# 01.Tarea.IE.INEGI

*Alumno*

*07 febrero, 2020*

## EJERCICIO 1

Dada la información de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/10 & x = 2 \quad o \quad 3 \\ 8/10 & x = 5 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

La función acumulada es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1/10 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 2/10 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

Se obtiene el gráfico:

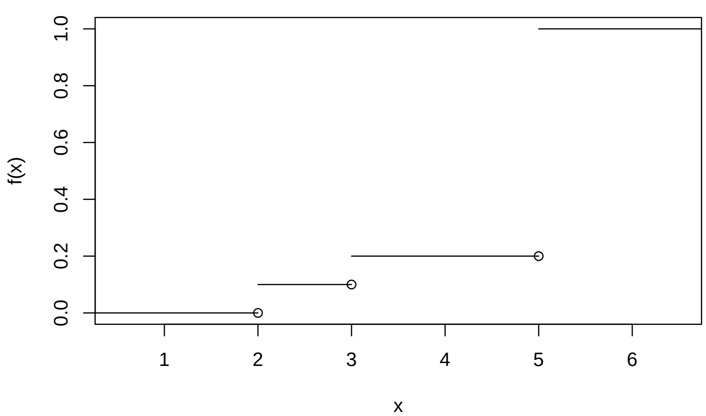



Figure 1: CFD

Y para las probabilidades se obtiene que:

1. $P(2 < x < 4.8) = 1/10$
2. $P(2 \leq x < 4.8) = 2/10$

# EJERCICIO 2

Se sabe que:

$$\begin{array}{c} P(W=w_1)=2P(W=w_2) \\ P(W=w_2)=3P(W=w_3) \\ P(W=w_3)=4P(W=w_4) \\ P(W=w_1)+P(W=w_2)+P(W=w_3)+P(W=w_4)=1 \end{array}$$

Al resolver el sistema se obtiene $P(W=w_1)=1/41, P(W=w_2)=4/41, P(W=w_3)=12/41, P(W=w_4)=24/41$

La función de probabilidad es:

$$f_X(x)=\begin{cases} 1/41 & W=w_1 \\ 4/41 & W=w_2 \\ 12/41 & W=w_3 \\ 24/41 & W=w_4 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

# EJERCICIO 3

## A. Función masa de probabilidad

$$f_X(x)=\begin{cases} 6/20 & x=1 \\ 5/20 & x=2 \\ 4/20 & x=3 \\ 3/20 & x=4 \\ 2/20 & x=5 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

## B. Función distribución acumulada

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \\ 6/20 & \text{si } 1\leq x<2 \\ 11/20 & \text{si } 2\leq x<3 \\ 15/20 & \text{si } 3\leq x<4 \\ 18/20 & \text{si } 4\leq x<5 \\ 1 & x\geq 5 \end{cases}$$

## C. Valor esperado

$$\mu=\frac{6}{20}(1)+\frac{5}{20}(2)+\frac{4}{20}(3)+\frac{3}{20}(4)+\frac{2}{20}(5)=2.5$$

## D. Varianza

$$\mathbb{E}(X^2)=\frac{6}{20}(1)+\frac{5}{20}(4)+\frac{4}{20}(9)+\frac{3}{20}(16)+\frac{2}{20}(25)=8$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \mathbb{E}(X^2)-\mu^2 \\ &= 8-(2.5)^2 \\ &= 1.75 \end{aligned}$$

### D. Desviación estándar

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{1.75} \\ &= 1.322 \end{aligned}$$

## EJERCICIO 4

### A. Sol

Con lo descrito se obtiene que $X \sim \text{Bin}(n = 1000, p = 0.001)$

### B. Sol

- $P(X = 0) = \binom{0}{100}(0.001)^0(1 - 0.001)^{1000} = 0.367$
- $P(X = 1) = \binom{1}{100}(0.001)^1(1 - 0.001)^{1000-1} = 0.368$
- $P(X = 2) = \binom{2}{100}(0.001)^2(1 - 0.001)^{1000-2} = 0.184$
- $P(X > 2) = 1 - 0.367 - 0.368 - 0.184 = 0.08$

## EJERCICIO 5

### A. Función generatriz de momentos

Considera que $e^z = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{z^i}{i!}$

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) \\ &= \sum_{x=0}^{+\infty} e^{tx} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x e^{tx}}{x!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \\ &= e^{\lambda(e^t - 1)} \end{aligned}$$

### A. Distribución de Y

Bajo el criterio de independencia:

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= M_A(t) \cdot M_B(t) \\ &= e^{\lambda_1(e^t-1)} e^{\lambda_2(e^t-1)} \\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)} \end{aligned}$$

Se concluye que $Y \sim \text{poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$

# EJERCICIO 6

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/4 & 0 < x < 1 \\ 3/8 & 3 < x < 5 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

## A. Gráfica de la densidad

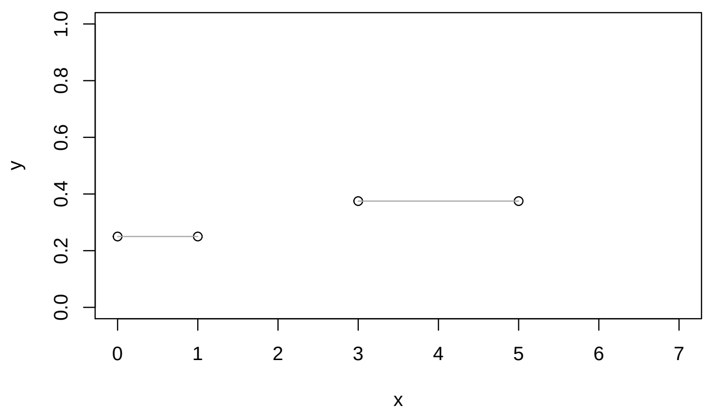



Figure 2: Función de densidad

## B. Verificar que sea una densidad

1. Se verifica que toda $f(x) \geq 0$
2. Verificar que $\int_X f(x)dx = 1$

$$\begin{aligned} \int_X f(x)dx &= \int_0^1 \frac{dx}{4} + \int_3^5 \frac{3dx}{8} \\ &= \frac{x}{4}\Big]_0^1 + \frac{3x}{8}\Big]_3^5 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{6}{8} \\ &= 1 \end{aligned}$$

## C. Función de distribución acumulada

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x/4 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1/4 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ \frac{3x-7}{8} & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

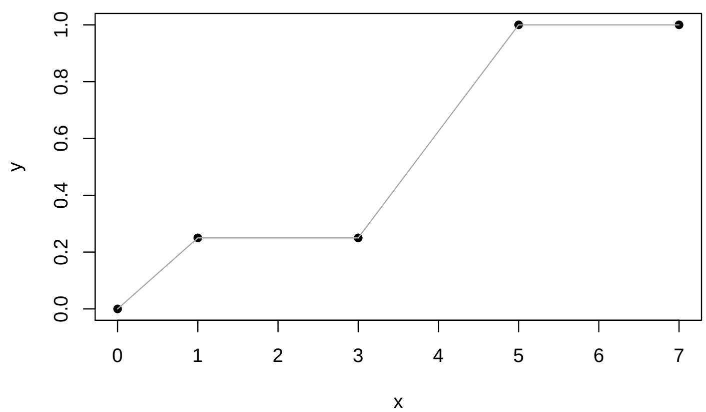



Figure 3: Función de distribución acumulada

### D. Densidad de $Y = \frac{1}{X}$

Si $Y = U(x) = \frac{1}{x}$ entonces tenemos que $x = \frac{1}{y}$,que es una función monótona. Al consideraremos las sugerencias de intervalos:

- $\frac{1}{5} \leq y < \frac{1}{3}$: Corresponde al intervalo $3 < x < 5$. Así que hacemos la transformación correspondiente:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= -f_X(s(y)) \cdot \tfrac{ds(y)}{dy} \\ &= -\tfrac{3}{8} \cdot \tfrac{-1}{y^2} = \tfrac{3}{8y^2} \end{aligned}$$

- $\frac{1}{3} \leq y < 1$:

Corresponde al intervalo $1 < x < 3$. Así que hacemos la transformación correspondiente:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= -f_X(s(y)) \cdot \tfrac{ds(y)}{dy} \\ &= 0 \cdot \tfrac{-1}{y^2} = 0 \end{aligned}$$

- $y \geq 1$: Corresponde al intervalo $0 < x < 1$. Así que hacemos la transformación correspondiente:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= -f_X(s(y)) \cdot \tfrac{ds(y)}{dy} \\ &= -\tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{-1}{y^2} = \tfrac{1}{4y^2} \end{aligned}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8y^2} & \text{si } \frac{1}{5} < y < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4y^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

# EJERCICIO 7

La función de distribución tiene la forma:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x^2 - x^4 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Por inspección se verifica que $\lim\limits_{x\to\infty^-} = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty^+} = 1$, al obtener los valores críticos de la primera derivada se verifica que la función es no decreciente en el intevalo (0,1)

### $\mathbf{P}(\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4})$

$$P(\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}) = F(\frac{3}{4}) - F(\frac{1}{4}) = \frac{11}{16}$$

### Hallar la densidad

Derivamos la función de distribución y obtenemos:

$$f(x) = 4x - 4x^3$$

### Calcula la probabilidad de que exp(X) < 2

$$P(e^x < 2) = P(x < \ln 2) = P(x < 0.693) = 0.73$$

### Función de densidad de $Y = X^2$

Teniendo $Y = X^2$ entonces $X = \pm\sqrt{Y}$, esta es nuestra función inversa ($w(y)$) con derivada $\frac{1}{2\sqrt{y}}$, entonces usando el cambio de variable:

$$f_Y = f_X(w(y)) \cdot |w'(y)|$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} f_Y &= f_X(w(y)) \cdot |w'(y)| \\ &= \left(4(\sqrt{y}) - 4(\sqrt{y})^3\right)\tfrac{1}{2\sqrt{y}} \\ &= 2(1-y) \end{aligned}$$

Entonces:

$$f(y) = \begin{cases} 2(1-y) & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

## EJERCICIO 8

### Probabilidad de seleccionar ambos estudiantes

La probabilidad queda expresada como:

$$\text{P(x=seleccionar ambos estudiantes)} = \frac{\overbrace{\binom{2}{2}}^{\text{estudiantes}} \binom{23}{10}}{\binom{25}{12}} = 0.22$$

### Probabilidad de seleccionar el doble de personas retiradas que de las empleadas

Vemos que existen 3 casos posibles:

1. 8 retiradas y 4 empleadas

$$\text{P(x=seleccionar 8 retiradas y 4 empleadas estudiantes)} = \frac{\overbrace{\binom{12}{8}}^{\text{retirados}} \underbrace{\binom{6}{4}}_{\text{empleados}} \overbrace{\binom{7}{0}}^{\text{resto}}}{\binom{25}{12}} = 0.0014$$

1. 6 retiradas y 3 empleadas

$$\text{P(x=seleccionar 6 retiradas y 3 empleadas estudiantes)} = \frac{\overbrace{\binom{12}{6}}^{\text{retirados}} \underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{empleados}} \overbrace{\binom{7}{3}}^{\text{resto}}}{\binom{25}{12}} = 0.1243$$

1. 4 retiradas y 2 empleadas

$$\text{P(x=seleccionar 4 retiradas y 2 empleadas estudiantes)} = \frac{\overbrace{\binom{12}{4}}^{\text{retirados}} \underbrace{\binom{6}{2}}_{\text{empleados}} \overbrace{\binom{7}{6}}^{\text{resto}}}{\binom{25}{12}} = 0.0099$$

La probabilidad acumulada es de 0.1357

## EJERCICIO 9

Sea:

$$f_X(x) \quad = \quad \tfrac{\theta}{x^{\theta+1}}\mathbb{I}_{(1,+\infty)(x)}$$

### Verificar que sea una densidad

1. Puede observarse que para todo $\theta > 0$ se obtiene que $f(x) > 0$
2. Evaluamos si $\int_X f(x)dx = 1$

$$\begin{aligned}
\int_X f(x)dx &= \int_1^\infty \tfrac{\theta dx}{x^{\theta+1}} \\
&= -\tfrac{1}{x^\theta}\Big]_1^\infty \\
&= \lim_{x\to\infty}(-\tfrac{1}{x^\theta} + \tfrac{1}{1^\theta}) \\
&= 0 + 1
\end{aligned}$$

### Distribución acumulada

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \geq x \\ 1 - \frac{1}{x^\theta} & \text{si } 1 < x \quad \text{para } \theta > 0 \end{cases}$$

## Probabilidad de ingreso menor a 3

$P(x < 3) = 1 - \frac{1}{3^{0.5}} = 0.422$

## Si se seleccionan 10 familias aleatoriamente (con reemplazo), ¿ Cuál es la probabilidad de que al menos dos familias tengan ingreso menor a 3?

La probabilidad binomial indicada se calcula como:

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - (P(Y = 0) + P(Y = 1)) \\ &= 1 - (0.0041 + 0.0301) \\ &= 0.9657 \end{aligned}$$

## En el sistema de captura nuevo se registra el valor de X si este es menor a 10 y se registra como un 10 todos los valores de X que rebasan este valor. Obten y gráfica la función de esta función sea una función de densidad verificando que es no negativa y sus valores integran (suman) 1

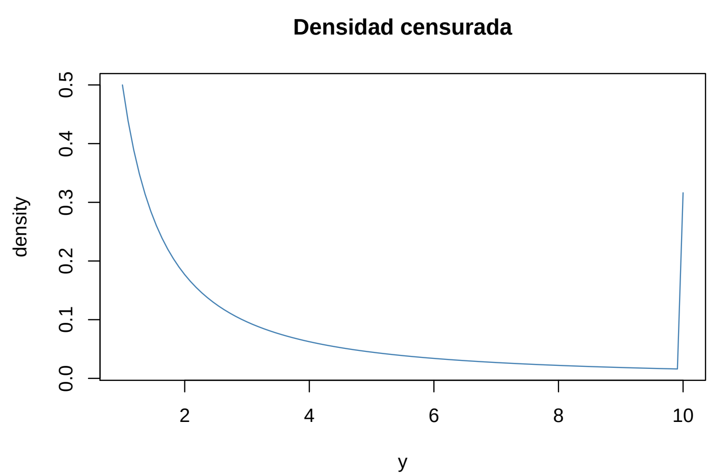
Dado el patrón de censura definimos Y como:

$$Y = \begin{cases} X & X < 10 \\ 10 & X \geq 10 \end{cases}$$

Para este se obtiene que su densidad tiene la forma:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\theta}{y^{\theta+1}} & 1 < y < 10 \\ 10^{-\theta} & X \geq 10 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Sustituyendo $\theta$ por 0.5, se obtiene la gráfica




## Usando R, simule 1000 variables uniformes y utilice el Metodo de la Funcion de distribucion Inversa

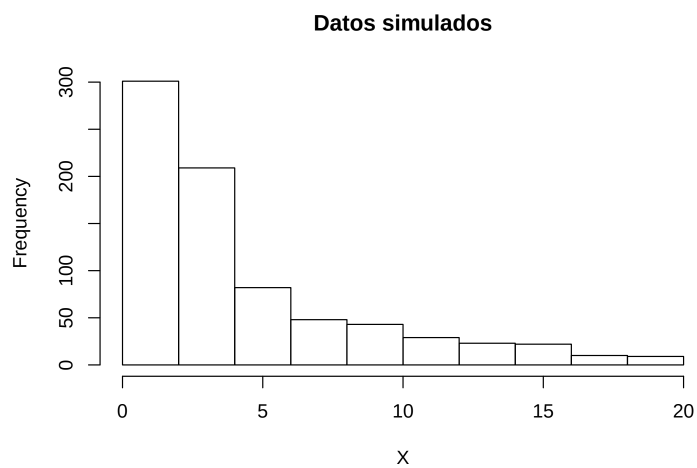
para obtener 1000 simulaciones de X. Grafica el histograma de frecuencias relativas y sobrepon la funcion de densidad obtenida en el inciso anterior. >Son similares? (incluye el codigo usado)

La función inversa tiene la forma:

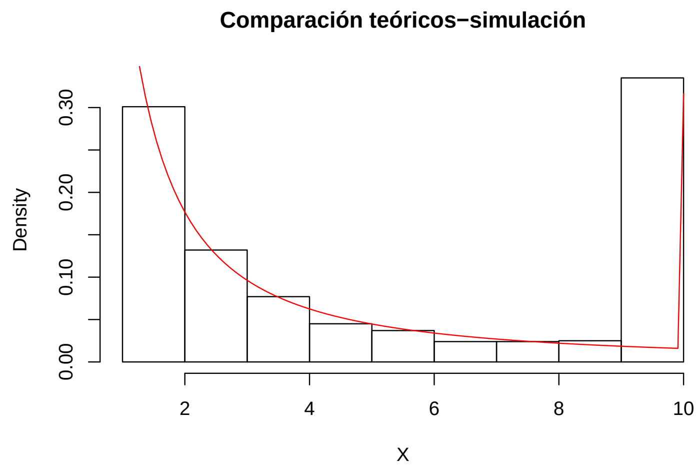
$$g(y) = (\frac{1}{1-y})^{\frac{1}{\theta}}$$

Ahora simulamos 1000 variables de la distribución uniforme y realizamos la transformación:

```r
# Datos prueba uniforme
datos_prueba<-runif(1000)

# Función inversa
T_inv<-function(y, theta=0.5)
{
  (1/{1-y})^{1/theta}

}

# Datos simulados correspondientes a la densidad
inv_val<-T_inv(datos_prueba)
hist(inv_val[inv_val<20], main = 'Datos simulados',xlab = 'X')
```




```r
# Realizamos la censura por la derecha
censura_data<-function(x,lim=10)
{
  min(x,lim)
}

datos_censurados<-sapply(inv_val, censura_data)


hist(datos_censurados,freq = F, xlab = 'X',main='Comparación teóricos-simulación')
lines(x0,datos_densidad,col='red')
```


Comparación teóricos−simulación
Density
0.00
0.10
0.20
0.30
2
4
6
8
10
X