HW #2 Solution

2-a)

$n=1$ için $3^1+7^1-2=8$ doğru ✓

$n=k$ için doğru olduğunu varsayalım.

3^k+7^k-2 8'in katı olsun.

$3^{k+1}+7^{k+1}-2$ 8'in katı mı bakalım.

$3.3^k+7.7^k-2$ şeklinde yazabiliriz.

3^k+7^k-2 'yi çıkaralım.

$2.3^k+6.7^k$ 8'in katı mı bakmaya devam edelim.

$2(3^k+3.7^k)$ şeklinde yazabiliriz.

$3^k+3.7^k$'nın 4'ün katı olması yeterli.

$3^k + 3.7^k$ 'nın 4'ün katı olduğunu tekrar induction ile araştıralım.

$k=1$ için $3^1 + 3.7^1 = 24$ doğru ✓

$k=m$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$3^m + 3.7^m$

$k=m+1$ için doğruluğuna bakalım.

$3.3^m + 21.7^m$

$-\;3(3^m + 3.7^m)$

12.7^m kalır. buda 4'ün katıdır.

Bu soruda iki sefer induction kullanarak $\cancel{3^1+7^1}$ $3^n + 7^n - 2$ ifadesinin 8'in katı olduğunu gösterdik.

2-6)

tek elemanlı bir dizi için doğru olduğu açıktır.

k elemanlı bir dizi sıralı olsun.
yeni bir eleman geldiğinde dizinin büyük tarafından başlayarak sırayla elemanlarla karşılaştıracağız ve bu elemanı ilgili yere yerleştireceğiz. Elde ettiğimiz k+1 elemanlı dizi de sıralıdır.

Böylece insertion sortun doğruluğunu göstermiş olduk.

4-a) $T(n) = T(n/2) + n^2 = T(n/4) + n^2\left(1 + \frac{1}{4}\right)$

$$= T(n/8) + n^2\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) = T(1) + n^2\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots \frac{1}{k^2}\right)$$

$$= T(1) + n^2\left(\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \dots \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2 n}\right)$$

$$= T(1) + n^2 \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{4}^{(\log_2 n + 1)}}{1 - \frac{1}{4}}\right)$$

$$= T(1) + n^2\left(\frac{1 - 2^{-2(\log_2 n + 1)}}{1 - \frac{1}{4}}\right)$$

$$= T(1) + n^2\left(\frac{1 - \frac{1}{4n^2}}{\frac{3}{4}}\right) = T(1) + n^2\left(\frac{4n^2 - 1}{3n^2}\right)$$

$$= T(1) + \frac{4n^2 - 1}{3} = \boxed{\frac{4n^2 + 2}{3}}$$

4-b) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

$$T(n/3) = 2T\left(\frac{n}{3^2}\right) + n\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$T(n) = 2^2 \cdot T\left(\frac{n}{3^2}\right) + n\left(\frac{2}{3} + 1\right)$$

$$T\left(\frac{n}{3^2}\right) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{3^3}\right) + \left(\frac{1}{3^2}\right)n$$

$$T(n) = 2^3 \cdot T\left(\frac{n}{3^3}\right) + n\left(\frac{2^2}{3^2} + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^0\right)$$

$$T(n) = 2^{\log_3 n} * T(1) + n\left(\frac{2}{3}^0 + \frac{2}{3}^1 + \cdots \frac{2}{3}^{\log_3 n - 1}\right)$$

$$= n^{\log_3 2} + n \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_3 n}}{1 - \frac{2}{3}}\right)$$

$$= n^{\log_3 2} + 3n \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_3 n}\right)$$

$$= n^{\log_3 2} + 3n.\left(1 - 2^{\log_3 n} \times \left(3^{-1}\right)^{\log_3 n}\right)$$

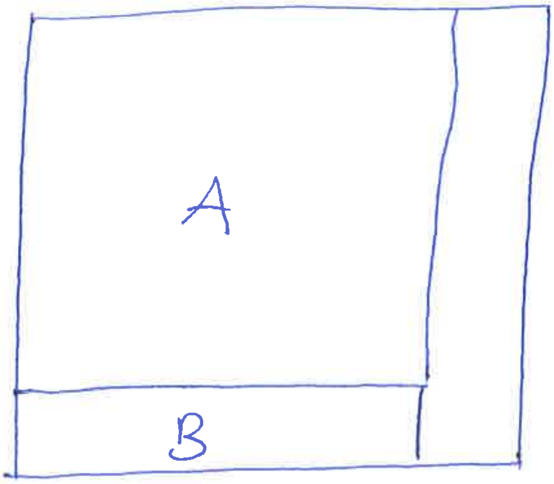
$$= n^{\log_3 2} + 3n.\left(1 - n^{\log_3 2} \times n^{-1}\right)$$

$$= n^{\log_3 2} + 3n - 3\, n^{\log_3 2}$$

$$\cancel{= 3n - 2^{\log}}$$

$$= \boxed{3n - 2 . n^{\log_3 2}}$$

7-) algoritma şöyle çalışıyor.



Büyük karenin complete olduğuna bakmak için recursif olarak A complete mi diye bakıyoruz. A değilse 0 döndürüyoruz. A complete ise B'deki bütün entry'ler 1 mi diye bakıyoruz.

Bu durumda worst case'de algoritma'nın çalışma zamanı

$f(n) = f(n-1) + (n-1)$ olacaktır.

Bunu açarsak şöyle olur:

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \cancel{f(n-1)} + (n-1) \\
&\quad \cancel{f(n-2)} + (n-2) \\
&\quad f(n-3) + (n-3) \\
&\quad \vdots \\
+ &\quad f(1) + 1
\end{aligned}
$$

$$f(n) = f(1) + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n^2 - n + 2}{2} = \Theta(n^2)$$

8-) Her soru soruşumuzda mutlaka bir kişi elenecektir. Bu durumda (n-1) soru ile (n-1) kişi elenecektir. Kalan kişiyi elenen (n-1) kişiye sırayla soracağız. Eğer herkes onu tanıyorsa o kişi bir celebrity'dir. Değilse celebrity yoktur.

Bunu şu algoritma ile yapabiliriz:

$\boxed{1} - \boxed{2} - \boxed{3} - \boxed{4} - \cdots - \boxed{n}$

Yukarıdaki link listte her zaman birinciye ikinciyi tanıyıp tanımadığını soracağız. Tanıyorsa 1. elemanı çıkaracağız. listenin ilk elemanı 2. eleman olacak. Tanımıyorsa ~~2. eleman~~ 2. eleman listeden çıkacak. Bu şekilde (n-1) seferde tek bir eleman kalacak. Çıkan (n-1) taneye kalan elemanı soracağız. Yani toplamda 2n-2 soru ile bu problemi çözebiliriz.