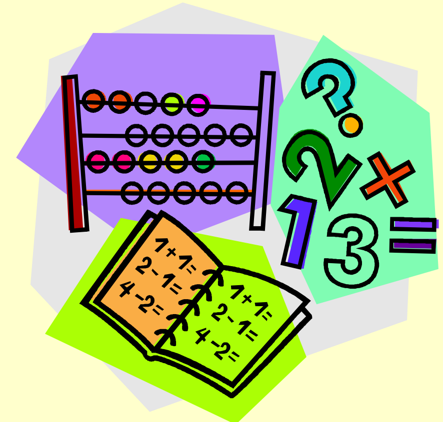
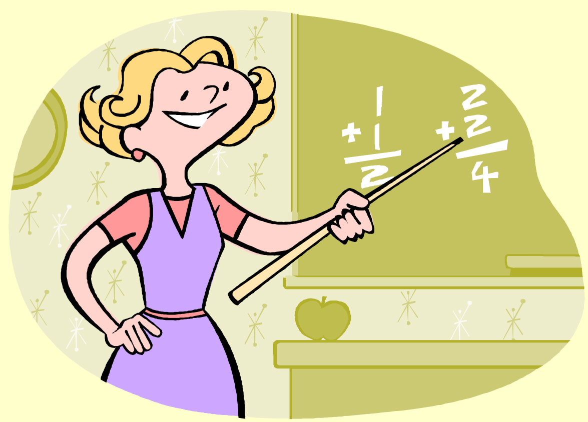


3. BÖLÜM

MATRİSLER



$$\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad \vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \vec{\mathbf{v}}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

gibi n tane vektörün oluşturduğu,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{v}}_1 & \vec{\mathbf{v}}_2 & \cdots & \vec{\mathbf{v}}_n \end{bmatrix}$$

şeklindeki sıralanışına matris denir.

Matris

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

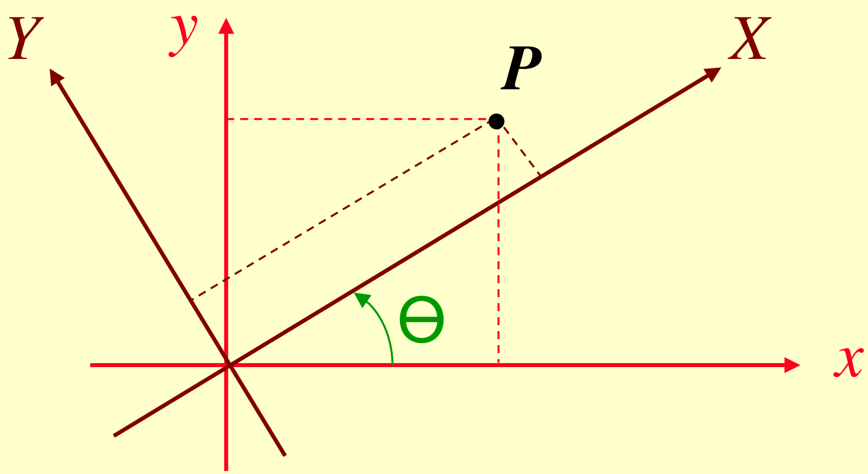
elemanları $a_{ij} \;\; (i = 1, 2, ..., m \;;\; j = 1, 2, ...n)$

cinsinden kısaca $\mathbf{A} = [a_{ij}]$

Analitik Geometriden Biliyoruz ki :

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y &= X\sin\theta + Y\cos\theta \end{aligned}\right\}$$

Döndürme Formülleridir.



Şekil.1

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n = b_m
\end{array}\right\}$$

Doğrusal Denklem Sistemi

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B}$$

$$\underset{m\text{x}n}{A}\ \underset{n\text{x}1}{X} = \underset{m\text{x}1}{B}$$

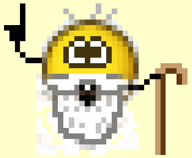
MATRİS İŞLEMLERİ

Matrislerin Toplamı (Farkı)

A ile B mxn boyutlu iki matris ise, $a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij}$ olacak şekilde elde edilen $C=[c_{ij}]$ matrisine, A ile B matrislerinin toplamı (veya farkı) denir.

İki matrisin toplanabilmesi (veya çıkarılabilmesi) için boyutlarının aynı olması gerekir.

Farklı boyutlu iki matris toplanamaz (veya çıkarılamaz)



Matrislerin Toplamı (Farkı)

Tanım: Eğer $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]$ ve $\mathbf{B}=\left[b_{ij}\right]$ boyutları $m\times n$ olan matrisler ise bu iki matrisin toplamı:

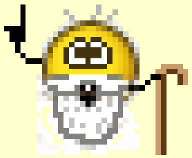
$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$$

$$\left[a_{ij}+b_{ij}\right]=\left[c_{ij}\right]$$

Matrislerin Toplamı (Farkı)

Toplama işleminin koşulu

İki matrisin toplanabilmesi (veya çıkarılabilmesi) için boyutlarının aynı olması gerekir.
Farklı boyutlu iki matris toplanamaz (veya çıkarılamaz)



$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & & \mathbf{B} & & \mathbf{C} \\ \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \\ 4\times 3 & & 4\times 3 & & 4\times 3 \end{array}$$

Matrislerin Toplamı (Farkı)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$$

ÖRNEK

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ ise } \mathbf{A+B=C}$$

matrisini bulunuz.

$$C=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Bir Matrisin Bir Skalerle Çarpımı

Tanım: Eğer $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]$ boyutu $m \times n$ olan bir matris ve $k \in \mathbb{R}$ olan bir skaler ise matris ile skalerin çarpımı boyutu $m \times n$ olan bir matristir:

$$k\mathbf{A} = \mathbf{C}$$

$$\left[k a_{ij} \right] = \left[c_{ij} \right]$$

ÖRNEK

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ ise 2**A** ve -3**A** skaler çarpımlarını bulunuz.

$$2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2(2) & 2(5) & 2(-1) \\ 2(3) & 2(4) & 2(0) \\ 2(2) & 2(7) & 2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & -2 \\ 6 & 8 & 0 \\ 4 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

$$-3\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3(2) & -3(5) & -3(-1) \\ -3(3) & -3(4) & -3(0) \\ -3(2) & -3(7) & -3(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -15 & 3 \\ -9 & -12 & 0 \\ -6 & -21 & -6 \end{bmatrix}$$

Matrislerin Çarpımı

Tanım: Eğer $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]$ boyutu $m \times n$ ve $\mathbf{B} = \left[b_{ij} \right]$ boyutu $n \times p$ olan matrisler ise bu iki matrisin çarpımı boyutu $m \times p$ olan bir matristir:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj} = \left[c_{ij} \right]$$

Matrislerin Çarpımı

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

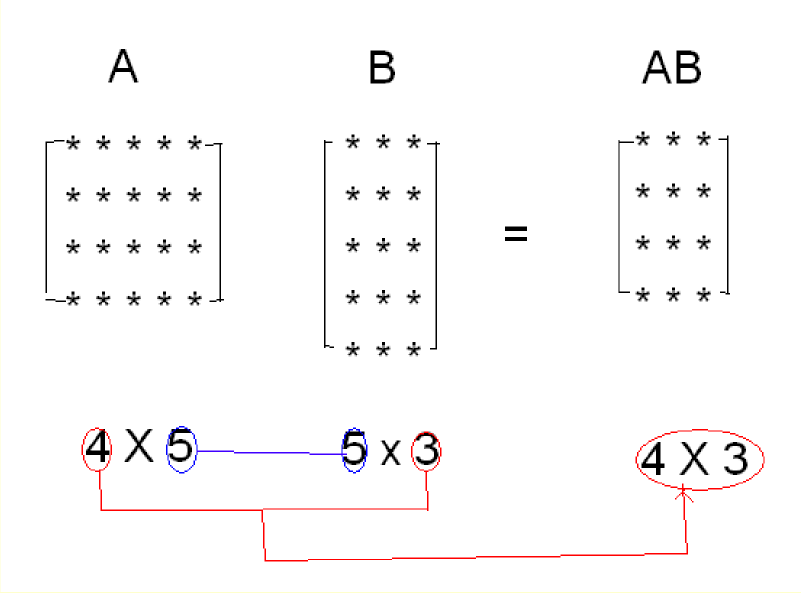
$$\begin{bmatrix} c_{11} & \{c_{12}\} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & {}_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$$

Matrislerin Çarpımı

Çarpım işleminin koşulu

A matrisinin sütun sayısının, B matrisinin satır sayısına eşitliği çarpılabilme koşuludur.



ÖRNEK

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 2 \\ 5 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

matrisleri için **C** çarpım matrisini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -9 & 2 \\ 5 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \left[(2\times 3)+(-1\times 5)\right] & \left[(2\times -9)+(-1\times 7)\right] & \left[(2\times 2)+(-1\times -6)\right] \\ \left[(3\times 3)+(4\times 5)\right] & \left[(3\times -9)+(4\times 7)\right] & \left[(3\times 2)+(4\times -6)\right] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -25 & 10 \\ 29 & 1 & -18 \end{bmatrix}$$

Matrislerin Toplama ve Skaler Çarpım Özellikleri

A,**B**,**C** aynı boyutlu matrisler; k_1, k_2 skalerler olmak üzere;

1) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$

2) $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$

3) $k_1(\mathbf{A}+\mathbf{B})=k_1\mathbf{A}+k_1\mathbf{B}$

4) $(k_1+k_2)\mathbf{A}=k_1\mathbf{A}+k_2\mathbf{A}$

5) $(k1k2)\mathbf{A}=k1(k2\mathrm{A})$

Matrislerin Çarpım Özellikleri

A,**B**,**C** aynı boyutlu matrisler; k_1, k_2 skalerler olmak üzere;

1) **A**(**B**+**C**)=**AB**+**AC**
2) (**A**+**B**)**C**=**AC**+**BC**
3) **A**(**BC**)=(**AB**)**C**
4) **AB**≠**BA** (Boyutlar uygun değilse)
5) **AB**=**AC** ise **B**=**C** olması gerekmez.
6) **AB**=**0** ise **A**=**0** ya da **B**=**0** olması gerekmez.
7) **A**(**B**+**C**)=**AB**+**AC**
8) (**A**+**B**)**C**=**AC**+**BC**

Matrisin Transpozu

- Her hangi bir **A** matrisinin transpozu (evriği) $\mathbf{A}^T$ ile gösterilir.
- A matrisinin satırları (sütunları) sırası ile $\mathbf{A}^T$ matrisinin sütunlarını (satırlarını) oluşturur.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Transpoz İşleminin Özellikleri

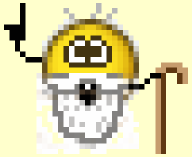
1. $\left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}$
2. $\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
3. $\left(k\mathbf{A}\right)^T = k\mathbf{A}^T$ $\quad$ k bir skaler
4. $\left(\mathbf{AB}\right)^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

Özel Matrisler

Kare Matris :

Satır sayısı, sütun sayısına eşit olan ($m=n$) matrislere kare matris denir.

NOT: Kare bir matrisin determinantı hesaplanabilir. Kare olmayan bir matrisin determinantı söz konusu değildir.



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Özel Matrisler

Sıfır Matris :

Tüm elemanları sıfır olan matrise denir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

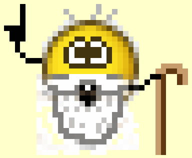
Özel Matrisler

Köşegen Matris :

Köşegen üzerindeki elemanlarının a_{ii} dışında, diğer tüm elemanları (a_{ij})sıfır olan matrise denir.

a_{ii} elemanlarının bazıları sıfır olabilir.

NOT: Sadece kare matrisler köşegen matris olabilir.



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Özel Matrisler

Skaler matrisler:

Asal köşegen elemanları (a_{ii})birbirine eşit olan köşegen matrise **skalar matris** denir.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Özel Matrisler

Birim Matris :

Köşegen üzerindeki elemanları 1, diğerleri sıfır olan skaler matrise birim matris denir.

$\mathbf{I}_n$ ile gösterilir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi bir birim matris olup I_3 ile gösterilir.

Önemli: $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$

Özel Matrisler

Simetrik Matris

A bir kare matris olsun.
Eğer $a_{ij}=a_{ji}$ eşitliği tüm $i \neq j$ elemanları için sağlanıyor ise diğer bir ifade ile $\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$ ise **A** matrisi simetrik matristir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & -1 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Özel Matrisler

Yarı Simetrik Matris

A bir kare matris olsun.
Eğer $-a_{ij}=a_{ji}$ eşitliği tüm $i \neq j$ elemanları için sağlanıyor ise diğer bir ifade ile $-\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$ ise **A** matrisi yarı simetrik matristir.
$i=j$ için $-a_{ii}=a_{ii}$ olduğundan asal köşegen elemanları sıfırdır.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -6 \\ -5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Özel Matrisler

Tanım: A matrisi boyutu n olan bir kare matris ise;

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)$$

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)$$

Şeklinde tanımlanan **P** ve **Q** matrisleri sırası ile simetrik ve yarı simetrik matrislerdir.

Özel Matrisler

Periyodik Matris :

A bir kare matris olsun. $k \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $\mathbf{A}^{k+1}=\mathbf{A}$ ise **A** matrisine periyodik matris denir.

Birim matris bir periyodik matristir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Özel Matrisler

İdempotent Matris:

A bir kare matris olsun. Eğer k=1 için $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$ ise **A** matrisi idempotent matristir.

Birim matris bir idempotent matristir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Özel Matrisler

Nilpotent Matris:

A bir kare matris olmak üzere $\mathbf{A}^2=0$ ise **A** matrisine Nilpotent Matris denir.
Eğer $\mathbf{A}^2=\mathbf{I}$ ise **A** matrisine ünipotent Matris denir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Özel Matrisler

Üst üçgen matris:

Bir kare matrisin asal köşegeninin altında kalan tüm elemanları sıfır ise bu matrise **üst üçgen matris** denir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Özel Matrisler

Alt üçgen matris:

Bir kare matrisin asal köşegeninin üstünde kalan tüm elemanları sıfır ise bu matrise **alt üçgen matris** denir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Özel Matrisler

Echelon (Kanonik) Matris:

A boyutu $m \times n$ olan bir matris olsun. **A** matrisinin ilk satırı hari diğer satırlarındaki sıfırların sayısı (soldan itibaren) satır satır artıyor ise **A** matrisi *Echelon* (*kanonik*) matristir.

Bir eşelon matriste satırlardaki sıfır olmayan ilk elemana *pivot* (*ayrık*) eleman denir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Özel Matrisler

Satır Eşdeğer Matrisler

Tanım: Boyutu $m \times n$ olan bir $\mathbf{A}$ matrisine sonlu sayıda elemant satır işlemlerinin uygulanması sonucunda elde edilen matris $\tilde{\mathbf{A}}$ olsun. $\tilde{\mathbf{A}}$ matrisine $\mathbf{A}$ matrisinin satır eşdeğer matrisi denir:

$$\mathbf{A} \sim \tilde{\mathbf{A}}$$

Özel Matrisler

Ortogonal Matris:

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$ vektörlerinin tanımladığı bir kare matris olsun. Eğer

$\mathbf{v}_i.\mathbf{v}_j=0$ tüm $i \neq j$ için ve

$\mathbf{v}_i.\mathbf{v}_j=1$ tüm $i=j$ için ise

diğer bir deyişle

$\mathbf{AA}^{T}=\mathbf{I}$

ise **A** matrisi ortogonal matristir.

Özel Matrisler

Ortogonal Matris: Örnek

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix} \text{ ise } \mathbf{A}^T=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \qquad\qquad \mathbf{A}^T \qquad = \quad \mathbf{I}$$

A matrisi ortogonal matristir

Özel Matrisler

Kofaktör (İşaretli Minör) Matrisi

Tanım: **A** kare matrisinde, a_{ij} elemanlarının işaretli minörleri (kofaktörleri) A_{ij} olsun.

A matrisinin *kofaktör matrisi*:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Özel Matrisler

Ek Matris

Tanım: **A** matrisinin kofaktör matrisinin transpozu *Ek Matris* olarak adlandırılır.

$Ek(\mathbf{A})$ ile gösterilir.

$$Ek\left(\mathbf{A}\right)=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Ek Matris Özellikleri

1. $\mathbf{A}.Ek(\mathbf{A}) = Ek(\mathbf{A}).\mathbf{A} = \det(\mathbf{A}).\mathbf{I}$

2. $Ek(\mathbf{A}.\mathbf{B}) = Ek(\mathbf{A}).Ek(\mathbf{B})$

Matrisin izi

Tanım: **A** boyutu $n \times n$ olan simetrik bir matris olsun. Köşegen elemanlarının toplamına matrisin izi denir ve $tr(\mathbf{A})$ ile gösterili

$$tr(\mathbf{A}) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Örnek: A matrisinin izini bulunuz.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 6 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$tr(\mathbf{A}) = 4 - 5 + 0 = -1$$

Matris İzinin Özellikleri

1. $tr\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)=tr\left(\mathbf{A}\right)+tr\left(\mathbf{B}\right)$
2. $tr\left(\mathbf{AB}\right)=tr\left(\mathbf{A}\right)tr\left(\mathbf{B}\right)$
3. $tr\left(k\mathbf{A}\right)=ktr\left(\mathbf{A}\right)$ (k bir skaler)
4. $tr\left(\mathbf{A}^T\right)=tr\left(\mathbf{A}\right)$

Ters Matris

Tanım: **A** boyutu $n \times n$ olan bir kare matris olsun. Eğer

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

eşitliğini sağlayan bir **B** matrisi varsa **A** matrisi tersi alınabilir b

matristir ve **B** matrisine **A** matrisinin ters matrisi denir ve

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

ile gösterilir.

SONUÇ: $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$

Ters Matrisin Özellikleri

1. Tersi alınabilir bir **A** matrisinin bir ve yalnız bir ters matris vardır

2. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$

3. $\left(\mathbf{AB}\right)^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

4. $\left(k\mathbf{A}\right)^{-1} = \dfrac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}$ k bir skaler

5. $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\left|\mathbf{A}\right|} Ek\mathbf{A}$

Ters Matrisin Özellikleri

6. $\left(\mathbf{A}^{T}\right)^{-1}=\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{T}$

7. $\left(\mathbf{A}^{k}\right)^{-1}=\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{k}$

$$=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\ldots\mathbf{A}^{-1}$$

Matrisin Determinantı İle İlgili Özellikler

1. $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

2. $|\mathbf{I}_n| = 1$

3. $|\mathbf{A}^{-1}| = \left(|\mathbf{A}|\right)^{-1} = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}$

4. $\mathbf{A}$ bir *ortogonal* matris ise $|\mathbf{A}| = \pm 1$

Elemanter Matrisler

Tanım: Boyutu $n \times n$ olan bir $\mathbf{E}$ matrisi eğer $\mathbf{I}_n$ birim matrisinde tek bir elemanter satır (sütun) işlemi ile elde edilebiliyor ise *elemanter matris* denir.

Elemanter Matrislerin Özellikleri

1. **A** boyutu $n \times m$ olan bir matris ve $\mathbf{I}_n$ birim matrisinden bir elemanter satır (sütun) işlemi ile elde edilen matris **E** olsu **EA** çarpım matrisi aynı elemanter satır (sütun) işleminin A matrisine uygulanmış yapısını verir.
2. Eğer **E** bir elemanter matris ise $\mathbf{E}^{-1}$ matrisi vardır ve ters matris de bir elemanter matristir.
3. Bir kare matris A ancak ve ancak elemanter matrislerin çarpımı olarak yazılabiliyor ise tersi alınabilirdir:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_k \ldots \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{I}_n$$

Tekil Olmayan Matrisler

Tanım: $\mathbf{A}$ boyutu $n \times n$ olan kare bir matris olsun. Eğer determinant değeri sıfırdan farklı,

$$\left|\mathbf{A}\right| \neq 0$$

ise $\mathbf{A}$ matrisine *tekil olmayan matris*,

$$\left|\mathbf{A}\right| = 0$$

ise $\mathbf{A}$ matrisine *tekil matris* denir.

Teorem

Bir **A** kare matrisinin tersinin var olabilmesi için

gerek ve yeter koşul $\left|\mathbf{A}\right| \neq 0$ olmasıdır.

Kanıt: $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$

$$\left|\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\right| = \left|\mathbf{I}\right|$$

$$\left|\mathbf{A}\right|\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = 1$$

$$\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = \frac{1}{\left|\mathbf{A}\right|} \Rightarrow \left|\mathbf{A}\right| \neq 0$$

Teorem

Boyutu $m \times n$ olan her **A** matrisi, bir Echelon matrise satır eşdeğerdir.

Teorem

Bir dizi elemanter satır işlemi, bir **A** matrisini **I** birim matrisine dönüştürüyor ise elemanter satır işlemlerinin aynı dizisi **I** matrisini $\mathbf{A}^{-1}$ ters matrisine dönüştürür.

Teorem

Bir dizi elemanter satır işlemi, bir **A** matrisini **I** birim matrisine dönüştürüyor ise elemanter satır işlemlerinin aynı dizisi genişletilmiş (**A**:**I**) matrisini $\left(\mathbf{I} : \mathbf{A}^{-1}\right)$ matrisine dönüştürür.

Ters Matrisin Bulunması: Gauss-Jordan Yöntemi

Boyutu $n \times n$ olan bir **A** matrisinin ters matrisi aşağıda verilen adımlar izlenerek elde edilebilir:

1. **A** matrisinin sağına n boyutlu birim matrisi ekleyiniz,

$$\left[\mathbf{A} \vdots \mathbf{I}\right]$$

yeni matrisin boyutu $n \times 2n$ olur.

2. **A** matrisini **I** matrisine indirmek için gerekli elemanter satır (sütun) işlemlerini hem **A** hem de **I** matrisine uygulayarak,

$$\left[\mathbf{I} \vdots \mathbf{A}^{-1}\right]$$

Matrisini elde ediniz. Bu sonuç elde edilemiyor ise **A** tersi alınamayan tekil bir matristir.

Ters Matrisin Bulunması: Ek Matris Yöntemi

Boyutu $n \times n$ olan bir $\mathbf{A}$ matrisinin ters matrisi aşağıda verilen adımlar izlenerek elde edilebilir:

1. $\mathbf{A}$ matrisinin determinantını, $|\mathbf{A}|$ bulun.

2. $\mathbf{A}$ matrisinin ek matrisini, $ek(\mathbf{A})$ bulun.

3. $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|} ek\left(\mathbf{A}\right)$ elde edilir.

KANIT

$$\mathbf{A}ek(\mathbf{A}) = \mathbf{I}|\mathbf{A}|$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}ek(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I}|\mathbf{A}|$$

$$\mathbf{I}ek(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}|\mathbf{A}|$$

$$\frac{1}{|\mathbf{A}|}ek(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}$$

BİR MATRİSİN RANKI

Tanım: Boyutu $m \times n$ olan bir **A** matrisinin, determinantı sıfırdan farklı en büyük alt kare matrisinin mertebesine **A** matrisinin rankı denir:

$$r(\mathbf{A})$$

BİR MATRİSİN RANKI

Boyutu $m \times n$ olan bir **A** matrisinin rankı, boyut sayılarının, m ve n, küçüğüne eşit ya da ondan daha küçüktür.

$$m<n \text{ ise } r(\mathbf{A}) \leq m$$

Eğer **A** bir $n \times n$ kare matris ise:

1. $|\mathbf{A}| = 0$ ise $r(\mathbf{A}) < n$ (Tekil matris)
2. $|\mathbf{A}| \neq 0$ ise $r(\mathbf{A}) = n$ (Tekil olmayan matris)

Denk Matrisler

Boyutları ve rankları aynı olan matrislere *denk matrisler* denir.

$$A \sim B$$

Matrisin Rankı İle İlgili Özellikler

1. $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^T)$
2. $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^{-1})$

Matrisin Bölümlenmesi

Boyutu $r \times c$ olan bir $\mathbf{A}$ matrisi bazı kurallar dikkate alınarak *alt matrislere* ayrıştırılabilir:

$$\mathbf{A}_{r\times c} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{p\times q} & \mathbf{L}_{p\times(c-q)} \\ \mathbf{M}_{(r-p)\times q} & \mathbf{N}_{(r-p)\times(c-q)} \end{bmatrix}$$

Matrisin Bölümlenmesi

Bölümlenme Kuralları

1. Aynı satırdaki alt matrislerin satır sayıları eşit olmalı ve sütun sayılarının toplamı c olmalı.
2. Aynı sütundaki alt matrislerin sütun sayıları eşit olmalı ve satır sayılarının toplamı r olmalı.

Bu kurallar dikkate alınarak matrisler eleman sayısının izin verdiği ölçüde alt matrise ayrılabilir. Matris bölümlenmesi eşsiz değildir. Aynı matrisin farklı bölümlenmeleri söz konusudur.

Matrisin Bölümlenmesi

Bölümlenmiş matrisin transpozu; hem matrisin tranpozu hem de alt matrislerin transpozu alınarak elde edilir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{G} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{G} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & \mathbf{E}^T \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{F}^T \\ \mathbf{D}^T & \mathbf{G}^T \end{bmatrix}$$

Matrisin Bölümlenmesi

Boyutu $r \times c$ olan bir $\mathbf{A}$ matrisi, j-inci sütunu $\mathbf{a}_j$ vektörü ile tanımlanarak sütun vektörlerine göre bölümlenebilir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_j & \ldots & \mathbf{a}_c \end{bmatrix}$$

Benzer şekilde, i-inci satırı $\boldsymbol{\alpha}_i^T$ ile tanımlanarak satı vektörlerine göre bölümlenebilir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_i^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_r^T \end{bmatrix}$$

Matrisin Bölümlenmesi

Matrislerdeki genel çarpım kuralları bölümlenmiş matrisler içinde geçerlidir.

Eğer boyutlar çarpım işlemine uygun ise

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{13} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{13} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{23} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{13} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{23} \end{bmatrix}$$

ÜÇÜNCÜ
BÖLÜM
BİTTİİİİİİ