Yusuf Coşkuner
13104,1003

222 - Veri Yapıları Ve Algoritmalar

1) Prove that if $f_1(n) = \Theta(g1(n))$ and $f_2(n) = \Theta(g2(n))$ then
$f_1(n) * f_2(n) = \Theta[g_1(n) * g_2(n)]$?

20

— if $f_1(n) = \Theta(g_1(n)) \longrightarrow f_1(n) = O(g_1(n))$ 'dir, öyleyse;
(önerme 1) $f_1(n) \leq c_1 g_1(n)$ for all $n \geq n_1$ ifadesi için bir reel poz. "c_1" ve "n_1" vardır.
if $f_2(n) = \Theta(g_2(n)) \longrightarrow f_2(n) = O(g_2(n))$ 'dir.
(önerme 2) $f_2(n) \leq c_2 g_2(n)$ for all $n \geq n_2$ ifadesi için bir reel poz. "c_2" ve "n_2" vardır.
$f_1(n) * f_2(n) = O(g_1(n) * g_2(n))$ ifadesini kanıtlayalım.
$f_1(n) * f_2(n) \leq g_1(n) * g_2(n) * c_3$ $n \geq n_3$ için bir "c_3" ve "n_3" var mıdır?
- Yukarıda kanıtladığımız iki önermeyi kullanarak aşağıdaki ifade yazılır.
$f_1(n) . f_2(n) \leq c_1 * c_2 * g_1(n) * g_2(n)$ $n \geq max(n_1, n_2)$ yazılır.
Böylece $\boxed{f_1(n) * f_2(n) = O(g_1(n) * g_2(n))}$ ifadesi $c = c_3 = c_1 * c_2$ ve $n_0 = max(n_1, n_2)$ için kanıtlanmış olur.

- if $f_1(n) = \Theta(g_1(n)) \longrightarrow f_1(n) = \Omega(g_1(n))$ 'dir.
(önerme 1) $f_1(n) \geq c_1 g_1(n)$ for all $n \geq n_1$ ifadesi için bir reel poz. "c_1" ve "n_1" vardır.
if $f_2(n) = \Theta(g_2(n)) \longrightarrow f_2(n) = \Omega(g_2(n))$ 'dir.
(önerme 2) $f_2(n) \geq c_2 g_2(n)$ for all $n \geq n_2$ ifadesi için bir reel poz. "c_2" ve "n_2" vardır.
$f_1(n) * f_2(n) = \Omega(g_1(n) * g_2(n))$ ifadesini kanıtlayalım.
$f_1(n) * f_2(n) \geq g_1(n) * g_2(n) * c_3$ $n \geq n_3$ için bir "c_3" ve "n_3" var mıdır?
- Yukarıda kanıtladığımız iki önermeyi kullanarak aşağıdaki ifade yazılır.
$f_1(n) * f_2(n) \geq c_1 * c_2 * g_1(n) * g_2(n)$ for all $n \geq max(n_1, n_2)$ yazılır.
Böylece $\boxed{f_1(n) * f_2(n) = \Omega(g_1(n) * g_2(n))}$ ifadesi $c = c_3 = c_1 * c_2$ ve $n_0 = max(n_1, n_2)$ için kanıtlanmış olur.

Yukarıda ayrı ayrı $f_1(n) * f_2(n) = O(g_1(n) * g_2(n))$ ve
$f_1(n) * f_2(n) = \Omega(g_1(n) * g_2(n))$ ifadelerinin doğruluğunu
kanıtladık. Bu iki ifadenin kanıtı da $\boxed{f_1(n) * f_2(n) = \Theta[g_1(n) * g_2(n)]}$ ifadesini kanıtlar.

2) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow f(n) \leq c_1 \cdot g(n)$ $n > n_0$ için

Her iki tarafın k. kuvveti alınır.

$(f(n))^k \leq c_1^k \cdot (g(n))^k$ $n > n_1$ için

$c_1^k = c_2$ olarak alırsak

$(f(n))^k \leq c_2 \cdot (g(n))^k$ $n > n_1$ için

Çarpılan denklemler aynı olduğu için $n_1 = n_0$ olmalıdır.
$(n_a = \max(n_b, n_c)$, $n_b = n_c \Rightarrow n_a = n_b = n_c$ olur$)$

$(f(n))^k = O((g(n))^k)$ olur.

3a)

$\rightarrow f(n) = 100n + \log n, \quad g(n) = n + (\log n)^2$

$f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow 100n + \log n \leq c(n + (\log n)^2) \quad n > n_0$

$c = 100 \Rightarrow \cancel{100n} + \log n \leq \cancel{100n} + 100 \log n \log n$

$\log \cancel{n} \leq 100 \log n \log \cancel{n}$

$1 \leq 100 \log n \qquad c = 100, \; n_0 = 1$ ✓

$\rightarrow f(n) \in \Omega(g(n)) \Rightarrow 100n + \log n \geq c(n + (\log n)^2) \quad n > n_0$

$c = 1 \Rightarrow \overset{99n}{\cancel{100n}} + \log n \geq \cancel{n} + \log n \log n$

$2^{99n} \cdot 2^{\log n} \geq (2^{\log n})^{\log n}$

$2^{99n} \cdot n \geq n^{\log n}$

$2^{99n} \geq n^{\log n - 1}$

$\log(2^{99n}) \geq \log(n^{\log n - 1})$

$99n \geq (\log n - 1) \log n$

$\downarrow$

$\log^2 n \geq (\log n - 1) \log n$

$99n \geq \log^2 n \qquad n_0 = 1, \; c = 1$ ✓

$f(n) \in O(g(n)), \quad f(n) \in \Omega(g(n))$

so, $f(n) \in \Theta(g(n))$

3b) $f(n) = \log n$, $g(n) = \log\log(n^2)$

$g(n) \in O\, f(n)$

$\Rightarrow$ $\log\log(n^2) < c(\log n)$ $n > n_0$

$c=1 \Rightarrow$ $\log\log(n^2) < \log n$

$2^{\log(\log(n^2))} < 2^{\log n}$

$\log n^2 < n$

$2^{\log n^2} < 2^n$

$n^2 < 2^n$

$\log n^2 < \log 2^n$

$2 \log n < n$

$n_0 = 10$

$c = 1$ ✓

3c) $f(n) = n^2/\log n$, $g(n) = n(\log n)^2$

$g(n) \in O(f(n)) \Rightarrow n(\log n)^2 < c(n^2/\log n)$ $n > n_0$

$c=1 \Rightarrow \cancel{n}(\log n)^2 < n^{\cancel{2}}/\log n$

$\log^3 n < n$

$n_0 = 1024$

$c = 1$ //

3d) $f(n) = (\log n)^{10^6}$, $g(n) = n^{10^{-6}}$

$f(n) \in o(g(n)) \Rightarrow (\log n)^{10^6} < c(n^{10^{-6}})$ $\quad n > n_0$

$c = 1 \Rightarrow (\log n)^{10^6} < (n)^{10^{-6}}$

$\log(\log n^{10^6}) < \log n^{10^{-6}}$

$10^6 \log \log n < 10^{-6} \log n$

$10^{12} \log(\log n) < \log n$

$2^{\log(\log n)^{10^{12}}} < 2^{\log n}$

$(\log n)^{10^{12}} < n$

$\boxed{\log^k n < n}$ ✓

Generated by CamScanner

3f) $f(n) = n2^n \quad , g(n) = 3^n$

$f(n) \in o\, g(n) \Rightarrow \quad n2^n < c\, 3^n, \; n > n_0$

$c=1 \Rightarrow \quad n2^n < 3^n$

$\log(n.2^n) < \log(3^n)$

$\log n + \log 2^n < \log 3^n$

$\log n + n < n(\log 3)$

$\log n < n . \underbrace{(\log 3 - 1)}_{k}$

$\frac{\log n}{k} < n$

$\log n^k < n$ ✓

3e) $f(n) = n\log n$, $g(n) = (\log n)^{\log n}$

$f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow n\log n < c\left((\log n)^{\log n}\right) \quad n > n_0$

$c=1 \Rightarrow n < (\log n)^{\log n - 1}$

$$\log n < (\log n - 1)\log\log n$$

$$\frac{\log n}{\log n - 1} < \log\log n$$

$$1 + \frac{1}{\log n - 1} < \log\log n$$

Her zaman 1'den küçüktür.

$$1 + \frac{1}{\log n - 1} < 2 < \log\log n$$

$$2^2 < 2^{\log\log n}$$

$$4 < \log n$$