
Álgebra Matricial

Maestría en Análisis Estadístico y Computación

CIMAT -INEGI

Espacios vectoriales

Definición

Sea A un conjunto. Una operación en A es una función $f : A \times A \rightarrow A$.

Definición

Sea V un conjunto. Se dice que V es un espacio vectorial sobre K ($K = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}) si existe una operación $+$ en V tal que

- i) $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$ para cualesquiera $v_1, v_2, v_3 \in V$
- ii) Existe un elemento 0 en V tal que $0 + v = v + 0 = v$ para todo $v \in V$
- iii) Dado $v \in V$ existe un $u \in V$ tal que $v + u = u + v = 0$
- iv) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1, \forall v_1, v_2 \in V$.

Definición

(cont.) Existe además una función $\cdot : K \times V \rightarrow V$ tal que

- i) $\alpha \cdot (v_1 + v_2) = \alpha \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2$ para cualesquiera $\alpha \in K$,
 $v_1, v_2 \in V$
- ii) $(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot v = \alpha_1 \cdot v + \alpha_2 \cdot v$ para cualesquiera $\alpha_1, \alpha_2 \in K$,
 $v \in V$
- iii) $\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \cdot v) = (\alpha_1 \alpha_2) \cdot v$, para cualesquiera $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, $v \in V$
- iv) $1 \cdot v = v$, $\forall v \in V$.

Ejemplo

$$V = \mathbb{R}^n.$$

Ejemplo

El espacio trivial $V = \{0\}$.

Ejemplo

$$V = M_{m \times n}(\mathbb{R}).$$

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre K . $W \subset V$ es un subespacio de V si W es un espacio vectorial con las operaciones inducidas por V .

Proposición

Sea V un espacio vectorial sobre K , $W \subset V$, $W \neq \emptyset$. W es un subespacio de V si

- i) Si $w_1, w_2 \in W$ entonces $w_1 + w_2 \in W$
- ii) Si $w \in W$, $\alpha \in K$ entonces $\alpha w \in W$

Ejemplo

El subespacio trivial $W = \{0\}$ de un espacio V .

Ejemplo

Lineas en \mathbb{R}^2

Ejemplo

Hiperplanos en \mathbb{R}^n

Proposición

Sea V un espacio vectorial. Si W_1, W_2 son subespacios de V entonces $W_1 \cap W_2$ es subespacio de V .

La unión de subespacios no es en general un subespacio.

Definición

Sea V un espacio vectorial, W_1, W_2 subespacios de V . La suma de W_1 y W_2 es

$$W_1 + W_2 = \{v \in V \mid v = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

Definición

Sea V un espacio vectorial, W, U subespacios de V . Se dice que V es suma directa de W y U si $V = W + U$ y $W \cap U = \{0\}$. en cuyo caso se escribe $V = W \oplus U$.

Proposición

$V = W \oplus U$ si y solo si todo $v \in V$ se escribe de manera única como $v = w + u$ con $w \in W$ y $u \in U$.

Definición

Sea V un espacio vectorial, $W_i, i = 1, \dots, r$ subespacios de V . Se dice que V es suma directa de los subespacios W_i si todo $v \in V$ se escribe de manera única como $v = w_1 + \dots + w_r$ con $w_i \in W_i$, lo cual se escribe como $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$.

Proposición

Sea V un espacio vectorial, W_1, W_2 subespacios de V . Entonces $W_1 + W_2$ es un subespacio de V . De hecho, es el espacio más pequeño de V que contiene a $W_1 \cup W_2$.

Definición

Sea V un espacio vectorial y v_1, \dots, v_n vectores en V . Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son escalares, el vector

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

es una combinación lineal de v_1, \dots, v_n .

Definición

Sea V un espacio vectorial y $S \subset V$. El espacio generado por S es el conjunto

$$\text{gen}(S) = \{v \in V \mid v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, v_i \in S, \alpha_i \in K\}$$

Proposición

Sea V un espacio vectorial y $S \subset V$, $S \neq \emptyset$. $\text{gen}(S)$ es un subespacio de V . Más aún, es el subespacio más pequeño que contiene a S .

.

Definición

Sea V un espacio vectorial. Sea $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$. S es linealmente independiente si

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

implica que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Si el conjunto no es linealmente independiente se dice que es linealmente dependiente.

Proposición

Sea V un espacio vectorial. Si $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ y v_j , $1 \leq j \leq n$ se puede escribir como una combinación lineal de los otros elementos de S entonces $\text{gen}(S \setminus \{v_j\}) = \text{gen}(S)$.

Proposición

Sea V un espacio vectorial y sea $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$. Si S contiene un subconjunto linealmente dependiente, entonces S es linealmente dependiente.

Proposición

Sea V un espacio vectorial y sea $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$. Si S es linealmente independiente, entonces cualquier subconjunto de S también es linealmente independiente.

$\{0\}$ es siempre linealmente dependiente, por lo que un conjunto linealmente independiente no puede contener a 0 .

Proposición

Sea V un espacio vectorial y sea $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$.

1. Si S es linealmente independiente y $v \in V$, entonces $S \cup \{v\}$ es linealmente independiente si y solo si $v \notin \text{gen}(S)$.
2. Si $a_1 \neq 0$, S es linealmente dependiente si y solo si $v_j \in \text{gen}\{v_1, \dots, v_{j-1}\}$ para algún $2 \leq j \leq n$.

Proposición

Sea $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^m$. Si $n > m$ entonces S es linealmente dependiente.

Definición

Sea V un espacio vectorial, $W \subset V$ un subespacio. Una base de W es un subconjunto de W linealmente independiente que genera W .

Proposición

Sea V un espacio vectorial y sea $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ un subconjunto linealmente independiente. Si $v \in \text{gen}(S)$ y $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$, entonces $\alpha_i = \beta_i$, $i = 1, \dots, n$, es decir la expresión lineal de v como combinación lineal de los vectores en S es única.

Definición

Sea V un espacio vectorial y sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ una base. Si $v \in V$, las coordenadas de v respecto a \mathcal{B} son los escalares α_i , $i = 1, \dots, n$, que aparecen en

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

Proposición

Sean V un espacio vectorial, W un subespacio de V , $S = \{v_1, \dots, v_r\}$ un subconjunto de W linealmente independiente y $W = \text{gen}\{w_1, \dots, w_s\}$. Entonces $s \geq r$.

Proposición

Si $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ son dos bases del mismo espacio V , entonces $\#(\mathcal{B}_1) = \#(\mathcal{B}_2)$.

Definición

Sea V un espacio vectorial. La dimensión de V es el número de vectores en cualquier base de V .

Observemos que a una base no se le pueden quitar vectores que generen el espacio ni agregar vectores para mantener los vectores linealmente independientes.

Definición

Sea V un espacio vectorial. La dimensión de V , $\dim V$, es el número de vectores en una base, y por lo tanto cualquiera, de V .

Definición

Sea V un espacio vectorial. La dimensión de V , $\dim V$, es el número de vectores en una base, y por lo tanto cualquiera, de V .

Proposición

Sea V un espacio vectorial, $\dim V = r$, $S \subset V$. Si $V = \text{gen}(S)$, entonces existe un $\mathcal{B} \subset S$ tal que \mathcal{B} es base de V .

Proposición

Sea V un espacio vectorial, $\dim V = r$, $S \subset V$. Si S es linealmente independiente, entonces existe $\mathcal{B} \supset S$ tal que \mathcal{B} es base de V .

Proposición

Sea V un espacio vectorial y $W \subset V$ un subespacio. Entonces $\dim W \leq \dim V$.

Proposición

Sea V un espacio vectorial y $W \subset V$ un subespacio. Si $\dim W = \dim V$, entonces $V = W$.

Si un espacio vectorial V es de dimensión finita n y $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{u_1, \dots, u_n\}$ son dos bases distintas, entonces un vector $v \in V$ tendrá distintas coordenadas dependiendo de la base usada. Es decir

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i$$

Es posible encontrar una relación entre ambas coordenadas.

Proposición

Si $(v_i)_{\mathcal{B}_2}$ es el vector (en \mathbb{R}^n) de coordenadas de v_i con respecto a la base \mathcal{B}_2 , $v_{\mathcal{B}_1}$ es el vector de coordenadas de v con respecto a la base \mathcal{B}_1 y $v_{\mathcal{B}_2}$ es el vector de coordenadas de v con respecto a la base \mathcal{B}_2 , entonces existe una matrix invertible A dada por $A = ((v_1)_{\mathcal{B}_2} \cdots (v_2)_{\mathcal{B}_2})$ (es decir, tiene los vectores de coordenadas como columnas) tal que

$$v_{\mathcal{B}_2} = Av_{\mathcal{B}_1}$$

A es la matriz de cambio de coordenadas de la base \mathcal{B}_1 a la base \mathcal{B}_2 .

$$A_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2}$$

Proposición

Si A es la matriz de cambio de coordenadas de la base \mathcal{B}_1 a la base \mathcal{B}_2 entonces A^{-1} es la matriz de cambio de coordenadas de la base \mathcal{B}_2 a la base \mathcal{B}_1 .

$$A_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1} = (A_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2})^{-1}$$

Matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

$$a_{ij} \in F, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

$$(a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}_{p \times q}$$

si y solo si $m = p$, $n = q$ y $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i, j$.

Suma de matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$(c_{ij}), \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Definición

La matriz cero es

$$0_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Si $A = (a_{ij})$,

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

Proposición

Sean A, B, C matrices del mismo tamaño. Entonces

- i) $A + B = B + A$
- ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$
- iii) $A + 0 = 0 + A = A$
- iv) $A + (-A) = (-A) + A = 0$

$$A - B := A + (-B)$$

$$A = (a_{ij})$$

$$r \in \mathbb{R}$$

$$rA = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \dots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \dots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \dots & ra_{mn} \end{pmatrix}$$

Proposición

Sean $A = (a_{ij})$, $r, s \in \mathbb{R}$

- i) $r(A + B) = rA + rB$
- ii) $(r + s)A = rA + sA$
- iii) $r(sA) = (rs)A$

Multiplicación de matrices

Definición

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de tamaño $m \times n$ y $B = (b_{ij})$ una matriz de tamaño $n \times p$. El producto de A y B es la matriz de tamaño $m \times p$

$$AB := (c_{ij})$$

donde

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rj}$$

Definición

La matriz identidad $n \times n$ es

$$I_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Proposición

Sean A , B y C matrices para las cuales las operaciones abajo están bien definidas.

- i) $A(BC) = (AB)C$
- ii) $IA = AI$
- iii) $A(B + C) = AB + AC$
- iv) $(A + B)C = AC + BC$

Para una matriz cuadrada A , la potencia k -ésima de A es
 $A^k = AA \cdots A$ (k veces)

Transpuesta de una matriz

Definición

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$. La transpuesta de A es la matriz de $n \times m$ dada por

$$A^t := (b_{ij})$$

donde $b_{ij} = a_{ji}$.

Proposición

Sean A y B matrices para las cuales las operaciones abajo están bien definidas.

- i) $(AB)^t = B^t A^t$
- ii) $(A^t)^t = A$
- iii) $(A + B)^t = A^t + B^t$
- iv) $(rA)^t = rA^t, \forall r \in \mathbb{R}$

Determinantes

Definición

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$, $A = (a_{ij})$. El determinante de A se define como

$$|A| = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n} (-1)^{\rho(i_1, \dots, i_n)}$$

donde (i_1, \dots, i_n) es una permutación de $1, \dots, n$, y $\rho()$ es la paridad de la permutación (0 si el número de transposiciones requeridas para llevar la permutación dada al orden natural, y 1 si el número de transposiciones es impar).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Desarrollo por los menores del renglón i

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

donde el **cofactor** $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ y M_{ij} es el determinante de orden $n - 1$ que se obtiene de $|A|$ eliminando el renglón i y la columna j

Propiedades de los determinantes

1. $|I_n| = 1$
2. $|A^T| = |A|$
3. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
4. $|AB| = |A||B|$
5. $|cA| = c^n|A|$
6. Si A es triangular, $A = \prod_i a_{ii}$
7. Si A tiene un renglón o columna de 0's, $|A| = 0$
8. Si intercambiamos dos renglones o columnas, el determinante cambia de signo
9. Si A tiene dos columnas iguales, $|A| = 0$
10. Si A tiene columnas que son combinaciones lineales de otras columnas, $|A| = 0$
11. Si a un renglón de A le agregamos otro renglón de A , multiplicado por una constante, el determinante no se altera

Definición

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Se dice que A es una matriz particionada o por bloques si se puede escribir como una matriz

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pq} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

donde cada una de las entradas A_{ij} es a su vez una matriz de tamaño $m_i \times n_j$ y $\sum_{i=1}^p m_i = m$, $\sum_{j=1}^q n_j = n$.

Proposición

$$A^t = \begin{pmatrix} A_{11}^t & A_{21}^t & \cdots & A_{p1}^t \\ A_{12}^t & A_{22}^t & \cdots & A_{p2}^t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1q}^t & A_{2q}^t & \cdots & A_{pq}^t \end{pmatrix}_{n \times m}$$

Sumar y multiplicar matrices por bloques para que los bloques sean tratados como si fueran elementos requiere condiciones adicionales a las que ya se tienen.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}_{n \times m}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 3 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}_{n \times m}$$

Sea A una matriz cuadrada de tamaño $m \times n$ y x un vector $n \times 1$.
Si A está dada por bloques columna por

$$A = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n),$$

es decir a_i es un vector columna $m \times 1$ y

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} Ax &= (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n \end{aligned}$$

Una combinación lineal de matrices es una suma del tipo

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k$$

donde las A_i son matrices y los α_i números reales.

Ax es una combinación lineal de las columnas de A

Análogamente sea A una matriz cuadrada de tamaño $m \times n$ y y un vector horizontal $1 \times m$. Si A está dada por bloques renglón por

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix},$$

es decir b_i es un vector renglón $1 \times n$ y

$$y = (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m),$$

entonces

$$\begin{aligned} yA &= (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \\ &= y_1 u_1 + y_2 u_2 + \cdots + y_m u_m \end{aligned}$$

Luego, yA es una combinación lineal de los renglones de A .

En general, un producto matricial puede escribirse como

$$AB = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} (b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_p) = \begin{pmatrix} u_1 b_1 & u_1 b_2 & \cdots & u_1 b_p \\ u_2 b_1 & u_2 b_2 & \cdots & u_2 b_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

donde A tiene bloques de vectores renglón y B tiene bloques de vectores columna.

Si ahora A tiene bloques de vectores columna y B tiene bloques de vectores renglón, entonces el producto está dado por la suma de matrices dadas por el producto exterior

$$AB = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum a_i v_i$$

Definición

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de tamaño n . La traza de A es

$$\text{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Proposición

Sean A, B matrices cuadradas de tamaño n , $\alpha \in \mathbb{R}$.

- i) $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^t)$
- ii) $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$
- iii) $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$

Proposición

Sean $A_{m \times n}$, $B_{n \times m}$ matrices. Entonces $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$,

Proposición

Sean u, v vectores $m \times 1$. Entonces $\text{tr}(uv^t) = u^t v = v^t u$.

$$\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB) = \text{tr}(BCA)$$

Ejemplo

Sea A una matriz cuadrada. Encuentre una matriz cuadrada X tal que $AX - XA = I$

Definición

P es una matriz de permutación de tamaño n si se obtiene de permutar las columnas o renglones de la matriz identidad I_n .

Equivalentemente:

Definición

Una matriz de permutación de tamaño n es una matriz cuadrada tal que cada columna cada renglón contiene exactamente un 1 y 0 en los demás lados.

Si e_i es el vector canónico y

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$$

por bloques renglón y columna respectivamente y P es una matriz de permutación, entonces

$$PA = \begin{pmatrix} e_{i1}^t \\ e_{i2}^t \\ \vdots \\ e_{im}^t \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} Ae_{i1}^t \\ Ae_{i2}^t \\ \vdots \\ Ae_{im}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{im} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AQ &= A(e_{j1} \quad e_{j2} \quad \cdots \quad e_{jn}) = (Ae_{j1} \quad Ae_{j2} \quad \cdots \quad Ae_{jn}) \\ &= (a_{j1} \quad a_{j2} \quad \cdots \quad a_{jn}) \end{aligned}$$

Definición

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ es triangular superior si $a_{ij} = 0$, $i > j$. A es triangular inferior si $a_{ij} = 0$, $j > i$. A es triangular si es triangular inferior o superior

Proposición

Sean A, B matrices cuadradas de tamaño n .

- i) Si A es triangular superior (inferior) entonces A^t es triangular inferior(superior).
- ii) Si A y B son triangulares superiores (inferiores) entonces AB es triangular superior(inferior).

Definición

Sea A una matriz cuadrada. Si existe un entero positivo k tal que $A^k = 0$, se dice que A es nilpotente.

Proposición

Sean $A_{n \times n}$ una matriz triangular con entradas diagonales cero. Entonces A es nilpotente. De hecho, $A^n = 0$.

Tarea 1

1. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad AB = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 1 & 17 \end{bmatrix}$$

¿Quién es B ?

2. Sea A una matriz $n \times n$ y x un vector $n \times 1$. ¿Cuántas multiplicaciones se requieren para calcular A^2x ? Haga primero considerando $(AA)x$ y luego considerando $A(Ax)$, ¿Cuál forma es más eficiente?
3. Muestre que la matriz en bloques

$$\begin{bmatrix} I & O \\ A & I \end{bmatrix}$$

es invertible y encuentre su inversa.

4. Sean

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad w = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Determine si w esta en el subespacio de \mathbb{R}^3 generado por v_1 y v_2 .

5. Sean

$$b_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad x = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

x esta en un subespacio H , y $\{b_1, b_2\}$ forman una base de H . Encuentre las coordenadas de x con respecto a esa base.

6. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Muestre que $A^2 = I$, $B^2 = I$ y $AB = -BA$ (esto es A y B anticonmutan).

7. Mediante la simulación, en R , de matrices A y B adecuadas, justifique la validez o falsedad de las igualdades $|AB| = |A||B|$ y $|A + B| = |A| + |B|$.
8. Sea W el conjunto de todos los vectores de la forma

$$\begin{bmatrix} 2s + 4t \\ 2s \\ 2s - 3t \\ 5t \end{bmatrix}$$

Muestre que W es un subespacio de \mathbb{R}^4 , ¿Qué dimensión tiene?, ¿Cuál es una base de W ?

Sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones y n variables es un sistema del tipo

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots = \vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

Los a_{ij} son escalares fijos llamados coeficientes y las x_i son las variables. Si $m = n$ el sistema se llama cuadrado y rectangular de otra manera.

Una solución es una n -eada (s_1, \cdots, s_n) que hace que las ecuaciones sean ciertas al mismo tiempo.

Representación matricial de un sistema lineal

Todo sistema se puede representar por una ecuación matricial del tipo $Ax = b$.

La matriz de coeficientes del sistema A está dada por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m \times 1}$$

En representación matricial, una solución es un vector

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$$

que satisface

$$As = b$$

Un sistema $Ax = b$ puede tener

- i) Solución única
- ii) Un número infinito de soluciones
- iii) No solución

Proposición

Si un sistema $Ax = b$ tiene más de una solución entonces tiene un número infinito de soluciones.

Definición

Un sistema $Ax = b$ es consistente si tiene al menos una solución e inconsistente si no.

Definición

Dada una matriz, una operación elemental por renglones es una de las siguientes:

- i) Tipo I: intercambiar dos renglones de la matriz*
- ii) Tipo II: multiplicar un renglón por un escalar distinto de cero.*
- iii) Tipo III: reemplazar un renglón por la suma de ese renglón con el múltiplo escalar otro renglón*

Proposición

Si se aplica las mismas operaciones por renglón a A y b en el sistema $Ax = b$, la solución del sistema sigue siendo la misma.

La matriz de coeficientes aumentada del sistema está dada por

$$\left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)_{m \times n}$$

De esta forma aplicar operaciones por renglones a la matriz aumentada $(A|b)$ es equivalente a aplicarlas en ambos lados de la ecuación $Ax = b$.

Sea U la matriz dada por bloques renglón o columna

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Una matriz U tiene forma escalonada por renglones si se cumple:

- ▶ Si el primer elemento no cero en un renglón u_i está en la posición j , entonces todas las entradas abajo de la posición i en las columnas v_1, \dots, v_j son cero.
- ▶ Si el renglón u_i es cero, entonces todos los renglones abajo de él son vectores de ceros.

Los pivotes son las primeras entradas no cero en cada renglón.

El método de Gauss o de eliminación Gaussiana consiste en llevar una matriz aumentada correspondiente a un sistema $Ax = b$ a una forma escalonada por renglones.

En una matriz cuadrada $A_{n \times n}$, correspondiente al sistema $Ax = b$, obtenemos un nuevo sistema $Ux = b'$ con matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccccc} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} & b'_1 \\ 0 & 0 & \dots & u_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} & b'_n \end{array} \right)_{m \times n}$$

Las soluciones del sistema cuadrado están dadas entonces por: 1.

$$x_n = b'_n / u_{nn}.$$

2. Recursivamente:

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right)$$

para $i = n, n-1, \dots, 2, 1$.

Si el sistema es rectangular $n > m$, el sistema reducido tendrá mas incógnitas que ecuaciones por lo que se deben seleccionar algunas variables que se llamen básicas y las restantes serán libres.

Usualmente se escogen los pivotes como básicas y las restantes como libres. Una vez seleccionadas se hace sustitución hacia atrás y se encuentra una solución general.

Por medio de eliminación Gaussiana podemos saber si un sistema es inconsistente o no: Un sistema es inconsistente si y solo si al reducirlo se encuentra un renglón (en la matriz aumentada) del tipo $(0 \dots 0, \alpha)$

Teorema

Sea A una matriz y sean U_1 , U_2 dos formas escalonadas por renglones de A distintas (i.e. se emplearon dos sucesiones distintas de operaciones elementales). Entonces el número de pivotes de U_1 y U_2 es el mismo.

De esta manera, no importa que sucesión de operaciones elementales usemos, el número de pivotes permanece constante, y en consecuencia en las mismas posiciones. Por lo tanto el número de pivotes es un invariante de A .

El número de pivotes cuenta el número de variables básicas por lo que estás son siempre el mismo número y similarmente para las libres.

Sea U cualquier matriz en forma reducida por renglones obtenida de A , entonces:

$$\begin{aligned}\text{Número de pivotes de } A &= \text{Número de pivotes de } U \\ &= \text{Número de renglones no cero de } U \\ &= \text{Número de columnas básicas de } U\end{aligned}$$

Definición

El rango de A es el número de pivotes de A .

Una matriz E tiene forma escalonada reducida por renglones si se cumple:

- ▶ E Está en forma escalonada por renglones
- ▶ El primer elemento no cero en cada renglón es 1.
- ▶ Todas las entradas arriba de cada pivote son 0.

El método de Gauss-Jordan o de eliminación Gauss-Jordan consiste en llevar una matriz aumentada correspondiente a un sistema $Ax = b$ a una forma escalonada por renglones.

Las columnas básicas de $E_{m \times n}$ son r vectores canónicos en R^m .

Siempre podemos encontrar una matriz de permutación P tal que

$$EP = \begin{pmatrix} I_r & J \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposición

Sea A una matriz $m \times n$. Hacer una operación elemental por renglones en A es lo mismo que multiplicar A por la izquierda por la correspondiente matriz elemental.

Sistemas lineales homogéneos

Definición

Un sistema lineal $Ax = 0$ se llama un sistema lineal homogéneo

Siempre tiene la solución trivial $x = 0$ por lo que es consistente.

Dados v_1, v_2, \dots, v_n vectores, una combinación lineal es una expresión del tipo

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

donde los α_j son escalares.

La solución general de un sistema homogéneo es una combinación lineal de las soluciones particulares que se obtienen al hacer una variable libre igual a 1 y 0 en las demás, tomando las variables libres como coeficientes.

Proposición

Si A es $m \times n$ y $n > m$, entonces $Ax = 0$ tiene soluciones no triviales.

En general, si A es $m \times n$ la solución general del sistema homogéneo es

$$x = x_{f_1} h_1 + x_{f_2} h_2 + \dots + x_{f_{n-r}} h_{n-r}$$

Para el sistema $Ax = b$, la solución general es del tipo

$$x = x_p + x_h$$

donde x_h es la solución general del sistema homogéneo asociado y x_p es una solución particular que se obtiene haciendo todas las variables libres igual a cero.

Definición

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Se dice que A es invertible o no singular si existe una matriz B tal que $AB = I_n$, $BA = I_n$. B es una inversa de A .

Si A no es invertible se le llama singular.

Proposición

Si A es invertible, la matriz inversa es única.

La inversa de A se denota por A^{-1} .

Si una matriz es invertible, entonces la solución del sistema $Ax = b$ esta dada por $x = A^{-1}b$.

El sistema se llama sistema no singular cuando A es no singular.

Proposición

Sen A, B matrices $n \times n$. Entonces $AB = I$ si y solo si $BA = I$.

Si A es una matriz $m \times n$, una inversa izquierda de A es una matriz C , $n \times m$ tal que $CA = I_n$. Una inversa derecha es una matriz B , $m \times n$ tal que $AB = I_m$.

Una matriz rectangular puede tener inversa por un lado, pero no del otro y no tienen por que coincidir.

Proposición

Sean A una matriz $n \times n$. Entonces

- i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- ii) $(A^{-1})^{-1} = A$
- iii) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Para encontrar A^{-1} , tenemos la ecuación $AX = I$ que puede verse como un conjunto de sistemas de ecuaciones $Ax_i = e_i$ donde x_i son las columnas de X .

Luego con el método de Gauss, si es posible resolver cada uno de estos sistemas con solución x_i , encontramos la inversa de A dada por $X = (x_1 \dots x_n)$. Usando Gauss Jordan

$$L(A|I) = (LA|LI) = (I|L)$$

implica que $L = A^{-1}$

Proposición

A es invertible si y solo si el sistema homogéneo asociado solo tiene la solución $x = 0$.

Proposición

Sea $A \neq 0$ una matriz $m \times n$. Entonces:

- i) Existe una matriz invertible G tal que $GA = U$, donde U está en forma escalonada por renglones.
- ii) Existe una matriz invertible H tal que $HA = E$, donde E está en forma escalonada reducida por renglones.

Proposición

A es no singular si y solo si el el producto de matrices elementales de tipo I, II, ó III.

Proposition

Si $A_{n \times n}$ es triangular inferior (superior) con todas sus entradas diagonales distintas de cero, entonces es invertible y su inversa es triangular inferior (superior). Más aún, cada elemento de la diagonal de la matriz inversa es el recíproco del elemento correspondiente de A .

Proposition

El producto de dos matrices de permutación es una matriz de permutación.

Proposition

Una matriz de permutación es invertible y su inversa es su transpuesta.

Definición

Sea A una matriz $n \times n$. Se dice que A tiene una descomposición LU si se puede factorizar como $A = LU$ donde

- i) $L = (l_{ij})$ es una matriz triangular inferior tal que $l_{ii} = 1$,
 $i = 1, \dots, n$
- ii) $U = (u_{ij})$ es una matriz triangular superior tal que $u_{ii} \neq 0$,
 $i = 1, \dots, n$

L es el factor inferior y U es el factor superior.

Proposición

Si A es una matriz y U es la matriz que se obtiene usando eliminación Gaussiana y no se necesitaron intercambios de renglones (i.e. no aparecieron pivotes cero) entonces A tiene una descomposición LU , dada por $A = LU$.

Los elementos de la diagonal de U son los pivotes de A .

Para resolver el sistema lineal $Ax = b$ cuando $A = LU$ se resuelven dos sistemas triangulares $Ly = b$ y $Ux = y$.

Primero se usa sustitución hacia adelante en $Ly = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$y_1 = b_1$$

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j$$

$$i = 2, 3, \dots, n.$$

Luego se resuelve el sistema $Ux = y$ usando sustitución hacia atrás:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$x_n = y_n / u_{nn}$$

$$x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_i$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right)$$

$$i = n-1, n-2, \dots, 1.$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 0 \\ -6 & -10 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una submatriz de una matriz A es una matriz que se obtiene al eliminar renglones y columnas de A .

Si A es de tamaño $m \times n$, $I_r \subset \{1, \dots, m\}$, $I_c \subset \{1, \dots, n\}$, se denota por $A_{I_r, \cdot}$ a la matriz que se forma al dejar solo los renglones indexados por I_r y A_{\cdot, I_c} a la matriz que se forma al dejar solo las columnas indexadas por I_c .

Si A es $n \times n$, una submatriz principal si se obtiene de A eliminando los mismos renglones y columnas, i.e. $I_c = I_r$. Una submatriz principal líder se obtiene cuando es principal y $I_c = I_r = \{1, 2, \dots, k\}$, $k < n$.

Proposición

Sea A una matriz no singular. A tiene una factorización LU si y solo si todas sus submatrices principales líderes son no singulares.

Proposición

Sea A una matriz no singular. A tiene una factorización LU si y solo si todas sus submatrices principales líderes son no singulares.

Proposición

Si A una matriz no singular y $A = LU$ es una factorización LU de A , entonces L y U son únicas.

No todas la matrices no singulares tienen una descomposición LU ,
por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix}$$

Sin embargo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, podemos multiplicar una matriz A por una matriz de permutación P de tal manera que $PA = LU$.

En general esto es cierto, siempre podemos encontrar una matriz de permutación P tal que PA tiene una descomposición LU .

Proposición

Si A es no singular, entonces existe una matriz de permutación P tal que PA tiene una descomposición LU

$$PA = LU$$

donde L es triangular inferior con unos en la diagonal y U es triangular superior.

Proposición

Sea A no singular de tamaño $n \times n$. Entonces $PA = LDU$ donde P es una matriz de permutación $n \times n$, L es $n \times n$ es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal, D es $n \times n$ diagonal con elementos diagonales no cero y U es $n \times n$ es una matriz triangular superior con unos en la diagonal.

Los elementos de D son distintos de cero pues son los pivotes de A .
 L y U son únicas.

Lema

Sea A una matriz simétrica de tamaño $n \times n$ tal que $A = LDU$ donde L es triangular inferior con unos en la diagonal, U es triangular superior con unos en la diagonal, D es diagonal con elementos diagonales no cero. Entonces $U = L^t$ y $A = LDL^t$.

Proposición

Sea A una matriz simétrica de tamaño $n \times n$ que tiene una descomposición LU con pivotes estrictamente positivos. Entonces existe una matriz triangular inferior T tal que $A = TT^t$ y los elementos diagonales de T son positivos.

Definición

Sea A una matriz simétrica de tamaño $n \times n$. Se dice que A es positiva definida si todos sus pivotes son estrictamente positivos.

La descomposición $A = TT^t$ de una matriz positiva definida se llama la descomposición de Cholesky.

Ejemplos.

1. Inversa de matrices particionadas.
2. Descomposición LDU de matrices particionadas

Definición

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. El espacio columna de A es

$$\mathcal{C}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = Ax \text{ para algún } x \in \mathbb{R}^n\}$$

Dicho de otra manera $\mathcal{C}(A)$ es el espacio generado por las columnas de A de donde automáticamente obtenemos que $\mathcal{C}(A)$ es subespacio de \mathbb{R}^m .

Definición

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. El espacio renglón de A es

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = A^t x \text{ para algún } x \in \mathbb{R}^m\}$$

$\mathcal{R}(A) = \mathcal{C}(A^t)$ por lo que es subespacio de \mathbb{R}^n .

Definición

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. El espacio nulo de A es

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

$$\ker(A) = \mathcal{N}(A)$$

Proposición

Sean A una matriz $m \times n$. $\mathcal{N}(A)$ es subespacio de \mathbb{R}^n .

En general, dados vectores v_1, \dots, v_n , en \mathbb{R}^m , estos pueden acomodarse para formar las columnas de una matriz A de tamaño $m \times n$. Luego, un vector b estará en $\text{gen}\{v_1, \dots, v_n\}$ si y solo si $Ax = b$ es consistente

Proposición

Sea $S = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^m$. S es linealmente independiente si y solo si la matriz formada con los a_i como columnas tiene $\ker A = \{0\}$

Corolario

Sea $S = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$. S es linealmente independiente si y solo si la matriz formada con los a_i como columnas es invertible.

Corolario

Sea A una matriz $m \times n$. Un subconjunto de columnas de A es linealmente independiente si y solo si las columnas correspondientes en las mismas posiciones de la matriz escalonada por renglones de A son linealmente independientes.

Las columnas donde están los pivotes son linealmente independientes y son las columnas básicas.

Proposición

Sea A una matriz $m \times n$. El número de renglones linealmente independientes de A es igual al número de sus columnas linealmente independientes.

Proposición

Sea A una matriz $m \times n$. El número de renglones linealmente independientes de A es igual al número de sus columnas linealmente independientes.

Definición

Sea A una matriz $m \times n$. El rango de A es el número (máximo) de renglones linealmente independientes de A .

Proposición

Sea A una matriz $m \times n$ con r columnas linealmente independientes. Entonces existe un conjunto de $n - r$ vectores linealmente independientes que son solución del sistema homogéneo dado por A y cualquier otra solución se puede expresar como una combinación lineal de esas $n - r$ soluciones linealmente independientes.

Definición

El rango de una matriz A es la dimensión del espacio columna de A .

$$\rho(A)$$

Definición

La nulidad de una matriz A es la dimensión del espacio nulo (o kernel) de A .

$$\nu(A)$$

Ejemplo

$\rho(A) = 0$ si y solo si $A = 0$.

Ejemplo

T una matriz triangular

Ejemplo

I_n

Proposición

$\rho(A)$ = número de renglones linealmente independientes de A .

Corolario

Si A es cuadrada, $\rho(A) = \rho(A^t)$

Corolario

Si A es de tamaño $m \times n$, $\rho(A) \leq \min\{m, n\}$

Teorema

Sea A un matriz de tamaño $m \times n$. Entonces

$$\rho(A) + \nu(A) = n$$

Proposición

Sea A de tamaño $n \times n$. A es invertible si y solo si $\rho(A) = n$.

Definición

Sea A una matriz $n \times n$. un vector $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ es un vector propio de A si $Ax = \lambda x$ para algún escalar λ , que en tal caso es llamado un valor propio.

Ejemplos.

λ es un valor propio de A si y solo si la ecuación

$$(A - \lambda I)x = 0$$

tiene una solución no trivial.

Definición

El espacio propio de A correspondiente a λ es

$$E_\lambda := \mathcal{N}(A - \lambda I)$$

Proposición

Si A es triangular, sus valores propios son las entradas de su diagonal principal.

Proposición

0 es un valor propio de A si y solo si A es no invertible.

Proposición

Sea A una matriz $n \times n$. Si el valor propio λ_i corresponde al vector propio v_i , $i = 1, \dots, r$ y $\lambda \neq \lambda$, $i \neq j$, entonces el conjunto $\{v_1, \dots, v_r\}$ es linealmente independiente.

Definición

Sea A una matriz $n \times n$. La ecuación característica de A es

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Proposición

λ es un valor propio de A si y solo si λ satisface la ecuación característica.

Proposición

Sea A una matriz $n \times n$. $p(\lambda) := \det(A - \lambda I)$ es un polinomio de grado n , llamado el polinomio característico de A .

Definición

Sean A y B matrices $n \times n$. Se dice que A es similar a B si existe una matriz invertible P tal que $A = PBP^{-1}$.

Si A es similar a B entonces B es similar a A , por lo que simplemente decimos que A y B son similares.

De hecho. similaridad es una relación de equivalencia.

Proposición

Si A y B son similares entonces tienen el mismo polinomio característico y por tanto tienen los mismos valores propios

Definición

Una matriz es diagonalizable si es similar a una matriz diagonal D .

Proposición

Sea A una matriz $n \times n$. Entonces A es diagonalizable si y solo si A tiene n vectores propios linealmente independientes. De hecho, $A = PDP^{-1}$ si y solo si las columnas de P son los n vectores propios de A linealmente independientes y las entradas de la matriz diagonal D son los valores propios correspondientes a los vectores propios.

Proposición

Sea A una matriz $n \times n$. Si A tiene n valores propios distintos, entonces A es diagonalizable.

Definición

Sea A una matriz $n \times n$ y λ_0 un valor propio de A . La multiplicidad algebraica de λ_0 es el número m de veces que aparece como raíz del polinomio característico, $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m q(\lambda)$. La multiplicidad geométrica de λ_0 es $\dim E_{\lambda_0} = \dim \mathcal{N}(A - \lambda_0 I)$.

Proposición

La multiplicidad geométrica de un valor propio es menor o igual que su multiplicidad algebraica.

Proposición

Sea A una matriz $n \times n$. A es diagonalizable si y solo si la multiplicidad geométrica de cada valor propio es igual a su multiplicidad algebraica; es decir si la suma de las dimensiones de los espacios propios es igual a n .

Teoremas Espectrales

Proposición

Sea A una matriz diagonalizable $n \times n$ de rango r . Entonces existe una matriz no singular V tal que

$$A = V \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^{-1}$$

donde Λ_1 es diagonal de tamaño $r \times r$ con elementos distintos de cero en la diagonal.

Proposición

Sea A una matriz diagonalizable $n \times n$ de rango r . Entonces existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tales que

$$A = \lambda_1 v_1 w_1^t + \lambda_2 v_2 w_2^t + \cdots + \lambda_r v_r w_r^t$$

donde los v_i, w_j son vectores en \mathbb{C}^n tales que $w_i^t v_i = 1$, $w_i^t v_j = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, r$.

Proposición

Sea A una matriz diagonalizable $n \times n$ de rango r . Entonces existen una matriz S de tamaño $n \times r$, una matriz W de tamaño $r \times n$ y una matriz diagonal Λ_1 , $r \times r$ tales que

$$A = S \Lambda_1 W$$

donde $WS = I_r$.

Definición

Sea X un espacio vectorial sobre K . Un producto interno sobre X es una función $\langle, \rangle : X \times X \rightarrow K$ que cumple que:

- i) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- ii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

para todo $x, y, z \in X$, $\alpha \in K$ y donde $\langle x, y \rangle := \langle, \rangle(x, y)$.

Definición

Sea X un espacio vectorial sobre K . Un producto interno sobre X es una función $\langle, \rangle : X \times X \rightarrow K$ que cumple que:

- i) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- ii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

para todo $x, y, z \in X$, $\alpha \in K$ y donde $\langle x, y \rangle := \langle, \rangle(x, y)$.

Definición

Sea X un espacio vectorial. X es un espacio con producto interno si tiene un producto interno definido sobre X .

Todo producto interno define una función

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

llamada la norma de x .

Un vector es unitario si $\|x\| = 1$

Todo producto interno define una función

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

llamada la norma de x .

Un vector es unitario si $\|x\| = 1$

Proposition (desigualdad de Schwarz)

Sea X un espacio con producto interno. Entonces

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

para cualesquiera $x, y \in X$. La igualdad se cumple si y solo si x y y son linealmente independientes.

Corolario (La desigualdad del triángulo)

Sea X un espacio con producto interno. Entonces

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

para cualesquiera $x, y \in X$. La igualdad se cumple si y solo si x y y son linealmente independientes.

La distancia entre dos vectores está definida por

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

Definición

Sea X un espacio con producto interno. $x, y \in X$ son ortogonales si $\langle x, y \rangle = 0$. Dos conjuntos son ortogonales si todos los elementos de uno son ortogonales con todos los elementos del otro.

$$x \perp y, x \perp A, A \perp B.$$

Proposición (Ley del paralelogramo)

x y y son ortogonales si y solo si

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

En \mathbb{R}^n , un producto interno está definido por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. interpretando x, y como vectores

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = x^t y$$

Definición

Sea V un espacio con producto interno y $W \subset V$ un subespacio.
El complemento ortogonal de W es

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W\}$$

Definición

Sea V un espacio con producto interno y $W \subset V$ un subespacio.
El complemento ortogonal de W es

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W\}$$

Proposición

W^\perp es un subespacio de V .

Proposición

Sea V un espacio con producto interno y sea $S = \{u_1, \dots, u_p\}$ un conjunto ortogonal de vectores en V distintos de cero. Entonces S es linealmente independiente.

Proposición

Sea V un espacio con producto interno y sea $S = \{u_1, \dots, u_p\}$ un conjunto ortogonal de vectores en V distintos de cero. Entonces S es linealmente independiente.

Proposición

Sea V un espacio con producto interno y $W = \text{gen}\{u_1, \dots, u_p\}$. donde los u_j forman un conjunto ortogonal de vectores en V distintos de cero. Entonces $y \in W$ es de la forma

$$y = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p$$

donde

$$\alpha_j = \frac{\langle y, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle}$$

Teorema

Sea V un espacio con producto interno y $W \subset V$ un subespacio. Entonces cualquier $y \in V$ se puede escribir de manera única como

$$y = w + z$$

donde $w \in W$ y $z \in W^\perp$. Es decir, $V = W \oplus W^\perp$. Mas aún, si $\{u_1, \dots, u_p\}$ es una base ortogonal de W , entonces

$$w = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \dots + \frac{y \cdot u_p}{u_p \cdot u_p} u_p$$

$$z = y - w.$$

En la descomposición $y = w + z$, al vector w se le llama la proyección ortogonal de y sobre W , $w = \text{proy}_W y$.

Proposición

- i) $\text{proy}_W(\text{proy}_W y) = \text{proy}_W y$
- ii) Si $y \in W$, $\text{proy}_W y = y$.

Proposición

Sea V un espacio con producto interno, $W \subset V$ un subespacio, $y \in V$ y $u = \text{proy}_W y$. Entonces u es el vector en W más cercano a y , en el sentido que

$$\|y - u\| < \|y - w\|$$

para todo $w \in W$, $w \neq u$.

u es la mejor aproximación a y por elementos de W .