}$ est suffisament dense. En suivant ce point de vue et puisque l'espacement entre deux points consécutifs est au moins δ, nous sommes amenés à consiérer ce membre de gauche multiplié par δ comme une approximation de

$$\int_0^1 \Big| \sum_n u_n e(n\alpha) \Big|^2 d\alpha = \sum_n |u_n|^2.$$

C'est effectivement le cas si δ^{-1} is bien plus grand que N (et pourvu que $\mathcal{X}$ soitt aussi suffisament dense), mais il se trouve que le cas qui nous intéresse en théorie des nombres est précisément l'opposé. Dans ce cas, nous regardons $\sum_n u_n e(nx)$ comme une forme linéaire en les $(u_n)_n$. La condition d'espacement implique que

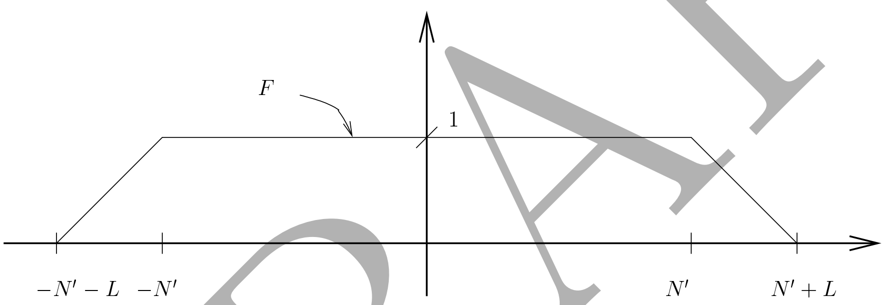
$\mathcal{X}$ ne contient pas plus de δ^{-1} elements ; Or, si le nombre de formes linéaires impliquées est effectvement inférieur à la dimension de l'espace ambient (soit N), elles sont linéairement indépendantes comme le lecteur l'établira simplement en calculant un déterminant de van der Monde. Sinon, il y a des redondances d'informations. Ce qui met en lumière le fait que ce qui entre en jeu ici est plus le phénomène d'orthogonalité approchée que l'aspect approximation, ce pourquoi j'ai choisi cette preuve.

Dans cette version, le théorème 10.3 est dû à Selberg. La même année et par une méthode différente, (Montgomery & Vaughan, 1973) en obtinrent une version très marginalement plus faible (sans le -1 à droite).

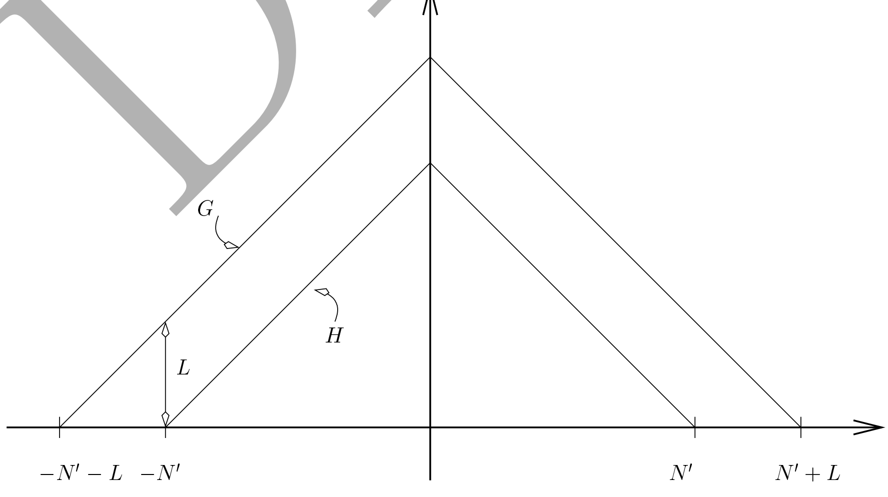
Nous montrons ici un résultat un peu plus faible avec $N + 1 + 2\delta^{-1}$ au lieu de $N - 1 + \delta^{-1}$. Nous commençons par rappeler quelle est la transformée de Fourier discrète du noyau de Fejer.

10.2.1 Une transformée de Fourier

Soit N' et L deux entiers fixés. Considérons la fonction dont le graphe est :



Comme calculer sa transformée de Fourier discrète peut être lourd, nous introduisons deux autres fonctions G et H dessinées ci-après et qui vérifient $F = (G - H)/L$.



Cela nous donne

$$\begin{aligned}
L\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n)e(ny) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} G(n)e(ny) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} H(n)e(ny) \\
&= \sum_{0\le|n|\le N'+L} (N'+L-|n|)e(ny) - \sum_{0\le|n|\le N'} (N'-|n|)e(ny) \\
&= \Big|\sum_{0\le m\le N'+L} e(my)\Big|^2 - \Big|\sum_{0\le m\le N'} e(my)\Big|^2
\end{aligned}$$

d'où, finalement :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n)e(ny) = \frac{1}{L}\left|\frac{\sin\pi(N'+L)y}{\sin\pi y}\right|^2 - \frac{1}{L}\left|\frac{\sin\pi N'y}{\sin\pi y}\right|^2, \tag{10.3}$$

La valeur en $y = 0$ vaut $\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n) = 2N' + L$.

10.2.2 Preuve du théorème 10.3 (forme faible)

Nous utilisons les lemmes 10.2 et 10.1. Remarquons tout d'abord que nous pouvons supposer que N est un entier. Soit ensuite $N' = \lfloor N/2 \rfloor$ la partie entière de $N/2$ et $f(n) = u_{N'+1+n}$ (avec $u_{N+1} = 0$ si N est pair) de telle sorte que f a son support sur $[-N', N']$. Notre espace de Hilbert est $\ell^2(\mathbb{Z})$ muni du produit scalaire standard, et f y appartient en l'étendant par $f(n) = 0$ si n n'est pas dans l'intervalle $[-N', N']$. Remarquons aussi que

$$\|f\|^2 = \sum_n |u_n|^2. \tag{10.4}$$

Nous devons à présent définir notre système quasi-orthogonal. Nous posons

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \varphi_x^*(n) = e(nx)\sqrt{F(n)}, \tag{10.5}$$

où F est définie section 10.2.1. Comme f s'annule hors de $[-N', N']$, nous trouvons

$$[f|\varphi_x^*] = e(-(N'+1)x) \sum_{1\le n\le N} u_n e(nx). \tag{10.6}$$

Les calculs de la section précédente donnent

$$\|\varphi_x^*\|^2 = 2N' + L, \quad |[\varphi_x^*|\varphi_{x'}^*]| \le \frac{1}{4L\|x-x'\|^2} \quad \text{if } x \ne x' \tag{10.7}$$

grâce à l'inégalité classique $|\sin x| \le 2\|x\|/\pi$. Si x est fixé, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{x'\in\mathcal{X}\\ x'\ne x}} |[\varphi_x^*|\varphi_{x'}^*]| &\le \sum_{\substack{x'\in\mathcal{X}\\ x'\ne x}} \frac{1}{4L\|x-x'\|^2} \\
&\le 2\sum_{k\ge1} \frac{1}{4L(k\delta)^2} \le \frac{\pi^2}{12L\delta^2}
\end{aligned}$$

car la définition de δ implique que le cas le pire qui puisse arriver pour la suite $(\|x-x'\|)_{x'}$ est lorsque tous les x''s sont les $x + k\delta$ où k est un entier relatif qui prend les valeurs $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Nous choisissons ensuite l'entier L qui minise presque $2N' + L + \pi^2/(12L\delta^2)$, i.e.

$$L = \left\lceil \frac{\pi}{2\sqrt{3}\delta} \right\rceil \tag{10.8}$$

où $\lceil x \rceil$ dénote exceptionnellement ici la partie entière *par valeurs supérieures* de x. Tout cela nous donne la majoration $2N' + L + \pi^2/(12L\delta^2) \leq N + 1 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\delta^{-1}$. Nous concluons en remarquant que $\pi/\sqrt{3} \leq 1.82 \leq 2$.

10.3 La suite de Farey

Dans la plupart des applications arithmétiques, l'ensemble $\mathcal{X}$ est tout simplement une partie de la suite de Farey et même

$$\mathcal{X} = \{a/q,\ q \leq Q, a \bmod^* q\} \tag{10.9}$$

où Q est à paramètre à choisir et où $a \bmod^* q$ signifie ici encore que a parcourt les classes inversibles modulo q. Si a/q et a'/q' sont deux points distincts de $\mathcal{X}$, nous avons

$$\left|\frac{a}{q} - \frac{a'}{q'}\right| = \frac{|aq' - a'q|}{qq'} \geq \frac{1}{qq'} \geq Q^{-2} \tag{10.10}$$

car $aq' - a'q$ est un entier non nul. [*] Nous introduisons alors la notation classique

$$S(x) = \sum_{1 \leq n \leq N} u_n e(na/q) \tag{10.11}$$

et affirmons que

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{a \bmod^* q} |S(a/q)|^2 \leq \sum_n |u_n|^2 (N + Q^2). \tag{10.12}$$

C'est aussi cette inégalité que l'on désigne couramment sous le nom d'*inégalité du grand crible*.

[*]. En discutant selon que $q = q'$ ou non, nous pourrions augmenter cette borne jusqu'à $1/(Q(Q-1))$.

Chapitre 11

Le crible de Montgomery

11.1 L'énoncé

Commençons par un énoncé un peu difficile à comprendre au départ, parce que long.

Théorème 11.1 *Soit Q un réel ≥ 1. Nous nous donnons un ensemble $\mathcal{P}$ de nombres premiers $\leq Q$ et pour chaque p dans $\mathcal{P}$ un sous-ensemble Ω_p de $\mathcal{Z}/p\mathcal{Z}$ de cardinal $\omega(p)$. Soit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des entiers sans facteurs carrés et dont tous les facteurs premiers appartiennent à $\mathcal{P}$. Soit enfin Z le nombre d'entiers dans l'intervalle $[M+1, M+N]$ qui ne sont dans aucun Ω_p lorsque nous les réduisons modulo p. Nous avons*

$$Z \leq (N+Q^2)/L$$

avec

$$L = \sum_{q\in\mathcal{Q}} \mu^2(q) \prod_{p|q} \frac{\omega(p)}{p-\omega(p)}.$$

Quelques exemples :

1. Choisissons $\Omega_p = \{0\}$ pour tout $p \leq Q$. Les entiers qui ne sont dans aucun Ω_p quand $p \leq Q$ sont simplement les entiers qui ne sont divisibles par aucun $p \leq Q$. Ceci contient en particulier les nombres premiers $> Q$. Il vient alors
$$\#\big\{p \in]\min(Q, M+1), M+N]\big\} \leq (N+Q^2)\Big/ \sum_{q\leq Q} \mu^2(q)/\varphi(q).$$
et le lecteur sait ici en déduire que $\#\{p \in \cdots\} \leq (N+Q^2)/\log Q$. En choisissant $Q = \sqrt{N}/\log N$, nous retrouvons le théorème de Brun-Titchmarsh !
2. Choisissons $\Omega_p = \{0, -2\}$ pour tout $p \leq Q$. Les entiers qui ne sont dans aucun Ω_p quand $p \leq Q$ sont simplement les entiers n tels que ni n ni $n+2$ ne sont divisibles par un $p \leq Q$. Ceci contient en particulier les nombres premiers $p > Q$ tels que $p+2$ soit aussi premier. Il vient alors
$$\#\big\{p \in]\min(Q, M+1), M+N], p+2 \text{ premier}\big\} \leq (N+Q^2)\Big/ \sum_{q\leq Q} \mu^2(q) \prod_{\substack{p|q,\\ p\neq 2}} \frac{2}{p-2}.$$

Nous laissons le lecteur conclure.

Remarques : les notations Ω_p et $\omega(p)$ sont traditionnelles. Elles n'ont rien à voir avec les nombres de facteurs premiers, compté ou non avec multiplicité !

Preuve du théorème 11.1. Soit $\mathcal{N}$ la suite des entiers de $[M+1, M+N]$ qui ne sont dans aucun Ω_p pour p dans notre suite $\mathcal{P}$. Soit alors $(u_n)_{M+1\le n\le M+N}$ une suite quelconque de nombres complexes dont nous supposons que

$$n \notin \mathcal{N} \Longrightarrow u_n = 0.$$

Considérons le polynôme trigonométrique

$$S(\alpha) = \sum_{n\in\mathcal{N}} u_n \,\mathrm{e}(n\alpha).$$

Le point central de la preuve consiste à que, pour tout $q \in \mathbb{Q}$, nous avons

$$\sum_{\substack{1\le a\le q,\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} |S(a/q)|^2 \ge |S(0)|^2 J(q), \quad J(q) = \prod_{p|q} \frac{\omega(p)}{p-\omega(p)}. \tag{11.1}$$

Remarquons tout d'abord que, si (11.1) a lieu pour q et q', et que q et q' sont premiers entre eux, alors cette inégalité a lieu pour qq'. En effet le théorème chinois (voir l'exercice 10) nous permet d'écrire

$$\sum_{\substack{1\le c\le qq',\\ \mathrm{pgcd}(c,qq')=1}} \left|S\Big(\frac{c}{qq'}\Big)\right|^2 = \sum_{\substack{1\le a\le q,\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \sum_{\substack{1\le b\le q',\\ \mathrm{pgcd}(b,q')=1}} \left|S\Big(\frac{a}{q}+\frac{b}{q'}\Big)\right|^2.$$

Soit alors a fixé et remarquons que

$$S\Big(\frac{a}{q}+\frac{b}{q'}\Big) = \sum_{n\in\mathcal{N}} a_n \,\mathrm{e}(na/q)e(nb/q').$$

Le fait que (11.1) soit vrai pour q' nous donne, en changeant u_n en $u_n \,\mathrm{e}(na/q)$:

$$\sum_{\substack{1\le b\le q',\\ \mathrm{pgcd}(b,q')=1}} \left|S\Big(\frac{a}{q}+\frac{b}{q'}\Big)\right|^2 \ge J(q')|S\Big(\frac{a}{q}\Big)\Big|^2$$

Il suffit alors d'appliquer (11.1) pour q pour obtenir la multiplicativité requise. Il nous suffit donc de démontrer la propriété lorsque q est un nombre premier, disons p. Dans ce cas

$$\sum_{\substack{1\le a\le p,\\ \mathrm{pgcd}(a,p)=1}} |S(a/q)|^2 = p \sum_{b \bmod p} |S(b;p)|^2 - |S(0)|^2 \quad \text{où} \quad S(b;p) = \sum_{n\equiv b[p]} a_n.$$

Dans le membre de droite, nous remarquons que nous pouvons restreindre b à $b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \Omega_p$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz nous garantit que

$$|S(0)|^2 = \Big|\sum_{b\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\setminus\Omega_p} S(b;p)\Big|^2 \le (p-\omega(p)) \sum_{b \bmod p} |S(b;p)|^2$$

et donc,

$$\sum_{\substack{1\le a\le p,\\ \mathrm{pgcd}(a,p)=1}} |S(a/q)|^2 \ge \Big(\frac{p}{p-\omega(p)}-1\Big)|S(0)|^2,$$

ce que nous recherchions. Nous pouvons alors employer l'inégalité du grand crible, c'est à dire l'inégalité (10.12). Cela nous donne

$$|S(0)|^2 \sum_{q\in\mathbb{Q}} \mu^2(q)J(q) \le \sum_n |a_n|^2(N+Q^2).$$

Nous choisissons alors $a_n = 1$ lorsque $n \in \mathbb{N}$ et $a_n = 0$ sinon. La conclusion est facile. □

11.2 Applications

Théorème 11.2 *Soit $h > 1$ un entier pair. Nous avons, quand x tend vers l'infini :*

$$\#\{p \le x, p+h \text{ premier}\} \le 8(1+o(1)) \prod_{p\ge 3}\Big(1-\frac{1}{(p-1)^2}\Big) \prod_{2<p|h} \frac{p-1}{p-2}\frac{x}{(\log x)^2}.$$

Théorème 11.3 *Nous avons, quand x tend vers l'infini :*

$$\#\{p \le x, p+2 \text{ et } p+6 \text{ premiers}\} \ll \frac{x}{(\log x)^3}.$$

L'application qui suit nécessite le chapitre 12.

Théorème 11.4 *Nous avons, quand x tend vers l'infini :*

$$\#\{p \le x, p^2-2 \text{ premier}\} \ll \frac{x}{(\log x)^2}.$$

EXERCICE 112. *Montrer que , quand x tend vers l'infini :*

$$\#\{p \le x, (p^2+1)/2 \text{ premier}\} \ll \frac{x}{(\log x)^2}.$$

EXERCICE 113. *Considérons le nombre $r(N)$ de représentations de l'entier pair N comme somme de deux nombres premiers, soit*

$$r(N) = \sum_{p_1+p_2=N} \log p_1 \log p_2.$$

Montrer que

$$r(N) \le (8+o(1))\,\mathfrak{S}(N)\frac{N}{\log^2 N}$$

avec

$$\mathfrak{S}(N) = \mathfrak{S}_\infty \prod_{\substack{p|N\\ p\neq 2}} \frac{p-1}{p-2} \quad et \quad \mathfrak{S}_\infty = 2\prod_{p\ge 3}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

EXERCICE 114. *Soit $\mathcal{A}$ la suite des entiers pairs qui sont somme de deux nombres premiers et*

$$A(X) = \#\{a \in \mathcal{A},\ a \leq X\}.$$

Montrer que $A(X) \gg X$, c'est à dire que l'ensemble des entiers qui sont sommes de deux nombres premiers à une densité inférieure strictement positive.

INDICATION : *Le lecteur pourra partir de $\mathfrak{R} = \sum_{n \leq X} r(n)$ et s'inspirer de l'exercice 74 pour en donner un asymptotique. Par ailleurs, l'inégalité de Cauchy-Schwartz donne*

$$\mathfrak{R}^2 \leq A(X) \sum_{n \leq X} r^2(n)$$

où l'on majorera la seconde somme à l'aide du résultat de l'exercice **??** *ou* **??**. *Pour majorer la somme arithmétique résultante, le lecteur pourra se ramener à majorer $\sum_{n \leq X} \mathfrak{S}(n)^2/n$.*

Chapitre 12

Nombres premiers en progressions arithmétiques : une introduction

12.1 Le groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$

L'ensemble quotient $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est naturellement muni d'une structure d'anneau. L'addition est donnée par

$$(a \bmod q) + (b \bmod q) = (a + b \bmod q)$$

ce qui fait sens parce que cela ne dépend pas ni choix du représentant a dans $\mathbb{Z}$, ni de celui de b. Le produit est défini de la même façon :

$$(a \bmod q) \cdot (b \bmod q) = (a \cdot b \bmod q)$$

Cette définition est aussi cohérente parce qu'elle ne dépend pas des choix de a et b. Voilà pour ce qui est des rappels de la théorie classique.

Si a est premier à q, tout autre représentant a' de la classe de a modulo q est aussi premier à q. Il s'agit donc d'une propriété de la classe $a \bmod q$. Soit $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ l'ensemble des classes premières à q. Il se trouve que si nous multiplions deux tels éléments, la classe résultante est encore première à q. Il n'est pas difficile d'en conclure que $((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times, \cdot)$ est un groupe abélien fini dont l'élément neutre est $1 \bmod q$, et de cardinal $\varphi(q)$. Le théorème de Lagrange nous garantit donc que

$$\forall a \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times, \quad a^{\phi(q)} \equiv 1[q].$$

En 1837, pour étudier les nombres premiers dans les progressions arithmétiques, le mathématicien allemand Johann (Peter Gustav Lejeune) Dirichlet introduisit les *caractères de Dirichlet* modulo q : il s'agit ici des fonctions $\chi : \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{C}$ qui sont telles que

$$\chi(x) = 0 \quad \text{ssi} \quad x \notin (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \quad \text{et} \quad \forall (x, y),\ \chi(xy) = \chi(x)\chi(y).$$

Si χ est un caractère de Dirichlet modulo q, nous avons

$$\chi(1) = 1 \quad \text{et} \quad \forall a / \operatorname{pgcd}(a, q) = 1, \quad \chi(a)^{\phi(q)} = 1$$

ce qui fait que les valeurs non nulles de χ sont des racines de l'unité. La théorie des caractères de Dirichlet se développe ensuite dans deux directions : tout d'abord vers les représentations de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ de dimension 1, et ensuite vers la dualité de Pontryagin. Nous n'aborderons rien de tout cela ici et nous contenterons d'exemples !

Exercice 115. *Montrer que l'ensemble des caractères de Dirichlet modulo q est un groupe abélien fini, lorsque le produit de χ_1 et χ_2 est simplement donné par $(\chi_1\chi_2)(n) = \chi_1(n)\chi_2(n)$.*

Exercice 116. *On dit qu'un entier est un nombre de Carmichael si n n'est pas premier mais, pour tout a entier, on a $a^n \equiv a[n]$.*

⋄ 1 ⋄ *Démontrer le théorème de Korselt : n est un nombre de Carmichael si et seulement si -1) n est sans facteur carré et (2) pour tout facteur p de n, l'entier $p-1$ divise $n-1$.*

⋄ 2 ⋄ *Démontrer que 561 est un nombre de Carmichael (c'est le plus petit).*

12.2 Les caractères de Dirichlet modulo 3 et modulo 4

Le seul caractère non constant modulo 4 est

$$\forall n \equiv 1[2], \quad \chi_4(n) = (-1)^{(n-1)/2}.$$

Voici une propiété que nous allons utiliser très souvent :

$$\sum_{M<n\leq M+4} \chi_4(n) = 0. \tag{12.1}$$

Le seul caractère non constant modulo 3 est

$$\chi_3(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0[3], \\ 1 & \text{si } n \equiv 1[3], \\ -1 & \text{si } n \equiv 2[3]. \end{cases}$$

Et nous avons encore

$$\sum_{M<n\leq M+3} \chi_3(n) = 0. \tag{12.2}$$

Exercice 117. *Montrer que les deux caractères non constants modulo 8 sont donnés par*

$$\forall n \equiv 1[2], \quad \chi_8(n) = (-1)^{(n^2-1)/8}, \quad \chi_4\chi_8(n) = (-1)^{(n-1)/2+(n^2-1)/8}.$$

Nous considérons alors les deux séries L de Dirichlet définies par

$$L(s,\chi_3) = \sum_{n\geq 1} \frac{\chi_3(n)}{n^s}, \quad L(s,\chi_4) = \sum_{n\geq 1} \frac{\chi_4(n)}{n^s}. \tag{12.3}$$

Ces deux sommes convergent en $s = 1$ en vertu de (12.1) et (12.1). Il va se révéler crucial de montrer que $L(1,\chi_3)$ et $L(1,\chi_4)$ sont non nuls. Voici le lemme qui va nous permettre de les calculer :

Lemme 12.1 *Soit* $\alpha \in]0,1[$ *est un nombre réel. Nous avons*

$$\lim_{K\to\infty} \sum_{1\le k\le K} \frac{\mathrm{e}(k\alpha)}{k} = -\log|2\sin\pi\alpha| + i(\tfrac{1}{2}-\alpha)\pi.$$

Démonstration. Le série en question converge vers $-\log(1-\mathrm{e}(\alpha))$. C'est plutôt le rôle du cours d'analyse de s'occuper de cela, mais voici une preuve, qui part du prolongement explicite du logarithme :

$$\log(x+iy) = \log\sqrt{x^2+y^2} + 2i\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \qquad x+iy \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-.$$

Ici, avec $\beta = \pi\alpha$, nous avons $x = 1-\cos\beta = 2\sin^2(\beta/2)$, puis $x^2+y^2 = 4\sin^2(\beta/2)$ et $y = -\sin\beta = -2\sin(\beta/2)\cos(\beta/2)$. Il vient

$$\log(1-\mathrm{e}(\alpha)) = \log|2\sin(\beta/2)| + 2i\arctan\frac{-\cos(\beta/2)}{\sin(\beta/2)+1}.$$

Nous posons alors $t = \tan(\beta/4)$, et avec $\cos(\beta/2) = (1-t^2)/(1+t^2)$ et $\sin(\beta/2) = 2t/(1+t^2)$, nous trouvons que

$$\arctan\frac{-\cos(\beta/2)}{\sin(\beta/2)+1} = \arctan\frac{\sin(\beta/4)-\cos(\beta/4)}{\sin(\beta/4)+\cos(\beta/4)} = \arctan\frac{\sin((\beta-\pi)/4)}{\cos((\beta-\pi)/4)}.$$

Finalement, nous obtenons

$$\log(1-\mathrm{e}(\alpha)) = \log|2\sin(\beta/2)| + i(\alpha-\tfrac{1}{2})\pi.$$

□

Théorème 12.2

$$L(\chi_3) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}, \quad L(\chi_4) = \frac{\pi}{4}. \tag{12.4}$$

Démonstration. Nous avons

$$\chi_3(n) = (\mathrm{e}(n/3) - \mathrm{e}(2n/3))/(i\sqrt{3}) \tag{12.5}$$

ce que nous vérifions en chaque point n à partir de

$$\mathrm{e}(1/3) = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \mathrm{e}(2/3) = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

De même, nous vérifions que

$$\chi_4(n) = (\mathrm{e}(n/4) - \mathrm{e}(3n/4))/(2i). \tag{12.6}$$

Le lemme 12.1 nous donne

$$\sum_{k\ge1} \frac{\mathrm{e}(k/3)}{k} = -\log\Big|2\sin\frac{\pi}{3}\Big| + i\frac{\pi}{6}, \quad \sum_{k\ge1}\frac{\mathrm{e}(2k/3)}{k} = -\log\Big|2\sin\frac{2\pi}{3}\Big| - i\frac{\pi}{6}.$$

La conclusion est alors facile. Je tiens à faire remarquer qu'il est facile de vérifier numériquement notre résultat ; en effet une sommation par parties nous donne directement

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1}\frac{\mathrm{e}(k/3)}{k} &= \sum_{1\leq k\leq K}\frac{\mathrm{e}(k/3)}{k}+\int_{K+1}^{\infty}\sum_{K<k\leq t}\mathrm{e}(k/3)\frac{dt}{t^2}\\ &= \sum_{1\leq k\leq K}\frac{\mathrm{e}(k/3)}{k}+\mathcal{O}^*(1/(K+1)).\end{aligned}$$

En prenant $K = 100$ par exemple et en calculant avec GP/Pari, nous obtenons une bonne approximation du résultat annoncé. □

12.3 Les théorèmes de Mertens modulo 3 et 4

Cette partie commence en remarquant que les caractères de Dirichlet sont des fonctions multiplicatives, ce qui nous donne

$$L(s,\chi)=\prod_{p\geq 2}\frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}}\quad(\Re s>1).$$

Exercice 118.

◇ 1 ◇ *Montrer que, pour $\chi = \chi_3$ ou χ_4 et $\Re s > 1$, nous avons*

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi)=\sum_{n\geq 1}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s}.$$

◇ 2 ◇ *Montrer que, pour $\chi = \chi_3$ ou χ_4 et $s > 1$, nous avons*

$$\log L(s,\chi)=\sum_{n\geq 2}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s\log n}.$$

Voici une invention de Dirichlet :

Lemme 12.3 *Nous avons, si n est premier à 3 :*

$$\mathbb{1}_{n\equiv 1[3]}=(\mathbb{1}(n)+\chi_3(n))/2,\quad \mathbb{1}_{n\equiv 2[3]}=(\mathbb{1}(n)-\chi_3(n))/2.$$

De même, si n est premier à 2 :

$$\mathbb{1}_{n\equiv 1[4]}=(\mathbb{1}(n)+\chi_4(n))/2,\quad \mathbb{1}_{n\equiv 3[4]}=(\mathbb{1}(n)-\chi_4(n))/2.$$

Ce lemme permet d'écrire la fonction caractéristique des progressions arithmétiques concernées sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions multiplicatives.

Nous pouvons commencer la preuve à proprement parler, voir (Mertens, 1897). La version moderne de cette preuve se trouve dans (Ramaré, 2002)

Lemme 12.4 *Pour $\chi = \chi_3$ ou χ_4, nous avons*

$$L(1,\chi)=\sum_{n\leq x}\frac{\chi(n)}{n}+\mathcal{O}(1/x),\quad -L'(1,\chi)=\sum_{n\leq x}\frac{\chi(n)\log n}{n}+\mathcal{O}(\log(2x)/x).$$

Démonstration. Utiliser une sommation par parties à chaque fois. □

Lemme 12.5 *Pour $\chi = \chi_3$ ou χ_4, nous avons*

$$\frac{-L'(1,\chi)}{L(1,\chi)} = \sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n} + \mathcal{O}(1).$$

Démonstration. Nous partons de

$$-L'(1,\chi) = \sum_{n\le x} \frac{\chi(n)\log n}{n} + \mathcal{O}(\log(2x)/x)$$

et utilisons $\log = \mathbb{1} \star \Lambda$. Cela donne

$$-L'(1,\chi) = \sum_{\ell\le x} \frac{\chi(\ell)\Lambda(\ell)}{\ell} \sum_{m\le x/\ell} \frac{\chi(m)}{m} + \mathcal{O}(\log(2x)/x).$$

Le lemme précédent nous donne alors

$$-L'(1,\chi) = L(1,\chi)\sum_{\ell\le x} \frac{\chi(\ell)\Lambda(\ell)}{\ell} + \mathcal{O}\Big(\sum_{\ell\le x} \Lambda(\ell)/x\Big) + \mathcal{O}(\log(2x)/x).$$

Le théorème de Tchebyscheff ainsi que la non-annulation de $L(1,\chi)$ nous permet de conclure. □

Théorème 12.6 *Nous avons*

$$\sum_{\substack{n\le x,\\ n\equiv 1[3]}} \frac{\Lambda(n)}{n} = \tfrac{1}{2}\log x + \mathcal{O}(1), \qquad \sum_{\substack{n\le x,\\ n\equiv 2[3]}} \frac{\Lambda(n)}{n} = \tfrac{1}{2}\log x + \mathcal{O}(1),$$

et de même concernant les nombres premiers modulo 4

$$\sum_{\substack{n\le x,\\ n\equiv 1[4]}} \frac{\Lambda(n)}{n} = \tfrac{1}{2}\log x + \mathcal{O}(1), \qquad \sum_{\substack{n\le x,\\ n\equiv 3[4]}} \frac{\Lambda(n)}{n} = \tfrac{1}{2}\log x + \mathcal{O}(1).$$

Démonstration. Nous écrivons, à l'aide du lemme 12.3,

$$\sum_{\substack{n\le x,\\ n\equiv 1[3]}} \frac{\Lambda(n)}{n} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n\le x,\\ \mathrm{pgcd}(n,3)=1}} \frac{\Lambda(n)}{n} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{n\le x,\\ \mathrm{pgcd}(n,3)=1}} \frac{\Lambda(n)\chi_3(n)}{n}.$$

La contribution des puissances de 3 à la première somme est $\mathcal{O}(1)$. Nous utilisons le lemme 5.6 pour la première somme et le lemme 12.5 pour la seconde. Il est facile de conclure. □

EXERCICE 119.

◇ 1 ◇ *Montrer qu'il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que, pour $x \ge 7$,*

$$c_2 x \ge \sum_{\substack{n\le x,\\ n\equiv 1[3]}} \Lambda(n) \ge c_1 x.$$

⋄ 2 ⋄ *Montrer qu'il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que, pour $x \geq 3$,*

$$c_2 x \geq \sum_{\substack{n \leq x, \\ n \equiv 2[3]}} \Lambda(n) \geq c_1 x.$$

⋄ 3 ⋄ *Montrer qu'il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que, pour $x \geq 5$,*

$$c_2 x \geq \sum_{\substack{n \leq x, \\ n \equiv 1[4]}} \Lambda(n) \geq c_1 x.$$

⋄ 4 ⋄ *Montrer qu'il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que, pour $x \geq 3$,*

$$c_2 x \geq \sum_{\substack{n \leq x, \\ n \equiv 3[4]}} \Lambda(n) \geq c_1 x.$$

Le lecteur lira aussi (Bordellés, 2005) avec bénéfice.

12.4 Un exemple

Considérons la fonction multiplicative h définie par

$$\begin{cases} h(p^k) = 1 & \text{si} \quad k \geq 1 \quad \text{et} \quad p \equiv 1, 2[4], \\ h(p^{2k}) = 1 & \text{si} \quad k \geq 1 \quad \text{et} \quad p \equiv 3[4], \\ h(p^{2k+1}) = 1 & \text{si} \quad k \geq 0 \quad \text{et} \quad p \equiv 3[4], \end{cases}$$

qui est en fait la fonction caractéristique des sommes de deux carrés. Avec $g(d) = h(d)/d$, nous constatons que les hypothèses du théorème 2 sont vérifiées pour $\kappa = \frac{1}{2}$ ce qui nous donne

$$\sum_{d \leq D} \frac{h(d)}{d} = C\,(\log D)^{1/2}\big(1 + \mathcal{O}(1/\log D)\big)$$

pour une certaine constante $C > 0$.

Exercice 123. *Montrer que, pour $n \geq 1$, nous avons*

$$\sum_{b\ell = n} \mu(b) \log \ell = \Lambda(n).$$

EXERCICE 124. *(P. Gallagher et R. Vaughan) Soit une fonction quelconque $g \geq 0$ et y et z deux paramètres réels positifs. Montrer que la somme $\sum_n \Lambda(n)g(n)$ égale*

$$\sum_{n \leq P}(u_n - v_n)g(n) + \sum_{\substack{yz<\ell\leq P/z \\ yz<m\leq P/(yz)}} w_\ell g(\ell m)$$

lorsque $P > 4z$ et avec

$$u_n = \sum_{\substack{b|n \\ b\leq y}} \mu(b)\log(n/b)\ ,\ v_n = \sum_{\substack{bc|n \\ b\leq y, c\leq z}} \mu(b)\Lambda(c)$$

$$w_\ell = \sum_{\substack{bc=\ell \\ b>y, c>z}} \mu(b)\Lambda(c).$$

EXERCICE 125. *(Yu Linnik) Montrer que pour K entier pair, et une fonction quelconque $g \geq 0$, nous avons :*

$$\sum_n \frac{\Lambda(n)}{\log n} g(n) \geq \sum_{1\leq k\leq K} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_n \tau_k^*(n)g(n)$$

où $\tau_k^*(n)$ est le nombre de k-uplets $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ d'entiers strictement *supérieurs à 1 tels que $d_1 d_2 \dots d_k = n$.*
Montrer que, pour K impair, l'inégalité inverse a lieu.

INDICATION : *Commençer par l'inégalité :*

$$\Lambda(n) \geq T(n) = \Lambda(n) - \sum_{\ell a = n} \Lambda(\ell)\tau_K^*(a).$$

Chapitre 13

Exercices

EXERCICE 126. *On using the proof of* (3.1) *but replacing* (3.2) *by* (7.10)*, show that*

$$\sum_{n\le X}\frac{\varphi(n)}{n}\frac{\log n}{n} = C_1\log^2 X + C_2\log X + C_3 + \mathcal{O}\biggl(\frac{(\log(2X))^2}{X}\biggr)$$

for some constants C_1*,* C_2 *and* C_3*.*

EXERCICE 127. *Soit* d *un entier* ≥ 1 *et* N *un réel* ≥ 0*. Montrer que*

$$\Bigl|\sum_{\substack{n\le N,\\ (n,d)=1}}\mu(n)/n\Bigr| \le 1.$$

INDICATION : *Soit* d' *le produit des nombres premiers* $\le N$ *qui sont aussi premiers à* d*. Étudier la quantité* $\sum_{n\le N,(n,d')=1} 1$ *en utilisant*

$$\sum_{\substack{\ell|n,\\ \ell|d'}}\mu(\ell) = \begin{cases} 1 & \textit{si } \mathrm{pgcd}(n,d')=1,\\ 0 & \textit{sinon.}\end{cases}$$

On pourra supposer x *entier.*

EXERCICE 128. *Donner une majoration de*

$$\Bigl|\sum_{n\le x}\frac{\mu(n)}{n}\log\frac{x}{n}\Bigr|$$

à partir de $\sum_{nm\le x}\mu(n)d(m)$*.*

EXERCICE 129. *Montrer que, pour tout entier* n*, nous avons*

$$\sum_{\substack{d,e\ge 1,\\ [d,e]=n}}\mu(d)\mu(e) = \mu(n).$$

Exercice 130. *Montrer que nous avons*

$$\sum_{d,e\geq 1}\frac{\mu(d)\mu(e)}{[d,e]^2}=\frac{6}{\pi^2}.$$

Exercice 131. *Montrer en utilisant l'inégalité de Brun-Titchmarsh, le théorème de Bombieri-Vinogradov et l'exercice 105 qu'il existe B tel que*

$$\sum_{q\leq Q}3^{\omega(d)}\max_{y\leq X}\max_{a\,mod^* q}\left|\psi(y;q,a)-y/\varphi(q)\right|\ll X/\log^A X$$

pour $Q=\sqrt{X}/(\log X)^B$.

Indication : *Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'exercice 105.*

Exercice 132. *Montrer que pour tout caractère χ modulo q de conducteur $\mathfrak{f}$, nous avons*

$$\chi(n)=\frac{\tau_{\mathfrak{f}}(\chi^*,1)\varphi(q)}{q}\sum_{\substack{d|q,\\ \mathfrak{f}|d,(\mathfrak{f},d/\mathfrak{f})=1}}\frac{\mu(d/\mathfrak{f})\chi^*(d/\mathfrak{f})}{\varphi(d)}\sum_{a\,mod^* d}\overline{\chi}(a)\,\mathrm{e}(-na/d)$$

où χ^* est le caractère induit par χ modulo $\mathfrak{f}$.

Indication : *Utiliser le théorème* **??**.

Exercice 133. *Soit χ un caractère modulo q de conducteur $\mathfrak{f}$. Montrer que*

$$\left|\sum_{n\leq N}\chi(n)\right|\ll\sqrt{f}\prod_{\substack{p|q,\\ p\nmid\mathfrak{f}}}(2-1/p)\log q\ll\sqrt{q}\log q.$$

Indication : *Utiliser l'exercice 132.*

Exercice 134. *Soit χ un caractère de Dirichlet primitif modulo q. Montrer que*

$$L(1,\chi)=\frac{-\tau(\chi)}{q}\begin{cases}2\displaystyle\sum_{1\leq m\leq q/2}\overline{\chi}(m)\log\left|\sin\frac{\pi m}{q}\right| & si\ \chi(-1)=1,\\ i\pi\displaystyle\sum_{1\leq m\leq q/2}\overline{\chi}(m)\left(1-\frac{2m}{q}\right) & si\ \chi(-1)=-1,\end{cases}$$

avec $\tau(\chi)=\sum_{a\,mod\,q}\chi(a)\,\mathrm{e}(a/q)$.

Indication : *Développer le caractère χ en termes des caractères additifs modulo q et utiliser $\sum_{n\geq 1}\mathrm{e}(na/q)/n=\log\left|\sin\frac{\pi m}{q}\right|+i\pi\left(1-\frac{2m}{q}\right)$.*

Exercice 135. *Montrer que $|L(1,\chi)|\leq\log q+\mathcal{O}(1)$ où χ est un caractère de Dirichlet modulo q.*

Indication : *Utiliser une intégration par parties pour exprimer $L(1,\chi)-\sum_{n\leq N}\chi(n)/n$ en fonction de $S(t)=\sum_{n\leq t}\chi(n)$, puis choisir N de façon optimale. Remarquons ici qu'en utilisant l'exercice 132, nous pourrions obtenir la majoration $|L(1,\chi)|\leq\frac{1}{2}\log q+\mathcal{O}(\log\log q)$.*

Exercice 136. *Montrer que* $|L(\frac{1}{2}+it,\chi)| \ll q\sqrt{|t|+1}$ *où* χ *est un caractère de Dirichlet modulo* q.

Exercice 137. *Soit* χ_1 *et* χ_2 *deux caractères modulo* q. *La somme de Jacobi se définit par*

$$J_q(\chi_1,\chi_2) = \sum_{x \bmod q} \chi_1(x)\overline{\chi_2}(1-x).$$

Montrer que si χ_1 *et* χ_2 *sont primitifs modulo* q, *alors*

$$J_q(\chi_1,\chi_2) = \tau_q(\chi_1,1)\tau_q(\overline{\chi_2},1)\tau_q(\overline{\chi_1}\chi_2,1)/q.$$

Montrer que lorsque χ *est de conducteur* $\mathfrak{f}$, *nous avons*

$$J_q(\chi,\chi) = \mu(\mathfrak{f})\chi(-1)\prod_{\substack{p|q,\\ p\nmid\mathfrak{f}}}(p-2).$$

Exercice 138. *Soit* p *un nombre premier* $\equiv 1[4]$. *Montrer qu'il existe un caractère primitif* χ *d'ordre 4 modulo* p. *Montrer que pour ce caractère,* $J_p(\chi,\overline{\chi})$ *est de modulo* $\sqrt{p}$. *En déduire que* p *peut s'écrire comme une somme de deux carrés d'entiers.*

Indication : *Utiliser l'exercice 137 et déterminer l'ensemble des valeurs prises par* χ.

Exercice 139. *Montrer qu'il existe une constante* $C>0$ *telle que*

$$\prod_{\substack{p\le X,\\ p\equiv 2[3]}}(1-1/p) \sim C(\log X)^{-1/2}.$$

Indication : *Utiliser le théorème de Siegel-Walfish.*

Exercice 140. *Montrer que pour* $Y \ge 10$ *et* $\sigma > 0$, *nous avons*

$$\prod_{p\le Y}(1+p^{-\sigma}) \ll_\sigma \exp\bigl(Y^{\max(0,1-\sigma)}\log\log Y\bigr).$$

Indication : *Passer aux logarithmes pour se ramener à la somme de* $1/p^\sigma$. *Pour évaluer cette dernière, traiter séparément les cas* $1-\sigma \le 1/\log Y$ *et* $1-\sigma > 1/\log Y$.

Exercice 141. *Montrer que*

$$\left|\sum_{d\le N}\frac{\mu(d)}{d}\log\frac{N}{d}\right| \ll 1.$$

Indication : *On pourra partir de*

$$\mu \star \log = \Lambda.$$

Exercice 142.

◇ 1 ◇ *Montrer que, lorsque* $\alpha \in [0,1[$, *nous avons*

$$\log(1-e(\alpha)) = \sum_{k\geq 1} \frac{e(k\alpha)}{k} = \log(2\sin\pi\alpha) + i\pi(\alpha - \tfrac{1}{2}).$$

(On rappelle que $e(\alpha) = \exp(2i\pi\alpha)$*).*

◇ 2 ◇ *Soit* χ *un caractère de Dirichlet primitif modulo* q. *Montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \chi(n) = \frac{\tau(\chi)}{q} \sum_{m \bmod q} \overline{\chi(m)} e(mn/q)$$

où

$$\tau(\chi) = \sum_{a \bmod q} \chi(a) e(-a/q).$$

Établir que $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$.

◇ 3 ◇ *Montrer que si* χ *est un caractère de Dirichlet primitif modulo* $q > 1$, *alors*

$$L(1,\chi) = \begin{cases} \dfrac{i\pi\tau(\chi)}{q^2} \displaystyle\sum_{1\leq m\leq q} m\chi(m) & \textit{lorsque } \chi(-1) = -1, \\ \dfrac{\tau(\chi)}{q} \displaystyle\sum_{1\leq m\leq q} \chi(m) \log\sin\frac{m}{q} & \textit{lorsque } \chi(-1) = 1. \end{cases}$$

Exercice 145.

◇ 1 ◇ *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 1} \mu(n)/n^\sigma$ *est convergente pour* $\sigma \geq 1$ *et représente une fonction continue.*

◇ 2 ◇ *Montrer qu'il existe une constante* $c' > 0$ *telle que, pour tout* $x \geq 2$, *nous avons*

$$\sum_{n\leq x} \mu(n)/n = \mathcal{O}\big(1/\log x\big).$$

◇ 3 ◇ *Comparer la série de Dirichlet de* $\mu(n)/\varphi(n)$ *à* $1/\zeta(s+1)$ *et montrer qu'il existe une constante* $c'' > 0$ *telle que*

$$\sum_{n\leq x} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} = \mathcal{O}\big(1/\log x\big).$$

Indication : *On pourra utiliser la méthode de convolution.*

Exercice 146. *Il s'agit de montrer que le nombre d'entiers $\leq N$ dont tous les facteurs sont $\leq N^{\varepsilon}$ est $\gg_{\varepsilon} N$.*
Soit $\epsilon = 1/k$, où $k \geq 1$ est un entier. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des entiers qui n'ont que des facteurs $\leq N^{\epsilon}$. Et Z le nombre d'entre eux qui sont $\leq N$.

$\diamond$ 1 $\diamond$ *En partant de* $Z \log N \geq \sum_{\substack{n\in\mathcal{S},\\ n\leq N}} \sum_{p|n} \log p$, *montrer que*

$$Z \log N \geq C_6 N \sum_{\substack{n\in\mathcal{S},\\ N^{1-\epsilon}<n\leq N}} 1/n - C_7 Z$$

pour des constantes strictement positives C_6 et C_7.

$\diamond$ 2 $\diamond$ *La minoration de la somme de $1/n$ pour n dans $\mathcal{S}$ et dans l'intervalle ci-dessus va suivre le même chemin, mais nécessite une récurrence dont voici l'élément clé : il existe deux constantes $c_1 = c_1(\epsilon)$ et $N_0 = N_0(\epsilon)$ telles que pour tout $\ell \in \{0, \ldots, k-1\}$ et $N \geq N_0$, nous avons*

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{S},\\ 2^{\ell}N^{1-(\ell+1)/k}<n\leq N^{1-\ell/k}}} 1/n \geq c_1 \sum_{\substack{n\in\mathcal{S},\\ 2^{\ell+1}N^{1-(\ell+2)/k}<n\leq N^{1-(\ell+1)/k}}} 1/n. \tag{13.1}$$

Montrer cette inégalité.

$\diamond$ 3 $\diamond$ *En utilisant* (13.1)*, montrer par récurrence que*

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{S},\\ N^{1-1/k}<n\leq N}} 1/n \geq c_1^{k-1} \sum_{\substack{n\in\mathcal{S},\\ 2^{k-1}<n\leq N^{1/k}}} 1/n.$$

Cette dernière quantité est $\gg \log N^{\epsilon}$ puisque la condition $n \in \mathcal{S}$ y est superflue. En conclure que

$$(\log N + C_7)Z \gg_{\epsilon} N \log N$$

ce que nous cherchions à démontrer.

Notations

Toutes les notations utilisées sont standards ... d'une façon ou d'une autre ! En voici quelques unes :

— $\|a\|$ désigne la norme L^2, mais $\|u\|$ désigne aussi la distance au plus proche entier.

— $\mathrm{e}(y) = \exp(2i\pi y)$.

— La lettre p pour une variable implique toujours que celle-ci est un nombre premier.

— Nous notons $[d, d']$ le ppcm et (d, d') le pgcd des entiers d et d'.

— $|\mathcal{A}|$ désigne le cardinal de l'ensemble $\mathcal{A}$ et $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ sa fonction caractèristique. Oui, bien sûr, $|s|$ est aussi le module du nombre complexe s.

— $q\|d$ signifie que q divise d de telle sorte que q et d/q soit premiers entre eux. Nous énoncerons : *q divise exactement d*.

— Le *noyau sans facteurs carrés* de $d = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ est $\prod_i p_i$, soit encore le produit de tous les diviseurs premiers de d.

— $\omega(d)$ est le nombre de facteurs premiers de d, comptés sans multiplicité.

— $\varphi(d)$ est la focntion d'Euler, c'est à dire le cardinal du groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

— $\sigma(d)$ est le nombre de diviseurs (positifs) de d.

— $\mu(d)$ est la fonction de Moebius, c'est à dire 0 si d est divisible par un carré > 1 et $(-1)^r$ sinon, où $r = \omega(d)$ est le nombre de facteurs premiers de d.

— $c_q(n)$ désigne la somme de Ramanujan sum. Il s'agit de la somme des $\mathrm{e}(an/q)$ sur tous les a modulo q qui sont premiers à q.

— $\Lambda(n)$ est la fonction de van Mangoldt : $\log p$ si n est une puissance du nombre premier p et 0 sinon.

— La notation de Landau $f = \mathcal{O}_A(g)$ signifie qu'il existe une constante B telle que $|f| \leq Bg$, constante qui peut dépendre de A. Si nous mettons plusieurs variables en indices, cela signfie tout simplement que la constante implicite B dépend de tous ceux-là.

— La notation $f = \mathcal{O}^*(g)$ signifie que $|f| \leq g$, c'est à dire qu'il s'agit d'un $\mathcal{O}$ mais avec une constante implicite égale à 1.

— Nous utiliserons aussi la notation de Vinogradov $f \ll g$ qui signifie $f = \mathcal{O}(g)$. Ces deux notations seront donc pour nous équivalentes (ce n'est pas toujours le cas en général car les notations de Landau font appel à la notion de voisinage d'un point ; en ce sens, il est correct de dire que la notation de Vinogradov correposnd à une version uniforme de la notation de Landau). Nous utiliserons aussi $f \ll_A g$ pour $f = \mathcal{O}_A(g)$.

— La notation $f \star g$ désigne la convolution arithmétique, c'est à dire la fonction h sur les entiers positifs définie par $h(d) = \sum_{q|d} f(q)g(d/q)$.

— π est ... le nombre réel classique qui vaut à peu près $3.141\,5\ldots$! Mais π désigne aussi la fonction de comptage des nombres premiers et $\pi(X)$ est donc le nombre de nombres premiers inférieur ou égaux à X : par exemple $\pi(6) = 3$. Nous éviterons cette notation si possible. Une autre façon de dire la définition ci-dessus consite à écrire $\pi(X) = \sum_{p\le X} 1$.

— Les fonctions de Tchebyschev ϑ et ψ valent respectivement $\vartheta(X) = \sum_{p\le X} \log p$ et $\psi(X) = \sum_{n\le X} \Lambda(n)$. Ces deux fonctions sont très proches l'une de l'autre.

References

Apostol, T.M. 1976. *Introduction to analytic number theory.* New York : Springer-Verlag. Undergraduate Texts in Mathematics.

Bateman, P.T., & Diamond, H.G. 2004. *Analytic number theory.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ. An introductory course.

Bombieri, E. 1971. A note on the large sieve. *Acta Arith.*, **18**, 401–404.

Bombieri, E. 1987/1974a. Le grand crible dans la théorie analytique des nombres. *Astérisque*, **18**, 103pp.

Bombieri, E. 1987/1974b. Le grand crible dans la théorie analytique des nombres. *Astérisque*, **18**, 103pp.

Bordellés, O. 2005. An explicit Mertens' type inequality for arithmetic progressions. *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, **6**(3), paper no 67 (10p).

Bordellès, O. 2006. An inequality for the class number. *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.*, **7**(3), Article 87, 8 pp. (electronic).

Bordellès, O. 2012. *Arithmetic Tales.* Springer.

Cahen, E. 1894. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues. `http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1894_3_11__75_0`.

Daboussi, H. 1984. Sur le théorème des nombres premiers. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I*, **298**, 161–164.

Daboussi, H. 1996. Effective estimates of exponential sums over primes. *Analytic number theory. Vol. 1. Proceedings of a conference in honor of Heini Halberstam, May 16-20, 1995, Urbana, IL, USA. Boston, MA: Birkhaeuser. Prog. Math.*, **138**, 231–244.

Daboussi, H., & Rivat, J. 2001. Explicit upper bounds for exponential sums over primes. *Math. Comp.*, **70**(233), 431–447.

Davenport, H. 2000. *Multiplicative Number Theory.* third edition edn. Graduate texts in Mathematics. Springer-Verlag.

de la Vallée-Poussin, Ch. 1899. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. *Belg. Mém. cour. in* 8°, **LIX**, 74pp.

Delange, H. 1954. Généralisation du théorème de Ikehara. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3)*, **71**, 213–242. `http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1954_3_71_3_213_0`.

Delange, H. 1961. Un théorème sur les fonctions arithmétiques multiplicatives et ses applications. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, **78**, 1–29. `http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1961_3_78_1_1_0`.

Dirichlet, P.G.L. 1937. Beweis des Satzes, das jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält. *Abhandlungen der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Scan de l'article original : `http://bibliothek.bbaw.de/bibliothek-digital/digitalequellen/`

schriften/anzeige?band=07-abh/1837&seite:int=00000286 et traduction : http://arxiv.org/abs/0808.1408.

Dress, F. 1983/84. Théorèmes d'oscillations et fonction de Möbius. *Sémin. Théor. Nombres, Univ. Bordeaux I*, **Exp. No 33**, 33pp. http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002545454.

Elliott, P.D.T.A. 1971. On inequalities of large sieve type. *Acta Arith.*, **18**, 405–422.

Ellison, W.J. 1975. *Les nombres premiers*. Paris : Hermann. En collaboration avec Michel Mendès France, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, No. IX, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1366.

Granville, A., & Soundararajan, K. 2001. The spectrum of multiplicative functions. *Ann. of Math. (2)*, **153**(2), 407–470.

Greaves, G., & Huxley, M. 1999. One sided sifting density hypotheses in Selberg's sieve. *Pages 105–114 of :* Jutila, M. (ed), *Turku symposium on number theory in memory of Kustaa Inkeri*. Turku, Finland : Berlin : de Gruyter.

Halász, G. 1968. Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheorischer Funktionen. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **19**, 365–403.

Halberstam, H., & Richert, H.E. 1971. Mean value theorems for a class of arithmetic functions. *Acta Arith.*, **43**, 243–256.

Halberstam, H., & Richert, H.E. 1974. Sieve methods. *Academic Press (London)*, 364pp.

Halberstam, H., & Richert, H.E. 1979. On a result of R. R. Hall. *J. Number Theory*, **11**, 76–89.

Hardy, G. H., & Riesz, M. 1964. *The general theory of Dirichlet's series*. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 18. Stechert-Hafner, Inc., New York. Première édition en 1915.

Hewitt, E., & Williamson, J.H. 1957. Note on absolutely convergent Dirichlet series. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8**, 863–868.

Kahane, J.-P., & Queffélec, H. 1997. Ordre, convergence et sommabilité de produits de séries de Dirichlet. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **47**(2), 485–529. http://www.numdam.org/item?id=AIF_1997__47_2_485_0.

Lejeune-Dirichlet, P.G. 1871. *Lectures on Number Theory, edited by R. Dedekind. Second edition. (Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von R. Dedekind. Zweite Auflage.)*. Braunschweig. Vieweg . Première édition en 1863.

Levin, B.V., & Fainleib, A.S. 1967. Application of some integral equations to problems of number theory. *Russian Math. Surveys*, **22**, 119–204.

Mertens, F. 1897. On Dirichlet's proof of the theorem that every infinite arithmetic progression of integers, whose difference is prime to its members, contains infiniely many prime numbers. (Ueber Dirichlet's Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte ganzzahlige arithmetische Progression, deren Differenz zu ihren Gliedern teilerfremd ist, unendlich viele Primzahlen enthält.). *Wien. Ber.*, **106**, 254–286.

Montgomery, H.L., & Vaughan, R.C. 1973. The large sieve. *Mathematika*, **20**(2), 119–133.

Montgomery, H.L., & Vaughan, R.C. 2006. *Multiplicative Number Theory : I. Classical Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 97. Cambridge University Press.

Moree, P. 2004. Chebyshev's bias for composite numbers with restricted prime divisors. *Math. Comp.*, **73**(245), 425–449.

Ramaré, O. 1995. On Snirel'man's constant. *Ann. Scu. Norm. Pisa*, **21**, 645–706. http://math.univ-lille1.fr/~ramare/Maths/Article.pdf.

Ramaré, O. 2002. Sur un théorème de Mertens. *Manuscripta Math.*, **108**, 483–494.

Rawsthorne, D.A. 1982. Selberg's sieve estimate with a one-sided hypothesis. *Acta Arith.*, **49**, 281–289.

Riesel, H., & Vaughan, R.C. 1983. On sums of primes. *Arkiv för mathematik*, **21**, 45–74.

Rosser, J.B., & Schoenfeld, L. 1962. Approximate formulas for some functions of prime numbers. *Illinois J. Math.*, **6**, 64–94.

Tenenbaum, G. 1995. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* Second edn. Cours Spécialisés, vol. 1. Paris : Société Mathématique de France.

Vinogradov, I. M. 1954. *Elements of number theory.* New York : Dover Publications Inc. Translated by S. Kravetz.

Wirsing, E. 1961. Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen. *Math. Ann.*, **143**, 75–102.

Index