MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Pruebas de Acceso a la Universidad de Oviedo desde 1994.

+ 150 "problemas tipo"

ISBN: 84-609-3013-0

José Mª Rosell Tous

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales
Pruebas de acceso a la Universidad

Jose M^a Rosell Tous

Octubre - 2004

Contenidos

1 Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones **1**
1.1 Problemas PAU 1
1.2 Problemas propuestos 26

2 Programación lineal **33**
2.1 Problemas PAU 33
2.2 Problemas propuestos 64

3 Funciones, continuidad, límites y derivadas **71**
3.1 Problemas PAU 71
3.2 Problemas propuestos 97

4 Integrales **103**
4.1 Problemas PAU 103
4.2 Problemas propuestos 118

5 Probabilidad **123**
5.1 Problemas PAU 123
5.2 Problemas propuestos 138

6 Estadística **143**
6.1 Problemas PAU 143
6.2 Problemas propuestos 161

A Anexo **167**
A.1 Soluciones Problemas Bloque 1 167
A.2 Soluciones Problemas Bloque 2 171
A.3 Soluciones Problemas Bloque 3 176
A.4 Soluciones Problemas Bloque 4 179
A.5 Soluciones Problemas Bloque 5 182
A.6 Soluciones Problemas Bloque 6 184

Prólogo

Este manual recopila y ofrece resueltos los ejercicios y problemas de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, correspondientes a las pruebas de acceso a la Universidad de Oviedo, en su modalidad de acceso LOGSE; se han incluido todas las pruebas, desde 1994 hasta la actualidad.

Las razones que nos han movido a seleccionar las pruebas de la Universidad de Oviedo y no las de otras universidades son variadas: por una parte, son las pruebas a las que han tenido que acudir nuestros alumnos; por otra, presentan, salvo excepciones, una cierta homogeneidad lo que facilita una evaluación sosegada que evita las "sorpresas"; y también, porque presentan ciertas peculiaridades en la forma, que hacen que se ajusten perfectamente a lo que entendemos que pudiera ser una evaluación del curso de 2^o de Bachiller de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales.

Se ha incluido, también, una amplia colección de problemas propuestos, cuyas soluciones se pueden encontrar en el anexo A del libro.

Toda la materia se estructura en 6 bloques de contenido que pueden, o no, hacerse coincidir con las tres evaluaciones correspondientes a un curso; de esta manera, se garantiza que el contenido del programa resulte equilibrado en lo que a diferentes partes de las matemáticas se refiere.

Los dos primeros bloques corresponden a álgebra: el primero abarca lo referente a matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales; el segundo se ocupa de una introducción a los problemas de programación lineal bidimensional.

El tercero y cuarto bloques corresponden a análisis: el tercero incluye funciones, y su representación, límites y continuidad, derivadas y sus aplicaciones; el cuarto se ocupa del cálculo integral.

Los dos últimos bloques estudian la probabilidad y la estadística: el quinto se centra en la probabilidad y el teorema de Bayes, mientras que el sexto y último bloque lo hace en la teoría de muestras, la inferencia estadística y las pruebas de contraste de hipótesis.

El tipo de exámen que se propone al finalizar el curso, es el mismo que el que se viene realizando en las distintas convocatorias de exámen de las pruebas PAU: consiste en 6 problemas, al azar, uno por cada uno de los 6 bloques de contenidos, de entre los que el alumno ha de seleccionar y contestar a 4 de ellos.

Esperamos que esta sencilla colección ordenada de problemas pueda resultaros de utilidad.

1

Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones

1.1 Problemas PAU

Junio 94:

Un grupo de personas se reune para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al del hombres.

a) Plantear un sistema para averiguar cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.

b) Resolver el problema.

Solución:

Apartado a:

Si llamamos x, y, z, al número de hombres, mujeres y niños, respectivamente, que fueron de excursión, tendremos:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=20 \\ x+y=3z \\ y+1=x \end{array}\right. ;\text{ ordenamos:}\left\{\begin{array}{l} x+y+z=20 \\ x+y-3z=0 \\ -x+y=-1 \end{array}\right.$$

Apartado b:

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$$M=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad M_a=\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Como $|M|=\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right|=8\neq 0 \rightarrow r(M)=r(Ma)=3 \rightarrow S.C.D.$

Resolvemos el sistema utilizando la regla de Cramer; para ello calculamos los valores de:

$$|M_x|=\left|\begin{array}{ccc} 20 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right|=64; |M_y|=\left|\begin{array}{ccc} 1 & 20 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right|=56;$$

$$|M_z|=\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right|=40$$

$x=\frac{|M_x|}{|M|}=\frac{64}{8}=8; y=\frac{|M_y|}{|M|}=\frac{56}{8}=7; z=\frac{|M_z|}{|M|}=\frac{40}{8}=5$

Luego, habrán asistido 8 hombres, 7 mujeres y 5 niños a la excursión.

Septiembre 94:

Cierto estudiante obtuvo, en un control que constaba de 3 preguntas, una calificación de 8 puntos. En la segunda pregunta sacó dos puntos más que en la primera y un punto menos que en la tercera.

a) Plantear un sistema de ecuaciones para determinar la puntuación obtenida en cada una de las preguntas.

b) Resolver el sistema.

Solución:

Apartado a:

Si llamamos x, y, z, a la puntuación obtenida en cada pregunta, respectivamente, tendremos:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=8 \\ y=x+2 \\ y=z-1 \end{array}\right. \text{, ordenamos: } \left\{\begin{array}{l} x+y+z=8 \\ -x+y=2 \\ y-z=-1 \end{array}\right.$$

Apartado b:

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$$M=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad M_a=\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$|M|=\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right|=-3 \neq 0 \rightarrow r(M)=r(Ma)=3 \rightarrow S.C.D.$$

Resolvemos el sistema utilizando la regla de Cramer; para ello calculamos los valores de:

$$|M_x|=\left|\begin{array}{ccc} 8 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right|=-3; |M_y|=\left|\begin{array}{ccc} 1 & 8 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right|=-9;$$

$$|M_z|=\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right|=-12$$

$$x=\frac{|M_x|}{|M|}=\frac{-3}{-3}=1; y=\frac{|M_y|}{|M|}=\frac{-9}{-3}=3; z=\frac{|M_z|}{|M|}=\frac{-12}{-3}=4$$

Luego, habrá obtenido 1 punto en la primera pregunta, 3 en la segunda y 4 en la tercera.

Septiembre 94 (bis):

Sea la matriz A de coeficientes asociada a cierto sistema de ecuaciones lineales y B la matriz de sus términos independientes:

$$A=\left(\begin{array}{cc} a & -2 \\ a & a-1 \end{array}\right) \qquad B=\left(\begin{array}{c} 4 \\ 4 \end{array}\right)$$

a) Plantea algebraicamente el sistema indicando las operaciones hechas.

b) Discute su compatibilidad e interpreta los resultados obtenidos.

Solución:

Apartado a:

El sistema expresado en forma matricial, será:

$\begin{pmatrix} a & -2 \\ a & a-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Efectuando el producto de matrices, y aplicando la definición de igualdad de dos matrices, obtendremos el sistema pedido: $\left\{ \begin{array}{l} ax - 2y = 4 \\ ax + (a-1)\,y = 4 \end{array} \right.$.

Apartado b:

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$M = \begin{pmatrix} a & -2 \\ a & a-1 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} a & -2 & 4 \\ a & a-1 & 4 \end{pmatrix}$

Analizamos los valores críticos haciendo $|M| = 0$

$|M| = \begin{vmatrix} a & -2 \\ a & a-1 \end{vmatrix} = 0 \to a^2 + a = 0; a\,(a+1) = 0 \to a_1 = 0; a_2 = -1$

- Si $a \neq 0 \qquad y \qquad a \neq -1$

  $|M| \neq 0 \to r(M) = r(Ma) = 2 \to S.C.D.$ (solución única).

- Si $a = 0$

$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$|M| = 0 \to r(M) = 1$ y $r(Ma) = 2$, puesto que es posible encontrar en la matriz M_a un menor complementario de orden 2 y distinto de cero; por ejemplo: $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$. Por tanto, $S.I.$ (No soluciones).

- Si $a = -1$

$M = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

$|M| = 0 \to r(M) = 1$ y $r(Ma) = 1$, puesto que no es posible encontrar en la matriz M_a un menor complementario de orden 2 y distinto de cero. Por tanto, $S.C.I.$ (Infinitas soluciones).

Junio 95:

Un ama de casa adquirió en el mercado ciertas cantidades de patatas, manzanas y naranjas a un precio de 100, 120 y 150 ptas/kg., respectivamente. El importe total de la compra fueron 1.160 ptas. El peso total de la misma 9 kg. Además, compró 1 kg. más de naranjas que de manzanas.

a) Plantear un sistema para determinar la cantidad comprada de cada producto.

b) Resolver el problema.

Solución:

Apartado a:

Si llamamos x, y, z, al número de kg. comprados de patatas, manzanas y naranjas, respectivamente, tendremos:

$\left\{\begin{array}{l} 100x+120y+150z=1160 \\ x+y+z=9 \\ y+1=z \end{array}\right.$ simplificamos: $\left\{\begin{array}{l} 10x+12y+15z=116 \\ x+y+z=9 \\ y-z=-1 \end{array}\right.$

Apartado b)

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$M = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 15 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 15 & 116 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Como $|M| = \begin{vmatrix} 10 & 12 & 15 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow r(M) = r(Ma) = 3 \rightarrow S.C.D.$

Resolvemos el sistema utilizando la regla de Cramer; para ello calculamos los valores de:

$|M_x| = \begin{vmatrix} 116 & 12 & 15 \\ 9 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 14; |M_y| = \begin{vmatrix} 10 & 116 & 15 \\ 1 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 21;$

$|M_z| = \begin{vmatrix} 10 & 12 & 116 \\ 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 28$

$x = \frac{|M_x|}{|M|} = \frac{14}{7} = 2; \qquad y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{21}{7} = 3; \qquad z = \frac{|M_z|}{|M|} = \frac{28}{7} = 4$

Por tanto, habrá comprado 2 kg. de patatas, 3 kg. de manzanas y 4 kg. de naranjas.

Septiembre 95:

La matriz de coeficientes A, asociada a cierto sistema de ecuaciones lineales, así como la de sus términos independientes B son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Deduce las ecuaciones del sistema indicando las operaciones hechas.

b) Obtén, si es posible, la inversa de las matrices A y B. Razona las respuestas.

Solución:

Apartado a:

El sistema expresado en forma matricial, será:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Efectuando el producto de matrices, y aplicando la definición de igualdad de dos matrices, obtendremos el sistema pedido: $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ 2x-y+z=6 \\ 5x+y-2z=2 \end{array}\right.$.

Apartado b:

- Determinación de A^{-1}:

- calculamos el determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 17 \neq 0$

Como que $|A| \neq 0$, la matriz A es inversible.

- calculamos la matriz adjunta A^*, reemplazando cada elemento por el valor de su menor adjunto:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 3 & -7 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

- determinamos la matriz traspuesta de la adjunta:

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 9 & -7 & 1 \\ 7 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

- la matriz inversa será: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^*)^T = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 9 & -7 & 1 \\ 7 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

- Determinación de B^{-1}: no es posible pues B no es una matriz cuadrada.

Junio 96:

En una confitería envasan los bombones en cajas de 250 gr., 500 gr. y 1 kg. Cierto día se envasaron 60 cajas en total, habiendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 gr.) que de tamaño mediano (500 gr.). Sabiendo que el precio del kg. de bombones es 4.000 ptas. y que el importe total de los bombones envasados asciende a 125.000 ptas:

a) Plantear un sistema para determinar cuántas cajas se han envasado de cada tipo.

b) Resolver el problema.

Solución:

Apartado a:

Tenemos que:

- precio de la caja de 250 gr. = 1000 ptas.
- precio de la caja de 500 gr. = 2000 ptas.
- precio de la caja de 1 kg. = 4000 ptas.

Si llamamos x, y, z, al número de cajas envasadas de 250 gr. , 500 gr. y 1 kg., respectivamente, tendremos:

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ x = y + 5 \\ 1000x + 2000y + 4000z = 125000 \end{cases} \quad \text{simplificamos:} \begin{cases} x + y + z = 60 \\ x - y = 5 \\ x + 2y + 4z = 125 \end{cases}$$

Apartado b:

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 125 \end{pmatrix}$$

Como $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow r(M) = r(Ma) = 3 \rightarrow S.C.D.$

Resolvemos el sistema utilizando la regla de Cramer; para ello calculamos los valores de:

$|M_x| = \begin{vmatrix} 60 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 125 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -125; |M_y| = \begin{vmatrix} 1 & 60 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 125 & 4 \end{vmatrix} = -100;$

$|M_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 60 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 125 \end{vmatrix} = -75$

$x = \frac{|M_x|}{|M|} = \frac{-125}{-5} = 25; y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{-100}{-5} = 20; z = \frac{|M_z|}{|M|} = \frac{-75}{-5} = 15$

Por tanto, se habrán envasado 25 cajas pequeñas, 20 medianas y 15 grandes.

Junio 96 (R):

El precio de entrada a cierta exposición es de 200 ptas. para los niños, 500 para los adultos y 250 para los jubilados. En una jornada concreta, la exposición fué visitada por 200 personas en total, igualando el número de visitantes adultos al de niños y jubilados juntos. La recaudación de dicho día ascendió a 73.500 ptas.

a) Plantear un sistema de ecuaciones para averiguar cuántos niños, adultos y jubilados visitaron la exposición ese día.

b) Resolver el problema.

Solución:

Apartado a:

Si llamamos x, y, z, al número de niños, adultos y jubilados, respectivamente, que visitaron ese día la exposición, tendremos:

$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 200 \\ y = x + z \\ 200x + 500y + 250z = 73500 \end{array} \right.$ simplificamos: $\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 200 \\ x - y + z = 0 \\ 20x + 50y + 25z = 7350 \end{array} \right.$

Apartado b:

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 20 & 50 & 25 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 20 & 50 & 25 & 7350 \end{pmatrix}$$

$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 20 & 50 & 25 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \rightarrow r(M) = r(M_a) = 3 \rightarrow S.C.D.$

Resolvemos el sistema utilizando la regla de Cramer; para ello calculamos los valores de:

$|M_x| = \begin{vmatrix} 200 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 7350 & 50 & 25 \end{vmatrix} = -300; |M_y| = \begin{vmatrix} 1 & 200 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 20 & 7350 & 25 \end{vmatrix} = -1000;$

$$|M_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 200 \\ 1 & -1 & 0 \\ 20 & 50 & 7350 \end{vmatrix} = -700$$

$x = \frac{|M_x|}{|M|} = \frac{-300}{-10} = 30; y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{-1000}{-10} = 100; z = \frac{|M_z|}{|M|} = \frac{-700}{-10} = 70$

Luego, a la exposición, habrán acudido 30 niños, 100 adultos y 70 jubilados.

Septiembre 96:

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 2x - y + z = 11 \end{cases}$$

a) Obtén su matriz de coeficientes.

b) Calcula el determinante de la matriz anterior.

c) Sin resolver el sistema, razonar si tendrá solución única.

Solución:

Apartado a:

Su matriz de coeficientes será: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Apartado b:

El determinante de dicha matriz será:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 1 + 4 + 4 + 2 - 1 = 6$$

Apartado c:

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

Como $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow r(M) = r(Ma) = 3 \rightarrow S.C.D.$

Por lo que el sistema tendrá una única solución.

Junio 97:

En un supermercado van a poner en oferta dos marcas de detergente (A y B). El propietario consulta su libro de cuentas para ver las condiciones de una oferta anterior, encontrando la siguiente información: el número total de paquetes vendidos fueron 1.000 unidades; el precio del paquete A 500 ptas; y el importe total de la oferta 440.000 ptas. Pero en sus anotaciones no aparece reflejado claramente el precio del paquete B.

a) Plantear un sistema para determinar el número de paquetes vendidos de cada marca. Discutir su compatibilidad.

b) Averiguar si el precio del paquete B fue 400 o 408 ptas. ¿cuántos paquetes se vendieron?

Solución:

Apartado a:

Si llamamos x e y al número de paquetes vendidos de las marcas A y B, respectivamente, tendremos:

$\left\{\begin{array}{l} x+y=1000 \\ 500x+my=440000 \end{array}\right.$, representando el parámetro m el precio del paquete de marca B.

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 500 & m \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1000 \\ 500 & m & 440000 \end{pmatrix}$

Analicemos los valores críticos haciendo:

$|M| = 0 \to m - 500 = 0 \to m = 500$

$\cdot$ si $m \neq 500 \to r(M) = 2$ y $r(M_a) = 2 \to S.C.D.$(solución única)

$\cdot$ si $m = 500 \to r(M) = 1$ y $r(M_a) = 2$, pues es posible encontrar en ésta, al menos, un menor complementario de orden 2 distinto de cero. Por ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 1000 \\ 500 & 440000 \end{vmatrix} \neq 0 \to S.I.$ (No solución)

Apartado b:

Se trata de resolver el sistema para los valores $m = 400$ y $m = 408$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=1000 \\ 500x+400y=440000 \end{array}\right. \to \{x=400, y=600\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=1000 \\ 500x+408y=440000 \end{array}\right. \to \left\{x=\tfrac{8000}{23}, y=\tfrac{15\,000}{23}\right\}$$

Como el número de paquetes vendido de cada marca debe ser un número entero, el precio del paquete B tiene que haber sido 400 pesetas. En estas condiciones, se habrían vendido 400 paquetes de la marca A y 600 paquetes de la marca B.

Septiembre 97:

La matriz de coeficientes asociada a cierto sistema de ecuaciones lineales es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Obtener las ecuaciones del sistema.

b) Calcular el rango de la matriz formada por los coeficientes del sistema.

c) Sin resolver el sistema, deducir razonadamente si admite soluciones y en qué número.

Solución:

Apartado a:

El sistema asociado a la matriz dada será: $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x-y+4z=0 \\ -x+y+2z=5 \end{array}\right.$

El mismo sistema, expresado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Apartado b:

Para calcular el rango de la matriz de los coeficientes del sistema M, calculamos el valor de su determinante $|M|$:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 2 - 4 - 1 - 4 - 4 = -13 \neq 0$$

Como que $|M| \neq 0$, sabemos que $r(M) = 3$

Apartado c:

Por el teorema de Rouché-Fröbenius, sabemos que:

· si $r(M) = r(M_a) =$ n^o incógnitas $\rightarrow$ $S.C.D.$ (Solución unica)

· si $r(M) = r(M_a) <$ n^o incógnitas $\rightarrow$ $S.C.I.$ (Infinitas soluciones)

· si $r(M) \neq r(M_a) \rightarrow S.I.$ (No soluciones)

Como que $|M| \neq 0 \rightarrow r(M) = r(M_a) = 3 \rightarrow S.C.D.$

Por lo tanto, el sistema admite solución, y ésta será única.

Junio 98:

Una autoescuela tiene abiertas 3 sucursales en la ciudad. El número total de matriculados es 352, pero los matriculados en la tercera son sólo una cuarta parte de los matriculados en la primera.

Además, la diferencia entre los matriculados en la primera y los matriculados en la segunda es inferior en dos unidades al doble de los matriculados en la tercera.

a) Plantear un sistema de ecuaciones para averiguar el número de alumnos matriculados en cada sucursal.

b) Resolverlo.

Solución:

Apartado a:

Si llamamos x, y, z, al número de alumnos matriculados en la primera, segunda y tercera sucursal, respectivamente, tendremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 352 \\ z = \dfrac{x}{4} \\ x - y + 2 = 2z \end{array} \right. \text{, ordenamos:} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 352 \\ x - 4z = 0 \\ x - y - 2z = -2 \end{array} \right.$$

Apartado b:

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 352 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \rightarrow r(M) = r(Ma) = 3 \rightarrow S.C.D.$

Resolvemos el sistema utilizando la regla de Cramer; para ello calculamos los valores de:

$|M_x| = \begin{vmatrix} 352 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -1400; |M_y| = \begin{vmatrix} 1 & 352 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -714;$

$|M_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 352 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -350$

$x = \frac{|M_x|}{|M|} = \frac{-1400}{-7} = 200; y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{-714}{-7} = 102; z = \frac{|M_z|}{|M|} = \frac{-350}{-7} = 50$

Luego, habrá 200 alumnos matriculados en la primera sucursal, 102 en la segunda y 50 en la tercera.

Septiembre 98:

La matriz de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales es: $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a+1 & 2 \end{pmatrix}$ *y la de los términos independientes es:* $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Plantear las ecuaciones del sistema.

b) Estudiar su compatibilidad en función de los valores de a. ¿En qué casos tiene solución unica?.

c) Resolverlo si $a = 2$.

Solución:

Apartado a:

El sistema asociado a las matrices dadas será: $\left\{ \begin{array}{l} x + ay = 2 \\ (a+1)x + 2y = -2 \end{array} \right.$.

El mismo sistema, expresado en forma matricial:

$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a+1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Apartado b:

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a+1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ a+1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Analizamos los valores críticos haciendo $|M| = 0$

$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a+1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2 - a^2 - a = 0 \rightarrow a_1 = 1$ y $a_2 = -2$

- Si $a \neq 1$ *y* $a \neq -2$

$|M| \neq 0 \quad \rightarrow \quad r(M) = r(M_a) = 2 \quad S.C.D.$ (solución única).

- Si $a = 1$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$|M| = 0 \rightarrow r(M) = 1$ y $r(M_a) = 2$, puesto que es posible encontrar en la matriz M_a un menor complementario de orden 2 y distinto de cero; por ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$.

Por tanto, $S.I.$ (No soluciones).

- Si $a = -2$

$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$|M| = 0 \rightarrow r(M) = 1$ y $r(M_a) = 1$, puesto que no es posible encontrar en la matriz M_a un menor complementario de orden 2 y distinto de cero.

Por tanto, $S.C.I.$ (Infinitas soluciones).

Apartado c:

Si suponemos que $a = 2$, tendremos que:

$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + 2y = -2 \end{cases}$, cuya solución es: $\{x = -2, y = 2\}$

Junio 99:

Sean las matrices:

$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

donde x, y, z son desconocidos.

a) Calcular las matrices $(AB) + C$ y $3D$

b) Sabiendo que $(AB) + C = 3D$, plantear un sistema de ecuaciones para encontrar los valores de x, y, z.

c) Estudiar la compatibilidad del sistema. ¿Cuántas soluciones tiene?

d) Encontrar, si es posible, una solución.

Solución:

Apartado a:

Para multiplicar dos matrices, multiplicamos vectorialmente las filas de la primera por cada una de las columnas de la segunda. Para sumar dos matrices sumamos sus elementos correspondientes. Así:

$$A \cdot B + C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x + y \\ 2x - y \\ -x + y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x - y + 2z \\ -x + y - z \end{pmatrix}$$

Para multiplicar una matriz por un escalar, multiplicamos cada uno de los elementos de la matriz por dicho escalar. Así:

$$3D = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Apartado b:

Como que $(AB) + C = 3D$, tenemos que: $\begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-y+2z \\ -x+y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

luego: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+2z=0 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$

Apartado c:

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Como $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow r(M) = 2$, puesto que es posible encontrar en la matriz M un menor complementario de orden 2 y distinto de cero; por ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

$\rightarrow r(M_a) = 2$, puesto que no es posible encontrar en la matriz M_a un menor complementario de orden 3 y distinto de cero:

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Como $r(M) = r(M_a) = 2 \rightarrow S.C.I.$ (Infinitas soluciones).

Apartado d:

Una de las ecuaciones es combinación lineal de las otras dos; la eliminamos: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$

Consideramos la z como constante y la pasamos, junto a los términos independientes, al segundo miembro: $\begin{cases} x+y=3-z \\ -x+y=1+z \end{cases}$

Para cada valor de z, obtendremos una posible solución del sistema.

Supongamos: $z = 0$:

tendremos: $\begin{cases} x+y=3 \\ -x+y=1 \end{cases} \rightarrow \{x=1, y=2\}$

Septiembre 99:

En el trayecto que hay entre su casa y el trabajo, un individuo puede repostar gasolina en tres estaciones de servicio (A, B y C). El individuo recuerda que este mes el precio de la gasolina en A ha sido de 120 ptas/litro y el precio de la gasolina en B de 118 ptas/litro, pero ha olvidado el precio en C. (Supongamos que son "m" ptas/litro).

También recuerda que:

- la suma del gasto en litros de gasolina en las estaciones A y B superó

en 4680 ptas. al gasto en C.
- el número de litro de gasolina consumidos en B fue el mismo que en C.
- el gasto de litros en A superó al de B en 1260 ptas.
a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de "m") para determinar los litros consumidos en cada gasolinera.
b) Estudiar la compatibilidad del sistema en función de "m". ¿Puedes dar algún precio al que sea imposible haber vendido la gasolina en la gasolinera C?

Solución:

Apartado a:

Si llamamos x, y, z, al número de litros que ha repostado en las gasolineras A, B y C, respectivamente, tendremos:

$$\left\{\begin{array}{l} 120x + 118y = mz + 4680 \\ y = z \\ 120x = 118y + 1260 \end{array}\right. \text{, ordenamos: } \left\{\begin{array}{l} 120x + 118y - mz = 4680 \\ y - z = 0 \\ 120x - 118y = 1260 \end{array}\right.$$

Apartado b:

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$$M = \begin{pmatrix} 120 & 118 & -m \\ 0 & 1 & -1 \\ 120 & -118 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 120 & 118 & -m & 4680 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 120 & -118 & 0 & 1260 \end{pmatrix}$$

Analizamos los valores críticos haciendo $|M| = 0$

$$|M| = \begin{vmatrix} 120 & 118 & -m \\ 0 & 1 & -1 \\ 120 & -118 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to -14160 + 120m - 14160 = 0 \to$$

$\to m = 236$

- Si $m \neq 236$

$|M| \neq 0 \to r(M) = r(M_a) = 3 \to S.C.D.$ (solución única).

- Si $m = 236$

$$M = \begin{pmatrix} 120 & 118 & -236 \\ 0 & 1 & -1 \\ 120 & -118 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 120 & 118 & -236 & 4680 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 120 & -118 & 0 & 1260 \end{pmatrix}$$

$|M| = 0 \to r(M) = 2$, puesto que es posible encontrar en la matriz M un menor complementario de orden 2 y distinto de cero; por ejemplo: $\begin{vmatrix} 120 & 118 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$; $r(Ma) = 3$, puesto que es posible encontrar en la matriz M_a un menor complementario de orden 3 y distinto de cero; por ejemplo: $\begin{vmatrix} 120 & 118 & 4680 \\ 0 & 1 & 0 \\ 120 & -118 & 1260 \end{vmatrix}$

Como $r(M) \neq r(M_a) \to S.I.$ (No solución).

Por esta razón, resultaría imposible haber vendido la gasolina a 236 ptas. litro en la gasolinera C.

Junio 00:

Sea $6A + 2I = B$ una expresión matricial, donde, B, denota una matriz cuadrada de orden 2x2, tal que $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ e I, la matriz unidad de orden correspondiente.

a) ¿Qué dimensión tiene la matriz A?

b) Determine los elementos que integran la matriz A, esto es, $a_{i,j} \in A_{p,q}$.

c) Calcule $A + 2I$.

Solución:

Apartado a:

Para que dos matrices puedan sumarse es necesario que tengan la misma dimensión; además, su suma es otra matriz de la misma dimensión que las matrices sumandos. Por tanto, la matriz A tiene que tener dimensión $2x2$.

Apartado b:

Como $6A + 2I = B$, entonces: $6A = B - 2I \rightarrow A = \frac{1}{6}(B - 2I)$

$$A = \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]$$

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Apartado c:

$$A + 2I = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Septiembre 00:

Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ y & 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & x & 1 \\ 3 & z & x+z \end{pmatrix}$ dos matrices de orden 2x3, en las que x, y, z denotan valores numéricos desconocidos.

a) Determine, razonadamente, los valores de $x, y, z \in \Re$ de manera que $A = B$.

b) ¿Es posible el cálculo de AxB?. Razone la respuesta.

Solución:

Apartado a:

Para que dos matrices sean iguales es necesario que tengan la misma dimensión y, además, que los elementos que ocupen la misma posición en ambas sean iguales ($a_{i,j} = b_{i,j}$). Por tanto, si:

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ y & 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & x & 1 \\ 3 & z & x+z \end{pmatrix}$, entonces:

$$A = B \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2 = x \\ y = 3 \\ 3 = z \\ \text{Además, se verifica que: } 5 = x + z \end{cases}$$

Apartado b:

Para que pueda efectuarse el producto AxB , es necesario que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B. Como que la matriz A tiene 3 columnas y la matriz B tiene 2 filas, el producto AxB NO puede efectuarse.

Junio 01:

Un agente inmobiliario puede realizar 3 tipos de operaciones: venta de un piso nuevo, venta de un piso usado y alquiler. Por la venta de cada piso nuevo recibe una prima de 120.000 ptas. Si la operación es la venta de un piso usado recibe 60.000 ptas. Se desconoce la prima cuando la operación es un alquiler.

Este mes el número total de operaciones fue 5. La prima total por venta de pisos fue superior en 200.000 ptas. a la obtenida por alquileres, y la prima total por venta de pisos nuevos fue el triple que por alquileres.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (sin resolverlo) para obtener el número de operaciones de cada tipo realizadas (en función de la prima de alquiler de valor desconocido).

b) Indica una prima a la que es imposible que se hayan podido pagar los alquileres.

c) Indica tres primas a las que es posible que se hayan podido pagar los alquileres.

d) Si la prima de alquileres fue de 20.000 ptas. ¿cuántas operaciones de cada tipo se realizaron?

Solución:

Apartado a:

Llamamos x, y, z, al número operaciones de cada tipo que ha realizado y m a la prima desconocida (en miles de pesetas):

$$\begin{cases} x = \text{n}^o \text{ ventas de pisos nuevos} \\ y = \text{n}^o \text{ ventas de pisos usados} \\ z = \text{n}^o \text{ alquileres} \end{cases}$$

Con lo que tendremos:

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ 120x+60y=mz+200 \\ 120x=3mz \end{cases}, \text{ ordenamos:} \begin{cases} x+y+z=5 \\ 120x+60y-mz=200 \\ 120x-3mz=0 \end{cases}$$

Apartado b:

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 120 & 60 & -m \\ 120 & 0 & -3m \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 120 & 60 & -m & 200 \\ 120 & 0 & -3m & 0 \end{pmatrix}$$

Analizamos los valores críticos haciendo $|M| = 0$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 120 & 60 & -m \\ 120 & 0 & -3m \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 60m - 7200 = 0 \rightarrow m = 120$$

- Si $m \neq 120$

$|M| \neq 0 \rightarrow r(M) = r(Ma) = 3 \rightarrow S.C.D.$ (solución única).

- Si $m = 120$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 120 & 60 & -120 \\ 120 & 0 & -360 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 120 & 60 & -120 & 200 \\ 120 & 0 & -360 & 0 \end{pmatrix}$$

$|M| = 0 \to r(M) = 2$, puesto que es posible encontrar en la matriz M un menor complementario de orden 2 y distinto de cero; por ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 120 & 60 \end{vmatrix}$

$r(Ma) = 3$, puesto que es posible encontrar en la matriz M_a un menor complementario de orden 3 y distinto de cero; por ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 120 & 60 & 200 \\ 120 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Como $r(M) \neq r(M_a) \to S.I.$ (No solución).

Por esta razón, resultaría imposible que las primas por alquileres fueran 120.000 ptas.

Apartado c:

Resolvemos el sistema en función de m:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 120 & 60 & -m \\ 120 & 0 & -3m \end{vmatrix} = 60m - 7200$$

$$|M_x| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 200 & 60 & -m \\ 0 & 0 & -3m \end{vmatrix} = -300m \to x = \frac{|M_x|}{|M|} = \frac{-300m}{60m-7200}$$

$$|M_y| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 120 & 200 & -m \\ 120 & 0 & -3m \end{vmatrix} = 600m - 24\,000 \to y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{600m-24000}{60m-7200}$$

$$|M_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 120 & 60 & 200 \\ 120 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -12\,000 \to z = \frac{|M_z|}{|M|} = \frac{-12000}{60m-7200}$$

Apartado d:

Si la prima de alquileres hubiera sido de 20.000 ptas, tendríamos: $m = 20$

$$x = \frac{|M_x|}{|M|} = \frac{-300m}{60m-7200} = 1$$

$$y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{600m-24000}{60m-7200} = 2$$

$$z = \frac{|M_z|}{|M|} = \frac{-12000}{60m-7200} = 2$$

Con lo que habría vendido 1 piso nuevo, 2 pisos usados y realizado 2 alquileres.

Septiembre 01:

Sean las matrices:

$$A= \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ;B= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ;C= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ;D= \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$$

a) Sabiendo que $AB = 2C - D$, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) donde a es cierto valor desconocido.

b) Si se supiera que el sistema tiene solución, ¿podríamos descartar algún valor de a?

c) Si se supiera que el sistema tiene solución única, ¿podríamos descartar algún valor de a?

d) ¿Hay algún valor de a para el que el sistema tenga más de una solución?

Solución:

Apartado a:

Como sabemos que $AB = 2C - D$, tendremos:

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ax+y \\ x+ay \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-z \\ 2-z \\ -z \end{pmatrix}$$

Luego, : $\left\{\begin{array}{l} ax+y=2-z \\ x+ay=2-z \\ x=-z \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} ax+y+z=2 \\ x+ay+z=2 \\ x+z=0 \end{array}\right.$

Discutimos el sistema, analizando el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - a = 0 \qquad \rightarrow \qquad \{a=0\}, \{a=1\}$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$:

$r(M) = r(M_a) = 3$

- Si $a = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} r(M) = 2 & \text{pues } \exists \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \\ r(M_a) = 3 & \text{pues } \exists \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow S.I.$$

- Si $a = 1$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} r(M) = 2 & \text{pues } \exists \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \\ r(M_a) = 2 & \text{pues } \exists \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow S.C.I.$$

Apartado b:

Si el sistema tiene solución, es un sistema compatible. Podemos descartar el valor $a = 0$ porque, entonces:

$$\left\{\begin{array}{l} y+z=2 \\ x+z=2 \\ x+z=0 \end{array}\right. \qquad \text{la } 2^a \text{ y } 3^a \text{ ecuación son contradictorias.}$$

Apartado c:

Si el sistema tiene solución única, es un sistema compatible determinado. Podemos descartar, además del anterior valor $a = 0$, el valor $a = 1$ porque, entonces:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ x+y+z=2 \\ x+z=0 \end{array}\right. \qquad \text{la } 1^a \text{ y } 2^a \text{ ecuación son iguales y quedan menos}$$

ecuaciones que incógnitas.

Apartado d:

Si el sistema tiene más de una solución, es un sistema compatible indeterminado. $a = 1$

Junio 02:

En una farmacia se comercializan 3 tipos de champú de cierta marca: normal, con vitaminas y anticaspa. Se sabe que el precio al que se vende el normal es de 2 euros y el de vitaminas es de 3 euros. Se desconoce el precio al que se vende el anticaspa. Por otro lado, el dinero total obtenido por las ventas de los 3 tipos de champú el mes pasado fue de 112 euros y el dinero obtenido en ventas con el champú normal fue 56 euros inferior al dinero total obtenido en ventas con el resto. Además, el dinero total obtenido en ventas con el champú de vitaminas y el anticaspa fue el mismo que el que hubiera obtenido vendiendo 28 unidades del anticaspa y ninguna de los demás.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función del precio desconocido del champú anticaspa, que puedes llamar por ejemplo m) donde las incógnitas (x, y, z) sean las unidades vendidas el mes pasado de cada tipo de champú.

b) ¿Qué puedes concluir sobre el precio del champú anticaspa a partir de un estudio de la compatibilidad del sistema?

c) Si se sabe que el número de unidades vendidas del anticaspa fue 20, utiliza el resultado del apartado (b) para calcular las unidades vendidas de los otros 2.

Solución:

Apartado a:

Llamamos x, y, z, al número de unidades de cada tipo que ha vendido y m al precio desconocido del champú anticaspa

$$\left\{\begin{array}{l} x = \text{n}^o \text{ unidades champú normal} \\ y = \text{n}^o \text{ unidades champú con vitaminas} \\ z = \text{n}^o \text{ unidades champú anticaspa} \end{array}\right.$$

Con lo que tendremos:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y+mz=112 \\ 2x+56=3y+mz \\ 3y+mz=28m \end{array}\right., \text{ ordenamos: } \left\{\begin{array}{l} 2x+3y+mz=112 \\ 2x-3y-mz=-56 \\ 3y+mz=28m \end{array}\right.$$

Apartado b:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 3 & m \\ 2 & -3 & -m \\ 0 & 3 & m \end{pmatrix}; M_a=\begin{pmatrix} 2 & 3 & m & 112 \\ 2 & -3 & -m & -56 \\ 0 & 3 & m & 28m \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & m \\ 2 & -3 & -m \\ 0 & 3 & m \end{vmatrix}=0 \to r\left(M\right)=2, \text{ pues } \exists \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 112 \\ 2 & -3 & -56 \\ 0 & 3 & 28m \end{vmatrix}=-336m+1008=0 \to \{m=3\}$$

- Si $m=3$:

$r(M)=r(M_a)=2<$ n^o incógnitas $\to$ $S.C.I.$ (Infinitas soluciones)

- Si $m\neq 3$:

$r(M)=2\neq r(M_a)=3 \to S.I.$ (no hay solución)

Apartado c:

Como que $m=3$ y sabemos que $z=20$, el sistema se convierte en:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y+mz=112 \\ 2x-3y-mz=-56 \\ 3y+mz=28m \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} 2x+3y+3z=112 \\ 2x-3y-3z=-56 \\ 3y+3z=84 \end{array}\right. \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} 2x+3y+60=112 \\ 2x-3y-60=-56 \\ 3y+60=84 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} 2x+3y=52 \\ 2x-3y=4 \\ 3y=24 \end{array}\right. \to \{x=14, y=8\}$$

Septiembre 02:

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & a \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
donde a es desconocido.

a) Sea el sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes es A y de términos independientes B. ¿Puede para algún valor de a no tener solución este sistema? ¿Para qué valores de a el sistema tiene solución única?

b) Si la matriz de coeficientes es A pero la de términos independientes es C, ¿es posible que para algún valor de a el sistema no tenga solución? Encuentra un valor de a para el que el sistema tenga más de una solución y calcula dos de ellas.

Solución:

Apartado a:
El sistema será:
$$\left\{\begin{array}{l} -x+2y-z=0 \\ x+y+2z=a \\ 3x-3y+az=a \end{array}\right., \text{ siendo:}$$
$$M=\left(\begin{array}{ccc} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & a \end{array}\right), M_a=\left(\begin{array}{cccc} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & a \\ 3 & -3 & a & a \end{array}\right)$$
$|M|=-3a+12=0 \rightarrow \{a=4\}$

- Si $a \neq 4$:

$r(M)=r(M_a)=3=$ n^o de incógnitas $\rightarrow S.C.D.$ (Solución única)

- Si $a=4$:

$r(M)=r(M_a)=2<$ n^o de incógnitas $\rightarrow S.C.I.$ (Infinitas soluciones)
Apartado b:
El sistema será homogéneo:
$$\left\{\begin{array}{l} -x+2y-z=0 \\ x+y+2z=0 \\ 3x-3y+az=0 \end{array}\right., \text{ siendo:}$$
$$M=\left(\begin{array}{ccc} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & a \end{array}\right), M_a=\left(\begin{array}{cccc} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & a & 0 \end{array}\right)$$
Un sistema homogéneo siempre es compatible y tiene, al menos, la solución trivial $\{x=0, y=0, z=0\}$.

Cuando $|M|=0 \rightarrow r(M)=r(M_a)=2<$ n^o de incógnitas $\rightarrow S.C.I.$ (Infinitas soluciones)

- Si $a=4$:

$$\left\{\begin{array}{l} -x+2y-z=0 \\ x+y+2z=0 \\ 3x-3y+4z=0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{x=\frac{-5z}{3}, y=\frac{-z}{3}, z=z\right\}$$
- si $z=0 \rightarrow \{x=0, y=0, z=0\}$
- si $z=1 \rightarrow \left\{x=\frac{-5}{3}, y=\frac{-1}{3}, z=1\right\}$
- si .../...

Junio 03:

La matriz de coeficientes de un sistema es $\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 4a & 1 \end{array}\right)$ *y la de términos independientes* $\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2a \end{array}\right)$.

a) ¿Para qué valor o valores de a el sistema no tiene solución?

b) Para cierto valor de a un individuo encontró 2 soluciones del sistema. ¿Cuánto valía a? ¿tenía más soluciones el sistema?

c) Encuentra un valor de a para que el sistema tenga una única solución y, para dicho valor, resuélvelo.

Solución:

Se trata de analizar la compatibilidad del sistema en función del valor del parámetro a. Para ello escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$$M=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&a&a\\1&4a&1\end{pmatrix}\qquad M_a=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\1&a&a&1\\1&4a&1&2a\end{pmatrix}$$

Analizamos los valores críticos haciendo $|M|=0$

$$|M|=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&a&a\\1&4a&1\end{vmatrix}=-4a^2+6a-2=0\to\left\{a=\tfrac{1}{2}\right\},\{a=1\}$$

- Si $a\neq\frac{1}{2}$ y $a\neq 1$

$|M|\neq 0\to r(M)=r\left(M_a\right)=3\to S.C.D.$ (solución única)

- Si $a=\frac{1}{2}$

$$M=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&2&1\end{pmatrix}\qquad M_a=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\\1&2&1&1\end{pmatrix}$$

$r(M)=2$, puesto que es posible encontrar en la matriz M un menor complementario de orden 2 y distinto de cero; por ejemplo: $\begin{vmatrix}1&2\\1&\frac{1}{2}\end{vmatrix}$.

$r\left(M_a\right)=2$, puesto que no es posible encontrar en la matriz M_a un menor complementario de orden 3 y distinto de cero.

Por tanto, $S.C.I.$ (infinitas soluciones)

- Si $a=1$

$$M=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&4&1\end{pmatrix}\qquad M_a=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\1&1&1&1\\1&4&1&2\end{pmatrix}$$

$r(M)=2$, puesto que es posible encontrar en la matriz M un menor complementario de orden 2 y distinto de cero; por ejemplo: $\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}$.

$r\left(M_a\right)=3$, puesto que es posible encontrar en la matriz M_a un menor complementario de orden 3 y distinto de cero; por ejemplo: $\begin{vmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&4&2\end{vmatrix}$

Por tanto, $S.I.$ (no soluciones)

Apartado a:

Para que el sistema no tenga solución, ha de ser incompatible; por tanto $a = 1$.

Apartado b:

Para que el sistema admita dos soluciones, ha de admitir infinitas y ser compatible indeterminado; por tanto $a = \frac{1}{2}$.

Apartado c:

Para que el sistema tenga solución única ha de ser compatible determinado; por tanto $a \neq 1 \wedge a \neq \frac{1}{2}$.

Supongamos $a = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema será: $\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ x = 1 \\ x + z = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ x = 1, y = \frac{1}{2}, z = -1, \right\}$

Septiembre 03:

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}.$$

a) Sabiendo que $(AB - C) D = 2E$, plantea un sistema de 3 cuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) en función de a.

b) ¿Para algún valor de a el sistema tiene solución única?

c) Para $a = 0$ encuentra una solución del sistema con $z \neq 0$.

Solución:

Apartado a:

Efectuamos las operaciones indicadas para poder plantear el sistema:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

$$AB - C = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ 0 & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

$$(AB - C) D = \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ 0 & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z \\ y + z \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

$$2E = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 2a \end{pmatrix}$$

Por tanto, para que se cumpla $(AB - C) D = 2E$

$$\begin{pmatrix} y+z \\ y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 2a \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y+z=0 \\ y+z=2a \\ x+y+z=2a \end{array} \right.$$

Apartado b:

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2a \\ 1 & 1 & 1 & 2a \end{pmatrix}$$

Analizamos los valores críticos haciendo $|M| = 0$

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- Si $a \neq 0$

$r(M) = 2$, puesto que es posible encontrar en la matriz M un menor complementario de orden 2 y distinto de cero; por ejemplo: $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$r(M_a) = 3$, puesto que es posible encontrar en la matriz M_a un menor complementario de orden 3 y distinto de cero: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2a \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix} = 2a$

Como $r(M) \neq r(M_a) \rightarrow S.I.$ (No solución).

- Si $a = 0$

$r(M) = 2$, puesto que no varía.

$r(M_a) = 2$, puesto que no es posible encontrar un menor complementario de orden 3 y distinto de cero en $M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Como $r(M) = r(M_a) <$n^o de incógnitas $\rightarrow S.C.I.$ (Infinitas soluciones).

En ningún caso el sistema tiene solución única, puesto que para ningún valor de a resulta ser compatible determinado.

Apartado c:

Si $a = 0$, tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} y+z=0 \\ y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=-z \\ x+y=-z \end{array} \right. \rightarrow$$

$\rightarrow \{x = 0, y = -k, z = k\}$

Una posible solución con $z \neq 0$ sería: $\{x = 0, y = -7, z = 7\}$

Junio 04:

Un individuo realiza fotografías con una cámara digital. Sabe que cada fotografía de calidad normal ocupa siempre 0'20 megabytes de memoria. Cada *fotografía de calidad óptima ocupa siempre una cantidad A de megabytes, pero el individuo no la conoce. Esta semana ha llevado a revelar 24 fotografías que le han ocupado un total de 9'2 megabytes de memoria.*

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de A) donde las incógnitas sean el número de fotos de cada clase que ha realizado. Estudia la compatibilidad del sistema.

b) ¿Hay alguna cantidad de megabytes que es imposible que ocupe cada foto de calidad óptima?

c) La semana pasada también hizo 24 fotos y ocupó 9'2 megabytes de memoria total. ¿Es posible que el número de fotos de cada tipo fuera diferente al de esta semana?

Solución:

Apartado a:

Si llamamos x, y, al número de fotos realizadas en calidades normal y óptima, respectivamente, tendremos:

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ 0.2x + Ay = 9.2 \end{cases}$$

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.2 & A \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 24 \\ 0.2 & A & 9.2 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.2 & A \end{vmatrix} = A - 0.2; \qquad |M| = 0 \to A = 0.2$$

- Si $A \neq 0.2$

$r(M) = 2$, puesto que $|M| \neq 0$

$r(M_a) = 2$, puesto que es posible encontrar en la matriz M_a un menor complementario de orden 2 y distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 24 \\ 0.2 & 9.2 \end{vmatrix} = 4.4$

Como $r(M) = r(M_a) \to S.C.D.$

Resolvemos el sistema utilizando la regla de Cramer; para ello calculamos los valores de:

$$|M_x| = \begin{vmatrix} 24 & 1 \\ 9.2 & A \end{vmatrix} = 24A - 9.2; |M_y| = \begin{vmatrix} 1 & 24 \\ 0.2 & 9.2 \end{vmatrix} = 4.4$$

$$x = \frac{|M_x|}{|M|} = \frac{24A - 9.2}{A - 0.2} =; y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{4.4}{A - 0.2} =$$

- Si $A = 0.2$

$r(M) = 1$, puesto que $|M| \neq 0$

$r(M_a) = 2$, puesto que es posible encontrar en la matriz M_a un menor complementario de orden 2 y distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 24 \\ 0.2 & 9.2 \end{vmatrix} = 4.4$

Como $r(M) \neq r(M_a) \to S.I.$(no hay soluciones)

Apartado b)

Luego resultaría imposible que cada foto de calidad óptima ocupe 0'2 megabytes de memoria.

Apartado c:

Sí. El sistema presenta infinitas soluciones posibles; vienen dadas por todos aquellos valores de $A \neq 0$, que generen soluciones enteras para x, y.

Septiembre 04:

Sean las matrices:

$A = 2\begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & m \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 \\ 10x \end{pmatrix}; D = 10\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 3 & m \end{pmatrix}$

a) Calcula cada uno de los tres productos $AB; DE; EB$

b) Si $AB + C = D$, plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x, y) en función de m. ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? ¿es siempre única?

Solución:

Apartado a:

$$AB = 2\begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 5x + 2y \\ my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x + 4y \\ 2my \end{pmatrix}$$

$$DE = 10\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & m \end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix} 3 & m \\ 3m & m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 10m \\ 30m & 10m^2 \end{pmatrix}$$

$$EB = \begin{pmatrix} 3 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix} = (15 + my)$$

Apartado b:

$$AB+C = D \to \begin{pmatrix} 10x + 4y \\ 2my \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10x \end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 10x + 4y \\ 2my \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10m \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{cases} 10x + 4y = 10 \\ 2my + 10x = 10m \end{cases} \to \begin{cases} 10x + 4y = 10 \\ 10x + 2my = 10m \end{cases}$$

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 10 & 2m \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 10 \\ 10 & 2m & 10m \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 10 & 2m \end{vmatrix} = 20m - 40; \qquad |M| = 0 \to m = 2$$

- Si $m \neq 2$

$r(M) = 2$, puesto que $|M| \neq 0$

$r(M_a) = 2$, puesto que es posible encontrar en la matriz M_a un menor complementario de orden 2 y distinto de cero.

Como $r(M) = r(M_a) \to S.C.D.$(solución única)

- Si $m = 2$

$M = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 10 \\ 10 & 4 & 20 \end{pmatrix}$

$r(M) = 1$, puesto que $|M| \neq 0$

$r(M_a) = 2$, puesto que es posible encontrar en la matriz M_a un menor complementario de orden 2 y distinto de cero: $\begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} = 100$

Como $r(M) \neq r(M_a) \rightarrow S.I.$(no hay soluciones)

1.2 Problemas propuestos

B1-01:

Una persona disponía de 60.000 € y los repartió en tres fondos de inversión diferentes (A, B y C), obteniendo así 4.500 € de beneficios. Sabemos que en el fondo A invirtió el doble que en los fondos B y C juntos; sabemos también que el rendimiento de la inversión realizada en los fondos A, B y C fue del 5%, 10% y 20% respectivamente.

a) Plantear un sistema para determinar las cantidades invertidas en cada uno de los fondos.

b) Resolver el sistema anterior.

B1-02:

Parte de los huéspedes de un pequeño hotel se encuentra en el comedor; en el mismo momento otra parte se encuentra en la sala de estar y el resto en la biblioteca. Posteriormente, 4 se desplazan del comedor a la biblioteca, 1 de la sala de estar al comedor y 2 de la biblioteca a la sala de estar. Ahora, ha quedado el mismo número de personas en cada una de las tres estancias.

a) Plantear un sistema para determinar cuántas personas se encontraban inicialmente en cada habitación.

b) Resolverlo para determinar cuántos huéspedes se alojan en el hotel.

B1-03:

Una tienda de música ha obtenido unos ingresos de 12768 € al vender 600 discos compactos de tres grupos musicales. Los discos se vendían a 24 €; sin embargo, los del segundo y tercer grupo, al ser menos recientes, se vendieron con descuentos del 30% y del 40% respectivamente. Sabemos que el número de discos vendidos con descuento fué la mitad que el número de discos que se vendieron a su precio original.

a) Plantear un sistema de ecuaciones para determinar cuantos discos de cada grupo se vendieron.

b) Resolverlo.

B1-04:

En un país A, existen tres aeropuertos internacionales (A_1, A_2 y A_3); en otro país B existen 4 (B_1, B_2, B_3 y B_4); y en un tercer país C existen dos (C_1 y C_2).

Desde el aeropuerto A_1 salen vuelos con destino a B_1, B_2, C_1 y dos vuelos con destino a B_3.

Desde el aeropuerto A_2 salen vuelos con destino a B_2, B_3 y dos vuelos con destino a B_4.

Desde el aeropuerto A_3 sólo sale un vuelo con destino a B_3.

Desde cada aeropuerto del país B, salen dos vuelos a cada uno de los aeropuertos del país C.

Se pide, expresar mediante matrices:

a) los vuelos del país A al B.

b) los vuelos del país B al C.

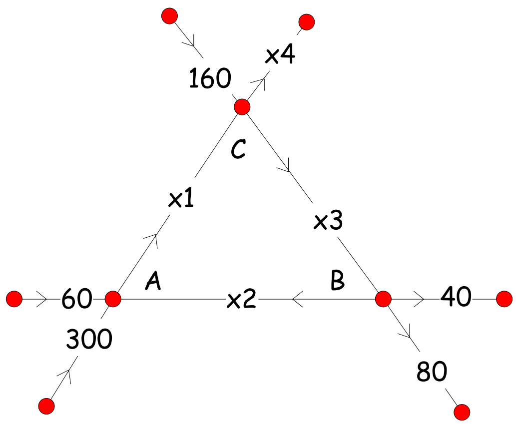
c) los vuelos del país A al C, necesiten o no efectuar transbordo en el país B.

B1-05:

El cruce de carreteras esquematizado en el dibujo indica el número de coches/hora que transita por cada tramo de carretera, de dirección y sentido único.

a) Si se suspende el tráfico en el tramo AB por obras, ¿ qué número de vehículos han de transitar por los tramos AC y BC?

b) ¿Podría cerrarse al tráfico el tramo AC? ¿Y el tramo CB?. ¿Por qué?



B1-06:

Una empresa ha vendido 42000 artículos de papelería, bolígrafos, gomas y rotuladores, al precio de 1.2, 1.5 y 2 € respectivamente. El total de los ingresos producidos por esas ventas asciende a 64000 €. Se sabe, además, que el número de bolígrafos que se ha vendido es el 40% del número total del resto de artículos vendidos.

a) Plantear un sistema para determinar el número de cada tipo de artículos vendidos.

b) Resolverlo.

B1-07:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que: $A^T = A^{-1}$

b) Calcula el valor de $\left(A \cdot A^T\right)^{2003}$

B1-08:

Discute el siguiente sistema en función de los valores a. $\left\{ \begin{array}{l} 2x - y + z = 2 \\ ax - y + z = 1 \\ x + ay + z = 0 \end{array} \right.$

B1-09:

Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hallar las matrices B que conmuten con A; es decir: $A \cdot B = B \cdot A$

B1-10:

Sea el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y un parámetro n*:*

$$\left\{ \begin{array}{r} n^2 x - ny = 1 \\ n^2 (2n-1)\, x - y = 4n \end{array} \right.$$

a) exprésalo en forma matricial

b) discútelo según los valores del parámetro n*.*

c) determina su solución para $n = 2$*.*

B1-11:

Dadas las siguientes ecuaciones $\left\{ \begin{array}{c} 6x - 9y + 2z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \end{array} \right.$ *, se pide:*

a) añade una ecuación para que el sistema resulte ser incompatible.

b) añade una ecuación para que el sistema resulte ser compatible determinado.

Justifica las respuestas.

B1-12:

Una librería ha vendido 3900 libros de matemáticas, correspondientes a tres editoriales diferentes, A, B, y C. Sabemos que de la editorial B se han vendido el doble de ejemplares que de la editorial A. Sabemos, también, que la razón entre el número de ejemplares vendidos de las editoriales B y C es igual a $\frac{2}{3}$*.*

Plantear un sistema para determinar el número de libros vendidos de cada editorial. Resolverlo.

B1-13:

Una editorial va a lanzar al mercado tres libros de bolsillo L_1*,* L_2 *y* L_3*. El importe total de la edición es de 18750 €. Los costes, en euros, por unidad, son 7, 5 y 6, respectivamente.*

Se sabe que el número de ejemplares de L_3 *es igual a los dos séptimos de los del tipo* L_2 *y que, si al triple del número de ejemplares de* L_1 *se le suma el número de ejemplares de* L_3*, se obtiene el doble de ejemplares de* L_2*.*

a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar cuántos libros de *cada tipo se han editado.*

b) Resuélve dicho sistema.

B1-14:

Sean las matrices: $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar: C^{-1} *y* D^{-1}

b) Calcular la matriz inversa de $C \cdot D$

c) Comprobar que $(C \cdot D)^{-1} = D^{-1} \cdot C^{-1}$

B1-15:

Un autobús urbano transporta en hora punta 90 viajeros de tres tipos: viajeros que pagan el billete entero, que vale 1 €; estudiantes que tienen un 25% de descuento al presentar el carnet; jubilados de la localidad que únicamente pagan el 50% del precio del billete. La recaudación del autobús en ese viaje fue de 64 €. Calcula el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de jubilados era el mismo que el número del resto de viajeros.

B1-16:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calcula, si existen, las siguientes matrices:

a) Una matriz X *tal que* $X \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Una matriz Y *tal que* $A \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

B1-17:

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\left\{ \begin{array}{r} ax - y = 2 - a \\ 2x - (a+1)\,y = 2 \end{array} \right.$

a) Exprésalo en forma matricial

b) Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius.

b) ¿Para qué valores de a el sistema resulta ser compatible y determinado? ¿Para qué valores es compatible e indeterminado? ¿Para qué valores es incompatible?

B1-18:

Determina las matrices A y B que son soluciones del siguiente sistema matricial:

3A-2B= $\begin{pmatrix} -8 & 7 & -1 \\ 9 & -18 & 1 \\ 14 & 9 & -14 \end{pmatrix}$ *2A+B=* $\begin{pmatrix} 11 & 7 & 4 \\ -8 & 2 & 17 \\ 14 & -1 & -14 \end{pmatrix}$

B1-19:

Discute y resuelve, cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x - 4z = 0 \\ x - y - az = 0 \\ -x - ay - z = 0 \end{array} \right.$$

B1-20:

Sea el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x-y+z=6 \\ -x-y+(a-4)\,z=7 \\ x+y+2z=11 \end{cases}$

a) Exprésalo en forma matricial.

b) Discútelo según los valores del parámetro real a

c) Resuélvelo para $a=3$

B1-21:

Una ebanistería ha fabricado tres tipos de muebles: banquetas, sillas y mesas. Para la fabricación de estos muebles, necesitó utilizar determinadas unidades de maderas de pino, haya y castaño, tal y como se indica en la siguiente tabla:

	Pino	*Haya*	*Castaño*
Banqueta	*1*	*1*	*2*
Silla	*1*	*1*	*3*
Mesa	*1*	*2*	*5*

La ebanistería tenía en existencia 400 unidades de madera de pino, 600 unidades de haya y 1500 unidades de castaño; si utilizó todas sus existencias, ¿cuántas banquetas, sillas y mesas fabricó?

B1-22:

Se considera el sistema: $\begin{cases} x-9y+5z=33 \\ x+3y-z=-9 \\ x-y+z=5 \end{cases}$

a) Resuélvelo y clasifícalo en función del número de soluciones

b) Determinar si es posible, o no, eliminar una de las ecuaciones, de forma que el sistema que resulta sea equivalente al anterior. Razona la respuesta.

B1-23:

Sean las matrices:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Resuelve la ecuación: $XAB-XC=2C$

B1-24:

En un jardín hay 22 árboles entre naranjos, limoneros y membrillos. El doble del número de limoneros más el triple del número de membrillos, es igual al doble del número de naranjos.

a) Plantea un sistema para determinar cuántos árboles de cada tipo hay. ¿Es posible resolverlo?

b) Si, además, sabemos que el número de naranjos es el doble del de limoneros, ¿cuántos árboles hay de cada tipo?

B1-25:

Una empresa tenía, en el año 2001, cierto número de empleados, unos hombres y otros mujeres. En el año 2002 aumentaron en 5 los trabajadores de la empresa y en 6 el número de trabajadoras, quedando así doble número de mujeres que de hombres. En el año 2003 aumentaron en 2 las trabajadoras y se redujo en 4 el número de trabajadores, resultando quedar el triple *de mujeres que de hombres. Plantea un sistema para determinar el número de hombres y mujeres que trabajan en dicha empresa en el año 2003. Resuélvelo si es posible.*

2

Programación lineal

2.1 Problemas PAU

Junio 94:

Un fabricante de coches lanza una oferta especial en dos de sus modelos, ofreciendo el modelo A a un precio de 1,5 millones de ptas. y el modelo B a 2 millones de ptas. La oferta está limitada por las existencias, que son 20 coches del modelo A y 10 coches del modelo B, queriendo vender al menos tantas unidades del modelo A como del modelo B. Por otra parte, para cubrir los gastos de esta campaña, los ingresos obtenidos con ella deben ser, al menos, de 6 millones.

a) ¿Cuántas unidades de cada modelo se podrán vender?. Plantea el problema y representa gráficamente su conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántos coches deberá vender de cada modelo para maximizar sus ingresos? ¿Cuál es su importe?

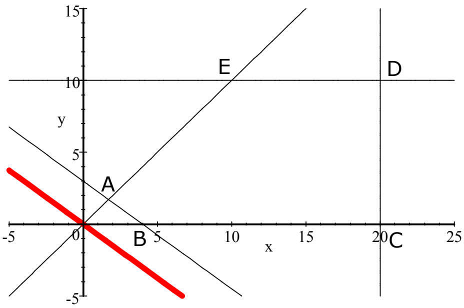
Solución:

Apartado a:

Llamamos: $\left| \begin{array}{l} x = n^o \text{ de coches a vender del modelo A} \\ y = n^o \text{ de coches a vender del modelo B} \end{array} \right.$

Función a maximizar y restricciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x,y) = 1.5x + 2y \\ x \leq 20 \\ y \leq 10 \\ x \geq y \\ 1.5x + 2y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$



La función a maximizar determina el vector dirección (rojo).

El conjunto de restricciones determina la región factible. En este caso se trata de un polígono convexo de 5 lados.

Calculamos sus vértices, mediante la intersección de las dos rectas que determinan cada uno:

· Vértice A: $\left\{ \begin{array}{l} x = y \\ 1.5x + 2y = 6 \end{array} \right. \rightarrow \{x = \frac{12}{7}, y = \frac{12}{7}\}$

· Vértice B: $\begin{cases} 1.5x + 2y = 6 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \{x = 4, y = 0\}$

· Vértice C: $\begin{cases} y = 0 \\ x = 20 \end{cases} \rightarrow \{x = 20, y = 0\}$

· Vértice D: $\begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases} \rightarrow \{x = 20, y = 10\}$

· Vértice E: $\begin{cases} y = 10 \\ x = y \end{cases} \rightarrow \{x = 10, y = 10\}$

El conjunto de soluciones posibles será el conjunto de soluciones enteras que se encuentren en el interior o periferia del polígono:

Apartado b:

Analizamos el valor que adopta la función a maximizar en cada uno de los vértices del polígono:

$F(x, y) = 1.5x + 2y$

· En $A(\frac{12}{7}, \frac{12}{7})$: $F(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}) = \frac{18}{7} + \frac{24}{7} = 6$
· En $B(4, 0)$: $F(4, 0) = 6 + 0 = 6$
· En $C(20, 0)$: $F(20, 0) = 30 + 0 = 30$
· En $D(20, 10)$: $F(20, 10) = 30 + 20 = 50$
· En $E(10, 10)$: $F(10, 10) = 15 + 20 = 35$

La función presenta un máximo en el vértice $D(20, 10)$, cuyo valor es 50.

Por tanto, deberá vender 20 coches modelo A y 10 coches modelo B para maximizar sus ingresos que, de esta manera, ascenderán a 50 millones de pesetas.

Junio 95:

Una fábrica de coches va a lanzar al mercado dos nuevos modelos (uno básico y otro de lujo). El coste de fabricación del modelo básico es de 1 millón de ptas. y el del modelo de lujo 1,5 millones de ptas., disponiendo para esta operación de lanzamiento de 60 millones de ptas. Para evitar riesgos, de momento se cree conveniente lanzar al menos tantos coches del modelo básico como del modelo de lujo y, en todo caso, no fabricar más de 45 coches del básico.

a) ¿Cuántos coches puede fabricar de cada modelo? Plantear el problema y representar gráficamente su conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántos le interesa si su objetivo es maximizar el número total de coches fabricados? ¿Agota el presupuesto disponible?

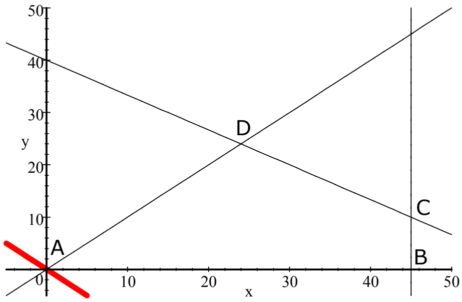
Solución:

Apartado a:

Llamamos: $\left| \begin{array}{l} x = n^o \text{ de coches modelo Básico} \\ y = n^o \text{ de coches modelo Lujo} \end{array} \right.$

Función a maximizar y restricciones:

$$\begin{cases} F(x,y) = x + y \\ x + 1.5y \leq 60 \\ x \geq y \\ x \leq 45 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



La función a maximizar determina el vector dirección (rojo).

El conjunto de restricciones determina la región factible. En este caso se trata de un polígono convexo de 4 lados.

Calculamos sus vértices, mediante la intersección de las dos rectas que determinan cada uno:

· Vértice A: $\begin{cases} x = y \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \{x = 0, y = 0\}$

· Vértice B: $\begin{cases} y = 0 \\ x = 45 \end{cases} \rightarrow \{x = 45, y = 0\}$

· Vértice C: $\begin{cases} x = 45 \\ x + 1.5y = 60 \end{cases} \rightarrow \{x = 45, y = 10\}$

· Vértice D: $\begin{cases} x + 1.5y = 60 \\ x = y \end{cases} \rightarrow \{x = 24, y = 24\}$

El conjunto de soluciones posibles será el conjunto de soluciones enteras que se encuentren en el interior o periferia del polígono:

Apartado b:

Analizamos el valor que adopta la función a maximizar en cada uno de los vértices del polígono:

$F(x,y) = x + y$

· En $A(0,0)$: $F(0,0) = 0 + 0 = 0$

· En $B(45,0)$: $F(45,0) = 45 + 0 = 45$

· En $C(45,10)$: $F(45,10) = 45 + 10 = 55$

· En $D(24,24)$: $F(24,24) = 24 + 24 = 48$

La función presenta un máximo en el vértice $C(45,10)$, cuyo valor es 55.

Deberá fabricar 45 coches del modelo Básico y 10 coches del modelo de Lujo para maximizar el número de coches fabricados.

En estas condiciones, gastará $x + 1.5y$ millones de pesetas en su fabricación: $45 + 1.5 \cdot 10 = 60$ millones.

Por tanto, SI agota el presupuesto disponible.

Septiembre 95:

Un agricultor estima que el cuidado de cada m^2 plantado de lechugas requiere semanalmente 45 minutos, mientras que el de repollo exige 50.

Dispone de una tierra de 40 m^2 de extensión que puede dedicar total o parcialmente al cuidado de ambas verduras, queriendo plantar al menos 3 m^2 más de repollo que de lechuga. El m^2 de lechuga le reporta un beneficio de 500 ptas, mientras que el de repollo 650 ptas, planificando obtener en conjunto al menos 10.000 ptas de beneficio.

a) ¿Qué extensión de terreno puede plantar con cada verdura? Plantea el problema y representa gráficamente su conjunto de soluciones.

b) ¿Cuánto le interesa plantar de cada una si su objetivo es que el tiempo semanal dedicado a su cultivo sea mínimo?

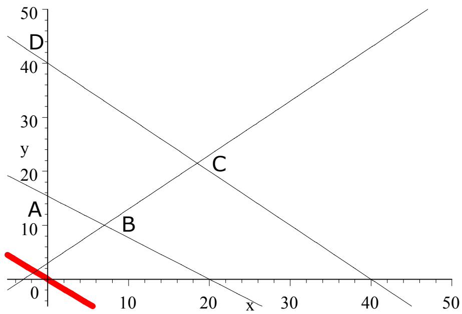
Solución:

Apartado a:

Llamamos: $\left| \begin{array}{l} x = m^2 \text{ de lechugas} \\ y = m^2 \text{ de repollos} \end{array} \right.$

Función a minimizar y restricciones:

$$\begin{cases} F(x,y) = 45x + 50y \\ x + y \leq 40 \\ y \geq x + 3 \\ 500x + 650y \geq 10000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



La función a minimizar determina el vector dirección (rojo).

El conjunto de restricciones determina la región factible. En este caso se trata de un polígono convexo de 4 lados.

Calculamos sus vértices, mediante la intersección de las dos rectas que determinan cada uno:

· Vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ 500x + 650y = 10000 \end{cases} \rightarrow \left\{x = 0, y = \frac{200}{13}\right\}$

· Vértice B: $\begin{cases} 500x + 650y = 10000 \\ y = x + 3 \end{cases} \rightarrow \{x = 7, y = 10\}$

· Vértice C: $\begin{cases} y = x + 3 \\ x + y = 40 \end{cases} \rightarrow \left\{x = \frac{37}{2}, y = \frac{43}{2}\right\}$

· Vértice D: $\begin{cases} x + y = 40 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \{x = 0, y = 40\}$

El conjunto de soluciones posibles será el conjunto de soluciones que se encuentren en el interior o periferia del polígono:

Apartado b:

Analizamos el valor que adopta la función a minimizar en cada uno de los vértices del polígono:

$F(x,y) = 45x + 50y$
· En $A(0, \frac{200}{13})$: $F(0, \frac{200}{13}) = \frac{10\,000}{13} = 769.23$
· En $B(7, 10)$: $F(7, 10) = 815$
· En $C(\frac{37}{2}, \frac{43}{2})$: $F(\frac{37}{2}, \frac{43}{2}) = \frac{3815}{2} = 1907.5$
· En $D(0, 40)$: $F(0, 40) = 2000$

La función presenta un mínimo en el vértice $A(0, \frac{200}{13})$, con valor 769.23

Por tanto, el agricultor no deberá de plantar lechugas y plantará, en cambio, $\frac{200}{13}m^2$ de repollos. En estas condiciones, el tiempo dedicado a su cultivo será mínimo y ascenderá a 769.23 minutos.

Junio 96:

Cierta persona dispone de 10 millones de pesetas como máximo para repartir entre dos tipos de inversión (A y B). En la opción A desea invertir entre 2 y 7 millones de ptas. Además, quiere destinar a esa opción tanta cantidad de dinero como a la B.

a) ¿Qué cantidades puede invertir en cada una de las opciones? Plantear el problema y representar gráficamente sus soluciones.

b) Sabiendo que el rendimiento de la inversión será del 9% en la opción A y del 12% en la B, ¿qué cantidad debe invertir en cada una para optimizar el rendimiento global? ¿ A cuánto ascenderá?

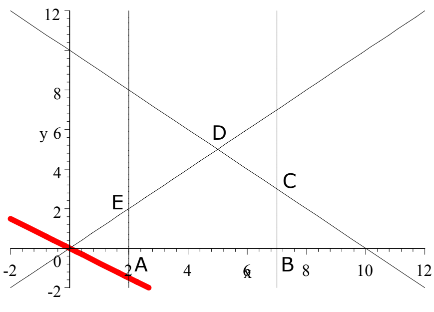
Solución:

Apartado a:

Llamamos: $\left| \begin{array}{l} x = \text{millones a invertir en A} \\ y = \text{millones a invertir en B} \end{array} \right.$

Función a maximizar y restricciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x,y) = 0.09x + 0.12y \\ x + y \leq 10 \\ x \geq 2 \\ x \leq 7 \\ x \geq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$



La función a maximizar determina el vector dirección (rojo).

El conjunto de restricciones determina la región factible. En este caso se trata de un polígono convexo de 5 lados.

Calculamos sus vértices, mediante la intersección de las dos rectas que determinan cada uno:

· Vértice A: $\left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 0 \end{array} \right. \rightarrow \{x = 2, y = 0\}$

$\cdot$ Vértice B: $\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x=7 \end{array}\right. \rightarrow \{x=7, y=0\}$

$\cdot$ Vértice C: $\left\{\begin{array}{l} x=7 \\ x+y=10 \end{array}\right. \rightarrow \{x=7, y=3\}$

$\cdot$ Vértice D: $\left\{\begin{array}{l} x+y=10 \\ x=y \end{array}\right. \rightarrow \{x=5, y=5\}$

$\cdot$ Vértice E: $\left\{\begin{array}{l} x=y \\ x=2 \end{array}\right. \rightarrow \{x=2, y=2\}$

El conjunto de soluciones posibles será el conjunto de soluciones enteras que se encuentren en el interior o periferia del polígono:

Apartado b:

Analizamos el valor que adopta la función a maximizar en cada uno de los vértices del polígono:

$F(x,y) = 0.09x + 0.12y$

$\cdot$ En $A(2,0)$: $F(2,0) = 0.18$
$\cdot$ En $B(7,0)$: $F(7,0) = 0.63$
$\cdot$ En $C(7,3)$: $F(7,3) = 0.99$
$\cdot$ En $D(5,5)$: $F(5,5) = 1.05$
$\cdot$ En $E(2,2)$: $F(2,2) = 0.42$

La función presenta un máximo en el vértice $D(5,5)$, cuyo valor es 1.05

Por tanto, deberá invertir 5 millones en cada tipo de inversión para optimizar el rendimiento global. De esta manera, el rendimiento ascenderá a 1.050.000 pesetas.

Nota: entendemos la frase ..."quiere destinar a esa opción tanta cantidad de dinero como a la B" como "quiere destinar a esa opción tanta cantidad de dinero, al menos, como a la B". Si no fuera así, bastaría analizar los vértices $D(5,5)$ y $E(2,2)$ que se encuentran sobre la recta $x=y$.

Junio 96 (R):

Una empresa de autobuses dispone de un vehículo para cubrir dos líneas (A y B) que puede trabajar en ellas, a lo sumo, 300 horas mensualmente. Un servicio en la línea A lleva 2 horas, mientras que en la B supone 5 horas. Por otra parte, en la línea B se deben cubrir al menos 15 servicios mensualmente y, además, el autobús no puede prestar globalmente más de 90 servicios cada mes entre ambas líneas.

a) ¿Cuántos servicios puede prestar el vehículo al mes en cada una de las líneas? Plantear el problema y representar gráficamente su conjunto de soluciones.

b) Sabiendo que la empresa obtiene un beneficio con cada servicio prestado de 10.000 y 30.000 ptas. en las líneas A y B respectivamente, ¿cuántos servicios le convendrá realizar en cada una para maximizar el beneficio total? ¿Cuál será su importe?

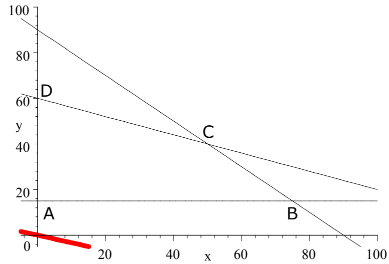
Solución:

Apartado a:

Llamamos: $\left| \begin{array}{l} x = n^o \text{ de servicios línea A} \\ y = n^o \text{ de servicios línea B} \end{array} \right.$

Función a maximizar y restricciones:

$$\begin{cases} F(x,y) = 10000x + 30000y \\ 2x + 5y \leq 300 \\ y \geq 15 \\ x + y \leq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



La función a maximizar determina el vector dirección (rojo).

El conjunto de restricciones determina la región factible. En este caso se trata de un polígono convexo de 4 lados.

Calculamos sus vértices, mediante la intersección de las dos rectas que determinan cada uno:

· Vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 15 \end{cases} \rightarrow \{x = 0, y = 15\}$

· Vértice B: $\begin{cases} y = 15 \\ x + y = 90 \end{cases} \rightarrow \{x = 75, y = 15\}$

· Vértice C: $\begin{cases} x + y = 90 \\ 2x + 5y = 300 \end{cases} \rightarrow \{x = 50, y = 40\}$

· Vértice D: $\begin{cases} 2x + 5y = 300 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \{x = 0, y = 60\}$

El conjunto de soluciones posibles será el conjunto de soluciones enteras que se encuentren en el interior o periferia del polígono:

Apartado b:

Analizamos el valor que adopta la función a maximizar en cada uno de los vértices del polígono:

$F(x,y) = 10000x + 30000y$

· En $A(0,15)$: $F(0,15) = 450\,000$

· En $B(75,15)$: $F(75,15) = 1200\,000$

· En $C(50,40)$: $F(50,40) = 1700\,000$

· En $D(0,60)$: $F(0,60) = 1800\,000$

La función presenta un máximo en el vértice $D(0,60)$, cuyo valor es 1.800.000

Por tanto, para maximizar el beneficio total, a la empresa le conviene no efectuar ningún servicio en la línea A y efectuar 60 servicios en la línea B. De esta manera, el beneficio ascenderá a 1.800.000 pesetas.

Septiembre 96:

Una agencia de viajes realiza a 20 clientes las siguientes ofertas: un viaje a la ciudad A por 50.000 ptas u otro a la ciudad B por 75.000 ptas (cada *cliente podrá elegir, si le interesa, sólo una de las dos ofertas). Por razones de programación, la agencia necesita reunir al menos 8 y no más de 12 clientes interesados en el viaje a la ciudad B.*

a) ¿Cuántos viajes podrá programar la agencia a cada ciudad? Plantear el problema y representar gráficamente su conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántos clientes deberán estar interesados en ir a cada sitio para que la agencia maximice sus ingresos?; ¿a cuánto ascenderán éstos?.

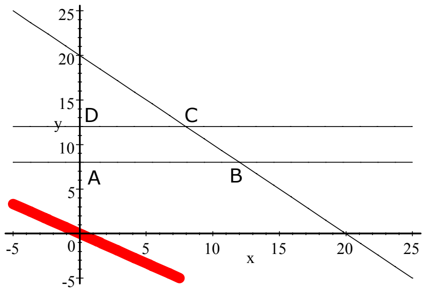
Solución:

Apartado a:

Llamamos: $\left| \begin{array}{l} x = n^o \text{ de viajes a la ciudad A} \\ y = n^o \text{ de viajes a la ciudad B} \end{array} \right.$

Función a maximizar y restricciones:

$$\begin{cases} F(x,y) = 50000x + 75000y \\ x + y \leq 20 \\ y \geq 8 \\ y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



La función a maximizar determina el vector dirección (rojo).

El conjunto de restricciones determina la región factible. En este caso se trata de un polígono convexo de 4 lados.

Calculamos sus vértices, mediante la intersección de las dos rectas que determinan cada uno:

· Vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 8 \end{cases} \rightarrow \{x = 0, y = 8\}$

· Vértice B: $\begin{cases} y = 8 \\ x + y = 20 \end{cases} \rightarrow \{x = 12, y = 8\}$

· Vértice C: $\begin{cases} x + y = 20 \\ y = 12 \end{cases} \rightarrow \{x = 8, y = 12\}$

· Vértice D: $\begin{cases} y = 12 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \{x = 0, y = 12\}$

El conjunto de soluciones posibles será el conjunto de soluciones enteras que se encuentren en el interior o periferia del polígono:

Apartado b:

Analizamos el valor que adopta la función a minimizar en cada uno de los vértices del polígono:

$F(x,y) = 50000x + 75000y$

· En $A(0,8)$: $F(0,8) = 600\,000$
· En $B(12,8)$: $F(12,8) = 1200\,000$
· En $C(8,12)$: $F(8,12) = 1300\,000$
· En $D(0,12)$: $F(0,12) = 900\,000$

La función presenta un máximo en el vértice $C(8,12)$, cuyo valor es 1.300.000.

Por tanto, la agencia debería de conseguir 8 clientes para el viaje A y 12 clientes para el viaje B. En estas condiciones, los ingresos ascenderían a: 1.300.000 ptas.

Junio 97:

Una casa discográfica va a promocionar durante el próximo mes el último disco grabado por dos de los grupos más afamados bajo su sello. El precio de lanzamiento es de 1.750 y 1.800 ptas., respectivamente, siendo editadas 1500 copias del disco más caro. Para cubrir los gastos de la campaña debe vender en total 500 discos o más y, por razones de imagen, le conviene vender al menos tantas copias del disco más caro como del más barato.

a) ¿Cuántas copias de cada disco puede vender? Plantear el problema y representar gráficamente su conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántas copias deberá vender de cada uno para maximizar sus ingresos? ¿Cuál será su importe?

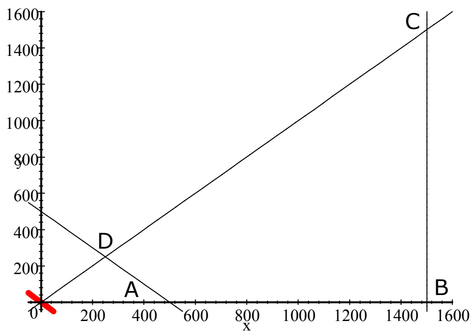
Solución:

Apartado a:

Llamamos: $x = n^o$ discos caros (1800 ptas.)
$y = n^o$ discos baratos (1750 ptas.)

Función a maximizar y restricciones:

$$\begin{cases} F(x,y) = 1800x + 1750y \\ x \leq 1500 \\ x + y \geq 500 \\ x \geq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



La función a maximizar determina el vector dirección (rojo).

El conjunto de restricciones determina la región factible. En este caso se trata de un polígono convexo de 4 lados.

Calculamos sus vértices, mediante la intersección de las dos rectas que determinan cada uno:

· Vértice A: $\begin{cases} x + y = 500 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \{x = 500, y = 0\}$

· Vértice B: $\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x=1500 \end{array}\right. \rightarrow \{x=1500, y=0\}$

· Vértice C: $\left\{\begin{array}{l} x=1500 \\ x=y \end{array}\right. \rightarrow \{x=1500, y=1500\}$

· Vértice D: $\left\{\begin{array}{l} x=y \\ x+y=500 \end{array}\right. \rightarrow \{x=250, y=250\}$

El conjunto de soluciones posibles será el conjunto de soluciones enteras que se encuentren en el interior o periferia del polígono:

Apartado b:

Analizamos el valor que adopta la función a maximizar en cada uno de los vértices del polígono:

$F(x,y) = 1800x + 1750y$

· En $A(500,0)$: $F(500,0) = 900\,000$
· En $B(1500,0)$: $F(1500,0) = 2700\,000$
· En $C(1500,1500)$: $F(1500,1500) = 5325\,000$
· En $D(250,250)$: $F(250,250) = 887\,500$

La función presenta un máximo en el vértice $C(1500,1500)$, cuyo valor es 5.325.000

Por tanto, para maximizar sus ingresos, a la casa discográfica le conviene vender 1500 discos de cada uno de los dos grupos. De esta manera, el importe de dichos ingresos ascenderá a 5.325.000 pesetas.

Septiembre 97:

En una granja dedicada a la cría de cerdos, la dieta alimenticia de los animales consiste en dos tipos de pienso, cuyo precio (ptas/kg.) es de 100 para el pienso A y de 150 para el pienso B. Un animal debe consumir diariamente al menos 2 kg. de pienso. Además, el coste de la dieta no puede superar las 300 ptas. por día.

a) ¿Qué cantidades de cada tipo pueden ser utilizadas para componer la dieta? Plantear el problema y representar gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si se desea que la dieta resulte lo más barata posible, ¿cuáles serán las cantidades adecuadas? ¿qué coste tiene esa dieta?

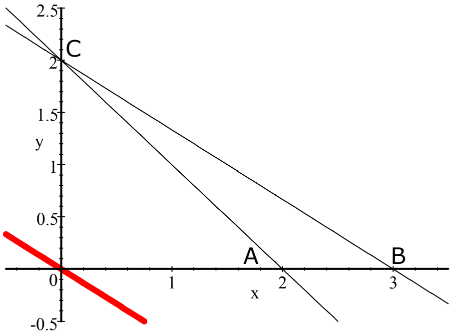
Solución:

Apartado a:

Llamamos: $\left| \begin{array}{l} x = kg. \text{ de pienso A} \\ y = kg. \text{ de pienso B} \end{array}\right.$

Función a minimizar y restricciones:

$$\begin{cases} F(x,y) = 100x + 150y \\ x + y \geq 2 \\ 100x + 150y \leq 300 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



La función a minimizar determina el vector dirección (rojo).

El conjunto de restricciones determina la región factible. En este caso se trata de un polígono convexo de 3 lados.

Calculamos sus vértices, mediante la intersección de las dos rectas que determinan cada uno:

· Vértice A: $\begin{cases} x + y = 2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \{x = 2, y = 0\}$

· Vértice B: $\begin{cases} y = 0 \\ 100x + 150y = 300 \end{cases} \rightarrow \{x = 3, y = 0\}$

· Vértice C: $\begin{cases} 100x + 150y = 300 \\ x + y = 2 \end{cases} \rightarrow \{x = 0, y = 2\}$

El conjunto de soluciones posibles será el conjunto de soluciones que se encuentren en el interior o periferia del polígono:

Apartado b:

Analizamos el valor que adopta la función a minimizar en cada uno de los vértices del polígono:

$F(x,y) = 100x + 150y$

· En $A(2,0)$: $F(2,0) = 200$

· En $B(3,0)$: $F(3,0) = 300$

· En $C(0,2)$: $F(0,2) = 300$

La función presenta un mínimo en el vértice $A(2,0)$, cuyo valor es 200.

Por tanto, para minimizar el coste de la dieta, conviene utilizar 2 kg. del pienso A y 0 kg. del pienso B. El coste de esta dieta diaria es de 200 pesetas.

Junio 98:

Una confitería es famosa por sus dos especialidades en tartas: la tarta Imperial y la tarta de Lima. La tarta Imperial requiere, para su elaboración, medio kg. de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 1.200 ptas. La tarta de Lima necesita 1 kg. de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 1.500 ptas. Debido a una mala previsión, se encuentran con la *imposibilidad de realizar pedidos de huevos y azúcar, y elaborados yá todos los demás productos que ofertan, les quedan en el almacén 10 kg. de azúcar y 120 huevos para la preparación de las citadas tartas.*

a) ¿Qué combinaciones de especialidades podrían hacerse? Plantear el problema y representar gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántas unidades de cada especialidad han de producirse para obtener el mayor ingreso por ventas? ¿A cuánto asciende dicho ingreso?

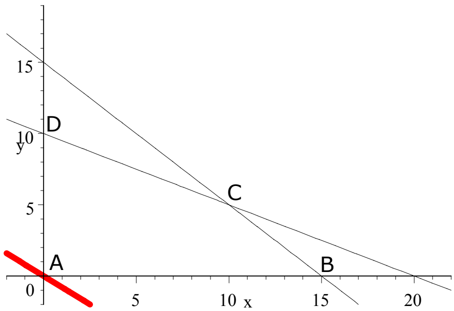
Solución:

Apartado a:

Llamamos: $\left| \begin{array}{l} x = n^o \text{ de tartas Imperial} \\ y = n^o \text{ de tartas de Lima} \end{array} \right.$

Función a maximizar y restricciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x,y) = 1200x + 1500y \\ 0.5x + y \leq 10 \\ 8x + 8y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F(x,y) = 1200x + 1500y \\ x + 2y \leq 20 \\ x + y \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$



La función a maximizar determina el vector dirección (rojo).

El conjunto de restricciones determina la región factible. En este caso se trata de un polígono convexo de 4 lados.

Calculamos sus vértices, mediante la intersección de las dos rectas que determinan cada uno:

· Vértice A: $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \rightarrow \{x = 0, y = 0\}$

· Vértice B: $\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x + y = 15 \end{array} \right. \rightarrow \{x = 15, y = 0\}$

· Vértice C: $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 15 \\ x + 2y = 20 \end{array} \right. \rightarrow \{x = 10, y = 5\}$

· Vértice D: $\left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 20 \\ x = 0 \end{array} \right. \rightarrow \{x = 0, y = 10\}$

El conjunto de soluciones posibles será el conjunto de soluciones enteras que se encuentren en el interior o periferia del polígono:

Apartado b:

Analizamos el valor que adopta la función a maximizar en cada uno de los vértices del polígono:

$F(x,y) = 1200x + 1500y$

· En $A(0,0)$: $F(0,0) = 0$

· En $B(15,0)$: $F(15,0) = 18\,000$

· En $C(10,5)$: $F(10,5) = 19\,500$

· En $D(0,10)$: $F(0,10) = 15\,000$

La función presenta un máximo en el vértice $C(10,5)$, cuyo valor es 19.500.

Por tanto, la confitería deberá elaborar 10 tartas Imperial y 5 tartas de Lima para obtener el mayor ingreso posible. De esta manera, las ventas ascenderán a 15.500 pesetas.

Septiembre 98:

Los responsables de un videoclub han de realizar el pedido de películas de estreno y novedades a sus proveedores. El coste de cada película de estreno es de 760 ptas., y el de cada novedad 370. Se desea un coste total que no supere las 94.500 ptas. Por otra parte, el provedor les exige que los estrenos sean, al menos, la mitad que las novedades, y que las novedades más la mitad de los estrenos no sea inferior a las 100 unidades.

a) ¿De cuántas unidades de cada tipo puede consistir el pedido? Plantear el problema y representar gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si se desea que el total de unidades pedidas sea mínimo, ¿de cuántas unidades de cada tipo ha de constar el pedido? ¿Cuál es entoces el coste del pedido?

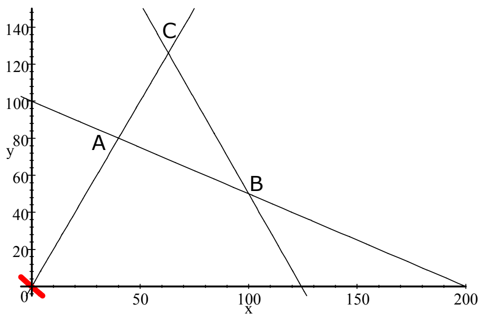
Solución:

Apartado a:

Llamamos: $\left| \begin{array}{l} x = n^o \text{ de estrenos} \\ y = n^o \text{ de novedades} \end{array} \right.$

Función a maximizar y restricciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x,y) = x + y \\ 760x + 370y \leq 94500 \\ x \geq \frac{y}{2} \\ y + \frac{x}{2} \geq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$



La función a minimizar determina el vector dirección (rojo).

El conjunto de restricciones determina la región factible. En este caso se trata de un polígono convexo de 3 lados.

Calculamos sus vértices, mediante la intersección de las dos rectas que determinan cada uno:

· Vértice A: $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{y}{2} \\ y + \frac{x}{2} = 100 \end{array}\right. \rightarrow \{x = 40, y = 80\}$

· Vértice B: $\left\{\begin{array}{l} y + \frac{x}{2} = 100 \\ 760x + 370y = 94500 \end{array}\right. \rightarrow \{x = 100, y = 50\}$

· Vértice C: $\left\{\begin{array}{l} 760x + 370y = 94500 \\ x = \frac{y}{2} \end{array}\right. \rightarrow \{x = 63, y = 126\}$

El conjunto de soluciones posibles será el conjunto de soluciones enteras que se encuentren en el interior o periferia del polígono:

Apartado b:

Analizamos el valor que adopta la función a minimizar en cada uno de los vértices del polígono:

$F(x, y) = x + y$

· En $A(40, 80)$: $F(40, 80) = 120$

· En $B(100, 50)$: $F(100, 50) = 150$

· En $C(63, 126)$: $F(63, 126) = 189$

La función presenta un mínimo en el vértice $A(40, 80)$, cuyo valor es 120.

Por tanto, el videoclub deberá adquirir 40 cintas de estreno y 80 de novedades, para que el pedido total de cintas sea mímimo. En estas condiciones, el importe del pedido ascenderá a:

$40 \cdot 760 + 80 \cdot 370 = 60\,000$ ptas.

Junio 99:

Un grupo musical va a lanzar su nuevo trabajo al mercado. La casa discográfica considera necesario realizar una campaña intensiva de publicidad, combinando dos posibilidades: anuncios en televisión, con un coste estimado de 1.000.000 de ptas. por anuncio, y cuñas radiofónicas, con un coste estimado de 100.000 ptas. por cuña. No obstante, no pueden gastar más de 100 millones de ptas. para dicha campaña, a lo largo de la cual se tienen que emitir al menos 50 y no más de 100 cuñas. Un estudio de mercado cifra en 10.000 el número de copias que se venderán por anuncio de televisión emitido, y en 2.000 copias por cuña radiofónica emitida.

a) ¿De cuántos anuncios y cuñas radiofónicas podrá constar esta campaña? Plantear el problema y representar gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Qué combinación de ambos se debería realizar para vender el mayor número de copias posible? ¿Se llegan a gastar los 100 millones de pesetas?

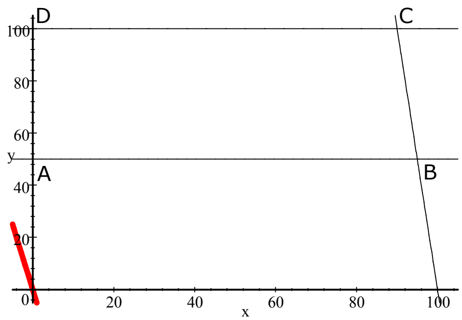
Solución:

Apartado a:

Llamamos: $\left| \begin{array}{l} x = n^o \text{ de anuncios en Tv.} \\ y = n^o \text{ de cuñas en Radio} \end{array}\right.$

Función a maximizar y restricciones:

$$\left\{\begin{array}{l} F(x,y)=10000x+2000y \\ 1000000x+100000y\leq 100000000 \\ y\geq 50 \\ y\leq 100 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} F(x,y)=10000x+2000y \\ 10x+1y\leq 1000 \\ y\geq 50 \\ y\leq 100 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right.$$



La función a maximizar determina el vector dirección (rojo).

El conjunto de restricciones determina la región factible. En este caso se trata de un polígono convexo de 4 lados.

Calculamos sus vértices, mediante la intersección de las dos rectas que determinan cada uno:

· Vértice A: $\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=50 \end{array}\right. \rightarrow \{x=0, y=50\}$

· Vértice B: $\left\{\begin{array}{l} y=50 \\ 10x+1y=1000 \end{array}\right. \rightarrow \{x=95, y=50\}$

· Vértice C: $\left\{\begin{array}{l} 10x+1y=1000 \\ y=100 \end{array}\right. \rightarrow \{x=90, y=100\}$

· Vértice D: $\left\{\begin{array}{l} y=100 \\ x=0 \end{array}\right. \rightarrow \{x=0, y=100\}$

El conjunto de soluciones posibles será el conjunto de soluciones enteras que se encuentren en el interior o periferia del polígono:

Apartado b:

Analizamos el valor que adopta la función a maximizar en cada uno de los vértices del polígono:

$F(x,y)=10000x+2000y$

· En $A(0,50)$: $F(0,50)=100\,000$

· En $B(95,50)$: $F(95,50)=1050\,000$

· En $C(90,100)$: $F(90,100)=1100\,000$

· En $D(0,100)$: $F(0,100)=200\,000$

La función presenta un máximo en el vértice $C(90,100)$, cuyo valor es 1.100.000

Por tanto, la casa discográfica deberá poner 90 anuncios en Tv. y 100 cuñas publicitarias. En estas condiciones se gastan: $90 \cdot 1 + 100 \cdot 0.1 = 100$ millones. Por tanto, SI llegan a gastarse los 100 millones disponibles.

Septiembre 99:

Por motivos de ampliación de plantilla, una empresa de servicios de traducción quiere contratar, a lo sumo, 50 nuevos traductores. El salario que ha de pagar a cada traductor de una lengua es de 200.000 ptas., y de 300.000 a los que son de más de una lengua. Como poco, y por motivos de demanda, dicha empresa tiene que contratar a la fuerza a un traductor de más de una lengua. La política de selección de personal de la compañía obliga también a contratar tantos traductores de una lengua como de más de una. Sabiendo que el objetivo fijado de beneficios totales es, como mínimo, de 12 millones de ptas., y que los beneficios que aportan los traductores de una lengua son de 400.000 ptas/traductor, y de 800.000 ptas/traductor los de más de una lengua:

a) ¿Cuántos traductores de cada tipo se pueden contratar? Plantear el problema y representar gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántos traductores de cada tipo contratará para minimizar el gasto en salarios? ¿Qué beneficios totales tendrá la empresa en este caso?

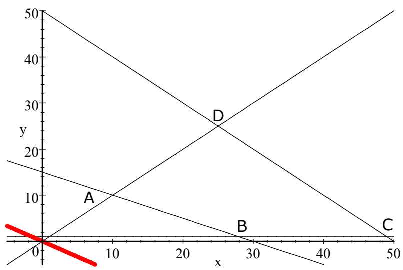
Solución:

Apartado a:

Llamamos: $\left| \begin{array}{l} x = n^o \text{ traductores una lengua} \\ y = n^o \text{ traductores más de una lengua} \end{array} \right.$

Función a minimizar y restricciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x,y) = 200000x + 300000y \\ x + y \leq 50 \\ y \geq 1 \\ x \geq y \\ 400000x + 800000y \geq 12000000 \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$



La función a minimizar determina el vector dirección (rojo).

El conjunto de restricciones determina la región factible. En este caso se trata de un polígono convexo de 4 lados.

Calculamos sus vértices, mediante la intersección de las dos rectas que determinan cada uno:

· Vértice A: $\left\{ \begin{array}{l} x = y \\ 400000x + 800000y = 12000000 \end{array} \right. \rightarrow \{x = 10, y = 10\}$

· Vértice B: $\left\{ \begin{array}{l} 400000x + 800000y = 12000000 \\ y = 1 \end{array} \right. \rightarrow \{x = 28, y = 1\}$

· Vértice C: $\begin{cases} y = 1 \\ x + y = 50 \end{cases} \rightarrow \{x = 49, y = 1\}$

· Vértice D: $\begin{cases} x + y = 50 \\ x = y \end{cases} \rightarrow \{x = 25, y = 25\}$

El conjunto de soluciones posibles será el conjunto de soluciones enteras que se encuentren en el interior o periferia del polígono:

Apartado b:

Analizamos el valor que adopta la función a minimizar en cada uno de los vértices del polígono:

$F(x, y) = 200000x + 300000y$

· En $A(10, 10)$: $F(10, 10) = 5000\,000$

· En $B(28, 1)$: $F(28, 1) = 5900\,000$

· En $C(49, 1)$: $F(49, 1) = 10\,100\,000$

· En $D(25, 25)$: $F(25, 25) = 12\,500\,000$

La función presenta un mínimo en el vértice $D(10, 10)$, cuyo valor es 5.000.000

Por tanto, la empresa deberá contratar 10 traductores de una lengua y otros 10 de más de una lengua para minimizar el gasto en salarios. En estas condiciones, los beneficios de la empresa serán:

$400000x + 800000y = 400000 \cdot 10 + 800000 \cdot 10 = 12\,000\,000$ ptas.

Junio 00:

Una fábrica de muebles produce dos líneas de muebles, "clasico" (C) y "funcional" (F). Para su fabricación, los muebles requieren tiempo de proceso de construcción y pintura. El mueble clásico precisa una unidad de tiempo de construcción y tres de pintura, mientras que el funcional requiere dos unidades de tiempo de construcción y una de pintura. La situación actual de la empresa no permite utilizar más de 10 unidades de tiempo de construcción y quince de pintura.

a) Plantear el problema y representar gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Qué combinaciones de muebles puede fabricar?

c) Si el beneficio empresarial es función del número de unidades fabricadas de acuerdo con la relación $B = 3C + 2F$ ¿ cuántas unidades de cada línea deben fabricarse para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

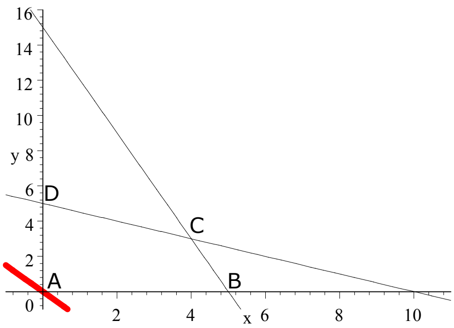
Solución:

Apartado a:

Llamamos: $\left| \begin{array}{l} x = n^o \text{ de muebles tipo clásico} \\ y = n^o \text{ de muebles tipo funcional} \end{array} \right.$

Función a maximizar y restricciones:

$$\begin{cases} F(x,y) = 3x + 2y \\ x + 2y \le 10 \\ 3x + y \le 15 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



La función a maximizar determina el vector dirección (rojo).

El conjunto de restricciones determina la región factible. En este caso se trata de un polígono convexo de 4 lados.

Calculamos sus vértices, mediante la intersección de las dos rectas que determinan cada uno:

· Vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \{x = 0, y = 0\}$

· Vértice B: $\begin{cases} y = 0 \\ 3x + y = 15 \end{cases} \rightarrow \{x = 5, y = 0\}$

· Vértice C: $\begin{cases} 3x + y = 15 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \rightarrow \{x = 4, y = 3\}$

· Vértice D: $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \{x = 0, y = 5\}$

El conjunto de soluciones posibles será el conjunto de soluciones enteras que se encuentren en el interior o periferia del polígono:

Apartado b:

Analizamos el valor que adopta la función a maximizar en cada uno de los vértices del polígono:

$F(x,y) = 3x + 2y$

· En $A(0,0)$: $F(0,0) = 0$

· En $B(5,0)$: $F(5,0) = 15$

· En $C(4,3)$: $F(4,3) = 18$

· En $D(0,5)$: $F(0,5) = 10$

La función presenta un máximo en el vértice $C(4,3)$, cuyo valor es 18. Por tanto, la fábrica debería de producir 4 unidades de la línea clásica y 3 unidades de la línea funcional. En estas condiciones, los beneficios ascenderían a 18 unidades monetarias.

Septiembre 00:

Una fábrica de confección de ropa especializada en faldas y pantalones recibe una partida de tela de 5.000 metros. Para la confección de los pantalones se precisan dos metros de tela y uno, para las faldas. Por razones *productivas, la fábrica ha de confeccionar al menos el doble de pantalones que de faldas.*

a) Plantear el problema y representar gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántas faldas y pantalones puede ofertar?

c) Si la fábrica vende cada pantalón a un precio de 5.000 pesetas y cada falda a 3.000 pesetas, ¿cuántas faldas y pantalones deberá vender para maximizar sus ingresos? ¿ Cuál será el ingreso máximo que puede obtener?

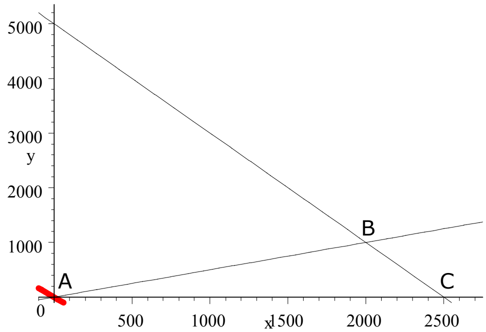
Solución:

Apartado a:

Llamamos: $\left| \begin{array}{l} x = n^o \text{ de pantalones} \\ y = n^o \text{ de faldas} \end{array} \right.$

Función a maximizar y restricciones:

$$\begin{cases} F(x,y) = 5000x + 3000y \\ 2x + y \leq 5000 \\ x \geq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



La función a maximizar determina el vector dirección (rojo).

El conjunto de restricciones determina la región factible. En este caso se trata de un polígono convexo de 3 lados.

Calculamos sus vértices, mediante la intersección de las dos rectas que determinan cada uno:

· Vértice A: $\begin{cases} y = 0 \\ x = 2y \end{cases} \rightarrow \{x = 0, y = 0\}$

· Vértice B: $\begin{cases} x = 2y \\ 2x + y = 5000 \end{cases} \rightarrow \{x = 2000, y = 1000\}$

· Vértice C: $\begin{cases} 2x + y = 5000 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \{x = 2500, y = 0\}$

El conjunto de soluciones posibles será el conjunto de soluciones enteras que se encuentren en el interior o periferia del polígono:

Apartado b:

Analizamos el valor que adopta la función a maximizar en cada uno de los vértices del polígono:

$F(x,y) = 5000x + 3000y$

· En $A(0,0)$: $F(0,0) = 0$
· En $B(2000,1000)$: $F(2000,1000) = 13\,000\,000$
· En $C(2500,0)$: $F(2500,0) = 12\,500\,000$

La función presenta un máximo en el vértice $B(2000,1000)$, cuyo valor es 13 000 000. Por tanto, la fábrica deberá fabricar 2000 pantalones y 1000 faldas. En estas condiciones, los ingresos ascenderían a: 13.000.000 ptas.

Junio 01:

La encargada de una floristería ha de hacer el pedido semanal de plantas de interior y de exterior. El precio que ha de pagar al proveedor por cada planta de interior es de 100 ptas. y de 200 por cada una de exterior. A día de hoy, sabe que por lo menos ha de poder atender la demanda que un cliente ya le ha hecho, de 20 unidades de interior y de 30 de exterior. Además, el transporte del pedido semanal hasta la floristería lo realiza una empresa especializada y le supone unos costes, que son de 60 ptas. por cada planta de interior y de 80 ptas. por cada planta de exterior, y la floristería tiene por norma que estos costes de transporte no sobrepasen las 4.800 ptas. por pedido semanal. Asimismo, la encargada obtiene una prima de 60 ptas. por cada planta de interior que venda y 50 por cada una de exterior, y quiere que las primas que se puedan alcanzar vendiendo todo el pedido sean de al menos 3.000 ptas.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo puede pedir la encargada para cumplir todos los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si la floristería quiere además minimizar el precio que ha de pagar al proveedor por el pedido: ¿cuántas unidades de cada tipo ha de adquirir? ¿cuánto deberá pagar al proveedor? ¿cuáles serán los costes de transporte?

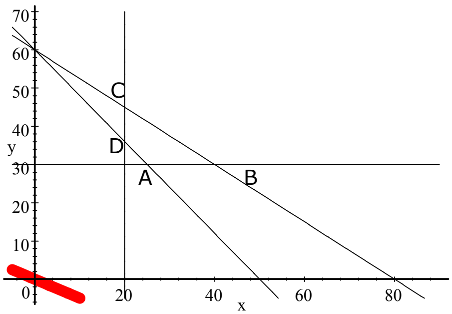
Solución:

Apartado a:

Llamamos: $\left| \begin{array}{l} x = n^o \text{ de plantas de interior} \\ y = n^o \text{ de plantas de exterior} \end{array} \right.$

Función a minimizar y restricciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x,y) = 100x + 200y \\ x \geq 20 \\ y \geq 30 \\ 60x + 80y \leq 4800 \\ 60x + 50y \geq 3000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$



La función a minimizar determina el vector dirección (rojo).

El conjunto de restricciones determina la región factible. En este caso se trata de un polígono convexo de 4 lados.

Calculamos sus vértices, mediante la intersección de las dos rectas que determinan cada uno:

· Vértice A: $\begin{cases} 60x + 50y = 3000 \\ y = 30 \end{cases} \rightarrow \{x = 25, y = 30\}$

· Vértice B: $\begin{cases} y = 30 \\ 60x + 80y = 4800 \end{cases} \rightarrow \{x = 40, y = 30\}$

· Vértice C: $\begin{cases} 60x + 80y = 4800 \\ x = 20 \end{cases} \rightarrow \{x = 20, y = 45\}$

· Vértice D: $\begin{cases} x = 20 \\ 60x + 50y = 3000 \end{cases} \rightarrow \{x = 20, y = 36\}$

El conjunto de soluciones posibles será el conjunto de soluciones enteras que se encuentren en el interior o periferia del polígono:

Apartado b:

Analizamos el valor que adopta la función a minimizar en cada uno de los vértices del polígono:

$F(x, y) = 100x + 200y$

· En $A(25, 30)$: $F(25, 30) = 8500$
· En $B(40, 30)$: $F(40, 30) = 10\,000$
· En $C(20, 45)$: $F(20, 45) = 11\,000$
· En $D(20, 36)$: $F(20, 36) = 9200$

La función presenta un mínimo en el vértice $A(25, 30)$, cuyo valor es 8.500 ptas. Por tanto, la floristería debería de pedir 25 plantas de Interior y 30 plantas de Exterior. En estas condiciones, deberá de pagar al proveedor 8500 ptas.

Los costes de transporte vendrán dados por: $T(x, y) = 60x + 80y$

$T(25, 30) = 60 \cdot 25 + 80 \cdot 30 = 3.900$ ptas.

Septiembre-01:

Una gestoría financiera que ofrecía hasta ahora tan sólo préstamos personales pretende añadir a su cartera de productos los préstamos hipotecarios y se ve en la necesidad de rediseñar su política de firmas mensuales en base a los siguientes requerimientos:

Debe firmar mensualmente al menos dos préstamos hipotecarios, pero por las dificultades que genera la introducción de ese producto no puede superar las 8 formas mensuales de dichos préstamos. Por la misma razón, el número de firmas mensuales de préstamos hipotecarios ha de ser como máximo la mitad de las firmas mensuales de préstamos personales.

Por otro lado, los costes de gestión son de 15.000 ptas para cada firma de préstamo personal y de 30.000 ptas. para cada una de hipotecarios, no pudiéndose superar las 600.000 ptas. de gastos mensuales totales de gestión.

Si la comisión a percibir por la firma de cada préstamo personal es de 40.000 ptas. y de 100.000 ptas. para cada hipotecario,

a) Se pretende calcular las unidades de cada producto que puede fir-

mar mensualmente cumpliendo los requerimientos de su nueva política de firmas. Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. Si un mes firma 10 personales y 8 hipotecarios ¿ cumple esos requerimientos?

b) Calcula las unidades de cada producto que ha de firmar un mes para maximizar la comisión total y cumplir todos los requerimientos de su política. ¿A cuánto asciende dicha comisión?

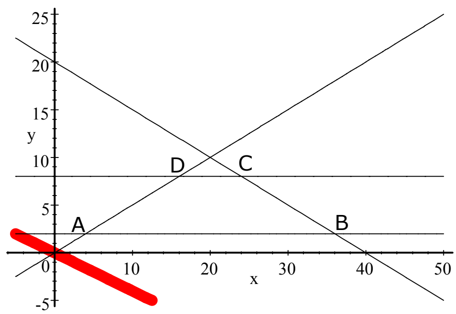
Solución:

Apartado a:

Llamamos: $\left| \begin{array}{l} x = n^o \text{ de préstamos personales} \\ y = n^o \text{ de préstamos hipotecarios} \end{array} \right.$

Función a maximizar y restricciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x,y) = 40000x + 100000y \\ y \geq 2 \\ y \leq 8 \\ y \leq \frac{x}{2} \\ 15000x + 30000y \leq 600000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F(x,y) = 40000x + 100000y \\ y \geq 2 \\ y \leq 8 \\ y \leq \frac{x}{2} \\ 15x + 30y \leq 600 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$



La función a maximizar determina el vector dirección (rojo).

El conjunto de restricciones determina la región factible. En este caso se trata de un polígono convexo de 4 lados.

Calculamos sus vértices, mediante la intersección de las dos rectas que determinan cada uno:

· Vértice A: $\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{x}{2} \\ y = 2 \end{array} \right. \rightarrow \{x = 4, y = 2\}$

· Vértice B: $\left\{ \begin{array}{l} y = 2 \\ 15x + 30y = 600 \end{array} \right. \rightarrow \{x = 36, y = 2\}$

· Vértice C: $\left\{ \begin{array}{l} 15x + 30y = 600 \\ y = 8 \end{array} \right. \rightarrow \{x = 24, y = 8\}$

· Vértice D: $\left\{ \begin{array}{l} y = 8 \\ y = \frac{x}{2} \end{array} \right. \rightarrow \{x = 16, y = 8\}$

El conjunto de soluciones posibles será el conjunto de soluciones enteras que se encuentren en el interior o periferia del polígono. Como el punto (10,8) se encuentra fuera del polígono, la gestoría no podrá firmar 10 créditos personales y 8 hipotecarios, respetando las restricciones del problema. Puede verse que no se cumpliría la restricción: $y \leq \frac{x}{2}$

Apartado b:

Analizamos el valor que adopta la función a maximizar en cada uno de los vértices del polígono:

$F(x, y) = 40000x + 100000y$

· En $A(4,2)$: $F(4,2) = 360\,000$

· En $B(36,2)$: $F(36,2) = 1640\,000$

· En $C(24,8)$: $F(24,8) = 1760\,000$

· En $D(16,8)$: $F(16,8) = 1440\,000$

La función presenta un máximo en el vértice $C(24,8)$, cuyo valor es 1760 000. Por tanto, la entidad debería de firmar 24 préstamos personales y 8 préstamos hipotecarios. En estas condiciones, la comisión ascendería a: 1760 000 ptas.

Junio 02:

Un distribuidor de software informático, que realiza también funciones de servicio técnico, tiene en su cartera de clientes tanto a empresas como a particulares. En base a los objetivos marcados por el fabricante, al finalizar este año ha de conseguir al menos 20 empresas como clientes en su cartera, y el número de clientes particulares que consiga deberá ser como mínimo el doble que de empresas. Además, por razones de eficiencia del servicio post-venta, tiene estipulado un limite global de 90 clientes anuales. Finalmente, cada empresa le produce 286 € de ingresos anuales, mientras que cada particular 179 €.

a) ¿Cuáles pueden ser las distintas opciones de composición de su cartera? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Cuál de esas combinaciones le proporcionaría los mayores ingresos al finalizar el año? ¿A cuánto ascenderían dichos ingresos?

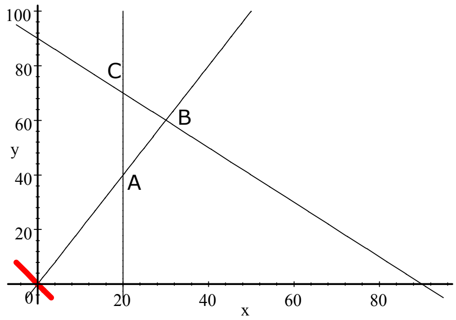
Solución:

Apartado a:

Llamamos: $\left| \begin{array}{l} x = n^o \text{ de empresas} \\ y = n^o \text{ de particulares} \end{array} \right.$

Función a maximizar y restricciones:

$$\begin{cases} F(x,y) = 286x + 179y \\ x \geq 20 \\ y \geq 2x \\ x + y \leq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



La función a maximizar determina el vector dirección (rojo).

El conjunto de restricciones determina la región factible. En este caso se trata de un polígono convexo de 3 lados.

Calculamos sus vértices, mediante la intersección de las dos rectas que determinan cada uno:

· Vértice A: $\begin{cases} x = 20 \\ y = 2x \end{cases} \rightarrow \{x = 20, y = 40\}$

· Vértice B: $\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 90 \end{cases} \rightarrow \{x = 30, y = 60\}$

· Vértice C: $\begin{cases} x + y = 90 \\ x = 20 \end{cases} \rightarrow \{x = 20, y = 70\}$

El conjunto de soluciones posibles será el conjunto de soluciones enteras que se encuentren en el interior o periferia del polígono.

Apartado b:

Analizamos el valor que adopta la función a maximizar en cada uno de los vértices del polígono:

$F(x,y) = 286x + 179y$

· En $A(20,40)$: $F(20,40) = 12\,880$

· En $B(30,60)$: $F(30,60) = 19\,320$

· En $C(20,70)$: $F(20,70) = 18\,250$

La función presenta un máximo en el vértice $B(30,60)$, cuyo valor es 19 320. Por tanto, la cartera de clientes debería de estar formada por 30 empresas y 60 clientes particulares. En estas condiciones, los ingresos anuales ascenderían a: 19 320 €.

Septiembre 02:

Un representante comercial del sector de las comunicaciones se plantea maximizar la comisión total que obtenga este mes por la venta de dos productos: teléfono móvil con contrato de alta y teléfono móvil con tarjeta. La comisión es de 15 € por cada móvil con alta y 10 € por cada uno con tarjeta.

La política comercial de la empresa exige que el número de teléfonos vendidos con alta cada mes no puede ser superior al número de teléfonos *vendidos con tarjeta. Así mismo, la venta de cada teléfono lleva asociados unos costes administrativos de 1 €, y la empresa también obliga a cada representante a que el coste total por ventas no supere los 100 € al mes. Finalmente, la empresa obtiene unos beneficios de 6 € por cada venta de teléfono con alta y de 2 € por cada venta de teléfono con tarjeta, y pide a cada representante que los beneficios totales obtenidos por la venta de teléfonos con alta cada mes supere en al menos 120 € a los beneficios totales obtenidos por la venta de teléfonos con tarjeta.*

a) Se pretende calcular las unidades de cada producto que puede vender este mes aunque no maximice la comisión total. Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿ Podría vender 60 unidades de cada producto?

b) Calcula las unidades de cada producto que ha de vender para maximizar la comisión. ¿A cuanto asciende dicha comisión?

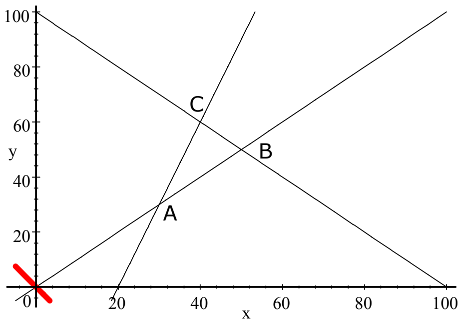
Solución:

Apartado a:

Llamamos: $\left| \begin{array}{l} x = n^o \text{ de teléfonos con contrato y alta} \\ y = n^o \text{ de teléfonos con tarjeta} \end{array} \right.$

Función a maximizar y restricciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x,y) = 15x + 10y \\ x \le y \\ x + y \le 100 \\ 6x \ge 2y + 120 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array} \right. \quad \to \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x,y) = 15x + 10y \\ x \le y \\ x + y \le 100 \\ 6x - 2y \ge 120 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array} \right.$$



La función a maximizar determina el vector dirección (rojo).

El conjunto de restricciones determina la región factible. En este caso se trata de un polígono convexo de 3 lados.

Calculamos sus vértices, mediante la intersección de las dos rectas que determinan cada uno:

· Vértice A: $\left\{ \begin{array}{l} 6x - 2y = 120 \\ x = y \end{array} \right. \to \{x = 30, y = 30\}$

· Vértice B: $\left\{ \begin{array}{l} x = y \\ x + y = 100 \end{array} \right. \rightarrow \{x = 50, y = 50\}$

· Vértice C: $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 100 \\ 6x - 2y = 120 \end{array} \right. \rightarrow \{x = 40, y = 60\}$

El conjunto de soluciones posibles será el conjunto de soluciones enteras que se encuentren en el interior o periferia del polígono. El punto $(60, 60)$, se encuentra fuera de la región factible, por lo tanto no cumple las restricciones impuestas. (En concreto, contradice que los costes administrativos no pueden superar los 100 € al mes). Es imposible, por tanto, vender 60 unidades de cada producto.

Apartado b:

Analizamos el valor que adopta la función a maximizar en cada uno de los vértices del polígono:

$F(x, y) = 15x + 10y$

· En $A(30, 30)$: $F(30, 30) = 750$

· En $B(50, 50)$: $F(50, 50) = 1250$

· En $C(40, 60)$: $F(40, 60) = 1200$

La función presenta un máximo en el vértice $B(40, 60)$, cuyo valor es 1200

Por tanto, para maximizar la comisión, será necesario vender 40 teléfonos con contrato de alta y 60 con tarjeta. En estas condiciones, la comisión ascendería a: 1200 €.

Junio 03:

Una tienda de moda está preparando su pedido de trajes para la próxima temporada. Para que cierto proveedor le haga unos precios especiales, el pedido debe incluir al menos 10 trajes de fabricación nacional y no sobrepasar los 20 trajes de ese tipo. Además, el número de trajes de fabricación nacional debería ser al menos una tercera parte del número de trajes de importación. Por otro lado, el beneficio que la tienda obtendría por la venta de cada traje de fabricación nacional sería de 120 euros y de 200 euros por la venta de cada uno de importación, y la tienda quiere que el beneficio total que se pueda alcanzar vendiendo todo el pedido sea como mínimo de 3600 euros.

a) Se pretende calcular las unidades de cada producto que se pueden pedir al proveedor cumpliendo todos los requerimientos anteriores. Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones posibles. ¿Podría pedir 12 trajes de fabricación nacional y 45 de importación?

b) Calcula las unidades de cada producto que se han de pedir para minimizar además el número total de trajes pedidos. Con ese pedido ¿qué beneficio obtendrá si se venden todas las unidades?

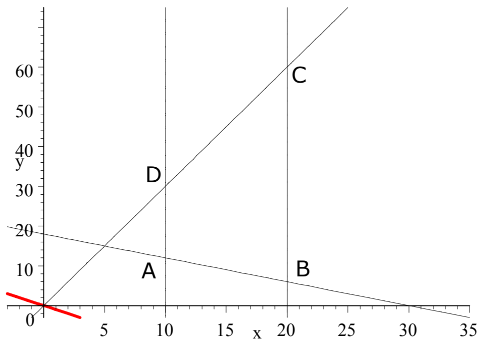
Solución:

Apartado a:

Llamamos: $\left| \begin{array}{l} x = n^o \text{ de trajes nacionales} \\ y = n^o \text{ de trajes de importación} \end{array} \right.$

Función a minimizar y restricciones:

$$\begin{cases} F(x,y) = x+y \\ x \geq 10 \\ x \leq 20 \\ x \geq \frac{y}{3} \\ 120x + 200y \geq 3600 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F(x,y) = x+y \\ x \geq 10 \\ x \leq 20 \\ x \geq \frac{y}{3} \\ 12x + 20y \geq 360 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



La función a minimizar determina el vector dirección (rojo).

El conjunto de restricciones determina la región factible. En este caso se trata de un polígono convexo de 4 lados.

Calculamos sus vértices, mediante la intersección de las dos rectas que determinan cada uno:

· Vértice A: $\begin{cases} x = 10 \\ 12x + 20y = 360 \end{cases} \rightarrow \{x = 10, y = 12\}$

· Vértice B: $\begin{cases} 12x + 20y = 360 \\ x = 20 \end{cases} \rightarrow \{x = 20, y = 6\}$

· Vértice C: $\begin{cases} x = 20 \\ x = \frac{y}{3} \end{cases} \rightarrow \{x = 20, y = 60\}$

· Vértice D: $\begin{cases} x = \frac{y}{3} \\ x = 10 \end{cases} \rightarrow \{x = 10, y = 30\}$

El conjunto de soluciones posibles será el conjunto de soluciones enteras que se encuentren en el interior o periferia del polígono. Pedir 12 trajes de fabicación nacional y 25 de importación viene representado por el punto $\{x = 12, y = 45\}$. Este punto no pertenece a la región factible por no cumplir con la restricción $x \geq \frac{y}{3}$.

Apartado b:

Analizamos el valor que adopta la función a maximizar en cada uno de los vértices del polígono:

$F(x,y) = x + y$

· En $A(10,12)$: $F(10,12) = 22$
· En $B(20,6)$: $F(20,6) = 26$
· En $C(20,60)$: $F(20,60) = 80$
· En $D(10,30)$: $F(10,30) = 40$

La función presenta un mínimo en el vértice $A(10,12)$, cuyo valor es 22.

Por tanto, la tienda deberá pedir 10 trajes nacionales y 12 trajes de importación. De esta manera, el número de trajes encargados será únicamente 22 y el beneficio obtenido con su venta vendrá dado por $B(x,y) = 120x + 200y \rightarrow B(10,12) = 3600$ €

Septiembre 03:

Un equipo de fútbol quiere poner a disposición de sus socios al menos 450 plazas entre autobuses y microbuses, con el fin de facilitar los desplazamientos para el próximo encuentro. El equipo contratará los vehículos a una empresa que le ofrece un máximo de 16 autobuses y de 10 microbuses, y que le exige que el número de microbuses que pueda contratar sea al menos un 20% del total de vehículos que contrate. Cada autobús tiene una capacidad de 50 plazas y cada microbús de 25.

a) ¿Qué combinaciones de vehículos de dada tipo se pueden contratar cumpliendo los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si se quiere contratar el menos número posible de vehículos en total ¿cuántos de cada tipo ha de contratar? ¿cuál será el número máximo de socios que se podrán desplazar en ese caso?

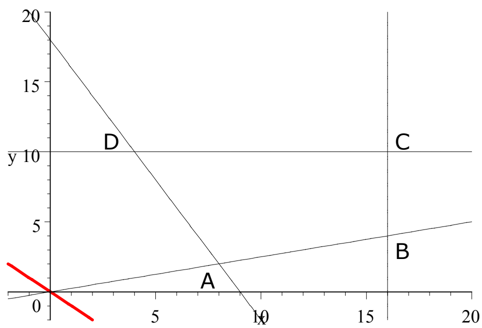
Solución:

Apartado a:

Llamamos: $\left| \begin{array}{l} x = n^o \text{ de autobuses} \\ y = n^o \text{ de microbuses} \end{array} \right.$

Función a minimizar y restricciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x,y) = x + y \\ x \leq 16 \\ y \leq 10 \\ y \geq 0.2\,(x+y) \\ 50x + 25y \geq 450 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$



La función a minimizar determina el vector dirección (rojo).

El conjunto de restricciones determina la región factible. En este caso se trata de un polígono convexo de 4 lados.

Calculamos sus vértices, mediante la intersección de las dos rectas que determinan cada uno:

· Vértice A: $\left\{\begin{array}{l} 50x + 25y = 450 \\ y = 0.2\,(x+y) \end{array}\right. \to \{x = 8, y = 2\}$

· Vértice B: $\left\{\begin{array}{l} y = 0.2\,(x+y) \\ x = 16 \end{array}\right. \to \{x = 16, y = 4\}$

· Vértice C: $\left\{\begin{array}{l} x = 16 \\ y = 10 \end{array}\right. \to \{x = 16, y = 10\}$

· Vértice D: $\left\{\begin{array}{l} y = 10 \\ 50x + 25y = 450 \end{array}\right. \to \{x = 4, y = 10\}$

El conjunto de soluciones posibles será el conjunto de soluciones enteras que se encuentren en el interior o periferia del polígono:

Apartado b:

Analizamos el valor que adopta la función a minimizar en cada uno de los vértices del polígono:

$F(x, y) = x + y$

· En $A(8, 2)$: $F(8, 2) = 10$
· En $B(16, 4)$: $F(16, 4) = 20$
· En $C(16, 10)$: $F(16, 10) = 26$
· En $D(4, 10)$: $F(4, 10) = 14$

La función presenta un mínimo en el vértice $A(8, 2)$, cuyo valor es 10.

Por tanto, el club deberá alquilar 8 autobuses y 10 microbuses para que el número de vehículos sea mínimo. En estas condiciones, podrán viajar un máximo de: $8 \cdot 50 + 2 \cdot 25 = 450$ socios.

Junio 04:

El jefe de seguridad de un museo estudia combinar 2 nuevos sistemas antirrobo: cámaras de vigilancia en las salas, y alarmas en puntos estratégicos del edificio. Se quiere utilizar un mínimo de 6 cámaras para cubrir con ellas las salas más importantes, y un máximo de 15 cámaras, con las que quedarían todas las salas cubiertas. Igualmente, se necesitan al menos 6 alarmas para cubrir las más importantes entradas y salidas del edificio. Finalmente, se tiene un presupuesto máximo de 36.000 euros, y cada cámara cuesta 1.000 euros mientras que cada alarma cuesta 500 euros.

a) ¿Qué combinaciones de unidades de cada sistema se pueden instalar cumpliendo los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría instalar 7 cámaras y 59 alarmas?

b) Si el objetivo es colocar el mayor número de dispositivos entre cámaras y alarmas ¿cuántos ha de colocar de cada modalidad? En ese caso, ¿cuál será el coste total?

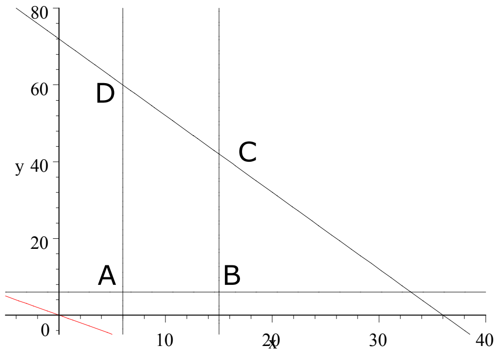
Solución:

Apartado a:

Llamamos: $\left|\begin{array}{l} x = n^o \text{ de cámaras de vigilancia} \\ y = n^o \text{ de alarmas} \end{array}\right.$

Función a minimizar y restricciones:

$$\begin{cases} F(x,y) = x + y \\ x \geq 6 \\ x \leq 15 \\ y \geq 6 \\ 1000x + 500y \leq 36000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



La función a maximizar determina el vector dirección (rojo).

El conjunto de restricciones determina la región factible. En este caso se trata de un polígono convexo de 4 lados.

Calculamos sus vértices, mediante la intersección de las dos rectas que determinan cada uno:

· Vértice A: $\begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \end{cases} \rightarrow \{x = 6, y = 6\}$

· Vértice B: $\begin{cases} y = 6 \\ x = 15 \end{cases} \rightarrow \{x = 15, y = 6\}$

· Vértice C: $\begin{cases} x = 15 \\ 1000x + 500y = 36000 \end{cases} \rightarrow \{x = 15, y = 42\}$

· Vértice D: $\begin{cases} 1000x + 500y = 36000 \\ x = 6 \end{cases} \rightarrow \{x = 6, y = 60\}$

El conjunto de soluciones posibles será el conjunto de soluciones enteras que se encuentren en el interior o periferia del polígono. Así, no sería posible instalar 7 cámaras y 59 alarmas porque no se cumpliría la cuarta restricción, referente al presupuesto disponible:

$1000x + 500y \leq 36000;$ sin embargo: $7 \cdot 1000 + 59 \cdot 500 = 36\,500$

Apartado b:

Analizamos el valor que adopta la función a maximizar en cada uno de los vértices del polígono:

$F(x, y) = x + y$

· En $A(6, 6)$: $F(6, 6) = 12$

· En $B(15, 6)$: $F(15, 6) = 21$

· En $C(15, 42)$: $F(15, 42) = 57$

· En $D(6, 60)$: $F(6, 60) = 66$

La función presenta un máximo en el vértice $D(6, 60)$, cuyo valor es 66.

Por tanto, el museo deberá instalar 6 cámaras de vigilancia y 60 alarmas para que el número de dispositivos sea máximo. En estas condiciones, el coste de la instalación será: $6 \cdot 1000 + 60 \cdot 500 = 36\,000$ euros.

Septiembre 04:

Una empresa quiere decidir cuántos ordenadores portátiles y cuántos de sobremesa comprará. Dispone de hasta 88.000 euros y ha aceptado la oferta de un proveedor que le exige comprar por lo menos 30 ordenadores y que al menos un 10% de los que compre sean portátiles. Cada ordenador portátil le sale por 2.000 euros y cada uno de sobremesa por 1.000

a) ¿Qué combinaciones de ordenadores de cada tipo puede comprar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si se quiere comprar el mayor número posible de ordenadores, ¿cuántos de cada tipo ha de comprar? ¿Y si lo que quiere es comprar el menor número posible de portátiles, cuántos de cada tipo tendría que comprar?

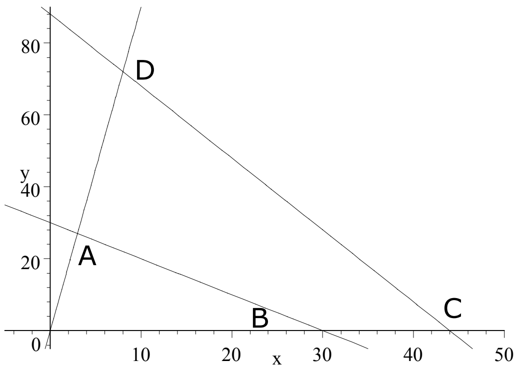
Solución:

Apartado a:

Llamamos: $x = n^o$ de ordenadores portátiles
$y = n^o$ de ordenadores de sobremesa

Restricciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y \geq 30 \\ x \geq \frac{x+y}{10} \\ 2000x+1000y \leq 88000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y \geq 30 \\ 9x \geq y \\ 2x+y \leq 88 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right.$$



El conjunto de restricciones determina la región factible. En este caso se trata de un polígono convexo de 4 lados.

Calculamos sus vértices, mediante la intersección de las dos rectas que determinan cada uno:

· Vértice A: $\left\{\begin{array}{l} 9x = y \\ x+y = 30 \end{array}\right. \rightarrow \{x=3, y=27\}$

· Vértice B: $\left\{\begin{array}{l} x+y = 30 \\ y = 0 \end{array}\right. \rightarrow \{x=30, y=0\}$

· Vértice C: $\left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ 2x+y = 88 \end{array}\right. \rightarrow \{x=44, y=0\}$

· Vértice D: $\left\{\begin{array}{l} 2x+y=88 \\ 9x=y \end{array}\right. \rightarrow \{x=8, y=72\}$

El conjunto de soluciones posibles será el conjunto de soluciones enteras que se encuentren en el interior o periferia del polígono.

Apartado b:

Analizamos el valor que adopta la función a maximizar en cada caso y en uno de los vértices del polígono:

- Si quiere comprar el mayor número posible de ordenadores:

Función a maximizar: $F(x,y)=x+y$
· En $A(3,27)$: $F(3,27)=30$
· En $B(30,0)$: $F(30,0)=30$
· En $C(44,0)$: $F(44,0)=44$
· En $D(8,72)$: $F(8,72)=80$

La función presenta un máximo en el vértice $D(8,72)$, cuyo valor es 80.

Por tanto, la empresa deberá comprar 8 ordenadores portátiles y 72 ordenadores de sobremesa para que el número de ordenadores total adquirido sea máximo. En estas condiciones, el coste de la compra será: $8\cdot 2000+72\cdot 1000=88\,000$ euros.

- Si quiere comprar el menor número posible de ordenadores portátiles:

Función a minimizar: $F(x,y)=x$
· En $A(3,27)$: $F(3,27)=3$
· En $B(30,0)$: $F(30,0)=30$
· En $C(44,0)$: $F(44,0)=44$
· En $D(8,72)$: $F(8,72)=8$

La función presenta un mínimo en el vértice $A(3,27)$, cuyo valor es 3.

Por tanto, la empresa deberá comprar 3 ordenadores portátiles y 27 ordenadores de sobremesa para que el número de portátiles sea mínimo. En estas condiciones, el coste de la compra será: $3\cdot 2000+27\cdot 1000=33\,000$ euros.

2.2 Problemas propuestos

B2-01:

Una fábrica produce muebles biblioteca de dos tipos: en pino macizo y en castaño. Una biblioteca en pino requiere 3 h. de montaje y 3 h. de acabado, mientras que una biblioteca en castaño requiere 3 h. de montaje y 6 h. de acabado. Por razones de maquinaria, el máximo número de horas disponibles es de 120 para el montaje y 180 para el acabado. Los beneficios que obtiene la fábrica son de 300 € por cada biblioteca en pino y 400 € por cada biblioteca en castaño.

a) ¿Cuántos muebles biblioteca de cada tipo hay que fabricar para que el beneficio sea máximo?

b) ¿A cuánto ascenderá dicho beneficio?

B2-02:

Un laboratorio está elaborando un compuesto que debe de contener un mínimo de 30 mg. de vitamina A y de 35 mg. de vitamina B por kg. Para ello mezcla dos tipos de productos P1 y P2, cuyos contenidos en mg. de vitaminas A y B vienen dados en la siguiente tabla:

	Vitamina A	*Vitamina B*
Producto P1	*6 mg.*	*5 mg.*
Producto P2	*6 mg.*	*10 mg.*

El producto P1 cuesta 40 €/kg. y el producto P2 cuesta 60 €/kg.

¿Cuántos kg. de cada producto debe de mezclar para que el coste del compuesto sea mínimo?

B2-03:

En una panadería gallega se fabrican dos tipos de empanadas, grandes y pequeñas. La empanada grande requiere para su elaboración 500 g. de masa y 250 g. de relleno; la empanada pequeña 250 g. de masa y 250 g. de relleno. Se dispone de 20 kg. de masa y de 15 kg. de relleno, y el precio de venta lo fijamos en 2 € para la empanada grande en 1.5 € para la empanada pequeña. ¿Cuántas empanadas de cada tipo tendrá que fabricar la panadería para que el beneficio obtenido sea máximo?.

B2-04:

En una fábrica de cajas de cartón para embalaje y regalo, se fabrican dos tipos de cajas: la caja A que requiere para su construcción 4 m. papel decorado y 0.25 m. de rollo de cartón, que se vende a 8 €; la caja B que requiere 2 m. de papel decorado y 0.5 m. de rollo de cartón y que se vende a 12 €. En el almacen disponen únicamente de 440 m. de papel de regalo y de 65 m. de rollo de cartón. Si suponemos que se vende toda la producción de cajas, ¿cuantas de cada tipo deberán de fabricarse para que el importe de las ventas sea máximo? ¿a cuánto ascenderá?

B2-05:

Un mayorista desea comprar dos tipos de televisores, TV1 y TV2. Los de tipo TV1 le cuestan 300 €/unidad y los de tipo TV2 500 €/unidad. Dispone de 7000 € para realizar las compras y, en su almacén, únicamente dispone de espacio para 20 televisores. En la venta de cada televisor gana el 30% del precio de compra.

a) Representar gráficamente la función a maximizar y el conjunto de restricciones.

b) ¿Cuántos televisores de cada tipo ha de comprar para maximizar el beneficio?

c) ¿A cuánto ascenderá dicho beneficio?

B2-06:

Una empresa fabrica tres productos A,B y C en dos plantas de fabricación

P1 y P2. La planta P1 produce diariamente 1.000 unidades del producto A, 3.000 del producto B y 5.000 del producto C. La planta P2 produce diariamente 2000 unidades de cada uno de los tres productos. La empresa se ha comprometido a entregar a sus clientes, al menos, 80.000 unidades del producto A, 160.000 del producto B y 200.000 del producto C. Sabemos que el coste diario de producción es de 200.000 ptas en cada una de las plantas de fabricación.

a) Representar gráficamente la región de soluciones factibles del problema.

b) Determinar cuántos días debe trabajar cada planta para que se cubran los objetivos con el mínimo coste.

B2-07:

En una fábrica de juguetes se producen dos tipos de rompecabezas: de 500 y de 2000 piezas. Se obtiene con ello un beneficio de 4.5 € por cada rompecabezas pequeño y de 6 € por cada rompecabezas grande. Por limitaciones de personal y maquinaria, no se pueden fabricar más de 400 rompecabezas pequeños, ni más de 300 rompecabezas grandes. Por las mismas razones, tampoco pueden producirse más de 500 rompecabezas en total.

Suponiendo que se logra vender toda la producción de un día:

a) ¿cuál es el número de rompecabezas de cada tamaño que conviene fabricar para obtener un benefício máximo?

b) ¿cuál debería ser la producción para obtener el máximo beneficio si se obtuvieran 6 € por cada rompecabezas pequeño y 4.5 € por cada rompecabezas grande?

B2-08:

Un concesionario de motos vende dos modelos; el A con el que gana 1000 € por unidad vendida, y el B, con el que gana 500 € también por unidad. Por razones de disponibilidad y política comercial, el número de motos vendidas del modelo A no puede ser inferior a 50 unidades, ni superior a 75. Además, el número de motos vendidas del modelo B no puede ser inferior al de motos vendidas del modelo A.

Sabiendo que el número máximo de motos que pueden vender es 400,

a) determina cuantas motos de cada modelo debe vender para que el beneficio sea máximo.

b) determina a cuánto asciende dicho beneficio.

B2-09:

Un inversor dispone de 30000 € para repartir en dos fondos diferentes de inversión, A y B. El fondo A le ofrece una rentabilidad del 12%, pero ciertas limitaciones legales le impiden superar los 12000 € de inversión máxima en él. El fondo B le ofrece una rentabilidad del 8% sin limitación alguna de la cantidad a invertir. Además, este cliente desea invertir en el fondo B, como máximo, el doble de lo invertido en el fondo A.

a) ¿Qué cantidad de dinero debe invertir en cada fondo para obtener un beneficio máximo?

b) ¿cuál será el valor de dicho beneficio máximo?

B2-10:

Una fábrica de muebles de oficina produce estanterías metálicas y archivadores. El doble de la producción de archivadores, es menor o igual que la producción de estanterías más 800 unidades. También sabemos que el triple de la producción de estanterías más el doble de la producción de archivadores, es menor o igual que 2400 unidades.

Cada estantería producida genera un beneficio de 60 € y cada archivador, 80 €.

a) Plantea el problema y representa la región factible.

b) ¿cuántas unidades de cada tipo habría que producir para obtener un beneficio máximo?

c) ¿a cuánto asciende dicho beneficio?

B2-11:

Susana desea repartir su tiempo de vacaciones entre dos lugares, uno en la costa y otro en la montaña. El día de estancia en la costa le cuesta 100 € mientras que el día de estancia en la montaña le cuesta 200 €. Su presupuesto global para todas las vacaciones son 2000 € y no desea pasar más de 10 días en la costa.

a) ¿Cuántos días puede pasar en cada sitio? Plantear algebraicamente el problema y representar el conjunto de soluciones.

b) Si desea disfrutar del mayor número de días de vacaciones posible, ¿cuántos pasará en cada uno de los lugares? ¿Agotará el presupuesto?

B2-12:

Una empresa de accesorios para automóviles fabrica una pieza en dos tipos de acabado: normal y especial. Cada pieza en acabado normal requiere 1 kg. de material y 0.25 kg. de pintura, y su venta rinde un beneficio de 2.5 €, mientras que cada pieza en acabado especial requiere 1 kg. de material y 0.5 kg. de pintura, pero deja 4 € de beneficio.

La empresa dispone diariamente de 150 kg. de material y 50 kg. de pintura. Además, y por falta de suficiente personal, la empresa no puede vender (al día) más de 125 piezas de cada tipo de acabado.

a) ¿Cuántas piezas de cada tipo puede fabricar?. Plantear el problema y representar gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántas le conviene fabricar si el objetivo que pretende es que el beneficio sea el máximo posible? ¿A cuánto ascenderá este beneficio?

c) Supongamos que la empresa puediera contratar más personal. Analizar los cambios que esto pudiera suponer en los resultados del apartado anterior.

B2-13:

Un centro de salud ha detectado, en cierto barrio, una grave carencia en la dieta alimentaria de los niños. Realiza un estudio nutricional y llega a la conclusión de que cada niño debe tomar diariamente al menos 12 unidades de vitamina A, 4 unidades de vitamina B y ocho unidades de vitamina C. Para ello, se dispone de dos tipos de comprimidos X e Y, cada *uno de los cuales tiene la siguiente composición (en unidades vitamínicas):*

	A	*B*	*C*
X	*3*	*2*	*4*
Y	*4*	*1*	*3*

Cada comprimido X tiene un coste de 0.1 € mientras que cada comprimido de Y tiene un coste de 0.5 €. ¿Cuántos comprimidos de cada tipo tendrá que tomar diariamente cada niño para satisfacer sus necesidades vitamínicas, al menor coste posible? ¿Cuál será ese coste diario?

B2-14:

Una vinatería tiene 180 botellas de vino de La Rioja y 160 botellas de vino de Ribera del Duero. Desea elaborar dos tipos de lotes para regalo con dichas botellas: lotes A formados por tres botellas de Rioja y una de Ribera, que venderá a 40 €; lotes B formados por una botella de Rioja y dos de Ribera que venderá a 50 €. Si suponemos que consigue vender todos los lotes, ¿cuántos lotes de cada tipo deberá de preparar para que las ventas sean máximas? ¿A cuánto ascenderán las ventas?

B2-15:

Una fabrica de coches produce dos modelos de un mismo vehículo: gasolina y diesel. La venta de cada modelo de gasolina genera un beneficio de 450 €, mientras que la venta de cada modelo diesel genera 600 €. La capacidad de producción de la fábrica limita el total de vehículos producidos diariamente a 500 coches. Además, tampoco pueden producirse más de 400 coches de gasolina ni más de 300 coches diesel al día. Si suponemos que se vende toda la producción de la fábrica, ¿cuántos coches de cada tipo coviene fabricar para maximizar las ganancias? ¿A cuánto ascenderán éstas?

B2-16:

Una cooperativa agrícola dispone de 300 hectáreas en las que plantar dos tipos de cultivos A y B. En el plan de regadíos, se le han asignado únicamente 400 unidades volumétricas de agua, que tiene que repartir entre los dos cultivos. Sabemos que cada hectárea de cultivo A requiere 1.5 unidades de agua, mientras que cada hectárea de cultivo B requiere tan solo 1 unidad de agua. Para poder atender a los compromisos adquiridos, la cooperativa ha de plantar, al menos, 100 hectáreas del cultivo A y 50 del cultivo B. Por otra parte, esperamos que cada hectárea de cultivo A dé unos beneficios de 2500 € y que cada hectárea de cultivo B dé 2000 €. ¿Cuántas hectáreas de cada tipo de cultivo es necesario plantar para que el beneficio resulte ser máximo? ¿A cuánto ascenderá?

B2-17:

Una joyería recibe de su proveedor una buena oferta de joyas en oro y en plata, aunque éste impone determinadas condiciones de adquisición máxima para cada joyería: no puede adquirir más de una docena de joyas de oro, ni más de una docena de joyas de plata; el doble del número de joyas de oro más el número de joyas de plata adquiridas no puede ser superior a 22; el número de joyas de oro más el doble del numero de joyas de plata no *puede ser superior a 26. Si sabemos que la joyería obtiene un beneficio de 70 € por cada joya de oro y de 90 € por cada joya de plata, ¿cuántas joyas de cada clase deberá de adquirir para maximizar su beneficio? ¿A cuánto ascenderá este?*

B2-18:

Una asociación de vecinos está organizando una excursión en autobús a la que acudirán 400 personas del barrio. Contactan con una empresa de autobuses que dispone de 8 autobuses normales (40 plazas) y de 10 autobuses grandes (50 plazas). El alquiler de cada autobús normal cuesta 600 € mientras que el alquiler de cada autobús grande cuesta 800 €. Por otra parte, la empresa únicamente dispone de 9 conductores libres en las fechas en que se pretende realizar el viaje. ¿Cuántos autobuses de cada tipo habrá que contratar para que el coste del viaje sea mínimo? ¿Cuál será este coste?

B2-19:

Un taller de bisutería produce anillos sencillos, que vende a 4.50 € y anillos con adornos que vende a 6 €. Las máquinas condicionan la producción de manera que no pueden fabricarse al día mas de 400 anillos sencillos, ni más de 300 anillos con adornos. Tampoco pueden fabricarse más de 500 anillos en total por limitaciones de mano de obra. en total. ¿Cuántos anillos de cada clase interesará fabricar para obtener la mayor cantidad de ingresos posible? ¿A cuánto ascenderán esos ingresos?

B2-20:

Un agente inmobiliario efectúa dos tipos de operaciones: de ventas y de alquileres de pisos. Por cada venta recibe una comisión de 1000 € y por cada alquiler una comisión de 600 €. Trimestralmente y en total, no puede realizar más de 16 operaciones. Por razones de su cartera de clientes, el número de alquileres no puede ser mayor que la diferencia entre 18 y el doble del número de ventas. Además, el doble del número de ventas más el triple del número de alquileres, no puede ser superior a 26. ¿Cuántas operaciones de cada tipo debe realizar para maximizar sus comisiones? ¿A cuánto ascenderán éstas?

B2-21:

Disponemos de un camión que puede transportar, como máximo, 12 tm. Tenemos que llevar arena y cemento a una obra que necesita, al menos, 6 toneladas de arena y por lo menos la mitad de esa misma cantidad de cemento. Como el cemento se presenta en sacos y la arena no, se cobra diferente según el material a transportar. 30 € por tonelada de arena y 20 € por tonelada de cemento. Determina cuántas toneladas de arena y cemento conviene transportar para maximizar la ganancia en el transporte. ¿A cuánto ascenderá ese transporte?

B2-22:

Una empresa debe de contratar formación en informática para sus empleados. Puede contratar un máximo de 60 horas de curso. Cada hora de curso de informática básica le cuesta 30 €, mientras que cada hora de curso *de informática avanzada le cuesta 50 €. Para adquirir unos conocimientos suficientes se consideran necesarias, al menos, 36 horas de curso. Además es necesario contratar, al menos, 6 horas de curso de informática avanzada.*

¿Cuántas horas de cada tipo son necesarias para que el cursillo resulte lo más económico posible? ¿Cuánto costará?

B2-23:

Para preparar los abonos A y B se mezclan ciertos fertilizantes F_1 y F_2 en las siguientes proporciones:

	F_1	F_2
A:	*100 gr/kg*	*50 gr/kg*
B:	*70 gr/kg*	*80 gr/kg*

Se dispone de 39 kg y 24 kg de los fertilizantes F_1 y F_2, respectivamente. Los beneficios que se obtienen al vender los abonos A y B son de 7.5 €/kg y 6 €/kg, respectivamente. ¿Cuántos kilogramos se deben fabricar de cada tipo de abono para maximizar el beneficio? ¿A cuánto ascenderá el citado beneficio?

B2-24:

Una agencia que organiza viajes por mar tiene que gestionar el transporte simultáneo de 1800 viajeros con una naviera. Esta última dispone de dos tipos de barcos: los de tipo A con capacidad para 150 viajeros y los de tipo B con capacidad para 200 viajeros; pero únicamente dispone de 6 de estos últimos barcos. El coste de cada viaje en barco, así como el número de tripulantes que requiere cada uno de ellos viene dado en la siguiente tabla:

	Coste	*n^o tripulantes*
A:	*1000 €*	*6*
B:	*1200 €*	*8*

Se sabe que la naviera únicamente dispone de 96 tripulantes. ¿Cuántos barcos de cada clase minimizarán el coste del transporte? ¿A cuánto ascenderá éste?

B2-25:

Una persona dispone de 110.000 € y se dispone a especular con ellos. Puede invertir hasta 80.000 € en un negocio A que le ofrece un 20% de rendimiento; también puede invertir hasta 70.000 € en otro negocio B que le ofrece un 30% de rendimiento. Por otra parte, se ha comprometido a no invertir en el negocio B más de vez y media lo que invierta en A. ¿Cómo debe de distribuir su inversión de manera que obtenga el máximo rendimiento? ¿A cuánto ascenderá este?

3

Funciones, continuidad, límites y derivadas

3.1 Problemas PAU

Junio 94-A:

En cierto colectivo de familias, el gasto mensual en ocio, $G(x)$ en miles de pesetas, está relacionado con sus ingresos mensuales, x en miles de pesetas, a través de la siguiente expresión:

$$G(x) = \begin{cases} 0.02x - 1 & si \quad 0 \leq x \leq 100 \\ \frac{30x}{2x+2300} & si \quad 100 < x \end{cases}$$

a) Estudiar la discontinuidad del gasto. ¿El gasto en ocio de una familia es sensiblemente distinto si sus ingresos son "ligeramente" inferiores o superiores a las 100.000 ptas?

b) Justificar que el gasto en ocio es siempre creciente con los ingresos.

c) Justificar que ninguna familia realiza un gasto en ocio superior a las 15.000 ptas.

Solución:

Apartado a:

En el interior del primer intervalo $[0, 100]$ la función es continua.

En el interior del segundo intervalo $(100, \infty)$ también lo es, puesto que el valor de x que anula el denominador:

$2x + 2300 = 0$, es decir, $\{x = -1150\}$ queda fuera del intervalo.

Bastará con analizar lo que sucede en el punto de unión $x = 100$

$\exists G(x)$ en $x = 100 :$ $\quad G(100) = 0.02 \cdot 100 - 1 = 1$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 100^-} G(x) = \lim_{x\to 100^-} 0.02x - 1 = 1 \\ \lim_{x\to 100^+} G(x) = \lim_{x\to 100^+} \frac{30x}{2x+2300} = \frac{3000}{2500} = \frac{6}{5} = 1.2 \end{cases}$$

Como que los límites laterales son distintos, la función presenta un punto de discontinuidad inevitable en $x = 100$. Por ello, el gasto en ocio de una familia, cambia sensiblemente si sus ingresos son "ligeramente" inferiores o superiores a las 100.000 ptas. Pasa de ser 1 a 1.2 (miles de ptas.)

Apartado b:

La primera función: $0.02x - 1$ es una recta de pendiente positiva.

La segunda función: $\frac{30x}{2x+2300} = \frac{15x}{x+1150}$ tiene como derivada: $\frac{17\,250}{(x+1150)^2} > 0$

En el punto de abscisa $x = 100$ el salto es positivo; el valor de la función pasa de 1 a 1.2

Por lo tanto, la función $G(x)$, que determina el gasto en ocio, es siempre creciente con los ingresos.

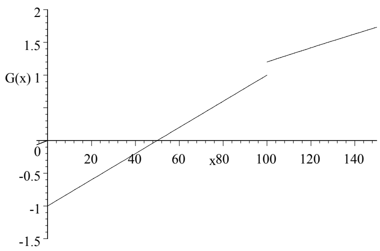
Apartado c:

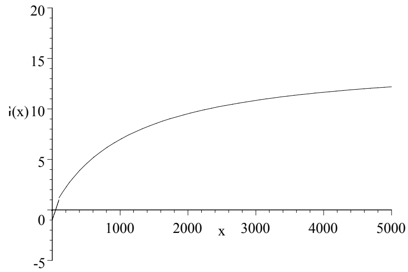
Como que la función es creciente, se trata de determinar la tendencia de la función cuando x aumenta indefinidamente, es decir:

$\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{30x}{2x+2300} = 15.$

La función presenta una asíntota horizontal $G(x) = 15$; por lo tanto, ninguna familia realiza un gasto en ocio superior a las 15000 ptas.

$$G(x) = \begin{cases} 0.02x - 1 & si \quad 0 \leq x \leq 100 \\ \frac{30x}{2x+2300} & si \quad 100 < x \end{cases}$$





Junio 94-B:

Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad, $R(x)$ en miles de ptas., viene dada en función de la cantidad que se invierta, x en miles de ptas., por medio de la siguiente expresión:

$$R(x) = -0.001x^2 + 0.5x + 2.5$$

a) Deducir razonadamente qué cantidad de dinero le conviene invertir a un cliente en dicho plan.

b) ¿Qué rentabilidad obtendría?

Solución:

Apartado a:

Se trata de determinar un valor de x para el que la función R(x) presente un máximo. Para ello, podemos:

- Tener en cuenta que se trata de una parábola y determinar su eje y orientación:

· eje parábola: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0.5}{-0.002} = 250 \quad \to x = 250$

· orientación: $a = -0.001 < 0 \quad \to$"hacia abajo" o convexa.

por tanto, la cantidad a invertir que hace máxima la rentabilidad es 250.000 ptas.

- Determinar el valor de x que anule la primera derivada:

$R'(x) = -0.00\,2x + 0.5 = 0$, lo que se verifica para: $\{x = 250\}$

y comprobar que es un máximo analizando el signo de la segunda derivada:

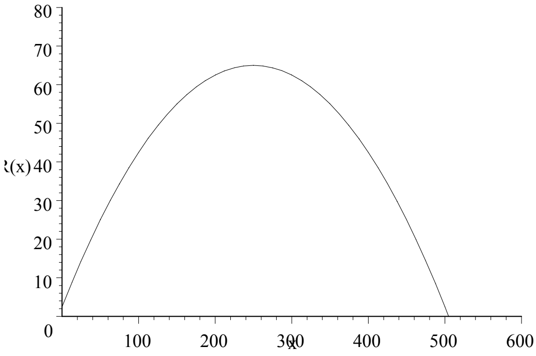
$R''(x) = -0.00\,2 < 0 \quad \to \quad$ Máximo.

por tanto, la cantidad a invertir que hace máxima la rentabilidad es 250.000 ptas.

Apartado b:

Se trata de determinar el valor de la función para $x = 250$.

$R(x) = -0.001x^2 + 0.5x + 2.5 \quad ; \quad R(250) = 65$ (miles de pesetas).



Septiembre 94:

La puntuación obtenida por un estudiante en un examen depende del tiempo que haya dedicado a su preparación (x, expresado en horas) en los siguientes términos:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & si \quad 0 \leq x \leq 15 \\ \frac{2x}{0.2x+3} & si \quad 15 < x \end{cases}$$

a) Estudiar el crecimiento de esta función. Si un estudiante ha dedicado menos de 15 horas a preparar el examen, justificar que no aprobará, esto es, que obtendrá menos de 5 puntos.

b) Justificar que la puntuación nunca puede ser superior a 10 puntos.

Solución:

Apartado a:

Se trata de una función definida a tramos.

- En el intervalo $[0, 15]$ la función es continua y creciente; se trata de una recta de pendiente $\frac{1}{3}$.

- En el intervalo $(15, \infty)$ la función es continua, puesto que el valor que anula el denominador se encuentra fuera del intervalo:

$0.2x + 3 = 0 \rightarrow \{x = -15\}$; tambien es creciente puesto que la primera derivada es positiva:

$G(x) = \frac{2x}{0.2x+3} = \frac{10x}{x+15} \rightarrow G'(x) = \frac{150}{(x+15)^2}$

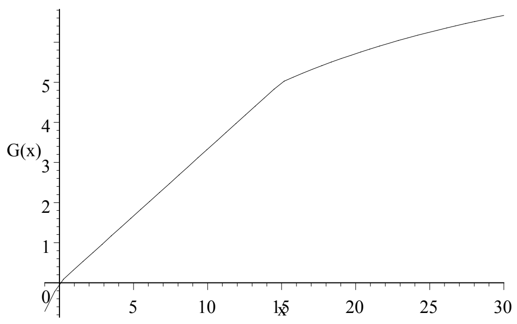
Bastará con analizar lo que sucede en el punto de unión $x = 15$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 15^-} G(x) = \lim_{x\to 15^-} \frac{x}{3} = \frac{15}{3} = 5 \\ \lim_{x\to 15^+} G(x) = \lim_{x\to 15^+} \frac{2x}{0.2x+3} = \frac{30}{6} = 5 \end{cases}$$

Como que los límites laterales son iguales, y coinciden con el valor de la función en el punto, la función es continua en todo su dominio.

$G(15) = \frac{15}{3} = 5$

Como que la función es continua y creciente, se comprueba que a valores $x < 15$ corresponderán notas menores a 5 puntos, por lo que el estudiante no aprobará.



Apartado b:

Se trata de determinar: $\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{0.2x+3} = \frac{2}{0.2} = 10$

Por lo que la puntuación nunca puede ser superior a 10 puntos; la función presenta una asíntota horizontal en $G(x) = 10$

Junio 95:

La producción de cierta hortaliza en un invernadero, $Q(x)$ en kg., depende de la temperatura, x en ^oC, según la expresión:

$Q(x) = (x+1)^2\,(32-x)$

a) Calcular razonadamente cuál es la temperatura óptima a mantener en el invernadero.

b) ¿Qué producción de hortaliza se obtendría?

Solución:

Apartado a:

Se trata de determinar un valor de x para el que la función $Q(x)$ presente un máximo.

$Q(x) = (x+1)^2\,(32-x) = -x^3 + 30x^2 + 63x + 32$

Para ello, derivamos la función y la igualamos a cero:

$Q'(x) = -3x^2 + 60x + 63 = 0$, cuyas soluciones son : $\{x = -1\}, \{x = 21\}$

Para determinar si se trata de máximos, mínimos o puntos de inflexión, analizamos el signo de la segunda derivada:

$Q''(x) = 60 - 6x$

$Q(-1) = 66 > 0 \rightarrow$ Mínimo

$Q(21) = -66 < 0 \rightarrow$ Máximo

Por lo que la temperatura óptima a mantener en el invernadero es de 21^oC.

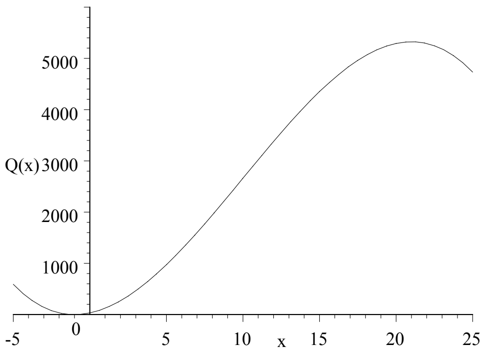
Apartado b:

Se trata de determinar el valor de la función para $x = 21$.

$Q(x) = (x+1)^2\,(32-x) = -x^3 + 30x^2 + 63x + 32$

$Q(21) = 5324$

Por lo que la producción de hortaliza obtenida sería 5324 kg.



Septiembre 95:

El tipo de interés anual, $I(t)$ en %, ofrecido por una entidad financiera depende del tiempo, t en años, que esté dispuesto a mantener la inversión a través de la siguiente expresión: $I(t) = \frac{90t}{t^2+9}$

a) Calcular razonadamente cuántos años le conviene pactar a un inversor que trate de optimizar el tipo de interés.

b) Si una inversión se mantuviese a muy largo plazo, ¿ el tipo de interés podría llegar a ser negativo? Justifica la respuesta.

Solución:

Apartado a:

Se trata de determinar un valor de t para el que la función $I(t) = \frac{90t}{t^2+9}$ presente un máximo.

Para ello, derivamos la función y la igualamos a cero:

$I'(t) = \frac{90\cdot\left(t^2+9\right)-90t\cdot 2t}{(t^2+9)^2} = -90\frac{t^2-9}{(t^2+9)^2} = 0 \rightarrow \{t=-3\}, \{t=3\}$

Para determinar si se trata de máximos, mínimos o puntos de inflexión, analizamos el signo de la segunda derivada:

$I''(t) = -90\frac{2t\cdot\left(t^2+9\right)^2-\left(t^2-9\right)\cdot 2\left(t^2+9\right)\cdot 2t}{(t^2+9)^4} = 180t\frac{t^2-27}{(t^2+9)^3}$

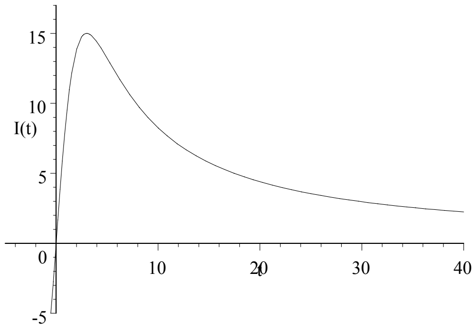
$I''(-3) = \frac{5}{3} > 0 \rightarrow$ Mínimo

$I''(3) = \frac{-5}{3} < 0 \rightarrow$ Máximo

Por lo que el tiempo t óptimo a mantener la inversión es de 3 años. En estas condiciones, el tipo de interés será: $I(3) = \frac{90\cdot 3}{3^2+9} = 15\%$

Apartado b:

La función es continua en todo su dominio y a partir de $t=3$ es decreciente; además, no presenta más máximos o mínimos que los calculados. Sin embargo, como $\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{90t}{t^2+9} = 0$ presenta una asíntota horizontal $I(t)=0$; por ello, el interés irá disminuyendo paulatinamente, pero no alcanzará nunca valores negativos.



Junio 96:

En un colectivo se ha observado que el gasto en cierto producto, $G(x)$ *en miles de ptas., está relacionado con el salario,* x *en cientos de miles de ptas., por medio de la siguiente expresión:* $G(x) = \frac{20x}{x^2+1}$

a) Calcular razonadamente la cuantía del salario a la que corresponde el mayor gasto.

b) ¿Cómo se comporta el gasto cuando el salario es suficientemente alto?

Solución:

Apartado a:

Se trata de determinar un valor de x para el que la función $G(x)$ presente un máximo.

Para ello, derivamos la función, la igualamos a cero y determinamos los puntos críticos:

$$G'(x) = \frac{20\left(x^2+1\right)-20x(2x)}{(x^2+1)^2} = -20\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

Para que $G'(x)$ valga cero, será suficiente que se anule el numerador:

$$x^2-1=0 \qquad \to \{x=1\}, \{x=-1\}$$

La solución $x=-1$ carece de sentido físico en este problema; por ello, verificamos únicamente la solución $x=1$. Para comprobar que se trata de un máximo, analizamos el signo de la segunda derivada:

$$G''(x) = -20\frac{2x\left(x^2+1\right)^2-\left(x^2-1\right)2\left(x^2+1\right)2x}{(x^2+1)^4} = 40x\frac{x^2-3}{(x^2+1)^3}$$

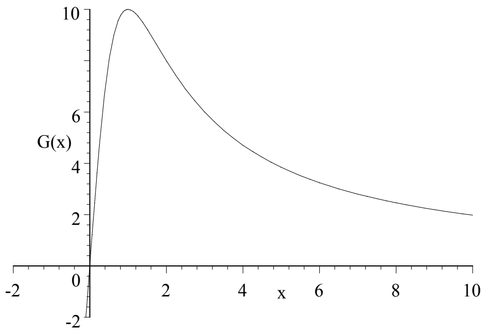
$G''(1) < 0 \qquad \to \qquad$ Máximo en x=1

Luego el gasto será máximo cuando el salario sea 100.000 ptas.

Apartado b:

Se trata de determinar $\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{20x}{x^2+1} = 0$

Es decir, cuando el salario sea lo suficientemente alto, el gasto en ese producto tenderá a cero.



Junio 96-R:

El precio alcanzado por cierto tipo de obras de arte en una subasta, $P(x)$ en miles de ptas., está relacionado con el número de asistentes que estén interesados en su adquisición, a través de la siguiente expresión:

$$P(x) = \begin{cases} 5x + 50 & si \quad 0 \leq x \leq 10 \\ \frac{38x+700}{9} & si \quad 10 < x \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de $P(x)$ en el punto $x = 10$. ¿ Qué ocurre con el precio si el número de interesados es "ligeramente" superior a 10?.

b) Estudiar el crecimiento del precio. Calcular el precio de salida, $x = 0$, y justificar que se trata del precio más bajo que puede alcanzar una obra en la subasta.

Solución:

Apartado a:

$$\begin{cases} \lim_{x \to 10^-} P(x) = \lim_{x \to 10^-} (5x + 50) = 100 \\ \lim_{x \to 10^+} P(x) = \lim_{x \to 10^+} \left(\frac{38x+700}{9}\right) = 120 \end{cases}$$

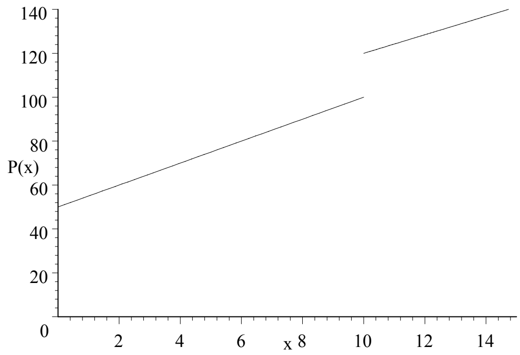
Como los límites laterales son distintos, la función es discontinua en $x = 10$. Se trata de una discontinuidad inevitable de salto 20. Por ello, existe una diferencia importante entre el precio que alcanza una obra de arte en la subasta, según que el número de asistenetes sea "ligeramente" inferior o superior a 10 personas.

Apartado b:

En cada uno de los tramos considerados, la función es continua y creciente; el primer tramo se corresponde con una recta de pendiente 5 y el segundo tramo con otra recta de pendiente $\frac{38}{9}$. Por otra parte, comprobamos que la primera derivada de la función es positiva:

$$P'(x) = \begin{cases} 5 & si \quad 0 \leq x \leq 10 \\ \frac{38}{9} & si \quad 10 < x \end{cases}$$

Por ello, el precio alcanzado por la obra de arte, aumentará siempre con el número de asistentes a la subasta. El precio mínimo se alcanzará cuando el número de asistentes sea nulo: $P(0) = 50$ (50.000 ptas.)



Septiembre 96:

Un taller artesanal está especializado en la producción de cierto tipo de juguetes. Los costes de fabricación, $C(x)$ en pesetas, están relacionados con el número de juguetes fabricados, x, a través de la siguiente expresión:

$C(x) = 10x^2 + 2000x + 250000$

El precio de venta de cada juguete es de 8000 ptas.

a) Plantear la función de ingresos que obtiene el taller con la venta de los juguetes producidos.

b) Plantear la función de beneficios, entendidos como diferencia entre ingresos y costes de fabricación.

c) ¿Cuántos juguetes debe fabricar para maximizar beneficios? ¿A cuánto ascenderán estos beneficios?

Solución:

Apartado a:

La función de ingresos vendrá dada por los ingresos totales de las ventas. Así: $I(x) = 8000x$

Apartado b:

La función de beneficios vendrá dada por los ingresos totales de las ventas menos los costes de fabricación. Así: $B(x) = 8000x - C(x)$;

$8000x - \left(10x^2 + 2000x + 250000\right) = -10x^2 + 6000x - 250\,000$

Apartado c:

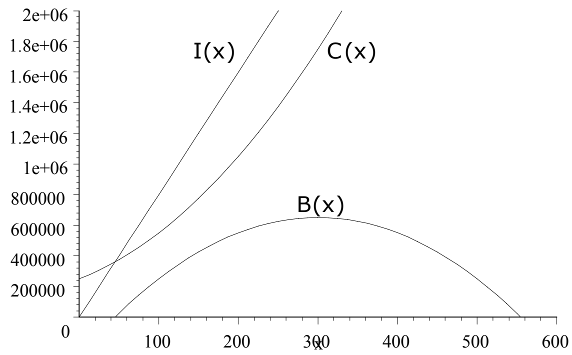
Se trata de encontrar un máximo en la función de beneficios y de determinar su valor:

$B'(x) = -20x + 6000 = 0 \to \{x = 300\}$

$B''(x) = -20 < 0 \to$ Máximo

$B(300) = -10 \cdot 300^2 + 6000 \cdot 300 - 250000 = 650\,000$

Es decir: los beneficios serán máximos al fabricar 300 juguetes, y en estas condiciones alcanzarán las 650 000 pesetas.



Junio 97:

En cierto colectivo de hogares se ha observado empíricamente que el gasto mensual en alquiler de películas de vídeo ($G(t)$ en miles de ptas.) depende el tiempo dedicado mensualmente a ver Tv. (t, en horas) en los siguientes términos:

$$G(t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq t < 20 \\ 0.1t & si \quad 20 \leq t \leq 100 \\ \frac{40t-1000}{2t+100} & si \quad 100 < t \end{cases}$$

a) Justifica que la función $G(t)$ es discontinua en $t = 20$.

¿Existe una diferencia importante entre el gasto de los hogares, según que el tiempo dedicado a ver Tv. sea "ligeramente" inferior o superior a 20 horas?. Razona la respuesta.

b) Justifica que en cualquier hogar en que se vean más de 100 horas de Tv. al mes, el gasto en alquiler de vídeos supera las 10.000 ptas.

Solución:

Apartado a:

$$\begin{cases} \lim_{t\to 20^-} G(t) = \lim_{t\to 20^-} 0 = 0 \\ \lim_{t\to 20^+} G(t) = \lim_{t\to 20^+} 0.1t = 2 \end{cases}$$

Como los límites laterales son distintos, la función es discontinua en el punto $t = 20$. Se trata de una discontinuidad inevitable de salto 2. Por ello, existe una diferencia importante entre el gasto de los hogares que ven "ligeramente" más o menos de 20 horas mensuales de Tv. Esa diferencia es, precisamente, el salto de la discontinuidad; es decir 2000 ptas.

Apartado b:

$$\begin{cases} \lim_{t\to 100^-} G(t) = \lim_{t\to 100^-} 0.1t = 10 \\ \lim_{t\to 100^+} G(t) = \lim_{t\to 100^+} \frac{40t-1000}{2t+100} = 10 \end{cases}$$

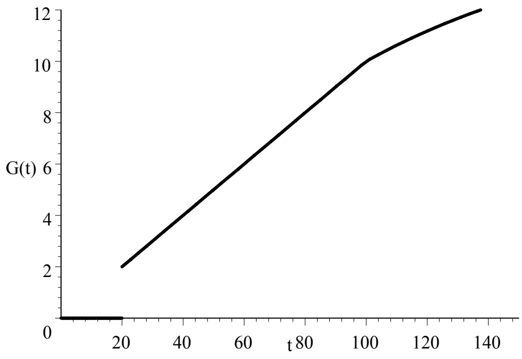
$G(100) = 0.1 \times 100 = 10$

Luego la función es continua en $t = 100$ puesto que los límites laterales son iguales y coinciden con el valor de la función en el punto.

Por otra parte, cuando $t > 100$, tenemos que: $G(t) = \frac{40t-1000}{2t+100} = \frac{20t-500}{t+50}$.

$G'(t) = \frac{20(t+50)-(20t-500)}{(t+50)^2} = \frac{1500}{(t+50)^2} > 0$. Como la primera derivada es positiva, la función es creciente.

Por ello, el gasto mensual en alquiler de vídeos tiene que superar las 10 (miles de ptas.) que es el valor que adopta la función en $t = 100$.



Septiembre 97:

En una empresa, la relación entre la producción (x, expresada en miles de toneladas) y los costes medios de fabricación ($C(x)$, expresados en miles de ptas.) es del tipo: $C(x) = ax^2 + bx + c$.

a) Sabiendo que dichos costes ascienden a 43.000 ptas si la producción es de 1.000 tm., que son 36.000 ptas. si se producen 2.000 tm., y que la derivada segunda de dicha función es igual a 2, determinar la función de costes medios.

b) Obtener razonadamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $C(x)$.

c) A la vista de los resultados del apartado anterior, calcular razonadamente la producción óptima de la empresa y sus costes medios.

Solución:

Apartado a:

Se trata de determinar los parámetros a, b y c en la función:

$C(x) = ax^2 + bx + c$.

$C'(x) = 2ax + b; \qquad C''(x) = 2a$

Sabemos que:

$$\begin{array}{l} \cdot \text{ si } x = 1, \text{ entonces } C(x) = 43 \\ \cdot \text{ si } x = 2, \text{ entonces } C(x) = 36 \\ \cdot \text{ la derivada segunda de la función vale 2} \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 43 = a + b + c \\ 36 = 4a + 2b + c \\ 2a = 2 \end{array} \right. \rightarrow$$

$\rightarrow \{a = 1, b = -10, c = 52\}$

Por lo que la función de costes medios será: $C(x) = x^2 - 10x + 52$.

Apartado b:

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento podemos:

- tener en cuenta que se trata de una parábola y determinar su eje y su orientación:

$\cdot$ el eje de la parábola viene dado por $x = \frac{-b}{2a} = \frac{10}{2} = 5$

$\cdot$ la orientación viene dada por el signo de: $a = 1 > 0 \rightarrow$ cóncava

por tanto, la parábola será decreciente en $(-\infty, 5)$ y creciente en $(5, \infty)$

- o bien, analizar el signo de la primera derivada de la función:

$C(x) = x^2 - 10x + 52$; $C'(x) = 2x - 10$, que se anula en $x = 5$

$\cdot$ si $x \in (-\infty, 5)$, entonces $C'(x) < 0 \rightarrow$ función decreciente

$\cdot$ si $x \in (5, +\infty)$, entonces $C'(x) < 0 \rightarrow$ función decreciente

Apartado c:

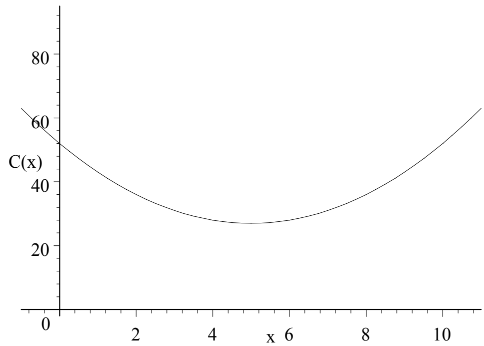
La producción óptima que haga mínimos los costes medios de fabricación; se situará en el eje de la parábola o, lo que es lo mismo, en el valor de x que anule la primera derivada, es decir, en $x = 5$ (miles de toneladas).

Aunque no resultaría necesario, dada la orientación de la parábola, podemos verificar que se trata de un mínimo analizando el signo de la segunda derivada de la función:

$C''(x) = 2 > 0 \rightarrow$ mínimo.

En $x = 5$, los costes medios de producción, resultan ser:

$C(5) = 5^2 - 50 + 52 = 27$ (miles de ptas.)



Junio 98:

Cierta empresa de material fotográfico oferta una máquina que es capaz de revelar y pasar a papel 15.5 *fotografías por minuto. Sin embargo, sus cualidades se van deteriorando con el tiempo de forma que el número de fotografías por minuto será función de la antigüedad de la máquina de acuerdo a la siguiente expresión (* $F(x)$ *representa el número de fotografías por minuto cuando la máquina tiene* x *años):*

$$F(x) = \begin{cases} 15.5 - 1.1x & si \quad 0 \le x \le 5 \\ \frac{5x+45}{x+2} & si \quad x > 5 \end{cases}$$

a) estudiar la continuidad de la función F.

b) comprobar que el número de fotografías por minuto decrece con la antigüedad de la máquina. Justificar que si tiene más de 5 *años revelará menos de* 10 *fotografías por minuto.*

c) justificar que por muy vieja que sea la máquina no revelará menos de 5 fotografías por minuto.

Solución:

Apartado a:

Se trata de una función definida a tramos. En el interior de cada uno de los intervalos la función es continua. Bastará con analizar el punto de unión $x = 5$.

$$\begin{cases} \lim_{x\to 5^-} F(x) = \lim_{x\to 5^-} 15.5 - 1.1x = 15.5 - 5.5 = 10 \\ \lim_{x\to 5^+} F(x) = \lim_{x\to 5^+} \frac{5x+45}{x+2} = \frac{70}{7} = 10 \end{cases}$$

$$F(5) = 15.5 - 5.5 = 10$$

Como los límites laterales son iguales y, además, coinciden con el valor de la función en $x = 5$, la función es continua en ese punto.

Apartado b:

Se trata de comprobar que la función es decreciente en todo su dominio:

- En el primer tramo bastará con observar que se trata de una recta de pendiente negativa.

- Para analizar el segundo tramo, calculamos la derivada de la función:

$F'(x) = \frac{5(x+2)-(5x+45)}{(x+2)^2} = -\frac{35}{(x+2)^2}$ si $x > 5$

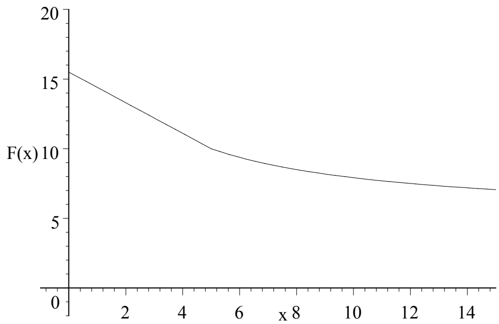
y observamos que, independientemente del valor que adopte x, la derivada será siempre negativa.

Por tanto, el número de fotografías por minuto decrecerá siempre con la antigüedad de la máquina.

Para justificar que si tiene más de 5 años revelará menos de 10 fotografías por minuto, bastará con calcular $F(5) = 15.5 - 5.5 = 10$ y recordar que la función es decreciente.

Apartado c:

Para justificar que nunca revelará menos de 5 fotografías por minuto, bastará con determinar: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+45}{x+2}\right) = 5$ y constatar que la funcion presenta una asíntota horizontal $F(x) = 5$



Septiembre 98:

Se ha construido una presa de almacenamiento de agua cuyos costes de mantenimiento diarios son una función de la cantidad de agua que la misma tiene almacenada. Tales costes (en ptas.) vienen dados por la siguiente expresión ($C(x)$ representa el coste si el volumen de agua, en millones de metros cúbicos, es x) :

$C(x) = x^3 + x^2 - 8x + 73$

a) encontrar el volumen diario de agua óptimo que debe mantenerse para minimizar costes.

b) calcular el coste mínimo diario que supone el mantenimiento de la instalación. Si un día la presa tiene almacenados 3 millones de metros cúbicos de agua, ¿cuánto se ha gastado de más respecto del coste mínimo?

Solución:

Apartado a:

Se trata de encontra un valor de x que haga mínima la función $C(x)$:

Para ello, derivamos la función, la igualamos a cero y determinamos los puntos críticos.

$C(x) = x^3 + x^2 - 8x + 73 \to C'(x) = 3x^2 + 2x - 8$

$3x^2 + 2x - 8 = 0$ cuyas dos soluciones son: $\{x = -2\}, \left\{x = \frac{4}{3}\right\}$

En estos puntos, podemos encontrar un máximo, un mínimo o un punto de inflexión.

Como que en este problema las soluciones negativas no tienen una interpretación física, analizamos únicamente la solución $x = \frac{4}{3}$. Para ello, estudiamos el signo de la segunda derivada de la función en ese punto:

$$C''(x) = 6x + 2; \qquad C''(\tfrac{4}{3}) = 8 + 2 = 10 > 0$$

Como la segunda derivada en el punto es positiva, en $x = \frac{4}{3}$ tendremos un mínimo. Por tanto, el volumen diario de agua óptimo que debe mantenerse para minimizar costes es de $\frac{4}{3}$ millones de metros cúbicos.

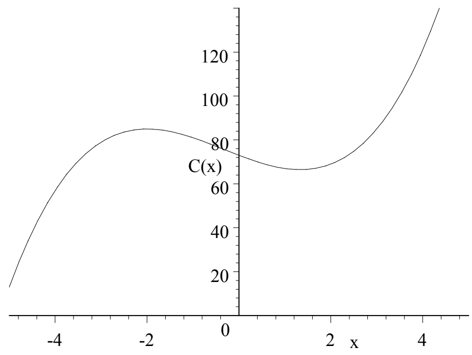
Apartado b:

$C(x) = x^3 + x^2 - 8x + 73; C(\frac{4}{3}) = \frac{1795}{27} = 66.481$

El coste mínimo diario que supone el mantenimiento de la instalación, viene dado por: $C(\frac{4}{3}) = \frac{1795}{27} = 66.481$ pesetas.

El día en el que la presa almacene 3 millones de metros cúbicos, el coste diario de mantenimiento será: $C(3) = 85$;

por ello, se gastarán: $85 - 66.481 = 18.519$ ptas. de más.



Junio 99:

Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x, en días), obteniéndose que:

$$T(x) = \begin{cases} \frac{300}{x+30} & si \quad 0 \leq x \leq 30 \\ \frac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2 & si \quad x > 30 \end{cases}$$

a) Justificar que la función T es continua en todo su dominio.

b) ¿Se puede afirmar que cuánto más se entrene un deportista menor será el tiempo en realizar la prueba? ¿ Algún deportista tardará más de 10 minutos en finalizar la prueba?

c) Por mucho que se entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 1 minuto? ¿y en menos de 2?.

Solución:

Apartado a:

Se trata de una función definida a tramos. En el interior de cada uno de ellos la función es continua, puesto que los valores que anulan el denominador se encuntran fuera de cada intervalo; bastará con analizar el punto de unión $x = 30$.

$$\begin{cases} \lim_{x\to 30^-} T(x) = \lim_{x\to 30^-} \frac{300}{x+30} = 5 \\ \lim_{x\to 30^+} T(x) = \lim_{x\to 30^+} \frac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2 = 3 + 2 = 5 \end{cases}$$

La función existe en $x = 30$, su valor es $T(30) = \frac{300}{30+30} = 5$, y coincide con el valor de los límites laterales que son iguales. Por ello, la función es continua en todo su dominio.

Apartado b:

Se trata de comprobar que la función es decreciente en cada tramo; para ello analizaremos el signo de la primera derivada:

- tramo 1: $T'(x) = -\frac{300}{(x+30)^2} \rightarrow$ negativa en $[0, 30]$
- tramo 2: $T'(x) = \frac{-1125(2x-20)}{(x^2-20x+75)^2} \rightarrow$ negativa en $(30, \infty)$

Como que la función es decreciente, sí se puede afirmar que cuanto más se entrene el deportista menor será el tiempo que tarde en realizar la prueba.

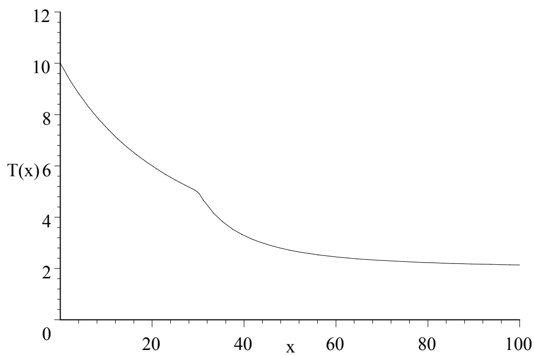
Como $T(0) = \frac{300}{0+30} = 10$, podemos decir que ningún deportista tardará más de 10 minutos en realizar la prueba; incluso si no entrena nada en absoluto.

Apartado c:

Para averiguar cuál será el menor tiempo posible para realizar la prueba, bastará recordar que la función es decreciente y determinar:

$\lim_{x\to\infty} \frac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2 = 2$

Por lo que ningún deportista podrá realizar la prueba en menos de 2 minutos por mucho que se entrene y, por supuesto, tampoco en menos de 1 minuto.



Septiembre 99:

Un individuo ha invertido en acciones de cierta compañía durante los últimos 10 años. El valor de su cartera a lo largo del tiempo (dinero invertido más beneficios obtenidos, en miles) viene dado por la siguiente expresión (x en años):

$$F(x) = \{ \ (x-2)^2 (1-2x) + 252x + 116 \quad si \quad 0 \leq x \leq 10$$

a) Determinar los intervalos de tiempo en que la cartera creció y aquellos en que decreció.

b) El individuo retira sus ingresos transcurridos 10 años. ¿Cuál hubiera sido el mejor momento para haberlo hecho? ¿Cuánto pierde por no haberlo retirado en el momento óptimo?

Solución:

Apartado a:

Tenemos una función polinómica por lo que es continua en todo su dominio. Se trata de determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Para ello, bastará con analizar el signo de la primera derivada:

$$F(x) = (x-2)^2(1-2x) + 252x + 116 = -2x^3 + 9x^2 + 240x + 120$$
$$F'(x) = -6x^2 + 18x + 240 = -6(x+5)(x-8) = 0$$
$$F'(x) = 0 \rightarrow \{x = -5\}, \{x = 8\}$$

Como $x = -5$ no tiene sentido físico en este problema, analizamos sólo los intervalos:

· intervalo $[0, 8)$: $F'(x) > 0 \rightarrow F(x)$ es creciente $\rightarrow$ la cartera creció.

· intervalo $(8-10]$: $F'(x) < 0 \rightarrow F(x)$ es decreciente $\rightarrow$ la cartera decreció.

Apartado b:

Dado que la función es continua, que a la izquierda de $x = 8$ es creciente, y que a la derecha de $x = 8$ es decreciente, la función debe de presentar un máximo en $x = 8$. Podemos verificarlo comprobando el signo de la segunda derivada en ese punto:

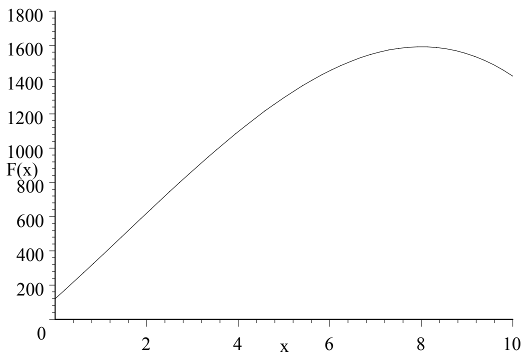
$F''(x) = -12x + 18; \qquad F''(8) = -96 + 18 = -78 < 0 \rightarrow$ máximo

El mejor momento para retirar su inversión hubiera sido a los 8 años.

Para averiguar la pérdida sufrida, comparamos el valor de la cartera a los 8 y a los 10 años, determinando los valores de la función en esos puntos: si $F(x) = (x-2)^2(1-2x) + 252x + 116$

$F(8) = 1592 \qquad F(10) = 1420$

Luego, habrá perdido: $1592 - 1420 = 172$ (miles de pesetas).



Junio 00:

Dada la función $F(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x \leq 1 \\ 3 - ax^2 & si \quad x > 1 \end{cases}$*, responda razonadamente a las siguientes cuestiones:*

a) ¿Para qué valores de a la función $F(x)$ *es continua en* $x = 1$*?*

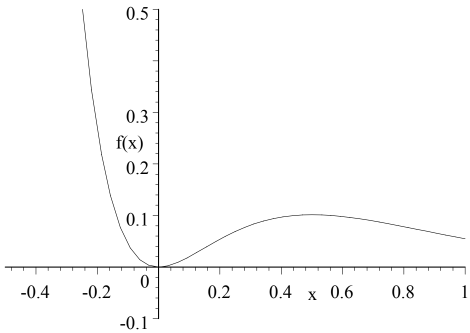
b) Si $F(x)$ *es continua cuando* $x \rightarrow x_0$ *entonces no existe* $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x)$ *¿es cierto?*

Solución:

Apartado a:

Para que una función sea continua en un punto es preciso que:
· la función exista y esté definida en ese punto:
$F(1) = 1 + 1 = 2$
· los límites laterales existan y coincidan con el valor de la función:
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^-} (x+1) = 1+1 = 2 \\ \lim_{x\to 1^+} F(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(3 - ax^2\right) = 3 - a1^2 = 3 - a \end{array} \right. ;$$
luego, habrá de cumplirse que: $2 = 3 - a \to a = 1$

Septiembre 00:
Determine e identifique los valores óptimos de la función $f(x) = 3x^2e^{-4x}$.
Solución:
Se trata de encontrar máximos y/o mínimos en la función dada. Para ello derivamos, igualamos a cero y determinamos los puntos críticos:
$f(x) = 3x^2e^{-4x} \to$
$f'(x) = 6xe^{-4x} + 3x^2\left(-4e^{-4x}\right) = 6xe^{-4x} - 12x^2e^{-4x} = -6xe^{-4x}(-1+2x)$
$-6xe^{-4x}(-1+2x) = 0 \to \{x = 0\}, \left\{x = \frac{1}{2}\right\}$
Comprobamos que se trate de máximos o mínimos analizando el signo de la segunda derivada en cada punto:
$f'(x) = 6xe^{-4x} - 12x^2e^{-4x} \to$
$f''(x) = 6e^{-4x} + 6x\left(-4e^{-4x}\right) - 24xe^{-4x} - 12x^2\left(-4e^{-4x}\right) =$
$= 6e^{-4x} - 48xe^{-4x} + 48x^2e^{-4x}$
· $f''(0) = 6 > 0 \to$ En $x = 0$ se presenta un mínimo.
· $f''\left(\frac{1}{2}\right) = -6e^{-2} < 0 \to$ En $x = \frac{1}{2}$ se presenta un máximo.
Los valores óptimos de la función $f(x) = 3x^2e^{-4x}$ serán:
· $f(0) = 0 \to A(0,0)$
· $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}e^{-2} \to B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}e^{-2}\right)$
La representación gráfica de la función $f(x) = 3x^2e^{-4x}$ será:



Junio 01:
El rendimiento (medido de 0 a 10) de cierto producto en función del tiempo de uso (x en años) viene dado por la siguiente expresión:

$f(x) = 8.5 + \frac{3x}{1+x^2}$ $\quad x \geq 0$

a) ¿Hay intervalos de tiempo en los que el rendimiento crece? ¿y en que decrece? ¿cuáles son?

b) ¿En qué punto se alcanza el rendimiento máximo? ¿Cuánto vale?

c) Por mucho que pase el tiempo, ¿puede llegar a ser el rendimiento inferior al que el producto tenía cuando era nuevo?

Solución:

Apartado a:

Se trata de analizar el crecimiento de la función $f(x)$ dada; para ello analizamos los signos que adopta la primera derivada:

$f(x) = 8.5 + \frac{3x}{1+x^2} \to f'(x) = \frac{3\left(1+x^2\right)-3x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{3-3x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{3\left(1-x^2\right)}{(1+x^2)^2}$

$\left(1-x^2\right) = 0 \to \{x=-1\}, \{x=1\}$

Por tanto:

$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
Decrecimiento	Crecimiento	Decrecimiento

Si consideramos únicamente el intervalo en el que la función está definida $x \geq 0$:

$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
Crecimiento	Decrecimiento

Apartado b:

Se trata de encontrar un máximo en la función anterior. Para ello:

$f'(x) = 0 \to \frac{3\left(1-x^2\right)}{(1+x^2)^2} = 0 \to \left(1-x^2\right) = 0 \to \{x=-1\},$

Consideramos únicamente la solución $\{x=1\}$ que se encuentra dentro del dominio de definición de la función.

Teniendo en cuenta el análisis del crecimiento desarrollado en el apartado anterior, podemos afirmar que, en $x=1$, la función presenta un máximo. Su valor será:

$f(x) = 8.5 + \frac{3x}{1+x^2} \to f(1) = 8.5 + \frac{3}{1+1^2} = 10$

Apartado c:

El rendimiento que el producto tenía cuando era nuevo viene dado por el valor que adopta la función en $x=0$:

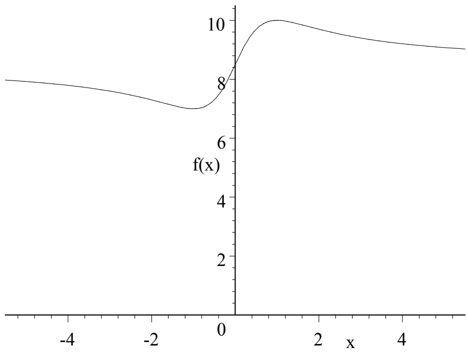
$f(x) = 8.5 + \frac{3x}{1+x^2} \to f(0) = 8.5 + \frac{0}{1+0^2} = 8.\,5$

El rendimiento crece hasta alcanzar el valor máximo de 10 al cabo de 1 año. A partir de ese momento, la función es decreciente; la tendencia será:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 8.5 + \frac{3x}{1+x^2} = 8.\,5$

La función presenta una asíntota horizontal $f(x) = 8.5$. Por ello, el rendimiento no podrá ser inferior a ese valor.

La representación gráfica de la función $f(x) = 8.5 + \frac{3x}{1+x^2}$ será:



Septiembre 01:

La cotización en pesetas de cierta moneda en los últimos 5 años y medio se ajusta bastante bien a la siguiente función ($C(t)$ indica la cotización en el tiempo t medido en años):

$$C(t) = (-t^2+1)(t-9) - 16t + 59 \qquad 0 \leq t \leq 5.5$$

a) Encuentra el intervalo o intervalos de tiempo en que la cotización creció, y aquél o aquéllos en que decreció.

b) ¿En qué momentos hubo una cotización más baja y más alta? ¿cuáles fueron esas cotizaciones?

c) ¿Tiene la función $C(t)$ algún punto de inflexión? Esboza un dibujo de dicha función.

Solución:

Apartado a:

Se trata de analizar el crecimiento de la función $C(t)$ dada; para ello analizamos los signos que adopta la primera derivada:

$C(t) = \left(-t^2+1\right)(t-9) - 16t + 59 = -t^3 + 9t^2 - 15t + 50 \rightarrow$

$\rightarrow C'(t) = -3t^2 + 18t - 15$

$\left(-3t^2 + 18t - 15\right) = 0 \rightarrow \{t=1\}, \{t=5\}$

Por tanto:

$(-\infty, 1)$	$(1, 5)$	$(5, \infty)$
$C'(t) < 0$	$C'(t) > 0$	$C'(t) < 0$
Decrecimiento	Crecimiento	Decrecimiento

Si consideramos únicamente el intervalo en el que la función está definida

$0 \leq t \leq 5.5$:

$(0, 1)$	$(1, 5)$	$(5, 5.5)$
$C'(t) < 0$	$C'(t) > 0$	$C'(t) < 0$
Decrecimiento	Crecimiento	Decrecimiento

Apartado b:

Se trata de encontrar un máximo y un mínimo en la función anterior. Para ello:

$C'(t) = 0 \rightarrow \{t=1\}, \{t=5\}$

Comprobamos que se trate de máximos o mínimos analizando el signo de la segunda derivada en cada punto:

$C''(t) = -6t + 18$

$\cdot\ C''(1) = 12 > 0 \rightarrow$ En $x = 1$ se presenta un mínimo.

$\cdot\ C''(5) = -12 < 0 \rightarrow$ En $x = 5$ se presenta un máximo.

Los valores máximo y mínimo de la función $C(t) = -t^3 + 9t^2 - 15t + 50$ serán:

$\cdot\ C(1) = -1 + 9 - 15 + 50 = 43 \rightarrow A(1, 43)$

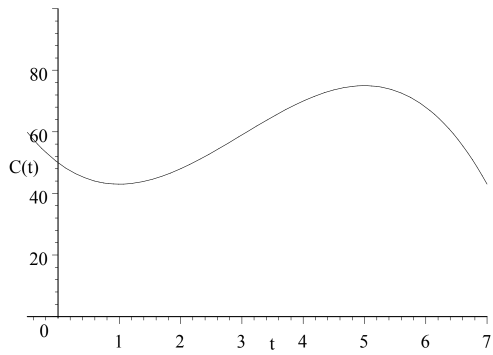
$\cdot\ C(5) = -125 + 225 - 75 + 50 = 75 \rightarrow B(5, 75)$

Apartado c:

La función $C(t)$ es polinómica, por tanto, continua en todo su dominio. Al presentar un mínimo en $t = 1$ y un máximo en $t = 5$, tiene que presentar, forzosamente, un punto de inflexión entre ambos. Para determinarlo, igualamos a 0 la segunda derivada:

$C''(t) = -6t + 18 = 0 \rightarrow \{t = 3\}$

La representación gráfica de la función $C(t) = -t^3 + 9t^2 - 15t + 50$ será:



Junio 02:

El porcentaje de ocupación de una cafetería entre las 13 y las 21 horas se explica bastante bien por la siguiente función ($P(x)$ representa el porcentaje de ocupación a las x horas).

$$P(x) = \left(x^2 - 55x\right)(x + 1) + 1015x - 5542 \qquad 13 \leq x \leq 21$$

a) Indica los intervalos de tiempo en que la ocupación crece y aquellos en que decrece.

b) Dibuja la función. ¿Cuándo se alcanza el porcentaje de ocupación más alto? ¿y el más bajo? ¿cuánto valen?

c) ¿La función tiene algún máximo o mínimo relativo que no sea absoluto?

Solución:

Apartado a:

Se trata de analizar el crecimiento de la función $P(x)$ dada; para ello analizamos los signos que adopta la primera derivada:

$P(x) = (x^2 - 55x)(x+1) + 1015x - 5542 = x^3 - 54x^2 + 960x - 5542$
$P'(x) = 3x^2 - 108x + 960$
$P'(x) = 0 \to 3x^2 - 108x + 960 = 0 \to \{x = 16\}, \{x = 20\}$

Por tanto:

$(-\infty, 16)$	$(16, 20)$	$(20, \infty)$
$P'(x) > 0$	$P'(x) < 0$	$P'(x) > 0$
Crecimiento	Decrecimiento	Crecimiento

Si consideramos únicamente el intervalo en el que la función está definida $13 \leq x \leq 21$:

$(13, 16)$	$(16, 20)$	$(20, 21)$
$P'(x) > 0$	$P'(x) < 0$	$P'(x) > 0$
Crecimiento	Decrecimiento	Crecimiento

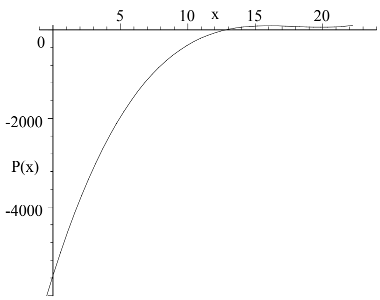
Apartado b:

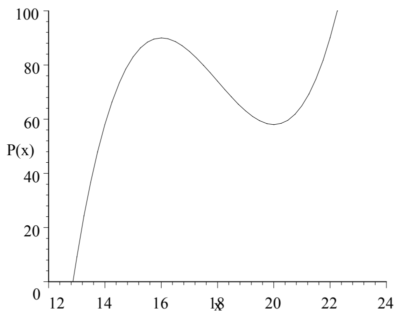
Se trata de una función polinómica, por tanto continua en todo su dominio, que presenta un máximo en $x = 16$ y un mínimo en $x = 20$. Determinamos el valor que adopta la función $P(x)$ en esos puntos:

$P(x) = (x^2 - 55x)(x+1) + 1015x - 5542$
$P(16) = 90 \to$ máximo en $A(16, 90)$
$P(20) = 58 \to$ mínimo en $B(20, 58)$

Además, sabemos que la función corta al eje de ordenadas en -5542, puesto que $P(0) = -5542$.

La representación gráfica de la función
$P(x) = (x^2 - 55x)(x+1) + 1015x - 5542$ será:





Apartado c:

No, puesto que la derivada es una función polinómica de grado 2, que únicamente puede presentar, como máximo, dos raíces: el máximo y el mínimo absolutos que hemos encontrado.

Septiembre 02:

Según cierta teoría médica el peligro de un virus se mide en función del tiempo que lleva en el organismo mediante la siguiente expresión ($P(t)$ es el peligro para un tiempo de t minutos)

$$P(t) = \begin{cases} t^2 & 0 \leq t \leq 5 \\ \frac{50t - 62.5}{0.5t + 5} & t > 5 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad del peligro como función del tiempo.

b) El peligro del virus ¿crece a medida que permanece más tiempo en el *organismo?*

c) Por mucho tiempo que lleve en el organismo, ¿puede superar el virus una peligrosidad de 95? ¿y de 100?

Solución:

Apartado a:

Se trata de una función definida a tramos.

En el interior del primer intervalo, la función es continua; es una parábola.

En el interior del segundo intervalo, la función también lo es, puesto que el valor que anularía el denominador $0.5t+5=0 \to \{t=-10\}$ se encuentra fuera del intervalo.

Bastará con analizar el punto de unión $t=5$.

Para que una función sea continua en un punto es preciso que:

· la función exista y esté definida en ese punto: $P(5)=5^2=25$

· los límites laterales existan y coincidan con el valor de la función:

$$\begin{cases} \lim_{t\to 5^-} P(t) = \lim_{t\to 5^-} 5^2 = 25 \\ \lim_{t\to 5^+} P(t) = \lim_{t\to 5^+} \frac{50\cdot 5-62.5}{0.5\cdot 5+5} = 25 \end{cases}$$

Por tanto la función es continua en todo su dominio.

Apartado b:

Se trata de analizar el crecimiento de la función.

En el intervalo $0 \le t \le 5$ la función es continua y pasa de adoptar el valor 0 al valor 25.

Para analizar el crecimiento en el intervalo $t>5$, analizamos el signo de la primera derivada.

$P(t) = \frac{50t-62.5}{0.5t+5} = \frac{100t-125}{t+10} \to P'(t) = \frac{1125.0}{(t+10.0)^2} > 0 \to$ Creciente.

Por lo tanto, el peligro del virus crece a medida que permanece más tiempo en el organismo.

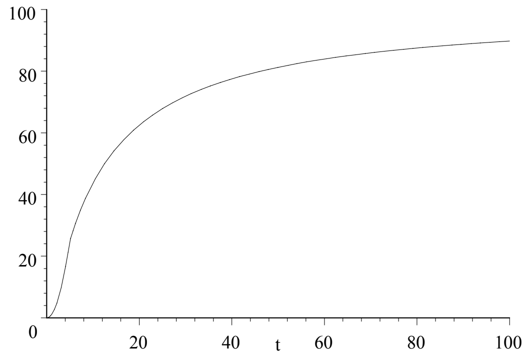
Apartado c:

Se trata de determinar la tendencia de la función cuando $t\to\infty$

$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{100t-125}{t+10} = \frac{100}{1} = 100$

Por tanto el virus puede llegar a superar la peligrosidad de 95, pero no llegará a alcanzar una peligrosidad de 100. La función presenta una asíntota horizontal $P(t)=100$

La representación gráfica de la función $P(t) = \begin{cases} t^2 & 0\le t\le 5 \\ \frac{50t-62.5}{0.5t+5} & t>5 \end{cases}$ será:



Junio 03:

El peso que una plancha de cierto material es capaz de soportar depende de la edad de la misma según la siguiente función (el peso P en toneladas; t representa la edad en años de la plancha):

$$P(t)=\begin{cases} 50-t^2 & 0\leq t\leq 3 \\ 56-\frac{20t}{t+1} & t>3 \end{cases}$$

a) ¿Es el peso una función continua con la edad? Según vaya pasando el tiempo ¿la plancha cada vez aguantará menos peso?

b) Dicen que por mucho tiempo que transcurra, la plancha siempre aguantará más de 40 toneladas. ¿Estás de acuerdo?

c) Esboza un dibujo de la gráfica de $P(t)$ cuidando la concavidad y convexidad de la función.

Solución:

Apartado a:

En el interior del primer intervalo $[0,3]$ la función es continua; se trata de una parábola.

En el interior del segundo intervalo $(3,\infty)$ también lo es, puesto que el valor de t que anula el denominador.

$t+1=0$, es decir, $\{t=-1\}$ queda fuera del intervalo.

Bastará con analizar lo que sucede en el punto de unión $t=3$

$$\begin{cases} \lim_{t\to 3^-} P(t)=\lim_{t\to 3^-} 50-t^2=50-9=41 \\ \lim_{t\to 3^+} P(t)=\lim_{t\to 3^+} 56-\frac{20t}{t+1}=56-\frac{60}{4}=41 \end{cases}$$

Como que los límites laterales son iguales y su valor coincide con el de la función en ese punto, la función es continua en $t=3$.

Además, la función es decreciente en todo su dominio de definición:

$$\begin{cases} [0,3] & : & P'(t)=-2t<0 \\ (3,\infty) & : & P'(t)=-\frac{20}{(t+1)^2}<0 \end{cases}$$

Por lo que aguantará cada vez menos peso según vaya pasando el tiempo.

Apartado b:

Se trata de determinar el valor de $\lim_{t\to\infty} P(t)$:

$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} 56 - \frac{20t}{t+1} = 56 - 20 = 36$

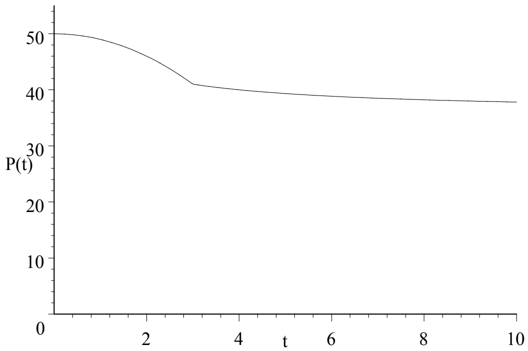
La función presenta una asíntota horizontal $P(t) = 36$, por lo que la plancha siempre aguantará más de 36 toneladas aunque no más de 40.

Apartado c:

La concavidad o convexidad de una función viene dada por el signo de su segunda derivada:

$$\begin{cases} [0,3] & : \quad P''(t) = -2 \\ (3,\infty) & : \quad P''(t) = \frac{40}{(t+1)^3} \end{cases}$$

Por tanto se producirá un cambio de concavidad en el punto de unión $\{t = 3\}$



Septiembre 03:

La gráfica de la velocidad de un autobús en los 6 minutos previos a un accidente quedó recogida en el tacómetro, y se ajusta bastante bien a la siguiente función. $V(t)$ es la velocidad en el tiempo t (t en minutos, de 0 a 6):

$V(t) = 24t - 15t^2 + 2t^3 + 100 \qquad 0 \le t \le 6$

a) Especifica los intervalos de tiempo en los que la velocidad aumentó y aquellos en que disminuyó.

b) Dibuja la gráfica de la velocidad, especificando, si los hay, los puntos de inflexión. ¿En qué momentos se alcanza la mayor y menor velocidad?

c) Especifica (si los hay) los máximos y mínimos relativos y absolutos.

Solución:

Apartado a:

Una función polinómica es continua en todo su dominio; se trata de analizar el crecimiento de la función:

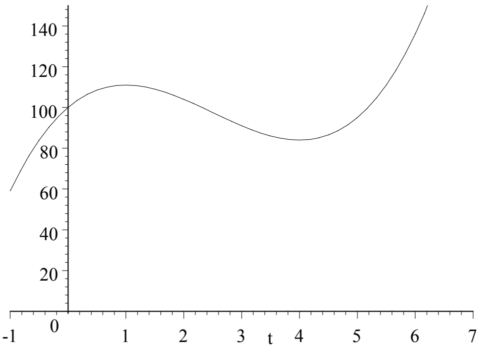
$V(t) = 24t - 15t^2 + 2t^3 + 100 \to V'(t) = 6t^2 - 30t + 24 = 6\,(t-1)\,(t-4)$

$V'(t) = 0 \to 6\,(t-1)\,(t-4) = 0 \to \{t = 1\}\,, \{t = 4\}$

Por tanto:

$(0,1)$	$(1,4)$	$(4,6)$
$V'(t) > 0$	$V'(t) < 0$	$V'(t) > 0$
Crecimiento	Decrecimiento	Crecimiento

Apartados b y c:
Los puntos de inflexión se presentarán al anularse la segunda derivada:
$V(t) = 24t - 15t^2 + 2t^3 + 100 \to V'(t) = 6t^2 - 30t + 24 \to V''(t) = 12t - 30$
$V''(t) = 0 \to 12t - 30 = 0 \to \left\{t = \frac{5}{2}\right\}$
Teniendo en cuenta la continuidad de la función podemos decir que en $t = 1$ presenta un máximo y en $t = 4$ un mínimo relativos, así como que en $t = \frac{5}{2}$ presenta un punto de inflexión:



$$V(t) = 24t - 15t^2 + 2t^3 + 100 \to \begin{cases} V(1) = 111 & \to & M(1, 111) \\ V(4) = 84 & \to & m(4, 84) \\ V(\frac{5}{2}) = \frac{195}{2} & \to & I\left(\frac{5}{2}, \frac{195}{2}\right) \end{cases}$$

Además, sabemos que: $\begin{cases} V(0) = 100 \\ V(6) = 136 \end{cases} \quad \to$

La menor velocidad se presenta en $t = 4$ y es 84, mientras que la mayor velocidad se presenta en $t = 6$ y es 136. Se corresponden con el mínimo y máximo absolutos.

Junio 04:

El servicio de traumatología de un hospital va a implantar un nuevo sistema que pretende reducir a corto plazo las listas de espera. Se prevé que a partir de ahora la siguiente función indicará en cada momento (t, en meses) el porcentaje de pacientes que podrá sere operado sin necesidad de entrar en lista de espera:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & si \quad 0 \le t \le 10 \\ \frac{38t - 100}{0.4t} & si \quad t > 10 \end{cases}$$

a) ¿A partir de qué momento crecerá este porcentaje? Por mucho tiempo que pase ¿a qué porcentaje no se llegará nunca?

b) Haz un esbozo de la gráfica de la función P a lo largo del tiempo:

Solución:

Apartado a:
Antes de analizar el crecimiento de la función, estudiemos su continuidad:
Se trata de una función definida a tramos. En el interior del primero

la función es continua, puesto que se trata de una parábola; en el interior del segundo también lo es, puesto que el valor que anula el denominador ($x = 0$) se encuentra fuera del intervalo de definición. Bastará, por tanto, con analizar el punto de unión $t = 10$.

$$\begin{cases} \lim_{t\to 10^-} P(t) = \lim_{t\to 10^-} t^2 - 8t + 50 = 100 - 80 + 50 = 70 \\ \lim_{t\to 10^+} P(t) = \lim_{t\to 10^+} \frac{38t-100}{0.4t} = \frac{380-100}{4} = 70 \end{cases}$$

La función existe en $t = 10$, su valor es $P(10) = 100 - 80 + 50 = 70$, y coincide con el valor de los límites laterales que son iguales. Por ello, la función es continua en todo su dominio.

Se trata, ahora, de de estudiar el creciemiento de la función:

- tramo 1: $t = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{2} = 4 \to$ como $a > 0$ se presenta un mínimo en $t = 4 \to \begin{cases} \text{decreciente en:} & [0, 4) \\ \text{creciente en:} & (4, 10] \end{cases}$

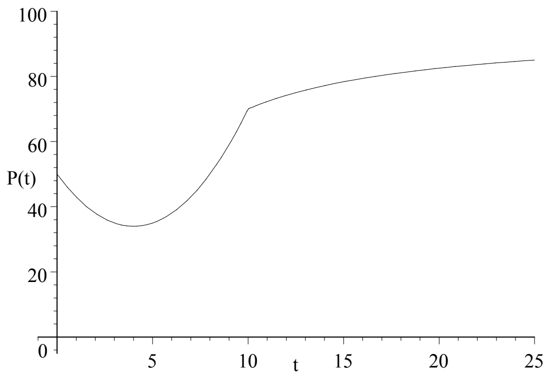
- tramo 2: $P'(t) = \frac{38\cdot 0.4t-(38t-100)\cdot 0.4}{0.16t} = \frac{250.0}{t} > 0$ para $t > 10 \to$ creciente en $(10, \infty)$

Analicemos ahora si la función presenta alguna asíntota horizontal:

$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{38t-100}{0.4t} = 95$

Visto todo lo anterior, podemos asegurar que el porcentaje de operados sin entrar en lista de espera crecerá indefinidamente a partir de mes $t = 4$, pero que nunca llegará a superar el 95%.

Apartado b:



Septiembre 04:

Una cadena de televisión ha presentado un nuevo progama para la franja de las 11 a las 15 horas. El share o porcentaje de audiencia de la primera emisión vino dado por la siguiente función, donde S(t) representa el share en el tiempo t, en horas. Para que el programa siga emitiéndose el share ha tenido que alcanzar, en algún momento el 30%

$S(t) = -t^3 + 36t^2 - 420t + 1596 \qquad 11 \leq t \leq 15$

a) Indica cuándo creció el share y cuándo decreció ¿El programa seguirá *emitiéndose?*

b) Dibuja la gráfica del share.

Solución:

Apartado a:

Antes de analizar el crecimiento de la función, estudiemos su continuidad: se trata de una función continua en todo su dominio por tratarse de una función polinómica.

Para estudir el crecimiento de la función, analizamos el signo de la primera derivada:

$S(t) = -t^3+36t^2-420t+1596 \rightarrow S'(t) = -3t^2+72t-420 = -3\,(t-10)\,(t-14)$

$S'(t) = 0 \rightarrow \{t = 10\}, \{t = 14\}$

$$\begin{cases} \text{en:} & (-\infty, 10) & S'(t) < 0 & \text{la función es decreciente} \\ \text{en:} & (10, 14) & S'(t) > 0 & \text{la función es creciente} \\ \text{en:} & (14, \infty) & S'(t) < 0 & \text{la función es decreciente} \end{cases}$$

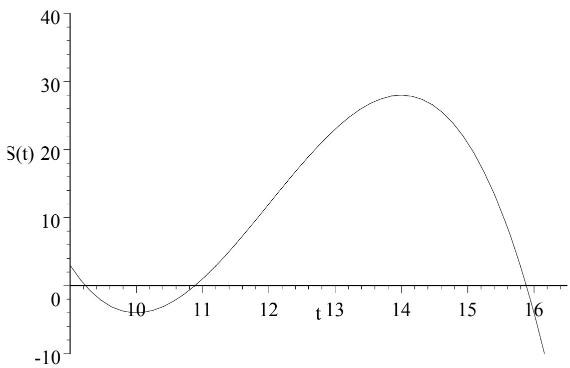
Visto lo anterior, la función presenta un mínimo en: $S(10) = -4 \rightarrow A(10, -4)$

Visto lo anterior, la función presenta un máximo en: $S(14) = 28 \rightarrow B(14, 28)$

Por lo tanto, al no haber alcanzado el 30% de share, el programa no seguirá emitiéndose.

Apartado b:

$S(t) = -t^3 + 36t^2 - 420t + 1596$



3.2 Problemas propuestos

B3-01:

Calcula el valor que debe de tener k para que cada una de las siguientes funciones sea continua:

a) $f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x+1 & si & x \leq 2 \\ k-x & si & x > 2 \end{array} \right.$ *b)* $g(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x+k & si & x \leq 0 \\ x^2-1 & si & x > 0 \end{array} \right.$

B3-02:

Determina el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea continua:

a) $f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{x^4-1}{x-1} & si & x \neq 1 \\ k & si & x = 1 \end{array} \right.$ *b)* $g(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{x^2-1}{x-1} & si & x < 1 \\ k & si & x \geq 1 \end{array} \right.$

B3-03:

En la función $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, determina los valores que han de tener a, b, c, para que la función tenga un máximo en $(0,4)$ y un punto de inflexión para $x = 1$.

B3-04:

Hallar los coeficientes a, b, c, d, en la función: $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, sabiendo que la ecuación de la tangente a la curva en el punto de inflexión $(1,0)$ es $y = -3x+3$, y que la función tiene un extremo relativo en $x = 0$.

B3-05:

Un rectángulo mide 8 dm. de largo y 4 dm. de ancho. De cada esquina se recorta un cuadrado de lado x con el fin de hacer una caja sin tapa. Se pide: a) Calcule el volumen de la caja en función de x. b) Halle x para que el volumen sea máximo. c) Halle dicho volumen máximo.

B3-06:

Una empresa que fabrica un determinado producto ha determinado que el beneficio que obtiene al fabricar x unidades del mismo viene dado por la función: $f(x) = \frac{-x^2}{90} + \frac{100x}{90} - \frac{1600}{90}$, ($f(x)$ en miles de euros).

a) Representar gráficamente dicha función.

b) ¿Cuántas unidades hay que fabricar para que no se produzcan pérdidas?

c) ¿Cuál es el mayor beneficio posible? ¿Cuántas unidades deben fabricarse para obtenerlo?

B3-07:

Una tienda de juguetes ha comprobado que el número de compradores de un cierto juego depende del precio del mismo, segun la función:

$n(p) = 2000 - 8p$, donde $n(p)$ es el número de compradores cuando p es el precio del juego. Obtener:

a) La función que expresa los ingresos diarios (I) de esta empresa en función del precio del juego (p).

b) El precio del juego que hace máximos dichos ingresos.

c) ¿A cuánto ascenderán dichos ingresos máximos? Justifica la respuesta.

d) ¿Qué sucederá si la tienda tiene "muchísimos" compradores.

B3-08:

El número de socios de una cierta ONG viene dado por la función

$n(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 26$ dónde x indica el número de años desde su fundación. Calcula:

a) representa gráficamente esa función.

b) el número de socios iniciales en el momento fundacional.

c) en que año ha habido el menor número de socios. ¿cuántos fueron?

d) el cuarto año se produjo un cambio en la junta directiva; ¿influyó en el número de socios?

B3-09:

Sea la función: $h(x) = 2x^3 + bx^2 + ax - 5$.

a) Halla los valores de a *y* b *de forma que* $h(x)$ *tenga un máximo en* $x = 1$ *y un mínimo en* $x = 2$.

B3-10:

Se ha encontrado que el número de litros de agua que necesita semanalmente un determinado cultivo, desde el momento en que se planta $(t = 0)$ *hasta el momento en que se seca* $(t = 4)$, *viene dado por la expresión:* $f(t) = \sqrt{-2t^2 + 8t}; (t = \text{años})$. *Determina:*

a) en qué momento el cultivo requiere $\sqrt{6}$ *litros de agua semanales.*

b) en qué momento las necesidades de agua del cultivo serán máximas, y cuál será su valor.

B3-11:

El número de personas, en miles, afectadas por una enfermedad infecciosa, viene dado por la función: $f(t) = \frac{30t}{t^2-2t+4}$, *donde* t *es el tiempo transcurrido en días desde que se inició el contagio.*

a) ¿Cuál es la tasa de cambio de número de personas afectadas correspondientes al cuarto día?

b) ¿En qué día se tiene el máximo número de enfermos? ¿Cuántos son éstos?

c) ¿Sería correcto afirmar que la enfermedad se irá extinguiendo con el transcurso del tiempo? Justifícalo razonadamente.

B3-12:

a) Enunciar la regla de Barrow y comentar su aplicación.

b) Aplicarla para calcular $\int_{-1}^{1} e^{2x} dx$

c) Determinar el área comprendida entre las curvas $y = e^{2x}$, $y = e^{-2x}$, *el eje* OX, *y los valores de abscisa* $x = 1$, $x = -1$.

B3-13:

Sea una función f; *sabemos que la representación gráfica de su derivada es una recta que pasa por los puntos* $(0, 2)$ *y* $(2, 0)$. *Sea otra función* g; *sabemos que la representación gráfica de su derivada es una parábola que corta al eje* OX *en* $(0, 0)$ *y* $(4, 0)$ *y tiene por vértice* $(2, 1)$. *Utilizando las gráficas de tales derivadas:*

a) estudia el crecimiento y decrecimiento de f *y* g.

b) determina, si existen, máximos y mínimos de f *y* g .

B3-14:

En un centro de entrenamiento de deportistas de alta competición han determinado que el rendimiento de uno de ellos (en %) frente a un determinado tiempo t de esfuerzo muscular, viene dado por la siguiente función:

$$R(t)=\begin{cases} -t\,(t-20) & si \quad 0 \leq t < 15 \\ 75 & si \quad 15 \leq t < 30 \\ 100-\frac{5}{6}t & si \quad 30 \leq t \end{cases}$$

a) Representa dicha función.

b) ¿en qué momento alcanza el deportista su máximo rendimiento?

c) ¿cuál será el rendimiento del deportista a los 60 minutos de comenzar el entrenamiento?

d) ¿qué se puede decir del rendimiento del deportista si el entrenamiento se prolonga indefinidamente?. Justifica todas las respuestas.

B3-15:

Sea la función: $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+1 & si \quad x<-1 \\ 2x+2 & si \quad -1 \leq x \leq 2 \\ -x^2+8x & si \quad x>2 \end{cases}$ *, se pide:*

a) Estudia su continuidad y derivabilidad.

b) Represéntala gráficamente y, a la vista de su gráfica, determina sus máximos y mínimos, así como el crecimiento y decrecimiento.

B3-16:

Una empresa ha estimado que los ingresos y los gastos anuales (en pesetas) que genera la fabricación y venta de x unidades de un determinado producto, vienen dados por las funciones:

$$\begin{cases} I(x)=28x^2+36000x \\ G(x)=44x^2+12000x+700000 \end{cases}$$

Determina, justificando las respuestas:

a) la función que define el beneficio anual.

b) el número de unidades que hay que vender para que el beneficio sea máximo.

c) el valor de dicho beneficio máximo.

d) ¿qué sucedería con las funciones de ingresos, gastos y beneficios si la producción alcanzara una "infinidad" de unidades?

B3-17:

Sea la función $f(x)=\frac{x^2}{4-x}$*. Determinar:*

a) su dominio de definición.

b) sus asíntotas.

c) máximos y mínimos.

d) intervalos de crecimiento y decrecimiento.

e) área encerrada por la curva, la asíntota correspondiente, y las rectas $x=k, x=2k$*, siendo* k *el punto en el que la función tiene un máximo relativo.*

B3-18:

Deseamos compar 18 ordenadores y en el mercado hay de dos tipos. Sabemos que el beneficio que podemos obtener de su uso viene dado por el producto del número de ordenadores de un tipo que se compra por el cuadrado del número de ordenadores del otro tipo que se adquiere. Determina el número de ordenadores de cada tipo que debemos comprar para que el beneficio sea máximo.

B3-19:

Considera la función: $y = \frac{x^2}{x+a}$

Determina para qué valores del parámetro a la función es creciente en el punto de abscisa $x = 1$.

B3-20:

a) Indica si puede haber dos funciones con la misma derivada. En caso afirmativo pon un ejemplo.

b) Determina la función $f(x)$ *sabiendo que su gráfica pasa por el punto* $(2, 4)$ *y que su derivada es* $f'(x) = \frac{1}{x^4} + 2x$

B3-21:

Dada la función $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^3$, *calcular los puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, intervalos de concavidad y convexidad, asíntotas. Representar gráficamente* $f(x)$.

B3-22:

Los economistas de una empresa han determinado que, para un periodo de tiempo fijo, la función de coste de almacenamiento de un cierto material, depende de las toneladas del mismo. Así: $C(x) = 50\left(50 + 6x + \frac{120}{x}\right)$, *representa el coste en euros, siendo x las toneladas de material.*

a) ¿Qué cantidad de materiales hace que el coste sea mínimo?

b) ¿Cuáles son las asíntotas de esta función?

c) Representar dicha función para los valores de $x \geq 0$

B3-23:

Los beneficios totales que se obtienen al vender cierto producto, dependen del precio de venta del mismo, pues éste condiciona el número de unidades que se venderán. Se ha determinado que, si el precio al que vende cada artículo es x euros, sus beneficios vendrán dados por la fórmula:

$B(x) = 12x - 2x^2 - 12$, *en miles de euros por día.*

a) Representa la función precio-beneficio. Indica a qué precios podría venderse el artículo sin sufrir pérdidas.

b) ¿A qué precio se obtiene la ganancia máxima? ¿A cuánto asciende?

B3-24:

Sea la función: $f(x) = 3x - x^3$

a) esboza su gráfica a partir del máximo, del mínimo y del punto de inflexión.

b) halla el área de la región finita que dicha función delimita con el eje de abscisas x.

B3-25:

En una ciudad se declara una enfermedad contagiosa. El número de enfermos a lo largo del pasado mes de enero ha venido dado por la función $y(t) = 100 + 200e^{0.2t}$, *dónde t representa el número de días transcurridos a partir del 1 de enero.*

a) ¿Cuántos enfermos había el citado 1 de enero?

b) Calcula la expresión algebraica de la función que representa la velocidad de evolución del número de enfermos al cabo de t días.

c) Determina la fecha en la cual la velocidad de evolución del número de enfermos ha sido igual a 295.56 enfermos/día.

4

Integrales

4.1 Problemas PAU

Septiembre 94:

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$.

a) Explicar el enunciado de la regla de Barrow y su aplicación.

b) Sea $f(x) = 3x^2 - 6x$, justificar cuál de las siguientes funciones:

$U(x) = 3x^3 + 3x^2$; $\qquad V(x) = x^3 - 3x^2$ $\qquad$ *es primitiva de la anterior.*

c) Calcular $\int_0^4 \left(3x^2 - 6x\right) dx$

Solución:

Apartado a:

La regla de Barrow nos dice que si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, se verifica que:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Es decir, "la integral definida de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es igual al valor que toma una primitiva $F(x)$ en el punto b, menos el que toma en el punto a".

Apartado b:

$F(x) = \int f(x)dx = \int \left(3x^2 - 6x\right) dx = 3\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + C = x^3 - 3x^2 + C$

Como dos funciones primitivas de una función dada únicamente pueden diferir en una constante, encontramos que sólo $V(x) = x^3 - 3x^2$ puede ser primitiva de $f(x)$

Apartado c:

Aplicando la regla de Barrow, tendremos que:

$\int_0^4 \left(3x^2 - 6x\right) dx = \left[x^3 - 3x^2\right]_0^4 = 16 - 0 = 16$

Junio 95:

a) Enunciar la regla de Barrow y comentar su aplicación.

b) Sea la función $F(x) = x^4 + ax^3 + bx$. Calcular a y b, sabiendo que:

1) el punto $(1, 2)$ pertenece a la gráfica de $F(x)$;

2) $F(x)$ es función primitiva de cierta función $f(x)$ cuya integral en el intervalo $[1, 2]$ es igual a 10.

Solución:

Apartado a:

La regla de Barrow nos dice que si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, se verifica que:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Es decir, "la integral definida de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es igual al valor que toma una primitiva $F(x)$ en el punto b, menos el que toma en el punto a".

Apartado b:

· Como el punto $(1,2)$ pertenece a la función $F(x) = x^4 + ax^3 + bx$

$F(1) = 2 \rightarrow 2 = 1 + a + b \rightarrow a + b = 1$

· Como $\int_1^2 f(x)dx = [F(x)]_1^2 = F(2) - F(1) = 10$

$\left(2^4 + a \cdot 2^3 + b \cdot 2\right) - \left(1^4 + a \cdot 1^3 + b \cdot 1\right) = 10$

$16 + 8a + 2b - 1 - a - b = 10 \rightarrow 7a + b = -5$

Resolviendo el sistema: $\left\{ \begin{array}{l} a + b = 1 \\ 7a + b = -5 \end{array} \right.$, tendremos: $\{a = -1, b = 2\}$

Septiembre 95:

a) Explicar el concepto de función primitiva.

b) Sea $f(x) = e^{2x} - 2x^2 + 8$*, justificar si es primitiva de alguna de las siguientes funciones:*

$g(x) = e^{2x} - 4x + 8 \qquad h(x) = 2e^{2x} - 4x$

c) Enunciar la regla de Barrow y aplicarla para calcular: $\int_0^1 \left(2e^{2x} - 4x\right) dx$

Solución:

Apartado a:

Sean $f(x)$ y $F(x)$ dos funciones reales definidas en un mismo dominio. La función $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ si $F(x)$ tiene por derivada a $f(x)$. Es decir:

$$F(x) \text{ es primitiva de } f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad F'(x) = f(x)$$

Apartado b:

Para que $f(x)$ sea primitiva de $g(x)$ es necesario que: $f'(x) = g(x)$

Para que $f(x)$ sea primitiva de $h(x)$ es necesario que: $f'(x) = h(x)$

Comprobémoslo:

$f\prime(x) = 2e^{2x} - 4x = h(x)$

Por tanto, $f(x)$ es una primitiva de $h(x)$.

Apartado c:

La regla de Barrow nos dice que si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, se verifica que:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Es decir, "la integral definida de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es igual al valor que toma una primitiva $F(x)$ en el punto b, menos el que toma en el punto a".

$\int_0^1 \left(2e^{2x} - 4x\right) dx = \left[e^{2x} - 2x^2 + 8\right]_0^1 = e^2 - 3$

Junio 96:

Dada la función: $f(x) = (x + 1)(3x - 2)$

a) Calcular una primitiva de $f(x)$

b) Justificar que la función: $F(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ *no es primitiva de* $f(x)$

c) Enunciar la regla de Barrow y calcular: $\int_0^1 (x+1)(3x-2)\,dx$

Solución:

Apartado a:

$f(x) = (x+1)(3x-2) = 3x^2 + x - 2$

$\int f(x)dx = \int \left(3x^2 + x - 2\right) dx = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

Apartado b:

El conjunto de primitivas de la función dada ha de ser de la forma: $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

La función $F(x) = x^3+2x^2+2$ no puede ser una primitiva de $f(x)$ puesto que tiene un coeficiente diferente para el término en x^2 y no tiene término en x.

Apartado c:

La regla de Barrow nos dice que si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, se verifica que:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Es decir, "la integral definida de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es igual al valor que toma una primitiva $F(x)$ en el punto b, menos el que toma en el punto a".

$\int_0^1 (x+1)(3x-2)\,dx = \int_0^1 \left(3x^2 + x - 2\right) dx = \left[x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_0^1 =$

$= \left(1 + \frac{1}{2} - 2\right) - (0) = -\frac{1}{2}$

Junio 96-R:

a) ¿Qué se entiende por función primitiva?

b) Sea $f(x) = 2x^4 - x^3 + 2$*. Deducir razonadamente si es primitiva de alguna de las siguientes funciones:*

$g(x) = 8x^3 - 3x^2; \qquad h(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2$

c) Enunciar la regla de Barrow y calcular: $\int_0^2 \left(8x^3 - 3x^2\right) dx$

Solución:

Apartado a:

Sean $f(x)$ y $F(x)$ dos funciones reales definidas en un mismo dominio. La función $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ si $F(x)$ tiene por derivada a $f(x)$. Es decir:

$$F(x) \text{ es primitiva de } f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad F'(x) = f(x)$$

Apartado b:

- $f(x)$ es una primitiva de $g(x)$, puesto que $f'(x) = g(x)$
- $f(x)$ no es una primitiva de $g(x)$, puesto que $f'(x) \neq g(x)$

Apartado c:

La regla de Barrow nos dice que si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, se verifica que:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Es decir, "la integral definida de una función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ es igual al valor que toma una primitiva $F(x)$ en el punto b, menos el que toma en el punto a".

$\int_0^2 \left(8x^3 - 3x^2\right) dx = \left[8\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left[2x^4 - x^3\right]_0^2 =$
$= \left(2 \cdot 2^4 - 2^3\right) - (0) = 24$

Junio 97:

a) Enunciar la regla de Barrow.

b) Dada la función: $f(x) = ax^3 + bx + c$, calcular los valores de a, b y c, sabiendo que:

1) $F(x) = x^4 - 2x^2 + cx$ es una primitiva de $f(x)$.

2) la integral de $f(x)$ en el intervalo $[0,1]$ es igual a 1.

Solución:

Apartado a:

La regla de Barrow nos dice que si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, se verifica que:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Es decir, "la integral definida de una función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ es igual al valor que toma una primitiva $F(x)$ en el punto b, menos el que toma en el punto a".

Apartado b:

Como que: $F(x) = x^4 - 2x^2 + cx$ es una primitiva de $f(x)$, tendremos que: F'(x) = f(x); es decir:

$4x^3 - 4x + c = ax^3 + bx + c \rightarrow \{a = 4; b = -4\}$

Como que: la integral de $f(x)$ en el intervalo [0,1] es igual a 1, tendremos que: F(1) - F(0) = 1; es decir:

$\left(1^4 - 2 \cdot 1^2 + c \cdot 1\right) - \left(0^4 - 2 \cdot 0^2 + c \cdot 0\right) = 1 \rightarrow \{c = 2\}$

Septiembre 97:

Dada la función: $f(x) = x^3 + \frac{2}{x^2}$

a) Calcular una primitiva de $f(x)$

b) Enunciar la regla de Barrow y aplicarla para obtener la integral de $f(x)$ en el intervalo $[1,2]$

Solución:

Apartado a:

Calcular una primitiva de f(x) consiste en determinar:

$$\int f(x)dx = \int \left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right) dx = \int x^3 dx + \int \frac{2}{x^2} dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{x} + K$$

siendo K una constante cualquiera; por ejemplo, si k=5: $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{x} + 5$

Apartado b:

La regla de Barrow nos dice que si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, se verifica que:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Es decir, "la integral definida de una función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ es igual al valor que toma una primitiva $F(x)$ en el punto b, menos el que toma en el punto a".

$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{x}\right]_1^2 = \frac{19}{4}$

Junio 98:

Dada la función: $f(x) = x + \frac{a}{x^3}$, donde a es una constante, se pide:
a) Encontrar una primitiva de f.
b) Si F es una primitiva de f, ¿puede serlo también $G(x) = F(x) + 2x$?
c) Encontrar a sabiendo que: $\int_1^2 f(x)dx = 1.5$

Solución:

Apartado a:

Para encontrar una primitiva de $f(x)$, determinaremos:

$$\int f(x)dx = \int \left(x + \frac{a}{x^3}\right) dx = \int xdx + \int \frac{a}{x^3}dx = \frac{x^2}{2} - \frac{a}{2x^2} + K$$

Cualquier función de la forma anterior, siendo K una constante, será primitiva de f(x). Por ejemplo: $\frac{x^2}{2} - \frac{a}{2x^2} + 3$

Apartado b:

Si F es una primitiva de f, entonces $G(x) = F(x)+2x$ no puede serlo. Dos primitivas de una función dada únicamente pueden diferir en una constante. $H(x) = F(x) + 2$, en cambio, sí que lo sería.

Apartado c:

Sabemos que: $\int_1^2 f(x)dx = 1,5$. Es decir: $\int_1^2 \left(x + \frac{a}{x^3}\right) dx = 1,5$.

Por tanto:

$\left[\frac{x^2}{2} - \frac{a}{2x^2}\right]_1^2 = 1,5 \to \left(\frac{2^2}{2} - \frac{a}{2 \cdot 2^2}\right) - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{a}{2 \cdot 1^2}\right) = 1,5 \to \{a = 0\}$

Septiembre 98:

Dada la función: $f(x) = 4e^{4x} + a$, donde a es una constante, se pide:
a) Justificar si las siguientes funciones son o no primitivas de f:

$$F_1(x) = 4e^{4x} + ax \qquad F_2(x) = e^{4x} + ax$$

b) Encontrar a, sabiendo que: $\int_0^1 f(x)dx = e^4$

Solución:

Apartado a:

Determinar una primitiva de f(x) significa calcular:

$$\int f(x)dx = \int \left(4e^{4x} + a\right) dx = \int 4e^{4x}dx + \int adx = e^{4x} + ax + K$$

Como las distintas primitivas de una función dada únicamente pueden diferir en una constante, constatamos que: $F_1(x)$ no puede ser primitiva de $f(x)$, mientras que $F_2(x)$ sí que lo es.

Apartado b:

Sabemos que: $\int_0^1 f(x)dx = e^4$

Por lo tanto:

$\int_0^1 \left(4e^{4x} + a\right) dx = \left[e^{4x} + ax\right]_0^1 = \left(e^4 + a\right) - \left(e^0 + 0\right) =$
$= e^4 + a - 1 = e^4 \to \{a = 1\}$

Junio 99:

Dada la función: $f(x) = ae^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$*, donde* a *es una constante:*

a) Calcular $\int_1^2 f(x)dx$ *en función de* a*.*

b) Se sabe que F *es una primitiva de* f*. Calcular* a *si* $F(1) = 0$ *y* $F(2) = \frac{1}{2}$*.*

Solución:

Apartado a:

$\int f(x)dx = \int \left(ae^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int ae^{\frac{x}{3}} dx + \int \frac{1}{x^2} dx = 3a \cdot e^{\frac{x}{3}} - \frac{1}{x} + K$

$\int_1^2 f(x)dx = \left[3a \cdot e^{\frac{x}{3}} - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \left(3a \cdot e^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}\right) - \left(3a \cdot e^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{1}\right) =$

$= 3a \cdot e^{\frac{2}{3}} - 3a \cdot e^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} = 3a\left(e^{\frac{2}{3}} - e^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{2}$

Apartado b:

Por ser $F(x)$ una primitiva de $f(x)$, tendremos que: $F(x) = 3a \cdot e^{\frac{x}{3}} - \frac{1}{x} + K$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{- si } F(1) = 0: & 3a \cdot e^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{1} + K = 0; & 3a \cdot e^{\frac{1}{3}} - 1 + K = 0 \\ \text{- si } F(2) = \frac{1}{2}: & 3a \cdot e^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} + K = \frac{1}{2}; & 3a \cdot e^{\frac{2}{3}} - 1 + K = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow 3a \cdot e^{\frac{1}{3}} = 3a \cdot e^{\frac{2}{3}} \rightarrow \{a = 0\}$

Septiembre 99:

Dada la función: $f(x) = xe^{\frac{x}{2}}$*:*

a) Calcular una primitiva de f*.*

b) Calcular $\int_0^2 f(x)dx$*.*

c) Si F *y* G *son primitivas de* f*, y* $H = F - G$*, ¿es posible que la derivada de* H *sea la función* x^2*?*

Solución:

Apartado a:

Calcular una primitiva de $f(x)$ significa calcular:

$\int f(x)dx = \int xe^{\frac{x}{2}} dx$

Para resolver dicha integral es necesario recurrir al método de integración por partes:

$\int udv = uv - \int vdu$

Efectuamos los siguientes cambios de variable:

$$\left\{\begin{array}{lll} u = x & \rightarrow & du = dx \\ dv = e^{\frac{x}{2}} dx & \rightarrow & v = \int e^{\frac{x}{2}} dx = 2e^{\frac{x}{2}} \end{array}\right.$$

Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$\int xe^{\frac{x}{2}} dx = x \cdot 2e^{\frac{x}{2}} - \int 2e^{\frac{x}{2}} dx = 2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} + k$

Cualquier valor real de k nos proporciona una primitiva; por ejemplo: $2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} + 5$

Apartado b:

$\int_0^2 f(x)dx = \left[2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}}\right]_0^2 = \left(2 \cdot 2e^{\frac{2}{2}} - 4e^{\frac{2}{2}}\right) - \left(2 \cdot 0 \cdot e^0 - 4e^0\right) = (4e - 4e) - (0 - 4) = 4$

Apartado c:

Si F y G son dos primitivas de f, entonces únicamente difieren en una constante.

La función $H = F - G$ será también, por tanto, una constante.

Como la derivada de una función constante es cero, resulta imposible que la derivada de H sea la función x^2.

Junio 00:

Enuncie la regla de Barrow y aplíquela a la función $f(x) = e^x\,(x+1)$ *en el intervalo* $[0,1]$.

Solución:

La regla de Barrow nos dice que si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, se verifica que:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Es decir, "la integral definida de una función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ es igual al valor que toma una primitiva $F(x)$ en el punto b, menos el que toma en el punto a".

Así: $\int f(x)dx = \int e^x\,(x+1)\,dx$

Para resolver dicha integral es necesario recurrir al método de integración por partes:

$\int udv = uv - \int vdu$

Efectuamos los siguientes cambios de variable:

$$\begin{cases} u = (x+1) & \rightarrow \quad du = dx \\ dv = e^x dx & \rightarrow \quad v = \int e^x dx = e^x \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$\int (e^x\,(x+1))\,dx = (x+1)\cdot e^x - \int e^x dx = (x+1)\cdot e^x - e^x + C =$
$= xe^x + e^x - e^x + C = xe^x + C$

Por tanto:

$\int_0^1 e^x\,(x+1)\,dx = [xe^x]_0^1 = e - 0 = e$

Septiembre 00:

Determine la función primitiva y el área bajo la curva, en el intervalo $[1,e]$, *de la función* $f(x) = \ln(x)$.

Solución:

Calculamos: $\int f(x)dx = \int \ln(x)dx$

Para resolver dicha integral es necesario recurrir al método de integración por partes:

$\int udv = uv - \int vdu$

Efectuamos los siguientes cambios de variable:

$$\begin{cases} u = \ln x & \rightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx & \rightarrow \quad v = \int dx = x \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$\int \ln x dx = x\cdot \ln x - \int x\cdot \frac{1}{x}dx = x\cdot \ln x - x + C = x\,(\ln x - 1)$

Como que la función logarítmo no adopta valores negativos en en intervalo $[1,e]$, para determinar el área pedida bastará con calcular:

$\int_1^e \ln x dx = [x\,(\ln x - 1)]_1^e = e\,(\ln e - 1) - 1\,(\ln 1 - 1) = 0 - (-1) = 1$

Junio 01:

Sea $f(x) = x^2 + bx$ donde b es una constante.

a) Encuentra b, sabiendo que hay una primitiva F de f con $F(0) = 2$ y $F(3) = 20$. Encuentra también la expresión de F.

b) Dibuja la curva $f(x)$ cuando $b = -1$ y halla el área delimitada por dicha curva y el eje de abscisas entre los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 2$.

Solución:

Apartado a:

Determinamos una primitiva de $f(x)$

$F(x) = \int f(x)dx = \int (x^2 + bx)dx = \frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + C$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{- si } F(0) = 2: & 0 + 0 + C = 2 & \rightarrow \quad C = 2 \\ \text{- si } F(3) = 20: & \frac{27}{3} + b\frac{9}{2} + 2 = 20 & \rightarrow \quad b = 2 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 2$

Apartado b:

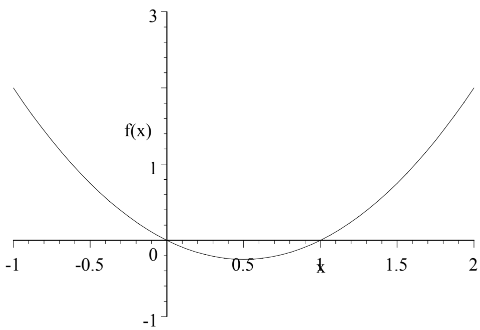
Si $b = -1$, tendremos que $f(x) = x^2 - x$

Se trata de una parábola cuyo eje será: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$

El vértice, por tanto: $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

Y los puntos de corte de esta parábola con el eje OX serán:

$x^2 - x = 0 \rightarrow \{x = 0\}, \{x = 1\}$



Por tanto, para calcular el área pedida habra que descomponerla en la suma de los valores absolutos de dos integrales definidas:

$\left|\int_0^1 (x^2 - x)dx\right| + \left|\int_1^2 (x^2 - x)dx\right| = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 =$

$= \left|\left(-\frac{1}{6}\right)\right| + \left|\left(\frac{5}{6}\right)\right| = 1$

Septiembre 01:

Dada la función $f(x) = (x + a)\,e^{\left(\frac{x}{2}+1\right)}$, donde a es una constante:

a) Encuentra una primitiva de f.

b) Calcula a, sabiendo que $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 8$. Justifica que, para ese valor de a, $2xe^{\left(\frac{x}{2}+1\right)}$ no es primitiva de f.

Solución:

Apartado a:

Se trata de resolver la siguiente integral indefinida:

$\int f(x)dx = \int (x+a)\, e^{\left(\frac{x}{2}+1\right)}dx$

Para resolver dicha integral es necesario recurrir al método de integración por partes:

$\int udv = uv - \int vdu$

Efectuamos los siguientes cambios de variable:

$$\begin{cases} u = x+a & \rightarrow \quad du = dx \\ dv = e^{\left(\frac{x}{2}+1\right)}dx & \rightarrow \quad v = \int e^{\left(\frac{x}{2}+1\right)}dx = 2e^{\left(\frac{x}{2}+1\right)} \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$\int (x+a)\, e^{\left(\frac{x}{2}+1\right)}dx = (x+a)\cdot 2e^{\left(\frac{x}{2}+1\right)} - \int 2e^{\left(\frac{x}{2}+1\right)}dx =$

$= (x+a)\cdot 2e^{\left(\frac{x}{2}+1\right)} - 4e^{\left(\frac{x}{2}+1\right)} + C = 2e^{\left(\frac{x}{2}+1\right)}(x+a-2) + C$

Apartado b:

Como sabemos que $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 8$

$\left[2e^{\left(\frac{x}{2}+1\right)}(x+a-2)\right]_{-2}^{2} = 2e^2a - 2e^0(a-4) = 2e^2a - 2a + 8 = 8 \rightarrow$

$\rightarrow 2e^2a - 2a = 0 \rightarrow a\left(2e^2-2\right) = 0 \rightarrow \{a=0\}$

Si $a=0$, tendremos que $2xe^{\left(\frac{x}{2}+1\right)}$ no es primitiva de f puesto que dos primitivas no pueden diferir entre sí más que en una constante, y hemos encontrado que $(x+a)\cdot 2e^{\left(\frac{x}{2}+1\right)} - 4e^{\left(\frac{x}{2}+1\right)} + C$ sí que es una primitiva.

Junio 02:

Dada la función $f(x) = 3ax^2 + \frac{2a}{x^3} + 5 \qquad (x>0)$, donde a es una constante,

a) Encuentra el valor de a sabiendo que cierta función F es una primitiva de f y verifica que $F(1)=6$ y $F(2)=42$.

b) Dibuja la función f para el valor de a obtenido en el apartado anterior y encuentra también en ese caso el área limitada por la curva y el eje OX entre $x=1$ y $x=2$.

Solución:

Apartado a:

Encontremos una primitiva de $f(x)$; para ello:

$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(3ax^2 + \frac{2a}{x^3} + 5\right)dx = 3a\frac{x^3}{3} + 2a\frac{x^{-2}}{-2} + 5x + C = ax^3 - \frac{a}{x^2} + 5x + C$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{- si } F(1)=6: & a-a+5+C=6 & \rightarrow C=1 \\ \text{- si } F(2)=42: & 8a-\frac{a}{4}+10+C=42 & \rightarrow \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow 8a - \frac{a}{4} + 11 = 42 \rightarrow \{a=4\}$

Apartado b:

Cuando $a=4$ la función será: $f(x) = 3ax^2 + \frac{2a}{x^3} + 5 = 12x^2 + \frac{8}{x^3} + 5$

Representémosla:

- Dominio: $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

- Simetrías:

$f(x) = 12x^2 + \frac{8}{x^3} + 5; \qquad f(-x) = 12\,(-x)^2 + \frac{8}{(-x)^3} + 5 = 12x^2 - \frac{8}{x^3} + 5$

$$\begin{cases} \text{Como que:} & f(x) \neq f(-x) & \rightarrow & \text{No es función par} \\ \text{Como que:} & f(x) \neq -f(-x) & \rightarrow & \text{No es función impar} \end{cases}$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = 24x - \frac{24}{x^4} = 24\frac{x^5-1}{x^4} \rightarrow$

$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Decreciente	Creciente

- Máximos y mínimos:

$f'(x) = 0 \rightarrow 24\frac{x^5-1}{x^4} = 0 \rightarrow \{x = 1\}; \qquad f(1) = 12 + 8 + 5 = 25$

teniendo en cuenta el crecimiento de la función, podemos decir que se presenta un mínimo en $(1, 25)$

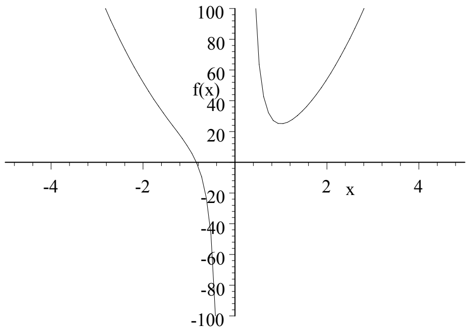
- Asíntotas horizontales y verticales:

$$\begin{array}{lll} \cdot\ \text{Hor.:} & \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(12x^2 + \frac{8}{x^3} + 5\right) = \infty & \rightarrow \quad \text{No hay} \\ \cdot\ \text{Vert.:} & \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(12x^2 + \frac{8}{x^3} + 5\right) = \infty & \rightarrow \quad x = 0 \end{array}$$

- Asíntotas oblicuas:

$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} 24\frac{x^5-1}{x^4} = \infty \rightarrow$ No las hay

La representación gráfica de la función $f(x) = 12x^2 + \frac{8}{x^3} + 5$ será:



Septiembre 02:

Dada la función $f(x) = x^3 - 27 + axe^{x^2}$, donde a es una constante,

a) Encuentra una primitiva de f.

b) Si $a = 0$, dibuja la función f para $x \geq 0$ y encuentra el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 2$ y $x = 4$.

Solución:

Apartado a:

Se trata de determinar $\int f(x)dx$

$\int f(x)dx = \int \left(x^3 - 27 + axe^{x^2}\right) dx = \int x^3 dx - \int 27 dx + \int axe^{x^2} dx = \frac{1}{4}x^4 - 27x + \frac{1}{2}ae^{x^2} + C$

Apartado b:

Si $a = 0$, tenemos que: $f(x) = x^3 - 27$

Representémosla:

- Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

- Simetrías:

$f(x) = x^3 - 27; \qquad f(-x) = (-x)^3 - 27 = -x^3 - 27$

$$\begin{cases} \text{Como que:} & f(x) \neq f(-x) & \rightarrow & \text{No es función par} \\ \text{Como que:} & f(x) \neq -f(-x) & \rightarrow & \text{No es función impar} \end{cases}$$

- Corte con los ejes:

$$\begin{cases} \text{Si } x = 0: & \rightarrow & f(x) = -27 & \rightarrow & (0, -27) \\ \text{Si } f(x) = 0: & \rightarrow & x^3 - 27 = 0 \rightarrow \{x = 3\} & \rightarrow & (3, 0) \end{cases}$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f(x) = x^3 - 27 \rightarrow f'(x) = 3x^2 > 0 \rightarrow$

$(-\infty, \infty)$
$f'(x) > 0$
Creciente

- Máximos y mínimos:

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 = 0 \rightarrow \{x = 0\}; \qquad f(0) = 0 - 27 = -27$

teniendo en cuenta el crecimiento de la función, podemos decir que se presenta un punto de inflexión en $(0, -27)$, aunque también podemos verificarlo comprobando que la primera derivada que no se anula en $x = 0$ es de orden 3 (impar):

$f''(x) = 6x \rightarrow f''(0) = 0; \qquad f'''(x) = 6 \rightarrow f'''(0) = 6$

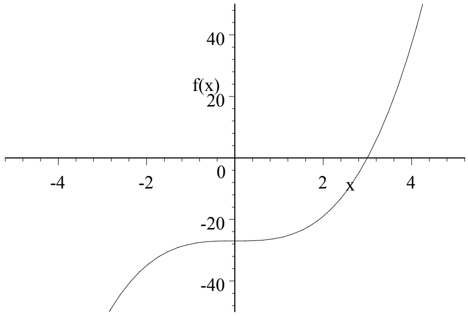
- Asíntotas horizontales y verticales:

$$\begin{array}{llll} \cdot \text{ Hor.:} & \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(x^3 - 27\right) = \infty & \rightarrow & \text{No hay} \\ \cdot \text{ Vert.:} & \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(x^3 - 27\right) = -27 & \rightarrow & \text{No hay} \end{array}$$

- Asíntotas oblicuas:

$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} 3x^2 = \infty \rightarrow$ No las hay

La representación gráfica de la función $f(x) = x^3 - 27$ será:



Para determinar el área pedida:
$\int_2^3 f(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 27x\right]_2^3 = -\frac{43}{4}$
$\int_3^4 f(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 27x\right]_3^4 = \frac{67}{4}$
El área vendrá dada por: $\frac{43}{4} + \frac{67}{4} = \frac{55}{2}$

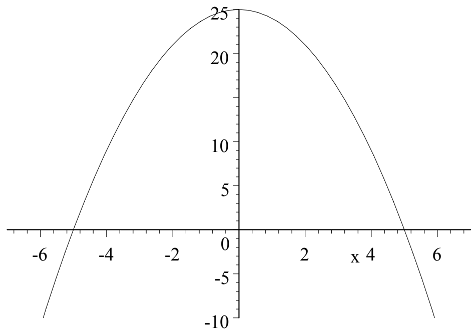
Junio 03:

a) Dada la función $f(x) = 25 - x^2 + \frac{a}{x^2} \qquad (x \neq 0)$, donde a es una constante, encuentra una primitiva de f. Posteriormente, encuentra a para que si f' es la derivada de f, entonces $f'(1) = -2$.

b) Dibuja la función $f(x) = 25 - x^2$, y halla el área limitada por la curva y el eje de abscisas entre los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = 6$.

Solución:

Apartado a:
Una primitiva de f vendrá dada por:
$F(x) = \int f(x)dx = \int \left(25 - x^2 + \frac{a}{x^2}\right) dx = 25x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{x} + C$
Además, $f'(x) = -2x - \frac{2a}{x^3} = -2\frac{x^4+a}{x^3}$
como que $f'(1) = -2 \rightarrow -2\frac{1+a}{1} = -2 \rightarrow \{a = 0\}$
Apartado b:
$f(x) = 25 - x^2 = 0 \rightarrow \{x = 5\}, \{x = -5\}$



Por lo tanto, el área pedida vendrá dada por:
$\left|\int_1^5 f(x)dx\right| + \left|\int_5^6 f(x)dx\right| = \left|\int_1^5 (25-x^2)dx\right| + \left|\int_5^6 (25-x^2)dx\right| =$
$= \left|\left[25x - \frac{x^3}{3}\right]_1^5\right| + \left|\left[25x - \frac{x^3}{3}\right]_5^6\right| = \frac{176}{3} + \frac{16}{3} = 64$

Septiembre 03:

a) Encuentra la primitiva de la función $f(x) = x - \frac{27}{x^2} + e^{\left(\frac{x}{2}+1\right)}$ $(x > 0)$ *que en el* 2 *valga* 15.5.

b) Dibuja la función $f(x) = x - \frac{27}{x^2}$ $(x > 0)$ *y encuentra el área limitada por la curva y el eje X entre* $x = 1$ *y* $x = 5$.

Solución:

Apartado a:

Una primitiva de la función vendrá dada por:
$F(x) = \int f(x)dx = \int \left(x - \frac{27}{x^2} + e^{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{27}{x} + 2e^{\frac{1}{2}x+1} + C$

Se trata de hacer que: $F(2) = 15.5$. Por tanto:
$\frac{1}{2}2^2 + \frac{27}{2} + 2e^{\frac{1}{2}2+1} + C = 15.5 \to 2 + \frac{27}{2} + 2e^2 + C = 15.5 \to \left\{C = -2e^2\right\}$

La primitiva pedida será: $\frac{1}{2}x^2 + \frac{27}{x} + 2e^{\frac{1}{2}x+1} - 2e^2$

Apartado b:

Sea la función: $f(x) = x - \frac{27}{x^2}$

· corte con eje OX: $f(x) = 0 \to x - \frac{27}{x^2} = 0 \to \{x = 3\}$

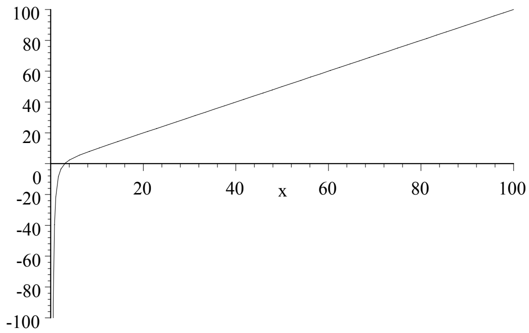
· asíntota vertical en: $x = 0$

· asíntota oblícua: $y = mx + b \to y = x$

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 - \frac{27}{x^3} = 1$

$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(x - \frac{27}{x^2} - x\right) = 0$

Crecimiento de la función: $f'(x) = 1 + \frac{54x}{x^4} = 1 + \frac{54}{x^3} > 0$ $(\forall x > 0)$



Como la función se anula en $x = 3$, para calcular el área pedida habra que determinar el valor absoluto de dos integrales definidas:
$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 \left(x - \frac{27}{x^2}\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{27}{x}\right]_1^3 = -14$
$\int_3^5 f(x)dx = \int_3^5 \left(x - \frac{27}{x^2}\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{27}{x}\right]_3^5 = \frac{22}{5}$
El area será: $14 + \frac{22}{5} = \frac{92}{5} = 18.4$

Junio 04:
a) Encuentra la primitiva de la función $f(x) = 27 - x^3 + 3e^{2x-1}$ *que en el 1 valga 26'75*
b) Dibuja la función $f(x) = 27 - x^3$ *y calcula el área limitada por la curva y el eje X entre* $x = -3$ *y* $x = 5$.
Solución:
Apartado a:
Una primitiva de la función vendrá dada por:
$F(x) = \int f(x)dx = \int \left(27 - x^3 + 3e^{2x-1}\right) dx = 27x - \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}e^{2x-1} + C$
Se trata de hacer que: $F(1) = 26.75$. Por tanto:
$27 \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 1^4 + \frac{3}{2}e^{2-1} + C = 26.75 \to 27 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}e + C = 26.75 \to \{C = -4.077\}$
La primitiva pedida será: $27x - \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}e^{2x-1} - 4.077$
Apartado b:
Determinamos los puntos de corte de la función $f(x) = 27 - x^3$ con el eje OX:
$f(x) = 0 \to 27 - x^3 = 0 \to \{x = 3\}$
Como la función se anula en $x = 3$, para calcular el área pedida habra que determinar el valor absoluto de dos integrales definidas:
$\int_{-3}^3 f(x)dx = \int_{-3}^3 \left(27 - x^3\right) dx == \left[27x - \frac{x^4}{4}\right]_{-3}^3 = 162$
$\int_3^5 f(x)dx = \int_3^5 \left(27 - x^3\right) dx = \left[27x - \frac{x^4}{4}\right]_3^5 = -82$
El area será: $162 + 82 = 244$

Septiembre 04:

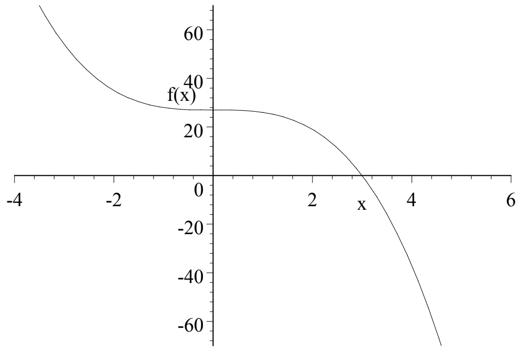


FIGURE 4.1.

a) Dada la función $f(x) = \frac{a}{x} + 3x^2 - x^3$, encuentra a para que si f' es la derivada de f , entonces $f'(-1) = -10$
b) Dibuja la función $f(x) = 3x^2 - x^3$. Encuentra el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$.

Solución:

Apartado a:

$f(x) = \frac{a}{x} + 3x^2 - x^3 \to f'(x) = \frac{-a}{x^2} + 6x - 3x^2$

$f'(-1) = -10 \to -10 = \frac{-a}{(-1)^2} + 6\,(-1) - 3\,(-1)^2 \to -10 = \frac{-a}{1} - 6 - 3 \to \{a = 1\}$

Apartado b:

Representemos la función: $f(x) = 3x^2 - x^3$

- Dominio: $(-\infty, \infty)$
- Por ser una función polinómica, es continua en todo su dominio.
- Simetrías:

$f(x) = 3x^2 - x^3; \qquad f(-x) = 3\,(-x)^2 - (-x)^3 = 3x^2 + x^3$

$$\begin{cases} \text{Como que:} & f(x) \neq f(-x) & \to & \text{No es función par} \\ \text{Como que:} & f(x) \neq -f(-x) & \to & \text{No es función impar} \end{cases}$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = 6x - 3x^2 = 3x\,(2 - x) \to$

$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
Decreciente	Creciente	Decreciente

- Máximos y mínimos:

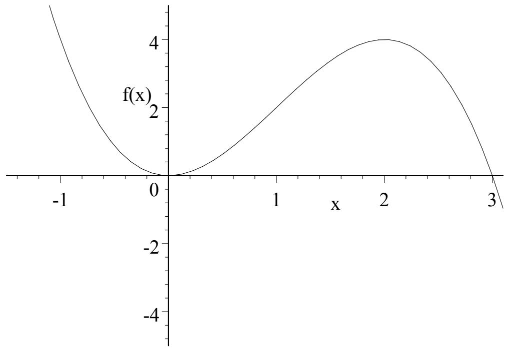


FIGURE 4.2.

$f'(x) = 0 \rightarrow 6x - 3x^2 = 0 \rightarrow \{x = 0\}\,;\{x = 2\}$
$f(0) = 0 - 0 = 0 \qquad\qquad f(2) = 12 - 8 = 4$
teniendo en cuenta el crecimiento de la función, podemos decir que se presenta un mínimo en $(0, 0)$ y un máximo en $(2, 4)$

- Asíntotas horizontales y verticales:

· Hor.:	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(3x^2 - x^3\right) = \infty$	$\rightarrow$	No hay
· Vert.:		$\rightarrow$	No hay

- Asíntotas oblicuas:

$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \left(6x - 3x^2\right) = \infty \rightarrow$ No las hay
Como la función se anula en $x = 0$, para calcular el área pedida habra que determinar el valor absoluto de dos integrales definidas:
$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \left(3x^2 - x^3\right) dx = \left[x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} = \frac{5}{4}$
$\int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{2} \left(3x^2 - x^3\right) dx = \left[x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2} = 4$
El area será: $\frac{5}{4} + 4 = \frac{21}{4}$

4.2 Problemas propuestos

B4-01:

Sea la función $f(x) = \frac{3x-6}{x+2}$ que representa los beneficios expresados en millones de euros que obtiene una determinada empresa, siendo x los años de vida de la misma. Se pide:
a) Representa gráficamente la función.

b) En el momento de fundación de la empresa, ¿hubo pérdidas o beneficios? ¿a cuánto ascendieron?

c) ¿En qué año deja la empresa de tener pérdidas?

d) ¿Están limitados los beneficios? Si lo están, ¿cuál es el límite?

e) ¿A cuánto ascienden los beneficios acumulados durante los tres primeros años?

B4-02:

Sea la función g(x)=$\begin{cases} -x^2+6x & si \quad 0 \leq x \leq 5 \\ -x+10 & si \quad 5 < x \leq 10 \end{cases}$ *. Se pide:*

a) Represéntala gráficamente.

b) Calcula la superficie del recinto comprendido entre dicha función y el eje de abscisas.

B4-03:

Sea la función: $f(x) = \frac{x^2}{3-x}$*. Determinar:*

a) Su dominio de definición.

b) Sus asíntotas.

c) Máximos y mínimos.

d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

e) Área encerrada entre la curva, la asíntota correspondiente, y las rectas $x = 6$, $x = 9$.

B4-04:

Sea la función: $y = 4x^3 - 4x$

a) Calcular una primitiva de la función.

b) Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 4x^3 - 4x$ *y el eje de abscisas.*

c) ¿Es posible que el resultado del apartado anterior sea 0*?*

B4-05:

La variación de los costes de mantenimirento de un grupo de maquinaria de construcción viene dada por la función $v(t) = 8 + 8t + 4t^2$*, donde* t *se mide en años, y* v *en miles de euros/año. Se pide:*

a) Dibuja la gráfica de la función e interprétala.

b) Halla el área encerrada bajo la curva anterior, el eje de abscisas, entre los valores $t = 0$ *y* $t = 4$*. ¿Qué representa este resultado?*

B4-06:

Sea la función $f(x) = 2x^3 + bx^2 + ax - 5$

a) Hállense los valores de a *y* b *de forma que* f *tenga un máximo en* $x = 1$ *y un mínimo en* $x = 2$.

B4-07:

a) Calcular: $\int_0^1 \frac{x^2}{x+2}dx$*. ¿cuál el el significado geométrico de esa integral?*

b) Calcular el área limitada por la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$*, y las rectas* $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

B4-08:

Hallar el área encerrada entre la curva: $y = \begin{cases} (x-3)^2 & si \quad x \geq 0 \\ 3x+9 & si \quad x < 0 \end{cases}$ *y* *el eje de abscisas*

B4-09:

Sabemos que una función $f(x)$ *está definida en el intervalo* $[0,6]$ *y que la gráfica de su derivada* $f'(x)$ *es la línea quebrada que une los puntos* $(0,2)\,,(2,-2)$ *y* $(6,2)$*. Halla razonadamente los intervalos de crecimiento de* $f(x)$ *y sus extremos relativos.*

De una función $f(x)$ *se sabe que está definida en el intervalo* $[0,4]$ *y que la gráfica de su derivada* $f'(x)$ *es la línea quebrada que une los puntos* $(0,1)\,,(2,-1)$ *y* $(4,1)$*.*

Hallar razonadamente los intervalos de crecimiento de $f(x)$ *y sus extremos relativos.*

B4-10:

Determinar una función $f(x)$ *sabiendo que* $f'''(x)=12x$*;* $f''(0)=2$*;* $f'(0)=1$ *y* $f(0)=0$*.*

B4-11:

Una función verifica que $y''=3$*. Determínala, sabiendo que su gráfica pasa por el punto* $(2,0)$ *y que la pendiente de la tangente a la curva en ese punto es* 8*.*

B4-12:

a) Calcular el área limitada por la gráfica de la función $y=\ln x$ *y la recta* $x=e$*, que se encuentra por encima del eje de abscisas.*

b) Calcular el área limitada por la gráfica de la función $y=x\ln x$ *y la recta* $x=e$*, que se encuentra por encima del eje de abscisas.*

B4-13:

Encuentra la ecuación de la curva que pasa por los puntos $P\,(1,0)$ *y* $Q\,(e,e)$*, sabiendo que su derivada segunda es* $f''(x)=2\ln x+1$*.*

B4-14:

Se sabe que la gráfica de una función f *pasa por el punto* $(1,1)$ *y que* $f'(1)=2$*. Se conoce también que su derivada segunda es la función* $f''(x)=3$*. Determina, razonadamente, la función* f*.*

B4-15:

Calcula, en cada caso, la función $f(x)$ *que cumple las condiciones indicadas:*

a) $f(0)=1$ *y* $f'(x)=e^x\cos x$

b) $f(0)=0$ *y* $f'(x)=x\ln\left(x^2+1\right)$

B4-16:

Calcula el área del recinto limitado por la curva $y=\frac{1}{x^2}$*, el eje OX y las rectas* $y=x, x=3$

B4-17:

Una exposición está abierta al público de 8 a 14h. Se ha determinado que el ritmo al que acuden los visitantes viene dado por la función:

$r(t)=-2t^2+12t$ *visitantes/hora.*

Si t representa el número de horas transcurridas desde la apertura de la exposición, determina:

a) ¿Qué significa $r(t)$*?*

b) Representa la función $r(t)$

c) ¿Qué valor de r corresponde a las 10 horas? ¿Y a las 13 horas?

d) ¿Qué unidades tendrá el producto $r(t) \cdot dt$? ¿Qué significa?

e) ¿Cómo interpretas $\int_0^6 r(t) \cdot dt$?

f) Calcula el valor de la integral anterior.

B4-18:

Un depósito de agua de 3000 litros se vacía por un desague por el que fluye el siguiente caudal: $C(t) = -0.15t + 30$, donde t se mide en minutos.

a) Calcula el volúmen de agua que ha salido del depósito a los 10 minutos.

b) Halla el volumen total de agua que ha salido del depósito al llegar al instante t.

c) Calcula el instante en que se vacía el depósito.

B4-19:

Halla una primitiva de la función $y = (2x+1)^3$ que tome el valor 300 para $x = \frac{1}{2}$

B4-20:

En una epidemia se ha detectado que tras la administración de un fármaco antibiótico los casos graves disminuyen a un ritmo de $g(t) = 10e^{-0.02t}$ personas/hora, donde t se mide en horas. Sabemos que el fármaco se ha administrado a las 8 horas de la mañana y que a las 11 horas había aún 250 personas graves. Determina cuántos enfermos graves habrá a las 16 horas.

B4-21:

El valor de un automovil decrece a un ritmo dado por $(1200t - 4000)$ en €/año, siendo t el tiempo en años. Si el valor del vehículo nuevo era de 15.000 € ¿ cuál será su valor al cabo de 3 años?

B4-22:

Sabemos que un polinomio de grado dos $P(x) = x^2 + ax + b$ verifica que se anula para $x = 3$ y, además, se sabe que $\int_0^3 P(x)dx = 6$. Determina los coeficientes a y b.

B4-23:

A las 8 horas de la mañana surge un rumor en una ciudad que se propaga a un ritmo de $e^{\frac{3}{2}t} + 500$ personas/hora. Sabiendo que t representa el número de horas transcurridas desde la aparición del rumor, calcula el número de personas que lo habrán oido entre las 9 y las 12 horas de la mañana.

B4-24:

Sabiendo que $\int_a^b f(x)dx = 0$, ¿podemos asegurar que $a = b$?

Si la respuesta es afirmativa, demostrarlo; si es negativa, poner un ejemplo.

B4-25:

Determina el valor de a, de modo que el área de la región del plano limitada por el eje OX y la gráfica de la función $f(x) = ax^2 - x^3$ valga 12 unidades cuadradas.

5

Probabilidad

5.1 Problemas PAU

Junio 94:

En cierta floristería recibieron cantidades iguales de rosas y gladiolos, de color blanco o amarillo. El 60% de los gladiolos son de color amarillo, mientras que el 70% de las rosas son de color blanco.

a) Si elegimos una rosa, ¿qué probabilidad tenemos de que sea de color amarillo?

b) Si cogemos dos gladiolos, ¿cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

c) ¿Qué proporción de flores son de color blanco?

Solución:

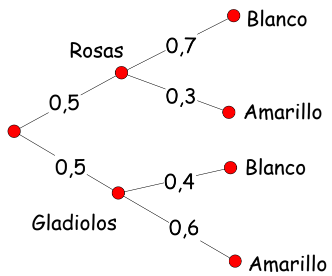
Si se reciben igual cantidad de rosas y gladiolos:

$P(Rosa) = P(Gladiolo) = 0.5$

Si el 60% de los gladiolos son amarillos, el 40% restante serán blancos.

Si el 70% de las rosas son blancas, el 30% restante serán amarillas.

Representamos el enunciado del problema mediante un diagrama en árbol:



Apartado a:

$P(Am/Rosa) = 0.3$

Apartado b:

$P(Bl/Gladiolo) \cdot P(Am/Gladiolo) + P(Am/Gladiolo) \cdot P(Bl/Gladiolo) =$
$= 0.4 \cdot 0.6 + 0.6 \cdot 0.4 = 0.48$

Apartado c:

$P(Bl) = P(Bl/Rosa) + P(Bl/Gladiolo) =$

$= 0.5 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.4 = 0.35 + 0.20 = 0.55 \qquad \rightarrow \qquad 55\%$

Junio 95:

En una máquina se han fabricado 100 *piezas, de las cuales* 15 *han presentado algún defecto.*

a) Calcular la proporción de piezas que no son defectuosas.

b) Calcular la probabilidad de que si examinamos dos piezas, ambas resulten defectuosas.

c) Si probamos dos piezas y la primera es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda no lo sea?

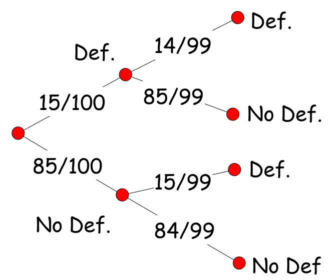
Solución:

Si 15 piezas han resultado defectuosas, las 85 restantes habrán resultado no defectuosas.

Apartado a:

Como $P(D) = 0.15 \rightarrow P(\bar{D}) = 1 - 0.15 = 0.85 \rightarrow 85\%$

Apartado b:



$P(D \wedge D) = P(D) \cdot P(D/D) = \frac{15}{100} \cdot \frac{14}{99} = \frac{7}{330}$

Apartado c:

$P(\bar{D}/D) = \frac{85}{99}$

Junio 96:

Un estuche contiene 15 *lápices de color rojo y* 10 *de color azul.*

a) Si elegimos uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea rojo?

b) Si extraemos dos, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean azules?

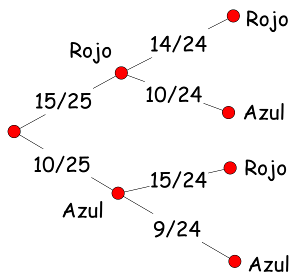
c) Si elegimos dos, calcular la probabilidad de que el primero sea azul y el segundo rojo.

Solución:

Apartado a:

$P(R) = \frac{15}{25}$

Apartados b y c:



$P(A \wedge A) = P(A) \cdot P(A/A) = \frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} = \frac{3}{20}$
$P(A \wedge R) = P(A) \cdot P(R/A) = \frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24} = \frac{1}{4}$

Junio 96 (R1):

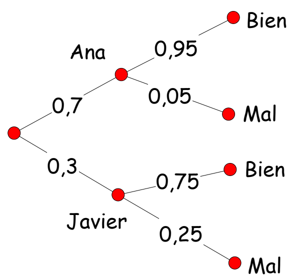
Un restaurante tiene contratados a dos camareros (Javier y Ana) para atender el servicio de comedor. Ana pone el servicio el 70% de los días y se confunde al colocar la cubertería sólo el 5% de los días. Javier, por el contrario, coloca mal alguna pieza el 25% de los días que pone el servicio.

a) Esta mañana, el encargado del restaurante va a pasar revista al servicio; ¿cuál es la probabilidad de que encuentre algún servicio mál colocado?

b) Por desgracia, el encargado encontró unos cubiertos mal ubicados y desea conocer la probabilidad de que haya sido Javier.

Solución:

Si Ana pone el servicio el 70% de los días, Javier lo pone el 30% restante.



Apartado a:
$P(Mal) = P(Mal \wedge Ana) + P(Mal \wedge Javier) = 0.7 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.25 =$
$= 0.035 + 0.075 = 0.11$

Apartado b:
$P(Javier/Mal) = \frac{P(Javier \wedge Mal)}{P(Mal)} = \frac{0.3 \cdot 0.25}{0.11} = 0.681$

Junio 96 (R2):

Cierta persona compra todos los días el diario local, adquiriéndolo independientemente en uno de los dos quioscos (A,B) que están más próximos a su casa; el 80% de los días lo compra en el quiosco A.

a) Calcular la proporción de días que compra el diario en el quiosco B.

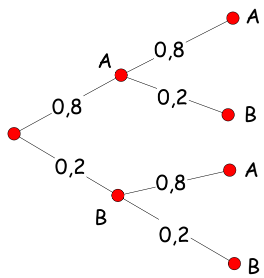
b) ¿Cuál es la probabilidad de que compre el diario dos días consecutivos en el quiosco A?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que dos días consecutivos compre el diario en quioscos distintos?

Solución:

Apartado a:

Si el 80% de los días compra el periódico en el quiosco A, el 20% restante lo hará en el B.



Apartado b:

$P(A \wedge A) = P(A) \cdot P(A) = 0.8 \cdot 0.8 = 0.64$

Apartado c:

$P(A \wedge B) + P(B \wedge A) = P(A) \cdot P(B) + P(B) \cdot P(A) =$
$= 0.8 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.8 = 0.16 + 0.16 = 0.32$

Junio 97:

La probabilidad de que un aficionado al fútbol acuda al campo municipal a ver un partido es del 90% cuando se celebra en un fin de semana (sábado o domingo) y del 50% si tiene lugar en un día laborable (lunes a viernes).

a) Si el próximo fin de semana hay partido, ¿cuál es la probabilidad de que este aficionado no vaya al campo a verlo?

b) Cierto partido se celebrará la próxima semana en un día aún sin determinar. Calcular la probabilidad de que el aficionado acuda a verlo al campo.

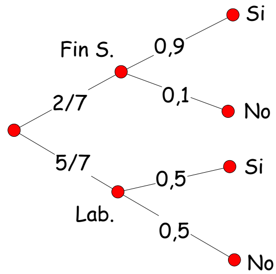
c) Si el aficionado acudió a ver un partido, ¿cuál es la probabilidad de que éste se celebrara en fin de semana?.

Solución:

Apartado a:

Si en un fin de semana, la probabilidad de que acuda es 0.9, la de que no acuda será:

$P(No/FS) = 1 - 0.9 = 0.1$



Apartado b:

Si suponemos equiprobable que el partido se celebre cualquier día de la semana:

$P(Si) = P(Si \wedge FS) + P(Si \wedge Lab) = \frac{2}{7} \cdot 0.9 + \frac{5}{7} \cdot 0.5 = 0.614$

Apartado c:

$P(FS/Sí) = \frac{P(FS\ y\ Si)}{P(Sí)} = \frac{\frac{2}{7} \cdot 0.9}{\frac{2}{7} \cdot 0.9 + \frac{5}{7} \cdot 0.5} = 0.418$

Septiembre 97:

En una caja están guardados 20 relojes, de los cuales hay 15 que funcionan correctamente.

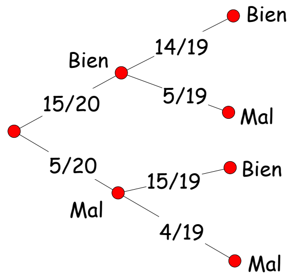
a) Si se extrae un reloj al azar, ¿cuál es la probabilidad de que funcione bien?

b) Si se extraen dos relojes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambos funcionen bien?

c) Si se extraen dos relojes al azar sucesivamente, y el primero no funciona correctamente, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo tampoco?

Solución:

Representamos la situación del problema mediante un diagrama en árbol:



Apartado a:
$P(Bien) = \frac{15}{20} = 0.75$
Apartado b:
$P(Bien \wedge Bien) = P(Bien) \cdot P(Bien/Bien) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} = \frac{21}{38} = 0.552$
Apartado c:
$P(Mal/Mal) = \frac{4}{19} = 0.210$

Junio 98:

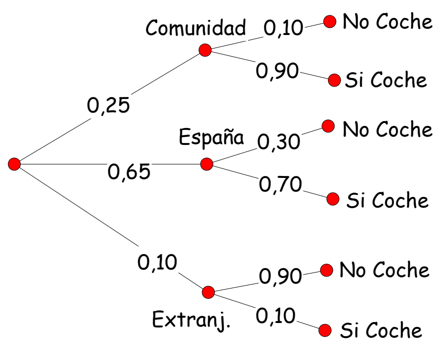
El 25% de las familias de cierta comunidad autónoma española no sale fuera de la misma durante las vacaciones de verano. El 65% veranea por el resto de España, y el 10% restante se va al extranjero. De los que se quedan en su comunidad, sólo un 10% no utiliza el coche en sus desplazamientos. Esta cantidad aumenta al 30% entre los que salen por el resto de España, y al 90% entre los que viajan al extranjero.

a) Calcula el porcentaje de familias de esa comunidad que utiliza el coche en sus desplazamientos de vacaciones de verano.

b) Una familia no usa coche en sus vacaciones de verano. ¿ Cuál es la probabilidad de que salga de su comunidad moviéndose por el resto de España?.

Solución:

Representamos los datos del enunciado sobre un diagrama en árbol:



Apartado a:
$P(Coche) = P(C \wedge Com.) + P(C \wedge Esp.) + P(C \wedge Ext.) =$
$= 0.25 \cdot 0.90 + 0.65 \cdot 0.70 + 0.10 \cdot 0.10 = 0.225 + 0.455 + 0.01 = 0.690$
Apartado b:
$P(No\ Coche) = P(\bar{C} \wedge Com.) + P(\bar{C} \wedge Esp.) + P(\bar{C} \wedge Ext.) =$
$= 0.25 \cdot 0.10 + 0.65 \cdot 0.30 + 0.10 \cdot 0.90 = 0.025 + 0.195 + 0.09 = 0.310$
o bien: $P(NoCoche) = 1 - P(Coche) = 1 - 0.690 = 0.310$
$P(Esp./NoCoche) = \frac{P(\bar{C} \wedge Esp.)}{P(\bar{C})} = \frac{0.65 \cdot 0.30}{0.310} = 0.629$

Septiembre 98:

Un grupo de 40 personas acaba de tomar un autobús. De los 40, sólo 10 son fumadores. Entre los fumadores, el 70% se marea y entre los no fumadores esta cantidad baja al 40%.

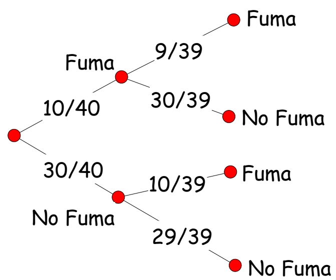
a) Como el trayecto es largo se permite fumar a quien lo desee. 2 individuos se han sentado juntos y no se conocen. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean fumadores?.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un viajero no se maree?

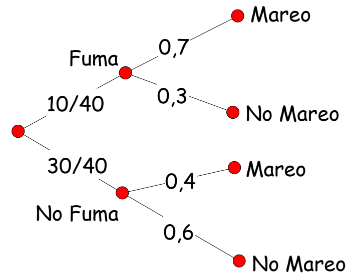
Solución:

Apartado a:

Analizando únicamente si fuman o no, para dos individuos tendremos que:



$P(Fuma \wedge Fuma) = P(F) \cdot P(F/F) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{52} = 0.057$
Apartado b:
Representamos la situación del problema mediante un diagrama en árbol:



$P(No\ Mareo) = P(Fuma\ y\ No\ Mareo) + P(No\ Fuma\ y\ NoMareo) =$
$= \frac{10}{40} \cdot 0.3 + \frac{30}{40} \cdot 0.6 = 0.525$

Junio 99:

En una oficina, el 70% de los empleados son asturianos. De entre los asturianos, el 50% son mujeres, mientras que de los no asturianos sólo son hombres el 20%.

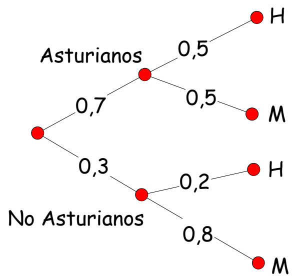
a) ¿Qué porcentaje de empleados no asturianos son mujeres?

b) Calcula la probabilidad de que un empleado de la oficina sea mujer.

c) Fernando trabaja en dicha oficina. ¿Cuál es la probabilidad de que sea asturiano?

Solución:

Representamos los datos del enunciado mediante un diagrama en árbol:



Apartado a:
$P(M/\bar{A}) = 1 - 0.2 = 0.8$
Apartado b:
$P(M) = P(M \wedge A) + P(M \wedge \bar{A}) =$
$= 0.7 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.8 = 0.35 + 0.24 = 0.59$
Apartado c:
$P(H) = 1 - 0.59 = 0.41$

$P(A/H) = \frac{P(A \wedge H)}{P(H)} = \frac{0.7 \cdot 0.5}{0.41} = 0.853$

Septiembre 99:

Una ciudad ha remodelado su paseo marítimo, y en un periódico ha aparecido una encuesta realizada a 200 *personas acerca de si el resultado ha sido satisfactorio o no. De los* 200 *encuestados,* 120 *viven en la ciudad. Además, el porcentaje de los que viven en la ciudad y les han gustado las obras es del* 30%*, el mismo de los que no viven en la ciudad y también les han gustado.*

a) Si se elige una encuesta de las 200*, y ésta se ha hecho a un habitante de la ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que le gusten las obras?.*

b) Si se elige una encuesta de las 200*, y el individuo afirma que le gustan las obras, ¿qué probabilidad hay de que viva en la ciudad?.*

Solución:

Representamos el problema mediante una tabla de doble entrada, completando los datos que faltan:

	Gustan Obras (G)	No gustan Obras ($\bar{G}$)	Total
Ciudad (C)	$\frac{30}{100}200 = 60$	60	120
No Ciudad ($\bar{C}$)	$\frac{30}{100}200 = 60$	20	80
Total	120	80	200

Apartado a:

$P(Gustan\ Obras/Ciudad) = \frac{60}{120} = 0.5$

Apartado b:

$P(Ciudad/Gustan\ Obras) = \frac{60}{120} = 0.5$

Junio 00:

Dos jóvenes aficionados a los juegos de azar se encuentran realizando un solitario con una baraja española de 40 *cartas. Extraen una carta de dicha baraja y desean saber cuál es la probabilidad de "obtener rey" condicionado al suceso "obtener figura". Caracterice ambos sucesos.*

Solución:

Nota: Entendemos el enunciado como "extraida una carta de una baraja, y conocido que ha resultado ser una figura, calcular la probabilidad de que se trate de un rey".

$P(Rey) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

o bien, como que se trata de una probabilidad condicionada, aplicamos el teorema de Bayes:

$P(Rey/Figura) = \frac{P(Rey \wedge Figura)}{P(Figura)} = \frac{\frac{4}{40}}{\frac{12}{40}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Septiembre 00:

En un país de la antigua Europa del Este se ha constituido una comisión parlamentaria integrada por diez miembros, de los cuales siete pertenecen al partido gobernante y el resto al partido de la oposición. Entre los siete miembros del partido gobernante hay cuatro varones y dos, entre los del partido de la oposición. El presidente de la comisión se elige por sorteo entre sus integrantes. Celebrado el sorteo, se sabe que el presidente elegido ha sido un hombre. ¿Qué partido tiene más posibilidades de dirigir la comisión?

Solución:

Se trata de determinar las siguientes probabilidades y compararlas:
$P(Gob/Hom)$ y $P(Opo/Hom)$.

Para ello, podemos ayudarnos con la siguiente tabla:

	Gobierno	Oposición	
Hombre	4	2	6
Mujer	3	1	4
	7	3	10

$\longrightarrow$ $P(Gob/Hom) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
$P(Opo/Hom) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Luego, si sabemos que ha resultado elegido un hombre, el partido del gobierno es el que más probabilidades tiene de dirigir la comisión.

Junio 01:

Se ha hecho un estudio de un nuevo tratamiento sobre 120 *personas aquejadas de cierta enfermedad.* 30 *de ellas ya habían padecido esta enfermedad con anterioridad. Entre las que la habían padecido con anterioridad, el* 80% *ha reaccionado positivamente al nuevo tratamiento. Entre las que no la habían padecido, ha sido el* 90% *el que reaccionó positivamente.*

a) Si elegimos 2 *pacientes al azar ¿cuál es la probabilidad de que los* 2 *ya hayan padecido la enfermedad?*

b) Si elegimos un paciente al azar ¿cuál es la probabilidad de que no reaccione positivamente al nuevo tratamiento?

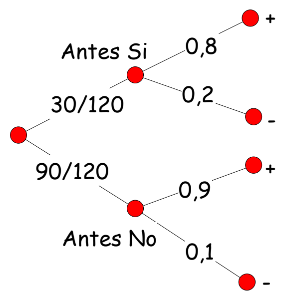
c) Si un paciente ha reaccionado positivamente, ¿cuál es la probabilidad de que no haya padecido la enfermedad con anterioridad?

Solución:

Apartado a:

$P(Antes\ Sí \wedge Antes\ Sí) = P(Antes) \cdot P(Antes/Antes) =$
$= \frac{30}{120} \cdot \frac{29}{119} = \frac{29}{476}$

Apartado b:



$P(-) = P(Antes\ Sí \wedge -) + P(Antes\ No \wedge -) =$
$= \frac{30}{120} \cdot 0.2 + \frac{90}{120} \cdot 0.1 = 0.125$

Apartado c:

$$P(Antes\ No/+) = \frac{P(Antes\ No \wedge +)}{P(+)} = \frac{\frac{90}{120}\cdot 0.9}{\frac{30}{120}\cdot 0.8+\frac{90}{120}\cdot 0.9} = 0.771$$

Septiembre 01:

Se ha realizado una pequeña encuesta a un grupo de estudiantes de informática. Entre sus conclusiones está que un 40% ha recibido ya algún cursillo de informática. Además, el 20% de los que recibieron con anterioridad algún cursillo de informática tiene ordenador en casa. Un 10% de estudiantes tiene ordenador en casa y no recibió con anterioridad un cursillo de informática.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante tenga ordenador en casa y haya recibido un cursillo de informática con anterioridad?

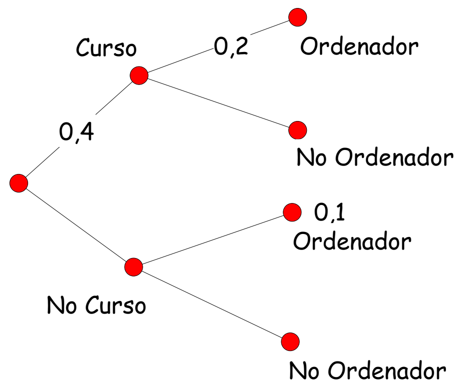
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante tenga ordenador en casa?

c) Si un estudiante tiene ordenador en casa, ¿cuál es la probabilidad de que ya haya recibido un cursillo de informática?

Solución:

Representamos los datos del enunciado mediante una tabla de contingencia o un diagrama en árbol:

	Ordenador Si	Ordenador No	
Cursillo Si	0.2×0.4		0.4
Cursillo No	0.1		



Apartado a:

$P(Curso \wedge Ordenador) = 0.4 \cdot 0.2 = 0.08$

Apartado b:

$P(Ordenador) = P(Curso \wedge Ordenador) + P(No\,Curso \wedge Ordenador) =$
$= 0.4 \cdot 0.2 + 0.1 = 0.18$

Apartado c:

$P(Curso/Ordenador) = \frac{P(Curso \wedge Ordenador)}{P(Ordenador)} = \frac{0.08}{0.18} = 0.444$

Junio 02:

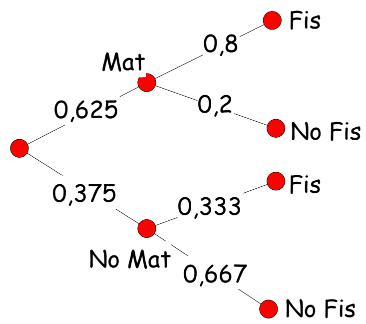
En cierto curso de un centro de enseñanza el 62.5% de los alumnos aprobaron Matemáticas. Por otro lado, entre quienes aprobaron Matemáticas, el 80% aprobó también Física. Se sabe igualmente que sólo el 33.3% de quienes no aprobaron Matemáticas aprobaron Física.

a) ¿Qué porcentaje consiguió aprobar ambas asignaturas a la vez?

b) ¿Cuál fue el porcentaje de aprobados en la asignatura de Física?

c) Si un estudiante no aprobó Física, ¿qué probabilidad hay de que aprobara Matemáticas?

Solución:



Apartado a:

$P(Mat \wedge Fis) = P(Mat) \cdot P(Fis/Mat) = 0.625 \cdot 0.8 = 0.5 \rightarrow 50\%$

Apartado b:

$P(Fis) = P(Mat \wedge Fis) + P(No\ Mat \wedge Fis) =$

$= 0.625 \cdot 0.8 + 0.375 \cdot 0.333 = 0.6248 \rightarrow 62.48\%$

Apartado c:

$P(Mat/No\ Fis) = \frac{P(Mat\ \wedge\ NoFis)}{P(No\ Fis)} = \frac{0.625 \cdot 0.2}{0.625 \cdot 0.2 + 0.375 \cdot 0.667} = 0.333$

Septiembre 02:

El 70% de los solicitantes de un puesto de trabajo tiene experiencia y además una formación acorde con el puesto. Sin embargo, hay un 20% que tiene experiencia y no una formación acorde con el puesto. Se sabe también que entre los solicitantes que tienen formación acorde con el puesto, un 87.5% tiene experiencia.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un solicitante no tenga experiencia?

b) Si un solicitante tiene experiencia, ¿cuál es la probabilidad de que su formación sea acorde con el puesto?

c) Calcula la probabilidad de que un solicitante tenga formación acorde con el puesto.

Solución:

Representamos los datos del enunciado mediante una tabla de contingencia o un diagrama en árbol:

	Exper. Si	Exper. No	
Form. Si	70		$x = 80$
Form. No	20		
			100

Apartado a:
$P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - 0.9 = 0.1$
Apartado b:
$P(F/E) = \frac{P(F \wedge E)}{P(E)} = \frac{0.7}{0.9} = 0.777$
Apartado c:
$\frac{87.5}{100}x = 70 \rightarrow \{x = 80\}$
$P(F) = \frac{80}{100} = 0.8$

Junio 03:

Un grupo de amigos ha estado hablando de sus gustos musicales. La música clásica gusta al 20% de ellos. Se sabe también que el porcentaje de los que les gusta la música moderna entre quienes les gusta la clásica es del 75% y el porcentaje de los que les gusta la música moderna entre quienes no les gusta la clásica es del 87.5%

a) ¿Cuál es la probabilidad de que a un individuo del grupo le guste la música moderna?

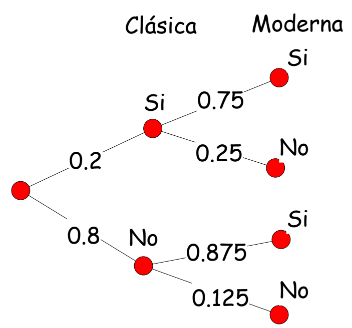
b) ¿Cuál es la probabilidad de que a un individuo del grupo le guste tanto la música clásica como la moderna?

c) Si a un individuo le gusta la moderna ¿cuál es la probabilidad de que también le guste la clásica?

d) Si a un individuo no le gusta la moderna ¿cuál es la probabilidad de que sí le guste la clásica?

Solución:

Representamos la situación mediante un diagrama en árbol:



Apartado a:
$P(M) = P(C \wedge M) + P(\bar{C} \wedge M) = 0.2 \times 0.75 + 0.8 \times 0.875 = 0.85$
Apartado b:
$P(C \wedge M) = 0.2 \times 0.75 = 0.15$
Apartado c:
$P(C/M) = \frac{P(C \wedge M)}{P(M)} = \frac{0.15}{0.85} = 0.176$
Apartado d:
$P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0.85 = 0.15$
$P(C \wedge \bar{M}) = 0.2 \times 0.25 = 0.05$
$P(C/\bar{M}) = \frac{P(C \wedge \bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{0.05}{0.15} = 0.\hat{3}$

Septiembre 03:

En un grupo de matrimonios se ha observado que en el 50% la mujer tiene estudios universitarios. En un 30% de los matrimonios tanto el hombre como la mujer los tienen. Finalmente, en el 37.5% de los matrimonios en los que el marido tiene estudios universitarios la mujer los tiene.

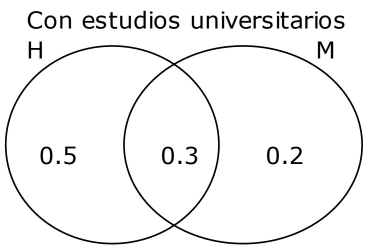
a) ¿Qué probabilidad hay de que en un matrimonio el marido tenga estudios universitarios?

b) ¿En qué porcentaje de matrimonios en los que la mujer tiene estudios universitarios el marido también los tiene?

c) ¿En qué porcentaje de matrimonios el marido no tiene estudios universitarios y la mujer sí?

Solución:

Apartado a:
Representamos la situación mediante un diagrama de Venn:
$P(M) = 0.5; P(H \wedge M) = 0.3 \rightarrow P(solo\ M) = 0.2$
$P(H \wedge M) = 0.375 \cdot P(H) \rightarrow 0.3 = 0.375 \cdot P(H) \rightarrow P(H) = 0.8$
$P(solo\ H) = P(H) - P(H \wedge M) \rightarrow P(solo\ H) = 0.8 - 0.3 = 0.5$



Apartado a:
$P(H \wedge M) = 0.375 \cdot P(H) \rightarrow 0.3 = 0.375 \cdot P(H) \rightarrow P(H) = 0.8$
Apartado b:
$P(H/M) = \frac{P(H \wedge M)}{P(M)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$
Apartado c:
$P(M) = 0.5; P(H \wedge M) = 0.3 \rightarrow P(solo\ M) = 0.2$

Junio 04:

En un grupo de personas, al 50% les han puesto alguna vez una multa de tráfico. Por otro lado, al 12‘5% no les han puesto nunca una multa pero sí han sufrido alguna vez un accidente. Finalmente, al 60% de quienes nunca han tenido un accidente no les han puesto nunca una multa.

a) ¿Qué porcentaje no han tenido nunca un accidente ni les han puesto una multa?

b) ¿Que porcentaje no han tenido nunca un accidente?

c) Entre las personas que nunca han tenido una multa, ¿qué porcentaje no han tenido nunca un accidente?

Solución:

Representamos la situación mediante una tabla de doble entrada:

	Accidente Si	Accidente No	
Multa Si	25	25	50
Multa No	12.5	37.5	50
	37.5	62.5	100

$0.6x = 37.5 \rightarrow \{x = 62.5\}$

Apartado a:

Un 37.5% no ha tenido nunca un accidente ni se le ha puesto una multa.

Apartado b:

Un 62.5% no ha tenido nunca un accidente.

Apartado c:

$P\left(\bar{A}/\bar{M}\right) = \frac{P\left(\bar{A}\wedge\bar{M}\right)}{P\left(\bar{M}\right)} = \frac{12.5}{50} = 0.25$

De entre los que no han tenido nunca una multa, un 25% tampoco ha tenido nunca un accidente.

Septiembre 04:

En un grupo de amigos el 80% están casados. Entre los casados, el 75% tienen trabajo. Finalmente, un 5% no están casados y tampoco tienen trabajo.

a) ¿Que porcentaje no tiene trabajo?

b) Si uno tiene trabajo, ¿qué probabildad hay de que esté casado?

c) ¿Qué porcentaje están casados entre los que no tienen trabajo?

Solución:

Representamos la situación mediante una tabla de doble entrada:

	Trabajo Si	Trabajo No	
Casados Si	$0.75 \cdot 80 = 60$	20	80
Casados No	15	5	20
	75	25	100

Apartado a:

Un 25% no tiene trabajo

Apartado b:

$P(C/T) = \frac{P(C\wedge T)}{P(T)} = \frac{60}{75} = \frac{4}{5} = 0.8$

Apartado c:

$P\left(C/\bar{T}\right)=\frac{P\left(C\wedge\bar{T}\right)}{P\left(\bar{T}\right)}=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}=0.8$

De entre los que no tienen trabajo, un 80% están casados.

5.2 Problemas propuestos

B5-01:

La urna S contiene 4 bolas blancas y 3 negras, y la urna T contiene 3 bolas blancas y dos negras. Tomamos al azar una bola de S y, sin mirarla, la introducimos en T. A continuación extraemos con reemplazamiento dos bolas de T. Hallar la probabilidad de que:

a) sean del mismo color

b) sean de distinto color

B5-02:

Una entidad bancaria concede tres tipos de créditos: hipotecarios, para industria y personales. Se sabe que el 30% de los créditos que concede son hipotecarios, el 50% para industria y el 20% restante son personales. Han resultado impagados el 20% de los créditos para vivienda, el 25% de los créditos para industria y el 50% de los créditos para consumo. Se pide:

a) Representar la situación mediante un diagrama en árbol.

b) Seleccionado un crédito al azar, calcular la probabilidad de que se pague.

c) Un determinado crédito ha resultado impagado; calcular la probabilidad de que sea un crédito de vivienda.

B5-03:

En una población se sabe que el 30% *escucha los informativos por la Radio; el* 60% *por la Televisión; y el* 20% *los escucha por los dos medios de comunicación. Si se elige una persona al azar, determina la probabilidad de que:*

a) escuche alguno de los medios de comunicación.

b) escuche la Radio sabiendo que no ve la Televisión.

c) escuche sólo uno de los dos medios.

B5-04:

En un trayecto entre dos ciudades próximas, un automovilista ha de atravesar tres zonas que están en obras y en las que se regula el tráfico mediante semáforos. La probabilidad de encontrar la luz en rojo para cada uno de los tres semáforos es, respectivamente, 0.3 , 0.7 *y* 0.5*. Se pide la probabilidad de que el conductor:*

a) encuentre los tres semáforos en rojo.

b) encuentre los tres semáforos en verde

c) encuentre en rojo uno de ellos y los otros dos en verde.

B5-05:

En un determinado barrio de la ciudad se ha observado que el 70% *de sus habitantes tiene más de* 50 *años y que de éstos el* 60% *es propietario de la* *vivienda en la que habita. También se sabe que el porcentaje de propietarios es del* 30% *entre aquellos que no superan los* 50 *años. Se pide:*

a) Calcula la probabilidad de que un vecino, que ha sido elegido al azar, sea propietario de la vivienda en la que habita.

b) Elegido un vecino al azar, resulta ser propietario de la vivienda en la que habita. Calcula la probabilidad de que tenga más de 50 *años.*

B5-06:

Probamos una vacuna contra la gripe en un grupo de 400 *personas, de las que* 180 *son hombres y* 220 *mujeres. De las mujeres,* 25 *cogen la gripe y de los hombres* 23*. Determina las siguientes probabilidades:*

a) que al seleccionar una persona al azar resulte que no tiene gripe.

b) que al seleccionar una persona al azar resulte ser una mujer que no tiene gripe.

c) que seleccionada una persona que no tiene gripe, resulte ser un hombre.

d) que seleccionada una mujer, resulte no tener gripe.

B5-07:

En un grupo de 100 personas, 50 escucha las noticias por radio, 70 ven las noticias en Tv. y 30 escuchan la radio y ven la Tv. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) escucha la radio o ve la Tv.

b) no escucha la radio y no ve la Tv.

c) escucha la radio pero no ve la Tv.

B5-08:

El 20% de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 20% son economistas. El 75% de los ingenieros ocupa un puesto directivo y el 50% de los economistas también, mientras que entre el resto de empleados, únicamente el 20% ocupa un puesto directivo. Calcula las siguientes probabilidades:

a) que al seleccionar un empleado al azar resulte ser un ingeniero que no ocupa un cargo directivo.

b) que al seleccionar un empleado al azar resulte no ser ni ingeniero ni economista, pero ocupar un cargo directivo.

c) que al seleccionar un cargo directivo al azar, resulte ser economista.

d) que al seleccionar un cargo directivo al azar, resulte ser ingeniero o economista.

B5-09:

El 15% de los habitantes de un país padece cierta enfermedad. Para diagnosticar la misma, se dispone de un procedimiento que no es completamente fiable, ya que da positivo en el 90% de los casos de personas realmente enfermas, pero también da positivo en el 5% de personas sanas. Determina la probabilidad de que:

a) esté sana una persona cuyo diagnóstico ha sido positivo.

b) esté enferma una persona cuyo diagnóstico ha sido negativo.

B5-10:

Un monedero (A) contiene 2 monedas de 1 € y tres monedas de 2 €; otro monedero (B) contiene 4 de 1 € y 3 de 2 €.

a) si elegimos un monedero al azar y extraemos de él 2 monedas, ¿cuál es la probabilidad de que ambas monedas sean de 1 €?

b) si, tras elegir un monedero al azar, extraemos 2 monedas de él y resultan ser dos monedas de 1 €, cuál será la probabilidad de que hayamos elegido el monedero A?

B5-11:

Tres aviones disparan simultáneamente sobre un blanco, siendo independientes los disparos de uno y otro, y siendo la probabilidad de que un avión acierte el blanco igual a 0.6*. Calcular la probabilidad de que el blanco sea destruido.*

B5-12:

Una caja contiene 100 piezas, entre las cuales hay 20 defectuosas en cuanto a su longitud, 12 defectuosas en cuanto a la anchura y 15 defectuosas en cuanto a su altura. Por otra parte, sabemos que hay 7 piezas defectuosas en longitud y altura, 4 en longitud y anchura, 5 en anchura y altura y 2 piezas defectuosas en sus tres dimensiones. Se pide:

a) Dibujar un diagrama de Venn representando la situación.

b) Probabilidad de que una pieza tomada al azar presente un solo defecto.

c) Probabilidad de que una pieza tomada al azar sea defectuosa solo en longitud.

B5-13:

De 150 pacientes, 90 tienen una enfermedad cardíaca, 50 tienen cáncer y 20 tienen ambas enfermedades.

a) Representar la situación mediante un diagrama de Venn.

b) Determinar la probabilidad de que una persona tomada al azar tenga una sola de las dos enfermedades.

B5-14:

Se tienen 2 urnas que contienen 13 y 15 bolas respectivamente. La urna I contiene 5 Blancas y 8 Negras, mientras que la urna II contiene 6 Blancas y 9 Rojas. Se toma, al azar, una bola de la urna I y se pasa a la urna II. A continuación, se toma, al azar, una bola de la urna II y se pasa a la urna I. Extraemos, al azar, una bola de la urna I. Calcula la probabilidad de que sea Roja.

B5-15:

Tres máquinas A, B y C han producido, respectivamente, 70*,* 20 *y* 10 *piezas iguales que se encuentran en un cajón. Cada una de estas máquinas presenta una probabilidad de producir una pieza defectuosa de* 0.10*,* 0.20 *y* 0.40*, respectivamente. Extraemos al azar una pieza del cajón. Se pide:*

a) probabilidad de que resulte ser defectuosa.

b) si resulta ser una pieza defectuosa, probabilidad de que proceda de la máquina A.

B5-16:

Una máquina se compone de dos elementos M y N. La probabilidad de que el funcionamiento de M sea defectuoso es 0.05, y la de que el funcionamiento de N sea defectuoso es 0.03. La máquina funciona correctamente siempre que lo hacen ambos elementos y también en el 30% de los casos en que ambos son defectuosos. Calcula la probabilidad de que la máquina no funcione correctamente.

B5-17:

Los habitantes de una ciudad reparten sus votos entre el partido A y el B. El 55% de los habitantes son menores de 30 años; de ellos el 80% son del partido B. De los mayores de 30 años, sólo lo son el 10%. Elegimos una persona al azar:

a) calcula la probabilidad de que sea del partido A.

b) que resulta ser del partido A; calcula la probabilidad de que tenga menos de 30 años.

B5-18:

Una fábrica produce ejes y cojinetes que ajustan entre sí. El porcentaje de cojinetes defectuosos es el 5% y el de ejes el 2%. Son utilizables cuando ambos son Correctos y en el 50% de los casos en que ambos son Incorrectos. Calcula la probabilidad de que sean utilizables.

B5-19:

Seleccionadas 4 personas al azar, calcula la probabilidad de que tengan diferentes fechas de cumpleaños.

B5-20:

A partir de los datos del censo de un país, se conoce que, para una persona tomada al azar: $P(Blanca) = 0.8$; $P(Mujer/Blanca) = 0.52$; $P(Soltera/Mujer \wedge Blanca) = 0.4$

Calcula la probabilidad de que una persona, tomada al azar, resulte ser mujer, soltera y blanca.

B5-21:

Amelia, Javier y Ramón, sortean, al azar, el orden en que van a entrar, de uno en uno, por una puerta.

a) calcula la probabilidad de que los dos últimos en entrar sean hombres.

b) determina si son independientes los sucesos S_1 y S_2, siendo:

S_1 *: "la mujer entra antes que alguno de los hombres"*

S_2 *: "los dos hombres entran consecutivamente"*

B5-22:

En un determinado lugar hay tres lugares de diversión a los que suelen ir un grupo de tres amigos. Las probabilidades de que vayan al primero, segundo o tercero son, respectivamente, 0.3, 0.5 y 0.7 Halla la probabilidad de que el grupo de amigos vaya:

a) sólamente a uno de los lugares.

b) únicamente a dos de los lugares.

c) a los tres lugares.

B5-23:

La probabilidad de que tenga lugar el contrario de un suceso A es $1/3$;

la probabilidad de un suceso B es $3/4$; y la probabilidad de que ocurran a la vez los sucesos A y B es $5/8$. Determina:

a) probabilidad de que se verifique el suceso A o el suceso B.

b) probabilidad de que no se verifique A y no se verifique B.

c) probabilidad de que ocurra A sabiendo que se ha verificado B.

d) independencia de los sucesos A y B.

B5-24:

Se tienen dos urnas U_1 y U_2 cuyo contenido en bolas Rojas, Azules y Verdes es:

- en la urna U_1: 4 bolas Azules, 3 bolas Rojas y 3 Verdes.

- en la urna U_2: 4 bolas Rojas, 5 Azules y 1 Verde.

Se lanzan tres monedas y, si se obtienen exactamente dos caras, se extrae una bola de la urna U_1; en otro caso, se extrae de la urna U_2. Se pide:

a) Efectuar un diagrama para el experimento de lanzar las 3 monedas.

b) Calcular la probabilidad de que la bola extraida sea Azul.

B5-25:

a) Explica qué quiere decir que dos sucesos son independientes y qué quiere decir que son incompatibles.

¿Dos sucesos con probabilidades no nulas pueden ser independientes e incompatibles a la vez?. Justifica la respuesta.

b) Calcula la probabilidad $P(A \cup B)$ sabiendo que:

$P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ *y* $P(A/B) = 0.2$.

6

Estadística

6.1 Problemas PAU

Junio 94:

En cierto barrio se quiere hacer un estudio para conocer mejor el tipo de actividades de ocio que gustan más a sus habitantes. Para ello van a ser encuestados 100 *individuos elegidos al azar.*

a) Explicar qué procedimiento de selección sería más adecuado utilizar: muestreo con o sin reposición. ¿Por qué?

b) Como los gustos cambian con la edad y se sabe que en el barrio viven 2.500 *niños,* 7.000 *adultos y* 500 *ancianos, posteriormente se decide elegir la muestra anterior utilizando un muestreo estratificado.*

b1. Definir los estratos

b2. Determinar el tamaño muestral correspondiente a cada estrato.

Solución:

Apartado a:

Todas las fórmulas que hemos estudiado de teoría del muestreo y de inferencia estadística presuponen que las poblaciones son infinitas o que, si no lo son, el muestreo aleatorio se realiza con reposición.

Sin embargo, si la población es suficientemente grande, y la muestra cumple las condiciones de aplicación de las pruebas o tests: "es preferible seleccionar la muestra sin reposición, para evitar la posibilidad de que algún elemento se tenga que tener en cuenta más de una vez"

Apartado b1:

Para efectuar un muestreo aleatorio estratificado, será necesario que la muestra refleje fielmente los estratos existentes en la población; deben considerarse los estratos formados por: niños, adultos y ancianos.

Apartado b2:

El tamaño muestral de cada estrato deberá ser proporcional a la presencia del mismo en la población original:

$$\text{- Población:} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Total:} & 2500 + 7000 + 500 = 10\,000 \\ \text{Niños} & \frac{2500}{10000} = 0.25 \rightarrow 25\% \\ \text{Adultos:} & \frac{7000}{10000} = 0.70 \rightarrow 70\% \\ \text{Ancianos:} & \frac{500}{10000} = 0.05 \rightarrow 5\% \end{array} \right.$$

$$\text{- Muestra :} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Total:} & 100 \\ \text{Niños} & \frac{25}{100}100 = 25 \\ \text{Adultos:} & \frac{70}{100}100 = 70 \\ \text{Ancianos:} & \frac{5}{100}100 = 5 \end{array} \right.$$

Luego, la muestra debe estar formada por 25 niños, 70 adultos y 5 ancianos.

Junio 95:

Una asociación deportiva está interesada en conocer los deportes preferidos por niños y adolescentes. Se plantea realizar una encuesta a 100 *escolares en un colegio que cuenta con* 1.000 *en total.*

a) Comentar las características de la muestra si el entrevistador entrevista a los 100 *primeros niños que localice a la entrada. ¿Se puede proponer algún otro método de selección más adecuado?. Razonar las respuestas.*

b) La dirección del colegio facilita los datos siguientes sobre las edades (x) *de los estudiantes:*

Edad	n^o *alumnos*
$0 < x \leq 5$	50
$5 < x \leq 10$	200
$10 < x \leq 14$	400
$14 < x \leq 18$	350

¿Cómo se podría utilizar esta información para mejorar la selección? ¿Cuál sería la composición de edades de la muestra?

Solución:

Apartado a:

Si se entrevista a los 100 primeros escolares que se localice a la entrada, no se está realizando un muestreo aleatorio; la muestra resultará, muy probablemente, sesgada. Si el estudio se realiza a la hora de entrada, es posible, por ejemplo, que los que se encuentren sean los más estudiosos y puntuales; si, por el contrario, se realiza durante el horario escolar, es posible que los entrevistados sean los menos estudiosos y los que faltan a clase.

Una opción más correcta sería establecer un muestreo aleatorio estratificado a partir un listado de todos los alumnos y de los datos facilitados por la dirección. Una posible manera de seleccionar la muestra es a partir de números aleatorios obtenidos de tablas, calculadora u ordenador.

Apartado b:

Para efectuar un muestreo aleatorio estratificado, será necesario que la muestra refleje fielmente los estratos existentes en la población; deben considerarse los estratos formados por las diferentes categorías de edad.

El tamaño muestral de cada estrato deberá ser proporcional a la presencia del mismo en la población original:

$$\text{- Población: } \left\{ \begin{array}{ll} \text{Total:} & 1000 \\ 0 < x \leq 15 & 50 \rightarrow \frac{50}{1000} = 0.05 \rightarrow 5\% \\ 15 < x \leq 10 & 200 \rightarrow \frac{200}{1000} = 0.2 \rightarrow 20\% \\ 10 < x \leq 14 & 400 \rightarrow \frac{400}{1000} = 0.4 \rightarrow 40\% \\ 14 < x \leq 18 & 350 \rightarrow \frac{350}{1000} = 0.35 \rightarrow 35\% \end{array} \right.$$

$$\text{- Muestra :} \quad \begin{cases} \text{Total:} & 100 \\ 0 < x \leq 15 & \frac{5}{100}100 = 5 \\ 15 < x \leq 10 & \frac{20}{100}100 = 20 \\ 10 < x \leq 14 & \frac{40}{100}100 = 40 \\ 14 < x \leq 18 & \frac{35}{100}100 = 35 \end{cases}$$

Luego, la muestra debe estar formada por los alumnos indicados en la tabla anterior según las categorías de edad.

Junio 96:

La empresa de transporte urgentes "El Rápido" asegura en su publicidad que entrega el 80% *de sus envíos antes de las 12 de la mañana. Para contrastar la calidad de este servicio, la asociación de consumidores selecciona aleatoriamente* 100 *envíos en diversos días.*

a) Establecer la hipótesis nula y la hipótesis alternativa.

b) Describir, en este caso, en qué consistirían los errores tipo I y tipo II. ¿Cómo se llama la probabilidad de confundirnos de modo que la asociación acuse injustamente a la empresa de no cumplir sus compromisos publicitarios?

c) A partir de los datos de la muestra, el informe elaborado por la asociación afirma que el valor obtenido es significativo. ¿Cómo debe ser interpretado este resultado?

Solución:

Apartado a:

· Hipótesis nula $(H_0) : p \geq 0.8$ "al menos el 80% de los envíos se entregan antes de las 12 h. de la mañana"

· Hipótesis alternativa $(H_1) : p < 0.8$ "menos del 80% de los envíos se entregan antes de las 12 h. de la mañana"

Las hipótesis así definidas, suponen plantear una prueba de contraste de hipótesis unilateral.

Apartado b:

· errores tipo I: rechazar la hipótesis nula, siendo ésta verdadera.

· errores tipo II: aceptar la hipótesis nula, siendo ésta falsa.

La probabilidad de confundirnos al acusar injustamente a la empresa sería, precisamente, el nivel de significación α de la prueba. Estaríamos cometiendo un error de tipo I.

	H_0 verdadera	H_0 falsa
Aceptar H_0:	Decisión Correcta $p = 1 - \alpha$	Error tipo II $p = \beta$
Rechazar H_0:	Error tipo I $p = \alpha$	Decisión Correcta $p = 1 - \beta$

Apartado c:

Si el valor obtenido en la prueba es significativo, entenderemos que la diferencia encontrada no es debida al azar. Optaremos por rechazar la hipótesis nula. Es decir, se pone en duda la afirmación de la empresa acerca de que "el 80% de los envíos se entregan antes de las 12 h. de la mañana".

Junio 97:

Con el objetivo de controlar la calidad de sus productos, la fábrica de conservas "PEZ" ha decidido seleccionar parte de su producción para un análisis detallado.

a) Comentar brevemente cómo podrían seleccionarse muestras aleatorias de esa producción. ¿Debería efectuarse un muestreo con o sin reposición? ¿Por qué?

b) La producción diaria es de 6.000 *latas de las que el* 80% *son de tamaño normal y el* 20% *restante corresponde a la lata "familiar". Sabiendo que el tamaño muestral es* $n = 30$, *justificar cuántas latas de cada tipo "deberían" estudiarse.*

Solución:

Apartado a:

Una posible manera de seleccionar la muestra es partir de números aleatorios obtenidos de tablas, calculadora u ordenador.

Todas las fórmulas que hemos estudiado de teoría del muestreo y de inferencia estadística presuponen que las poblaciones son infinitas o que, si no lo son, el muestreo aleatorio se realiza con reposición.

Sin embargo, si la población es suficientemente grande, y la muestra cumple las condiciones de aplicación de las pruebas o tests: "es preferible seleccionar la muestra sin reposición, para evitar la posibilidad de que algún elemento se tenga que tener en cuenta más de una vez"

Conviene efectuar un muestreo aleatorio estratificado; si fuera sistemático, cabría la posibilidad de obtener una muestra sesgada (fallos sistemáticos de envasado...).

Apartado b:

Para efectuar un muestreo aleatorio estratificado, será necesario que la muestra refleje fielmente los estratos existentes en la población; deben considerarse los estratos formados por: latas de tamaño Normal y latas de tamaño Familiar.

El tamaño muestral de cada estrato deberá ser proporcional a la presencia del mismo en la población original:

$$\text{- Población:} \quad \begin{cases} \text{Total:} & 6000 \\ \text{Normal:} & 80\% \\ \text{Familiar:} & 20\% \end{cases}$$

$$\text{- Muestra :} \quad \begin{cases} \text{Total:} & 30 \\ \text{Normal:} & \frac{80}{100}30 = 24 \\ \text{Familiar:} & \frac{20}{100}30 = 6 \end{cases}$$

Luego, la muestra debe estar formada por 24 latas de tamaño Normal y 6 latas de tamaño Familiar.

Septiembre 97:

La compañía suministradora de gas desea estimar el número de viviendas de la ciudad que tienen contratado su servicio, realizando una encuesta a 800 *de las* 10.000 *viviendas que existen en la misma.*

a) La compañía dispone de un listado completo de las viviendas para realizar la selección, ¿qué diferencias hay si la muestra se toma con o sin reposición? ¿Qué método es más adecuado? Razonar las respuestas.

b) Una vez realizada la encuesta, la empresa se encontró con que 640 *viviendas entrevistadas tenían contratado su servicio. ¿ En cuánto se puede estimar el número total que lo tienen contratado en la ciudad?*

Solución:

Apartado a:

Todas las fórmulas que hemos estudiado de teoría del muestreo y de inferencia estadística presuponen que las poblaciones son infinitas o que, si no lo son, el muestreo aleatorio se realiza con reposición.

Sin embargo, si la población es suficientemente grande, y la muestra cumple las condiciones de aplicación de las pruebas o tests: "es preferible seleccionar la muestra sin reposición, para evitar la posibilidad de que algún elemento se tenga que tener en cuenta más de una vez"

Apartado b:

- Una estimación puntual:

El mejor estimador puntual de la proporción de viviendas de la ciudad que tienen contratado el servicio de gas, es la proporción observada en la muestra:

· En la muestra: $\widehat{p} = \frac{640}{800} = 0.8 \to 80\%$

· En la población: $p = 0.8 \to 0.8 \cdot 10000 = 8000$ viviendas.

- Una estimación por intervalo:

Se trata de determinar un Intervalo de Confianza.

Si aceptamos un nivel de confianza del 95% (nivel de significación del 0.5% o $\alpha = 0.05$), para una prueba bilateral, tendremos que: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

Sabemos que el Intervalo de Confianza para estimar una proporción viene dado por:

$$IC = \widehat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\widehat{p} \cdot \widehat{q}}{n}} = 0.8 \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{800}} = (0.772, 0.827)$$

Por tanto, en la población tendremos entre:

$0.772 \cdot 10000 = 7720$ y $0.827 \cdot 10000 = 8270$ viviendas.

La interpretación de este Intervalo de Confianza es que:

"Si tomáramos un gran número de muestras del mismo tamaño (800), el 95% de los intervalos obtenidos contendrá la proporción buscada en la población; tan sólo el 5% restante no contendrá dicha proporción".

Junio 98:

En los últimos tiempos, las ventas medias en un comercio, rondaban las 120.000 *ptas. diarias. Sin embargo, hace unos meses se abrió una superficie comercial cerca del mismo. El establecimiento defiende que las ventas medias se mantienen o incluso han aumentado, pero que no han disminuido. Para contrastar estadísticamente este supuesto se ha seleccionado* *una muestra de las ventas diarias realizadas después de la apertura de la superficie comercial.*

a) Establecer las hipótesis nula y alternativa.

b) ¿Qué nombre recibe la probabilidad de que el establecimiento concluya erróneamente que las ventas medias han disminuido? Explica cómo se denomina y en qué consiste el otro error posible.

c) El establecimiento ha encargado el estudio a un especialista, y en su informe afirma textualmente que "el valor obtenido al realizar el contraste es significativo", pero el establecimiento no entiende el significado de la frase. ¿Significa que el establecimiento debe concluir que sus ventas disminuyeron, o es lo contrario?

Solución:

Apartado a:

· Hipótesis nula $(H_0) : \mu \geq 120000$ "las ventas medias diarias se mantienen o incluso han aumentado"

· Hipótesis alternativa $(H_1) : \mu < 120000$ "las ventas medias diarias han disminuido".

Apartado b:

· errores tipo I: rechazar la hipótesis nula, siendo ésta verdadera.

· errores tipo II: aceptar la hipótesis nula, siendo ésta falsa.

La probabilidad de que el establecimiento concluya erróneamente que las ventas han disminuido sería, precisamente, el nivel de significación α de la prueba. Estaríamos cometiendo un error de tipo I.

	H_0 verdadera	H_0 falsa
Aceptar H_0:	Decisión Correcta $p = 1 - \alpha$	Error tipo II $p = \beta$
Rechazar H_0:	Error tipo I $p = \alpha$	Decisión Correcta $p = 1 - \beta$

Apartado c:

Si el valor obtenido al realizar el contraste es significativo, entendemos que la diferencia encontrada no es debida al azar. Optaremos por rechazar la hipótesis nula. Deberíamos concluir que las ventas sí han disminuido, aunque sería necesario especificar cuál es el nivel de significación de la prueba.

Septiembre 98:

Un Ayuntamiento va a realizar una encuesta para averiguar si los ciudadanos están a favor de las últimas medidas urbanísticas que se han tomado.

a) Para tal fin se ha contratado a dos personas que realizarán llamadas telefónicas al azar durante una semana, todos los días laborables, y en horario de oficina (de 10 a 14 horas). ¿Qué opinión te merece este procedimiento? Independientemente de que el método propuesto anteriormente sea correcto o no, propón un muestreo (telefónico o no) alternativo.

b) El Ayuntamiento pretende que la muestra contenga información de *distintas zonas de la ciudad. Si se tiene la siguiente distribución de habitantes:*

Zona	*Centro*	*Barrios periferia*	*Resto*
nº habitantes	*14.910*	*34.293*	*99.897*

¿cómo distribuirías una muestra de 200 *habitantes?*

Solución:

Apartado a:

Si se entrevista telefónicamente de la manera descrita, no se está realizando un muestreo aleatorio; los ciudadanos no serán seleccionados de manera equiprobable. La muestra resultará, muy probablemente, sesgada. Quedan excluidos, por ejemplo, todos aquello que no dispongan de teléfono, además de aquellos que, aún teniéndolo, trabajen fuera de la localidad.

Como ventaja, en cambio, señalar que resulta un método sencillo y económico.

Una opción más correcta sería establecer un muestreo aleatorio estratificado a partir un censo de toda la población. Cabría estratificar en función de grupos de edad o de zonas de residencia, por ejemplo. Una posible manera de seleccionar la muestra es a partir de números aleatorios obtenidos de tablas, calculadora u ordenador.

Apartado b:

Para efectuar un muestreo aleatorio estratificado, será necesario que la muestra refleje fielmente los estratos existentes en la población; deben considerarse los estratos formados por las distintas zonas de residencia.

El tamaño muestral de cada estrato deberá ser proporcional a la presencia del mismo en la población original:

$$\text{- Población:} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Total:} & 14910 + 34293 + 99897 = 149100 \\ \text{Centro:} & \frac{14910}{149100} = 0.1 \rightarrow 10\% \\ \text{Periferia} & \frac{34293}{149100} = 0.23 \rightarrow 23\% \\ \text{Resto} & \frac{99897}{149100} = 0.67 \rightarrow 67\% \end{array} \right.$$

$$\text{- Muestra :} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Total:} & 200 \\ \text{Centro:} & \frac{10}{100}200 = 20 \\ \text{Periferia:} & \frac{23}{100}200 = 46 \\ \text{Resto} & \frac{67}{100}200 = 134 \end{array} \right.$$

Luego, la muestra debe estar formada por 20 habitantes del centro, 46 de las zonas periféricas y 134 del resto de la ciudad.

Junio 99:

La Concejalía de Juventud de un Ayuntamiento maneja el dato de que la edad a la que los hijos se independizan de sus padres es una variable Normal con media 29 *años y desviación típica* 3 *años. Aunque la desviación típica no plantea dudas, sí se sospecha que la media ha descendido, sobre todo por la política de ayuda al empleo que ha llevado a cabo el Ayuntamiento. Así, de un estudio reciente sobre* 100 *jóvenes que se acaban de independizar, se ha obtenido una media de* 28.1 *años de edad.*

a) Con un nivel de significación del 1%, *¿puede defenderse que la edad* *media no ha disminuido, frente a que sí lo ha hecho como parecen indicar los datos? Plantear el contraste o test de hipótesis y resolverlo.*

b) Explicar, en el contexto del problema, en qué consisten cada uno de los errores de tipo I y II.

Nota: Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1:

$F(100) = 1; F(3) = 0.999; F(2.33) = 0.99; F(0.01) = 0.504$

Solución:

Apartado a:

1. Formulamos las hipótesis nula y alternativa:

· $H_0 : \mu \geq 29$ "la edad media no ha disminuido"

· $H_1 : \mu < 29$ "la edad media ha disminuido"

2. Aceptamos el nivel de significación impuesto y que se trata de una prueba unilateral:

$$\alpha = 0.01 \quad \rightarrow \quad Z_\alpha = 2.33$$

3. Determinamos el Intervalo de Confianza para una media:

$$IC = \overline{x} \pm Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 28.1 \pm 2.33 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}} = (27.401, 28.799)$$

4. Elegimos entre H_0 y H_1:

Como que la media a contrastar (29) se encuentra fuera del Intervalo de Confianza calculado, rechazamos la hipótesis nula H_0; es decir, no podemos afirmar, con un nivel de significación del 1%, que la edad media de emancipación en la población sea mayor o igual a 29 años; concluimos, por tanto, que ha disminuido.

Apartado b:

· errores tipo I: rechazar la hipótesis nula, siendo ésta verdadera.

· errores tipo II: aceptar la hipótesis nula, siendo ésta falsa.

En este caso:

Error tipo I: Aceptar que la edad media ha disminuido cuando en realidad no lo ha hecho.

Error tipo II: Aceptar que la edad media no ha disminuido cuando en realidad sí lo ha hecho.

	H_0 verdadera	H_0 falsa
Aceptar H_0:	Decisión Correcta $p = 1 - \alpha$	Error tipo II $p = \beta$
Rechazar H_0:	Error tipo I $p = \alpha$	Decisión Correcta $p = 1 - \beta$

Septiembre 99:

El 42% de los escolares de cierto país suelen perder al menos un día de clase a causa de gripes y catarros. Sin embargo, un estudio sobre 1.000 escolares revela que en el último curso hubo 450 en tales circunstancias. Las autoridades defienden que el porcentaje del 42% para toda la población de escolares se ha mantenido.

a) Contrastar con un nivel de significación del 5% la hipótesis defendida por las autoridades sanitarias , frente a que el porcentaje ha aumentado, *como parecen indicar los datos, explicando claramente a qué conclusión se llega.*

b) ¿Cómo se llama la probabilidad de concluir erróneamente que el % se ha mantenido?

Nota: Algunos valores de la función de distribución Normal de media 0 *y desviación típica* 1*:*

$F(1000) = 1; F(1.645) = 0.95; F(1.92) = 0.9726; F(0.05) = 0.5199$

Solución:

Apartado a:

1. Formulamos las hipótesis nula y alternativa:

· $H_0 : p \leq 0.42$ "el 42% se ha mantenido (no ha aumentado)"

· $H_1 : p > 0.42$ "el 42% ha aumentado"

2. El nivel de significación impuesto es del 5% y se trata de una prueba unilateral, por tanto $Z_\alpha = 1.645$:

3. Calculamos el Intervalo de Confianza para una proporción:

La proporción observada en la muestra es: $\hat{p} = \frac{450}{1000} = 0.45$

$$IC = \hat{p} \pm Z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}} = 0.45 \pm 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{1000}} = (0.424, 0.475)$$

4. Elegimos entre H_0 y H_1:

Como que la proporción a contrastar (0.42) se encuentra fuera del Intervalo de Confianza calculado, rechazamos la hipótesis nula H_0 ; es decir, no podemos afirmar, con un nivel de significación del 5% que el porcentaje del 42% se ha mantenido en la población.

Apartado b:

· errores tipo I: rechazar la hipótesis nula, siendo ésta verdadera.

· errores tipo II: aceptar la hipótesis nula, siendo ésta falsa.

La probabilidad de concluir erróneamente que el % se ha mantenido, sería la probabilidad de aceptar la hipótesis nula siendo ésta falsa. Esta probabilidad de denomina β y determina la potencia de la prueba que es $(1 - \beta)$. Estaríamos cometiendo un error de tipo II.

	H_0 verdadera	H_0 falsa
Aceptar H_0:	Decisión Correcta $p = 1 - \alpha$	Error tipo II $p = \beta$
Rechazar H_0:	Error tipo I $p = \alpha$	Decisión Correcta $p = 1 - \beta$

Junio 00:

A partir de la información que recoge las pautas de consumo diario de cigarrillos de la población femenina, las autoridades sanitarias desean adoptar las medidas oportunas con objeto de reducir dicho consumo.

Consumo cigarrillos	*0 - 5*	*5 - 10*	*10 - 15*	*15 - 25*	*25 - 35*
Pob. femenina (miles)	*2*	*10*	*15*	*7*	*2*

a) Determine el consumo más frecuente.

b) Calcule el consumo medio y su desviación típica.

c) La media y desviación típica del consumo masculino ha sido de 15 y 4, respectivamente. Un consumo de 17 cigarrillos, ¿en que población destaca más? ¿por qué?

Solución:

Apartado a:

El consumo más frecuente se corresponde con la moda de esta distribución, que es el intervalo $M_o = (10 - 15)$ cigarrillos, o si se prefiere, con la marca de clase de dicho intervalo: $M_o = 12.5$ cigarrillos.

Apartado b:

Para calcular la media y la desviación típica, nos ayudamos de la siguiente tabla:

	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
0-5	2.5	2	5	12.5
5-10	7.5	10	75	562.5
10-15	12.5	15	187.5	2343.75
15-25	20	7	140	2800
25-35	30	2	60	1800
		36	467.5	7518.75

$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{n} = \frac{467.5}{36} = 12.986$

$s^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{n} - \bar{x}^2 = \frac{7518.75}{36} - 12.986^2 = 40.218 \rightarrow$

$\rightarrow s = \sqrt{40.218} = 6.341$

Apartado c:

Podemos presuponer una distribución normal en el consumo de cigarrillos tanto de los hombres como de las mujeres, y tipificar en cada caso el valor de 17 cigarrillos, mediante el cambio de variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

Hombres	Mujeres
$\bar{x} = 15$	$\bar{x} = 12.986$
$s = 4$	$s = 6.341$
$Z = \frac{17-15}{4} = 0.5$	$Z = \frac{17-12.986}{6.341} = 0.633$

De esta manera, comprobamos que el consumo de 17 cigarrillos destaca más entre las mujeres, dado que ese valor supera a la media en 0.633 veces la desviación típica.

Septiembre 00:

La empresa informática DEPALE, S.A. lanza al mercado un nuevo producto cuya vida útil se estima en 4.6 *años, en promedio, con una desviación típica de* 1.6 *años. La empresa decide realizar una promoción inicial con objeto de estimular las ventas. La promoción consiste en ofertar una garantía de sustitución del producto, sin coste adicional, si se detectase algún defecto durante el primer año de vida. Suponiendo que la duración de este producto sigue una distribución normal, determine la probabilidad de tener que reclamar su sustitución después de adquirirlo.*

$\{N(0,1) \rightarrow F(2.25) = 0.9878\}$

Solución:

Comenzamos tipificando la variable, mediante el cambio de variable:
$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \qquad \rightarrow \qquad Z = \frac{1-4.6}{1.6} = -2.25$
La probabilidad que se nos pide será:
$p\,(Z \leq -2.25) = 1 - p\,(Z \leq 2.25) = 1 - 0.9878 = 0.0122$

Junio 01:

Una empresa de automóviles está estudiando algunas mejoras que ha incluido en la nueva generación de su gama de utilitarios. Hasta ahora, los kilómetros que uno de estos automóviles podía recorrer -con un uso normal- sin que fueran necesarias reparaciones importantes seguía una Normal con media 220 *(en miles de kilómetros) y desviación típica* 15 *(en miles de kilómetros). Las mejoras parecen haber surtido efecto, puesto que con* 100 *automóviles de la nueva generación se ha obtenido una media de* 225 *(en miles de kilómetros) sin ningún tipo de problema grave. Suponiendo que la desviación típica se ha mantenido:*

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que las mejoras no han surtido efecto o incluso que han emperorado la situación, frente a que sí han surtido efecto como parecen indicar los datos. Si se concluyera que la media sigue igual o incluso bajó, y sin embargo esta conclusión fuera falsa, ¿cómo se llama el error cometido?

b) Con un nivel de significación del 1%*, ¿a qué conclusión se llega?*

Nota: Algunos valores de la distribución Normal de media 0 *y desviación típica* 1*:*

$F\,(100) = 1; F\,(3.33) = 0.999; F\,(2.33) = 0.99; F\,(0.01) = 0.504$

Solución:

Apartado a:

1. Formulamos las hipótesis nula y alternativa:
$H_0 : \mu \leq 220$ "las mejoras no han surtido efecto"
$H_1 : \mu > 220$ "las mejoras si han surtido efecto"

2. Aceptamos el nivel de significación impuesto y que se trata de una prueba unilateral:

$$\alpha = 0.01 \qquad \rightarrow \qquad Z_\alpha = 2.33$$

3. Determinamos el Intervalo de Confianza para una media:

$$IC = \overline{x} \pm Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 225 \pm 2.33 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}} = (221.51, 228.50)$$

4. Elegimos entre H_0 y H_1:

Como que la media a contrastar (220) se encuentra fuera del Intervalo de Confianza calculado, rechazamos la hipótesis nula H_0; es decir, no podemos afirmar, con un nivel de significación del 1%, que las mejoras no han surtido efecto; concluimos, por tanto, que la nueva generación de automóviles ha supuesto una mejora.

Apartado b:

· errores tipo I: rechazar la hipótesis nula, siendo ésta verdadera.
· errores tipo II: aceptar la hipótesis nula, siendo ésta falsa.

En este caso:

Si se concluyera que la media sigue igual o incluso bajó, y sin embargo esta conclusión fuera falsa, estaríamos cometiento un error de tipo II

	H_0 verdadera	H_0 falsa
Aceptar H_0:	Decisión Correcta $p = 1 - \alpha$	Error tipo II $p = \beta$
Rechazar H_0:	Error tipo I $p = \alpha$	Decisión Correcta $p = 1 - \beta$

Septiembre 01:

Una de las entradas a cierta ciudad sufría constantemente retenciones de tráfico, de forma que el tiempo de espera en la cola formada por el semáforo allí instalado seguía una Normal de media 10 *minutos y desviación típica* 4 *minutos. Con el fin de descongestionar ese punto y bajar la media de tiempo de espera, se habilitó una vía de acceso auxiliar. Transcurrida una semana se hizo un pequeño estudio sobre* 36 *vehículos y se obtuvo que el tiempo medio de espera en el citado semáforo fue de* 8.5 *minutos. Las autoridades municipales mostraron su satisfacción y dijeron que la medida había funcionado, pero la opinión pública, sin embargo, defiende que la situación sigue igual. Suponiendo que la desviación típica se ha mantenido:*

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis defendida por la opinión pública frente a la de los responsables municipales. Si se concluye que la media de tiempo de espera bajó y realmente no lo hizo, ¿cómo se llama el error cometido?

b) ¿A qué conclusión se llega con un nivel de significación del 5%*?*

Nota: Algunos valores de la función de distribución Normal de media 0 y desviación típica 1:

$F(36) = 1; F(2.25) = 0.99; F(1.645) = 0.95; F(0.05) = 0.5199$

Solución:

Apartado a:

1. Formulamos las hipótesis nula y alternativa:

$\cdot\ H_0 : \mu \geq 10$ "el tiempo de espera no ha disminuido"

$\cdot\ H_1 : \mu < 10$ "el tiempo de espera sí ha disminuido"

2. Aceptamos el nivel de significación impuesto y que se trata de una prueba unilateral:

$$\alpha = 0.05 \qquad \rightarrow \qquad Z_\alpha = 1.645$$

3. Determinamos el Intervalo de Confianza para una media:

$$IC = \overline{x} \pm Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 8.5 \pm 1.645 \cdot \frac{4}{\sqrt{36}} = (7.403, 9.596)$$

4. Elegimos entre H_0 y H_1:

Como que la media a contrastar (10) se encuentra fuera del Intervalo de Confianza calculado, rechazamos la hipótesis nula H_0; es decir, no podemos afirmar, con un nivel de significación del 5%, que el tiempo de espera no ha disminuido; concluimos, por tanto, que la medida adoptada ha funcionado y ha disminuido el tiempo de espera.

Apartado b:

· errores tipo I: rechazar la hipótesis nula, siendo ésta verdadera.

· errores tipo II: aceptar la hipótesis nula, siendo ésta falsa.

En este caso:

Si se concluye que la media de tiempo de espera bajó y realmente no lo hizo, estaremos cometiendo un error tipo I.

	H_0 verdadera	H_0 falsa
Aceptar H_0:	Decisión Correcta $p = 1 - \alpha$	Error tipo II $p = \beta$
Rechazar H_0:	Error tipo I $p = \alpha$	Decisión Correcta $p = 1 - \beta$

Junio 02:

En un hospital se observó que los pacientes abusaban del servicio de urgencias, de forma que un 30% *de las consultas podían perfectamente haber esperado a concertar una cita con el médico de cabecera, porque no eran realmente urgencias. Puesto que esta situación ralentizaba el servicio, se realizó una campaña intensiva de concienciación. Transcurridos unos meses se ha recogido información de* 60 *consultas al servicio, de las cuales sólo* 15 *no eran realmente urgencias:*

a) Hay personal del hospital que defiende que la campaña no ha mejorado la situación. Plantea un test para contrastar esta hipótesis frente a que sí la mejoró. Si se concluye que la situación no ha mejorado y realmente sí lo hizo, ¿cómo se llama el error cometido?

b) ¿A qué conclusión se llega en el test planteado en el apartado anterior con un nivel de significación del 1%*?*

Nota: Algunos valores de la función de distribución Normal de media 0 *y desviación típica* 1*:*

$F(0) = 0.5; F(0.01) = 0.5; F(0.85) = 0.80; F(2.33) = 0.99; F(60) = 1$

Solución:

Apartado a:

1. Formulamos las hipótesis nula y alternativa:

$\cdot\ H_0 : p \geq 0.30$ "el porcentaje del 30% no ha disminuido"

$\cdot\ H_1 : p < 0.30$ "el porcentaje del 30% sí ha disminuido"

2. El nivel de significación impuesto es del 1% y se trata de una prueba unilateral, por tanto $Z_\alpha = 2.33$:

3. Calculamos el Intervalo de Confianza para una proporción:

La proporción observada en la muestra es: $\hat{p} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} = 0.25$

$$IC = \hat{p} \pm Z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}} = 0.25 \pm 2.33 \cdot \sqrt{\frac{0.25 \cdot 0.75}{60}} = (0.119, 0.380)$$

4. Elegimos entre H_0 y H_1:

Como que la proporción a contrastar (0.30) se encuentra dentro del Intervalo de Confianza calculado, aceptamos la hipótesis nula H_0 ; es decir, no podemos afirmar, con un nivel de significación del 1% que, tras la campaña, el porcentaje de consultas que no eran urgencias, del 30%, haya disminuido.

Apartado b:

· errores tipo I: rechazar la hipótesis nula, siendo ésta verdadera.

· errores tipo II: aceptar la hipótesis nula, siendo ésta falsa.

En este caso, al concluir que el porcentaje no ha disminuido, si realmente sí lo hubiera hecho, estaríamos cometiendo un error tipo II

	H_0 verdadera	H_0 falsa
Aceptar H_0:	Decisión Correcta $p = 1 - \alpha$	Error tipo II $p = \beta$
Rechazar H_0:	Error tipo I $p = \alpha$	Decisión Correcta $p = 1 - \beta$

Septiembre 02:

El alcalde de una ciudad prometió, en su programa, oponerse a la construcción de una central de tratamiento de ciertos residuos, puesto que en aquel momento sólo un 10% *de los ciudadanos estaban a favor de la central. En los últimos días se ha encuestado a* 100 *personas de las cuales* 14 *están a favor de la central. El alcalde afirma sin embargo que el porcentaje de ciudadanos a favor sigue siendo del* 10% *o incluso ha disminuido.*

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis defendida por el alcalde, frente a que sucedió lo contrario, como parecen indicar los datos. Si se concluyera que el % ha aumentado y esta conclusión fuera falsa, ¿cómo se llamaría el error cometido?

b) Explica claramente a qué conclusión se llega en el test planteado en el apartado anterior para un nivel de significación del 5%*.*

Nota: Algunos valores de la función de distribución Normal de media 0 *y desviación típica* 1*:*

$F(100) = 1; F(1.33) = 0.91; F(1.645) = 0.95; F(0.05) = 0.5199$

Solución:

Apartado a:

1. Formulamos las hipótesis nula y alternativa:

· $H_0 : p \leq 0.10$ "el porcentaje del 10% ha disminuido o se mantiene"

· $H_1 : p > 0.10$ "el porcentaje del 10% ha aumentado"

2. El nivel de significación impuesto es del 5% y se trata de una prueba unilateral, por tanto $Z_\alpha = 1.645$:

3. Calculamos el Intervalo de Confianza para una proporción:

La proporción observada en la muestra es: $\hat{p} = \frac{14}{100} = 0.14$

$$IC = \hat{p} \pm Z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}} = 0.14 \pm 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.14 \cdot 0.86}{100}} = (0.083, 0.197)$$

4. Elegimos entre H_0 y H_1:

Como que la proporción a contrastar (0.10) se encuentra dentro del Intervalo de Confianza calculado, aceptamos la hipótesis nula H_0 ; es decir, no podemos afirmar, con un nivel de significación del 5% que, en la actualidad, el porcentaje de quienes se muestran favorables a la central, el 10%, haya aumentado.

Apartado b:

· errores tipo I: rechazar la hipótesis nula, siendo ésta verdadera.

· errores tipo II: aceptar la hipótesis nula, siendo ésta falsa.

En este caso, si se hubiera concluido que el % ha aumentado y esta conclusión fuera falsa, el error cometido sería un error tipo I

	H_0 verdadera	H_0 falsa
Aceptar H_0:	Decisión Correcta $p = 1 - \alpha$	Error tipo II $p = \beta$
Rechazar H_0:	Error tipo I $p = \alpha$	Decisión Correcta $p = 1 - \beta$

Junio 03:

Un 43% de la población adulta de cierta ciudad sabía realizar el cambio entre euros y pesetas correctamente. Mediante una campaña informativa se ha pretendido elevar ese porcentaje y parece que se han cumplido sus objetivos a la vista del resultado de una encuesta a 110 personas: de ellas 55 sabían realizar bien tales operaciones. Sin embargo hay quien duda de la efectividad de la campaña.

a) Plantear un test para contrastar que la campaña no ha surtido efecto frente a que sí lo ha hecho. Si se concluye que el porcentaje se mantuvo y realmente subió ¿cómo se llama el error cometido?

b) ¿A qué conclusión se llega en el test planteado en el apartado anterior a un nivel de significación del 1%?

Nota: Algunos valores de la función de distribución de la Normal de medioa 0 y desviación típica 1: $F(110) = 1; F(2.33) = 0.99; F(1.48) = 0.93; F(0.01) = 0.504$

Solución:

Apartado a:

1. Formulamos las hipótesis nula y alternativa:

· $H_0 : p \leq 0.43$ ”el porcentaje del 43% no ha aumentado”

· $H_1 : p > 0.43$ "el porcentaje del 43% ha aumentado”

2. El nivel de significación impuesto es del 1% y se trata de una prueba unilateral, por tanto $Z_\alpha = 2.33$:

3. Calculamos el Intervalo de Confianza para una proporción:

La proporción observada en la muestra es: $\hat{p} = \frac{55}{110} = \frac{1}{2} = 0.5$

$$IC = \hat{p} \pm Z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}} = 0.5 \pm 2.33 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{110}} = (0.389, 0.611)$$

4. Elegimos entre H_0 y H_1:

Como que la proporción a contrastar (0.43) se encuentra dentro del Intervalo de Confianza calculado, aceptamos la hipótesis nula H_0 ; es decir, no podemos afirmar, con un nivel de significación del 1% que, tras la campaña, el porcentaje de personas que sabía realizar el cambio entre euros y pesetas correctamente haya aumentado.

Apartado b:

· errores tipo I: rechazar la hipótesis nula, siendo ésta verdadera.

· errores tipo II: aceptar la hipótesis nula, siendo ésta falsa.

En este caso, al concluir que el porcentaje no ha aumentado, si realmente sí lo hubiera hecho, estaríamos cometiendo un error tipo II

	H_0 verdadera	H_0 falsa
Aceptar H_0:	Decisión Correcta $p = 1 - \alpha$	Error tipo II $p = \beta$
Rechazar H_0:	Error tipo I $p = \alpha$	Decisión Correcta $p = 1 - \beta$

Septiembre 03:

Una cadena de establecimientos comerciales lleva unos meses ofreciendo a sus clientes un descuento en sus compras siempre que estas se realicen utilizando la tarjeta propia de la cadena. Hasta que comenzaron los descuentos, la proporción de compras que se efectuaban con la tarjeta era del 18%*. Recientemente se ha tomado una muestra de* 150 *compras de las cuales* 39 *han sido realizadas con la tarjeta.*

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que los descuentos no han tenido efecto en el uso de la tarjeta, frente a que han aumentado su uso, como parecen indicar los datos. Si se concluyera que la proporción de compras realizadas con la tarjeta se mantuvo y esta conclusión fuera falsa ¿cómo se llama el error cometido?

b) Explica claramente a que conclusión se llega en el test planteado en el apartado anterior para un nivel de significación del 1%*.*

Nota: Algunos valores de la función de distribución Normal de media 0 *y desviación típica* 1*:*

$F(150)$ =*1;*$F(39)$ =*1;*$F(2.55)$ =*0.995;*$F(2.33)$ =*0.99;*$F(0.26)$ =*0.603*

Solución:

Apartado a:

1. Formulamos las hipótesis nula y alternativa:

· $H_0 : p \leq 0.18$ "los descuentos no han tenido efecto"

· $H_1 : p > 0.18$ "los descuentos sí han tenido efecto"

2. El nivel de significación impuesto es del 1% y se trata de una prueba unilateral, por tanto $Z_\alpha = 2.33$:

3. Calculamos el Intervalo de Confianza para una proporción:

La proporción observada en la muestra es: $\hat{p} = \frac{39}{150} = 0.26$

$$IC = \hat{p} \pm Z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}} = 0.26 \pm 2.33 \cdot \sqrt{\frac{0.26 \cdot 0.74}{150}} = (0.176, 0.343)$$

4. Elegimos entre H_0 y H_1:

Como que la proporción a contrastar (0.18) se encuentra dentro del Intervalo de Confianza calculado, aceptamos la hipótesis nula H_0 ; es decir, no podemos afirmar, con un nivel de significación del 1% que el porcentaje del 18% que utilizaba tarjeta para efectuar sus compras haya aumentado.

Apartado b:

· errores tipo I: rechazar la hipótesis nula, siendo ésta verdadera.

· errores tipo II: aceptar la hipótesis nula, siendo ésta falsa.

En este caso, si se concluyera que la proporción de compras realizadas con la tarjeta se mantuvo y esta conclusión fuera falsa, el error cometido sería un error tipo II

	H_0 verdadera	H_0 falsa
Aceptar H_0:	Decisión Correcta $p = 1 - \alpha$	Error tipo II $p = \beta$
Rechazar H_0:	Error tipo I $p = \alpha$	Decisión Correcta $p = 1 - \beta$

Junio 04:

En los últimos años, el consumo familiar diario de cierta ciudad en electricidad (en kw) seguía una Normal de media 6'3 con desviación típica de 1'2. Sin embargo, desde hace unos meses las tarifas eléctricas han experimentado varias reducciones, y se piensa que esto ha podido repercutir en un aumento del consumo. Recientemente, para una muestra de 47 familias se ha obtenido un consumo medio diario de 6'8. Suponiendo que el consumo sigue siendo aproximadamente Normal y que la desviación típica se ha mantenido:

a) Plantea un test para contrastar que el abaratamiento de las tarifas no ha influido en el consumo, frente a que ha tenido la repercusión que se piensa, como parecen indicar los datos. Si se concluyera que la media de consumo se ha mantenido y realmente subió ¿cómo se llama el error cometido?

b) ¿A qué conclusión se llega en el test planteado en el apartado anterior con un nivel de significación del 1%?

Nota: algunos valores de la distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: F(6'8)=1, F(2'86)=0'998, F(2'33)=0'99, F(0'01)=0'504

Solución:

Apartado a:

1. Formulamos las hipótesis nula y alternativa:

· $H_0 : \mu \leq 6.3$ "el consumo de kw. no ha aumentado"

· $H_1 : \mu > 6.3$ "el consumo de kw. sí ha aumentado"

2. Aceptamos el nivel de significación impuesto y que se trata de una prueba unilateral:

$$\alpha = 0.01 \qquad \rightarrow \qquad Z_\alpha = 2.33$$

3. Determinamos el Intervalo de Confianza para una media:

$$IC = \overline{x} \pm Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6.8 \pm 2.33 \cdot \frac{1.2}{\sqrt{47}} = (6.\,392, 7.\,207)$$

4. Elegimos entre H_0 y H_1:

Como que la media a contrastar (6.3) se encuentra fuera del Intervalo de Confianza calculado, rechazamos la hipótesis nula H_0; es decir, no podemos afirmar, con un nivel de significación del 1%, que el consumo se haya mantenido; concluimos, por tanto, que la reducción de las tarifas ha incrementado el consumo de kw.

Apartado b:

· errores tipo I: rechazar la hipótesis nula, siendo ésta verdadera.

· errores tipo II: aceptar la hipótesis nula, siendo ésta falsa.

En este caso, si se hubiera concluido que la media de consumo se ha mantenido mientras que realmente hubiera subido, estaríamos cometiendo un error tipo II.

	H_0 verdadera	H_0 falsa
Aceptar H_0:	Decisión Correcta $p = 1 - \alpha$	Error tipo II $p = \beta$
Rechazar H_0:	Error tipo I $p = \alpha$	Decisión Correcta $p = 1 - \beta$

Septiembre 04:

Se cree que el comportamiento de ciertos microorganismos marinos se ha visto afectado por un vertido residuos, reduciéndose en particular el tiempo de vida de dichos microorganismos. Antes del vertido ese tiempo seguía una Normal de media 45 días y desviación típica 4 días. Unas semanas después del vertido se contabilizó el tiempo de vida de una muestra de 50 microorganismos, obteniéndose una media de 43 días de vida. Suponiendo que el tiempo de vida sigue siendo aproximadamente Normal y que la desviación tipica se ha mantenido,

a) Plantea un test par contrastar la hipótesis de que el vertido de residuos no les ha afectado frente a que ha influido en la forma en que se cree. Si se concluyera que sí afectó y esta conclusión fuera falsa ¿cómo se llama el error cometido?

b) Explica claramente a qué conclusión se llega en el test planteado en el apartado anterior para un nivel de significación del 3%.

Nota: algunos valores de la distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: F(3'54)=1, F(1'82)=0'97, F(0'03)=0'51

Solución:

Apartado a:

1. Formulamos las hipótesis nula y alternativa:

· $H_0 : \mu \geq 45$ "el tiempo de vida no ha disminuido"

· $H_1 : \mu < 45$ "el tiempo de vida sí ha disminuido"

2. Aceptamos el nivel de significación impuesto y que se trata de una prueba unilateral:

$$\alpha = 0.03 \qquad \rightarrow \qquad Z_\alpha = 1.82$$

3. Determinamos el Intervalo de Confianza para una media:

$$IC = \overline{x} \pm Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 43 \pm 1.82 \cdot \frac{4}{\sqrt{50}} = (41.\,97, 44.\,03)$$

4. Elegimos entre H_0 y H_1:

Como que la media a contrastar (45) se encuentra fuera del Intervalo de Confianza calculado, rechazamos la hipótesis nula H_0; es decir, no podemos afirmar, con un nivel de significación del 3%, que el tiempo de vida no ha disminuido; concluimos, por tanto, que el vertido ha influido, disminuyendo el tiempo de vida de los microorganismos.

Apartado b:

· errores tipo I: rechazar la hipótesis nula, siendo ésta verdadera.

· errores tipo II: aceptar la hipótesis nula, siendo ésta falsa.

En este caso, si se concluyera que el vertido afectó a los microorganismos reduciendo su tiempo de vida y esta conclusión fuera falsa, estaríamos cometiendo un error tipo I.

	H_0 verdadera	H_0 falsa
Aceptar H_0:	Decisión Correcta $p = 1 - \alpha$	Error tipo II $p = \beta$
Rechazar H_0:	Error tipo I $p = \alpha$	Decisión Correcta $p = 1 - \beta$

6.2 Problemas propuestos

B6-01:

Se ha tomado una muestra en 40 aves rapaces que habitan en cierto ecosistema. Se ha detectado que 18 de ellas eran portadoras de una enfermedad transmitida a través de los conejos. Si sabemos que la población de aves rapaces en dicho ecosistema es de 2.500 unidades, determina, con un nivel de confianza del 90%, el número de aves rapaces enfermas.

B6-02:

Una muestra aleatoria de 100 alumnos que terminan el bachiller de Ciencias Sociales, revela que su media de edad es 18,1 años. Determina, con un nivel de confianza del 95%, la edad media de los estudiantes que finalizan dicho bachillerato, si sabemos que la desviación típica en dicha población es 0.4 años.

B6-03:

De las 6.000 piezas de plástico que se fabrican diariamente en una empresa, se escoge una muestra al azar compuesta por 150 unidades. En esta muestra se observan 100 unidades cuya terminación y acabado superan el control de calidad de la propia empresa. El gerente de la empresa mantiene que, al menos un 80% de la producción de la misma superará dicho control de calidad. Plantear y resolver una prueba de contraste de hipótesis que permita, con un nivel de confianza del 95%, aceptar o no dicha información.

B6-04:

El gerente de un centro de salud con especialidades, afirma que el tiempo medio de espera para la realización de una mamografía es igual o inferior a 25 días. Se quiere contrastar esta información, con un nivel de confianza del 99%. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 200 pacientes y se determinan los siguientes datos: tiempo medio de espera=27 días; desviación típica=15. Plantear y resolver un contraste de hipótesis para valorar la afirmación del gerente del centrol.

B6-05:

Se desea hacer una encuesta para medir, con un 95% de nivel de confianza, la proporción de jóvenes del barrio que practica algún deporte. Real-

izamos una encuesta piloto sobre 200 jóvenes seleccionados al azar y obtenemos que 120 de ellos practican algún deporte. ¿Cuál deberá ser el tamaño de la muestra para garantizar que el error máximo no supera el 0.02?

B6-06:

Una empresa desea medir el tiempo de duración de uno de sus productos, un cierto modelo de radio; se sabe que la desviación típica de ese tiempo de duración en la población es 2 años. ¿De qué tamaño ha de tomarse la muestra de radios para tener una confianza del 99% y que el error de estimación no supere el medio año?

B6-07:

Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 individuos a los que se ha medido el nivel de glucosa en sangre, obteniéndose una media muestral de 110 mg/cc. Se sabe que la desviación típica de la población es de 20 mg/cc.

a) Obtén un intervalo de confianza, con un nivel de significación del 10%, para estimar el nivel de glucosa en sangre de la población.

b) ¿Qué error máximo se comete con la estimación anterior?

c) En las condiciones anteriores, ¿resulta aceptable la hipótesis de que la media en la población de glucosa en sangre es de 100 mg/cc?

Justifica las respuestas. Nota: Algunos valores de la función de distribución Normal de media = 0 desviación típica 1 son: F(1000)=1; F(2,33)=0,99; F(1,28)=0,90; F(1,645)=0,95

B6-08:

Hemos tomado una muestra aleatoria de 50 conejos en un criadero industrial. Se ha encontrado que 14 de ellos presentaban una enfermedad que, probablemente, adquirían a través del pienso con que se alimentaba. sabemos que la población de conejos en el criadero es de 5000 unidades; determina, con un nivel de significación del 5%, el número de conejos enfermos.

B6-09:

Hemos tomado una muestra aleatoria de 200 personas que acudían a un cierto mercado a realizar sus compras de comestibles. Hemos encontrado que su media de edad es 43.2 años. con una desviación típica de 18.6 años. Determina, con un nivel de significación del 10%, la edad media de las personas que acuden a ese mercado a realizar sus compras.

B6-10:

Una empresa de conservas de bonito envasa diariamente 2500 latas. Se selecciona una muestra al azar compuesta por 100 latas. En esta muestra se observan 90 latas cuyo contenido neto en bonito es mayor que los 200 gramos que se indican en la etiqueta. El director de la fábrica conservera mantiene que, al menos un 95% de las latas que se producen en la misma contiene más que los 200 gramos indicados. Plantear y resolver una prueba de contraste de hipótesis que permita, con un nivel de significación del 5%, aceptar o no dicha información.

B6-11:

El director de la cooperativa de RadioTaxis de una ciudad, así como el concejal del ayuntamiento responsable del tema, manifiestan que el servicio funciona adecuadamente y que el tiempo medio de espera desde que se produce una llamada telefónica es igual o inferior a los 12 minutos. Algunos usuarios de esa ciudad no están demasiado convencidos de ello y desean contrastar esta información, con un nivel de significación del 5%. Para ello, toman una muestra aleatoria de 300 llamadas y calculan la siguiente información: tiempo medio de espera=14 minutos; desviación típica=5. Plantear y resolver un contraste de hipótesis para valorar la afirmación del director de la cooperativa y del concejal..

B6-12:

En una ciudad se ha remodelado una avenida central y se han colocado unas farolas modernistas que han causado cierta polémica. Se desea hacer una encuesta para medir, con un 1% de nivel de significación, la proporción de personas favorables a la colocación de dichas farolas. ¿Cuál deberá ser el tamaño de la muestra para garantizar que el error máximo no supera los tres puntos?

B6-13:

Una empresa de neumáticos está ensayando un nuevo modelo para lanzar al mercado. Desea realizar un muestreo para estimar la vida media, en km., de este nuevo neumático con un nivel de significación del 5% y con la garantía de que el error de estimación no supere los 3.000 km. Se desconoce la desviación típica, pero por las similitudes del proceso de fabricación con otros modelos, puede suponerse que es de 20.000 km. ¿Qué tamaño deberá de tener la muestra?

B6-14:

Se ha tomado una muestra aleatoria de 75 jóvenes de 18 años a los que se ha medido su altura; se ha obtenido una media muestral de 169.7 cm. Se sabe que la desviación típica de alturas en la población de referencia es de 4.2 cm.

a) Obtén un intervalo de confianza, con un nivel de significación del 5%, para estimar la altura de los jóvenes de 18 años en dicha población.

b) ¿Qué error máximo se comete con la estimación anterior?

c) En las condiciones anteriores, ¿resulta aceptable la hipótesis de que la altura media en la población de 172 cm.?

Justifica las respuestas. Nota: Algunos valores de la función de distribución Normal de media = 0 desviación típica 1 son:

F(1000)=1; F(2,33)=0,99; F(1,28)=0,90; F(1,645)=0,95

B6-15:

Una empresa fabrica cojinetes de bolas; se ha tomado una muestra al azar de 200 cojinetes hechos por una determinada máquina, obteniendo una media de 2.05 cm. de radio y una desviación típica de 0.1 cm. El director de calidad de la empresa sostiene que el radio medio de los cojinetes que se fabrican es de 2 cm. Contrasta esta afirmación mediante un test de *hipótesis para un grado de confianza del 95%.*

B6-16:

Se sabe que el contenido de fructosa de cierto alimento sigue una distribución normal, cuya varianza es conocida, teniendo un valor de 0.25. Se desea estimar el valor de la media poblacional mediante el valor de la media de una muestra, admitiendose un error máximo de 0.2 con una confianza del 95%. ¿Cuál ha de ser el tamaño de la muestra?

B6-17:

En un Instituto de Enseñanza Secundaria hay matriculados 800 alumnos. Se seleccionó una muestra aleatoria del 15% de los alumnos, y se les preguntó si utilizaban la cafetería del instituto. Contestaron negativamente un total de 24 alumnos. Con una confianza del 99%: estima el porcentaje de alumnos que utilizan la cafetería del instituto y determina el error máximo cometido con dicha estimación

B6-18:

Una compañia de electrodomésticos desea estimar la proporción de familias de una determinada ciudad que poseen horno microondas. Para ello tienen que tomar una muestra aleatoria de n familias. Calcula el valor mínimo de n para garantizar que, con un nivel de confianza del 95%, *el error en la estimación sea menor que* 0.05.

B6-19:

Un sindicato realiza una encuesta entre 64 los trabajadores de una cierta población; encuentra los siguientes resultados: el tiempo medio de duración de un empleo es de 6.5 años, con una desviación típica de 4 años. Días después, en la prensa, aparece el siguiente titular "el tiempo medio de duración de un empleo es menor o igual a 6 años". Queremos saber si, con un nivel de significación del 5%, puede justificarse el titular periodístico.

B6-20:

En un determinado barrio se seleccionó al azar una muestra de 100 personas cuya media de ingresos mensuales resultaba igual a 1060 € con una desviación típica de 200 €.

Si se toma un nivel de confianza del 95%, ¿cuál es el intervalo de confianza para la media de los ingresos mensuales de toda la población?

Si se toma un nivel de significación igual a 0,01, ¿cuál es el tamaño muestral necesario para estimar la media de ingresos mensuales con un error menor de 30 €?

B6-21:

Se desea estimar la proporción p de individuos daltónicos de una población a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de individuos de tamaño n.

a) Si el porcentaje de individuos daltónicos en la muestra es igual al 30%, *calcula el valor de n para que, con un nivel de confianza del* 0.95, *el error cometido en la estimación sea inferior al* 3.1%.

b) Si el tamaño de la muestra es de 64 *individuos y el porcentaje de individuos daltónicos en la muestra es del* 35%, *determina, usando un nivel* *de significación del* 1%, *el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de daltónicos de la población.*

B6-22:

En su propaganda, una empresa asegura que las bombillas que fabrica tienen una duración media de 1600 horas, al menos. A fin de contrastar este dato, se tomó una muestra aleatoria de 100 bombillas, obteniendose una duración media de 1570 horas, con una desviación típica de 120 horas. ¿Puede aceptarse la información de los folletos con un nivel de confianza del 95%?

B6-23:

En una comunidad autónoma se desea estudiar el número medio de hijos por mujer a partir de los datos disponibles en cada municipio. Se supone que este número sigue una distribución normal con desviación típica igual a 0.08. El valor medio de estos datos para 36 municipios resulta ser igual a 1.17 hijos por mujer. Se desea contrastar, con un nivel de significación de 0.01, si el número medio de hijos por mujer en la comunidad es de 1.25.

a) ¿Cuáles son la hipótesis nula y la alternativa en el contraste de hipótesis?

b) Determínese la región crítica del contraste.

c) ¿Es posible aceptar la hipótesis con el nivel de significación indicado?

B6-24:

A partir de la información suministrada por una muestra aleatoria de 100 *familias de cierta ciudad se ha determinado el intervalo de confianza al* 99% *para el gasto medio mensual por familia (en euros) en electricidad. Este intervalo resulta ser:* $(42, 58)$. *Determina, justificando las respuestas:*

a) La estimación puntual que daríamos para el gasto mensual por familia en electricidad en esa ciudad.

b) ¿Qué número de familias tendríamos que seleccionar al azar como mínimo para garantizarnos, con una confianza del 99%, *una estimación de dicho gasto medio con un error máximo no superior a* 3 *euros?*

B6-25:

La altura de los jóvenes de una cierta comunidad autónoma se distribuye según una ley normal de media desconocida y varianza 25 cm^2. *Se ha seleccionado una muestra aleatoria y, para un nivel de confianza del* 95%, *se ha construido un intervalo de confianza para la media poblacional cuya amplitud es de* 2.45 *cm.*

a) ¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra seleccionada?

b) Determina el límite superior y el inferior del intervalo de confianza si la muestra tomada dio una altura media de 170 *cm.*

Anexo

A.1 Soluciones Problemas Bloque 1

B1-01:

$$\begin{cases} x+y+z=60000 \\ x=2\,(y+z) \\ 0.05x+0.1y+0.2z=4500 \end{cases} \rightarrow \{x=40000, y=15000, z=5000\}$$

B1-02:

$$\begin{cases} x-4+1=x-3 \\ y-1+2=y+1 \\ z+4-2=z+2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-3=y+1 \\ y+1=z+2 \end{cases} \rightarrow \{x=5+z, y=1+z\}$$

Resulta un $S.C.I.$ El enunciado se cumplirá siempre que en el hotel haya un número de huéspedes que sea múltiplo de 3 y mayor o igual a 6.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ Total \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & \dots \end{bmatrix}$$

B1-03:

$$\begin{cases} 24x+24\cdot 0.7y+24\cdot 0.6z=12768 \\ x+y+z=600 \\ y+z=\frac{x}{2} \end{cases} \rightarrow \{x=400, y=120, z=80\}$$

B1-04:

Representamos los vuelos desde A (filas) hasta B (cols.):

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Representamos los vuelos desde B (filas) hasta C (cols.):

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Representamos los vuelos directos desde A (filas) hasta C (cols.):

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los vuelos del país A al C, necesiten o no efectuar transbordo en el país B, serán:

$$X_3+X_1\cdot X_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&1&1&2\\0&0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2\\2&2\\2&2\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&8\\8&8\\2&2\end{pmatrix}$$

B1-05:

$$\begin{cases}\text{nudo A:}\\ \text{nudo B:}\\ \text{nudo C:}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_2+300+60=x_1\\ x_3=40+80+x_2\\ x_1+160=x_3+x_4\end{cases}$$

$\cdot$ cortar tráfico en AB significa: $x_2=0\rightarrow\begin{cases}300+60=x_1\\ x_3=40+80\\ x_1+160=x_3+x_4\end{cases}\rightarrow$
$\{x_3=120,x_1=360,x_4=400\}\rightarrow SI$

$\cdot$ cortar tráfico en AC significa: $x_1=0\rightarrow\begin{cases}x_2+300+60=0\\ x_3=40+80+x_2\\ 160=x_3+x_4\end{cases}\rightarrow$
$\{x_4=400,x_2=-360,x_3=-240\}\rightarrow NO$

$\cdot$ cortar tráfico en CB significa: $x_3=0\rightarrow\begin{cases}x_2+300+60=x_1\\ 0=40+80+x_2\\ x_1+160=x_4\end{cases}\rightarrow$
$\{x_4=400,x_2=-120,x_1=240\}\rightarrow NO$

B1-06:

$$\begin{cases}x+y+z=42000\\ 1.2x+1.5y+2z=64000\\ x=0.4\,(y+z)\end{cases}\rightarrow\{x=12000,y=20800,z=9200\}$$

B1-07:

$$A^T=A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\left(A\cdot A^T\right)^{2003}=\left(A\cdot A^{-1}\right)^{2003}=(I)^{2003}=I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

B1-08:

$\cdot\ a\neq -1$ y $a\neq 2\quad\rightarrow\quad S.C.D.$

$\cdot\ a\neq -1\quad\rightarrow\quad S.I.$

$\cdot\ a\neq 2\quad\rightarrow\quad S.I.$

B1-09:

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c&b+2d\\c&d\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&2a+b\\c&2c+d\end{pmatrix}\end{cases}\rightarrow$$

$$\begin{cases}a+2c=a&\rightarrow\quad c=0\\ b+2d=2a+b&\rightarrow\quad a=d\\ c=c\\ d=2c+d\end{cases}\rightarrow B=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$$

B1-10:

$$\begin{pmatrix} n^2 & -n \\ n^2(2n-1) & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4n \end{pmatrix}$$

· si $n \neq 0 \wedge n \neq 1 \wedge n \neq -\frac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow |M| \neq 0 \rightarrow r(M) = r(M_a) =$ n^o incógnitas $= 2 \rightarrow S.C.D.$ (Solución única)

· si $n = 0 \rightarrow |M| = 0 \rightarrow r(M) = 1$ y $r(M_a) = 2 \rightarrow S.I.$ (No solución)

· si $n = 1 \rightarrow |M| = 0 \rightarrow r(M) = 1$ y $r(M_a) = 2 \rightarrow S.I.$ (No solución)

· si $n = -\frac{1}{2} \rightarrow |M| = 0 \rightarrow r(M) = 1$ y $r(M_a) = 1 \rightarrow S.C.I.$ (Infinitas soluciones)

$$n = 2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - 2y = 1 \\ 12x - y = 8 \end{array} \right. \rightarrow \{x = \tfrac{3}{4}, y = 1\}$$

B1-11:

$$S.I.: \left\{ \begin{array}{c} 6x - 9y + 2z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 6x - 9y + 2x = 6 \end{array} \right. ; \qquad S.C.I.: \left\{ \begin{array}{c} 6x - 9y + 2z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 4x - 6y + 2z = 8 \end{array} \right.$$

B1-12:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 3900 \\ y = 2x \\ \frac{y}{z} = \frac{2}{3} \end{array} \right. \rightarrow \{x = 650, y = 1300, z = 1950\}$$

B1-13:

$$\left\{ \begin{array}{l} 7x + 5y + 6z = 18750 \\ z = \frac{2}{7}y \\ 3x + z = 2y \end{array} \right. \rightarrow \{x = 1000, y = 1750, z = 500\}$$

B1-14:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$(C \cdot D)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

B1-15:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 90 \\ x + 0.75 * y + 0.5 * z = 64 \\ z = (x + y) \end{array} \right. \rightarrow \{x = 31, y = 14, z = 45\}$$

B1-16:

$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; Y$: no existe.

B1-17:

$$\begin{pmatrix} a & -1 \\ 2 & -(a+1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - a \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\cdot$ si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \rightarrow S.C.D.$
$\cdot$ si $a = 1 \rightarrow S.C.I.$
$\cdot$ si $a = 2 \rightarrow S.I.$

B1-18:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \\ 6 & 1 & -6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

B1-19:

$\cdot$ si $a \neq -1 \wedge a \neq 2 \rightarrow S.C.D.$ (solución única y trivial) $\rightarrow \{x = y = z = 0\}$
$\cdot$ si $a = -1 \vee a = 2 \rightarrow S.C.I.$ (infinitas soluciones)

$$a = -1 \rightarrow \begin{cases} 4x - 4z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \{x = z, y = 2z, z = z\}$$

$$a = 2 \rightarrow \begin{cases} 4x - 4z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \{x = z, y = -z, z = z\}$$

B1-20:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & a-4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$\cdot$ Si $a \neq 2 \rightarrow S.C.D.$ (solución única).
$\cdot$ Si $a = 2 \rightarrow S.I.$ (no solución).

$$a = 3 \rightarrow \begin{cases} x - y + z = 6 \\ -x - y - z = 7 \\ x + y + 2z = 11 \end{cases} \rightarrow \left\{x = -\tfrac{37}{2}, y = -\tfrac{13}{2}, z = 18\right\}$$

B1-21:

$$\begin{cases} x + y + z = 400 \\ x + y + 2z = 600 \\ 2x + 3y + 5z = 1500 \end{cases} \rightarrow \{x = 100, y = 100, z = 200\}$$

B1-22:

$$\begin{cases} x - 9y + 5z = 33 \\ x + 3y - z = -9 \\ x - y + z = 5 \end{cases} \rightarrow \left\{x = -\tfrac{1}{2}k + \tfrac{3}{2}, y = \tfrac{1}{2}k - \tfrac{7}{2}, z = k\right\}$$

a) Es un sistema compatible e indeterminado con infinitas soluciones.

b) Cualquiera de las tres ecuaciones es combinación lineal de las otras dos, por lo que puede ser eliminada y obtenerse un sistema equivalente.

B1-23:

$$XAB - XC = 2C \rightarrow X(AB - C) = 2C \rightarrow X = 2C(AB - C)^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & \tfrac{5}{2} \end{pmatrix}$$

B1-24:

$$\text{a)} \begin{cases} x + y + z = 22 \\ 2y + 3z = 2x \end{cases} \rightarrow \left\{x = \tfrac{1}{4}k + 11, y = -\tfrac{5}{4}k + 11, z = k\right\}$$

b) $\begin{cases} x+y+z=22 \\ 2y+3z=2x \\ x=2y \end{cases} \rightarrow \{x=12, y=6, z=4\}$

B1-25:

$$\left| \begin{array}{lllll} H: & x & \rightarrow & x+5 & \rightarrow & x+5-4 \\ M: & y & \rightarrow & y+6 & \rightarrow & y+6+2 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} y+6=2(x+5) \\ y+8=3(x+1) \end{cases} \rightarrow \{x=9, y=22\} \rightarrow \{x_f=10, y_f=30\}$$

A.2 Soluciones Problemas Bloque 2

B2-01:

Sea: $\left| \begin{array}{l} \text{x = n}^o \text{ bibliotecas pino} \\ \text{y = n}^o \text{ bibliotecas castaño} \end{array} \right.$ $\begin{cases} 300x+400y \\ 3x+3y \leq 120 \\ 3x+6y \leq 180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \{x=20, y=20\}$; Beneficios: 14000€

B2-02:

Sea: $\left| \begin{array}{l} \text{x = kg. pienso P1} \\ \text{y = kg. pienso P2} \end{array} \right.$ $\begin{cases} 40x+60y \\ 6x+6y \geq 30 \\ 5x+10y \geq 35 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \{x=3, y=2\}$; Coste: 240 €.

B2-03:

Sea: $\left| \begin{array}{l} \text{x = n}^o \text{ empanadas grandes} \\ \text{y = n}^o \text{ empanadas pequeñas} \end{array} \right.$ $\begin{cases} 2x+1.5y \\ 0.5x+0.25y \leq 20 \\ 0.25x+0.25y \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \{x=20, y=40\}$; Beneficio: 100 €.

B2-04:

Sea: $\left| \begin{array}{l} \text{x = n}^o \text{ de cajas A} \\ \text{y = n}^o \text{ de cajas B} \end{array} \right.$ $\begin{cases} 8x+12y \\ 4x+2y \leq 440 \\ 0.25x+0.5y \leq 65 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \{x=60, y=100\}$; Ventas: 1680 €

B2-05:

Sea: $\left| \begin{array}{l} \text{x} = \text{n}^o \text{ televisores tipo TV1} \\ \text{y} = \text{n}^o \text{ televisores tipo TV2} \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} 90x + 150y \\ 300x + 500y \leq 7000 \\ x + y \leq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow$

$\rightarrow \{x = 0, y = 14\}\,; \{x = 5, y = 11\}\,; \{x = 10, y = 8\}\,; \{x = 15, y = 5\}\,;$
Beneficio: 2100 €

B2-06:

Sea: $\left| \begin{array}{l} \text{x} = \text{n}^o \text{ días trabajo planta P1} \\ \text{y} = \text{n}^o \text{ días trabajo planta P2} \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} 2000x + 3000y \\ 1000x + 2000y \geq 80000 \\ 3000x + 2000y \geq 160000 \\ 5000x + 2000y \geq 200000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow$

$\rightarrow \{x = 40, y = 20\}$; Coste: 140 000 €

B2-07:

Sea: $\left| \begin{array}{l} \text{x} = \text{n}^o \text{ rompecabezas pequeños} \\ \text{y} = \text{n}^o \text{ rompecabezas grandes} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} 4.5x + 6y \\ x \leq 400 \\ y \leq 300 \\ x + y \leq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow \{x = 200, y = 300\}$; Beneficio: 2700 €

$\left\{ \begin{array}{l} 6x + 4.5y \\ x \leq 400 \\ y \leq 300 \\ x + y \leq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow \{x = 400, y = 100\} \rightarrow$Beneficio: 2850 €

B2-08:

Sea: $\left| \begin{array}{l} \text{x} = \text{n}^o \text{ motos modelo A} \\ \text{y} = \text{n}^o \text{ motos modelo B} \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} 1000x + 500y \\ x \geq 50 \\ x \leq 75 \\ y \geq x \\ x + y \leq 400 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow$

$\rightarrow \{x = 75, y = 325\}$; Beneficio: 237 500 €

B2-09:

Sea: $\left|\begin{array}{l}\text{x = € a invertir en fondo A}\\ \text{y = €. a invertir en fondo B}\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}0.12x+0.08y\\ x+y\leq 30000\\ x\leq 12000\\ y\leq 2x\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right. \rightarrow$

$\rightarrow \{x = 12\,000, y = 18\,000\}$; Beneficio: 2880

B2-10:

Sea: $\left|\begin{array}{l}\text{x = n}^o\text{ de estanterías}\\ \text{y = n}^o\text{ de archivadores}\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}60x+80y\\ 2y\leq x+800\\ 3x+2y\leq 2400\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right. \rightarrow$

$\rightarrow \{x = 400, y = 600\}$; Beneficio: 72 000 €

B2-11:

Sea: $\left|\begin{array}{l}\text{x = n}^o\text{ de días a pasar en la costa}\\ \text{y = n}^o\text{ de días a pasar en la montaña}\end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{l}x+y\\ 100x+200y\leq 2000\\ x\leq 10\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l}x+y\\ x+2y\leq 20\\ x\leq 10\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right. \rightarrow \{x=10, y=5\}$$

En estas condiciones, el coste de las vacaciones será:

$100x + 200y = 100 \cdot 10 + 200 \cdot 5 = 2000$ €. Por tanto, sí agotará todo su presupuesto.

B2-12:

Sea: $\left|\begin{array}{l}\text{x = n}^o\text{ de pizzas N}\\ \text{y = n}^o\text{ de pizzas E}\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}2.5x+4y\\ x+y\leq 150\\ 0.25x+0.5y\leq 50\\ x\leq 125\\ y\leq 125\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right. \rightarrow$

$\rightarrow \{x = 100, y = 50\}$; Beneficio: 450 €.

Contratar más personal implicaría eliminar las restricciones $x \leq 125$, $y \leq 125$ que resultan ser superfluas en este problema; luego no cambiaría el resultado obtenido.

B2-13:

Sea: $\left|\begin{array}{l}\text{x = n}^o\text{ comprimidos X}\\ \text{y = n}^o\text{ comprimidos Y}\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}0.1x+0.5y\\ 3x+4y\geq 12\\ 2x+y\geq 4\\ 4x+3y\geq 8\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right. \rightarrow$

$\rightarrow \{x = 4, y = 0\}$; Coste: 0.4 €

B2-14:

Sea: | x = n^o de lotes A
y = n^o de lotes B

$$\begin{cases} 40x + 50y \\ 3x + y \leq 180 \\ x + 2y \leq 160 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow \{x = 40, y = 60\}$; Ventas: 4600 €

B2-15:

Sea: | x = n^o coches gasolina
y = n^o coches diesel

$$\begin{cases} 450x + 600y \\ x + y \leq 500 \\ x \leq 400 \\ y \leq 300 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow \{x = 200, y = 300\}$; Ganancias: 270 000 €

B2-16:

Sea: | x = n^o ha. cultivo A
y = n^o ha. cultivo B

$$\begin{cases} 2500x + 2000y \\ x + y \leq 300 \\ 1.5x + y \leq 400 \\ x \geq 100 \\ y \geq 50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow \{x = 200, y = 100\}$; Beneficios: 1100 000 €

B2-17:

Sea: | x = n^o joyas de oro
y = n^o joyas de plata

$$\begin{cases} 70x + 90y \\ x \leq 12 \\ y \leq 12 \\ 2x + y \leq 22 \\ x + 2y \leq 26 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow \{x = 6, y = 10\}$; Beneficio: 1320 €

B2-18:

Sea: | x = n^o autobuses normales
y = n^o autobuses grandes

$$\begin{cases} 600x + 800y \\ 40x + 50y \geq 400 \\ x \leq 8 \\ y \leq 10 \\ x + y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow \{x = 5, y = 4\}$; Coste: 6200 €

B2-19:

Sea: $\left| \begin{array}{l} \text{x = n}^o \text{ anillos sencillos} \\ \text{y = n}^o \text{ anillos con adornos} \end{array} \right.$ $\begin{cases} 4.5x + 6y \\ x \leq 400 \\ y \leq 300 \\ x + y \leq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \{x = 200, y = 300\}$; Ingresos: 2700 €

B2-20:

Sea: $\left| \begin{array}{l} \text{x = n}^o \text{ de ventas} \\ \text{y = n}^o \text{ de alquileres} \end{array} \right.$ $\begin{cases} 1000x + 600y \\ y \leq 18 - 2x \\ 2x + 3y \leq 26 \\ x + y \leq 16 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \{x = 7, y = 4\}$; Comisiones: 9400 €

B2-21:

Sea: $\left| \begin{array}{l} \text{x = n}^o \text{ toneladas arena} \\ \text{y = n}^o \text{ toneladas cemento} \end{array} \right.$ $\begin{cases} 30x + 20y \\ x + y \leq 12 \\ x \geq 6 \\ y \geq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \{x = 9, y = 3\}$; Transporte: 330 €

B2-22:

Sea: $\left| \begin{array}{l} \text{x = n}^o \text{ horas informática básica} \\ \text{y = n}^o \text{ horas informática avanzada} \end{array} \right.$ $\begin{cases} 30x + 50y \\ x + y \leq 60 \\ x + y \geq 36 \\ y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \{x = 30, y = 6\}$; Coste curso: 1200 €

B2-23:

Sea: $\left| \begin{array}{l} \text{x = kg. abono A} \\ \text{y = kg. abono B} \end{array} \right.$ $\begin{cases} 7.5x + 6y \\ 0.1x + 0.07y \leq 39 \\ 0.05x + 0.08y \leq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \{x = 320, y = 100\}$; Beneficio: 3000 €

B2-24:

Sea: $\left| \begin{array}{l} \text{x = n}^o \text{ barcos tipo A} \\ \text{y = n}^o \text{ barcos tipo B} \end{array} \right.$ $\begin{cases} 1000x + 1200y \\ 150x + 200y \geq 1800 \\ y \leq 6 \\ 6x + 8y \leq 96 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \{x = 4, y = 6\}$; Coste: 11 200 €

B2-25:

Sea: $\left| \begin{array}{l} \text{x = € invertidos en A} \\ \text{y = € invertidos en B} \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} 0.2x + 0.3y \\ x + y \leq 110000 \\ x \leq 80000 \\ y \leq 70000 \\ y \leq 1.5x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right.$ $\rightarrow$

$\rightarrow \{x = 44000, y = 66000, \}$;Rendimiento: 28600 €

A.3 Soluciones Problemas Bloque 3

B3-01:

a) $\{k = 5\}$; b) $\{k = -1\}$

B3-02:

a) $\{k = 4\}$; b) $\{k = 2\}$

B3-03:

Indeterminado. $c = 4; 12a + 2b = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \{a = 0, b = 0, c = 4; a = 1, b = -6, c = 4; a = 2, b = -12, c = 4 \ldots\}$

B3-04:

$\{a = 1, b = -3, c = 0, d = 2\}$

B3-05:

a) $V = x\,(8 - 2x)\,(4 - 2x)$

b) $\left\{x = 2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right\}$

c) $V = 12.317$ dm^3.

B3-06:

a) Es una parábola; eje: $x = 5; V(50, 10)$;

Cortes con OX: $(20, 0)$ y $(80, 0)$;Corte con OY: $\left(0, -\frac{160}{9}\right)$

b) $[20, 80]$

c) $x = 50; f(50) = 10$

B3-07:

a) $I(p) = (2000 - 8p)\,p = 2000p - 8p^2$

b y c) $p = 125; I(125) = 125\,000$

d) A partir de 250 compradores los ingresos serán negativos y habrá pérdidas.

B3-08:

a) Continua; máximo en $(1, 37)$; mínimo en $(4, 10)$

b) $n(0) = 26$

c) $x = 4; n(4) = 10$

d) sí; en $x = 4$ hay un mínimo; en $(4, \infty)$ la función es creciente.

B3-09:

a) $\{a = 12, b = -9\}$

B3-10:

a) $\{t=1\}\,;\{t=3\}$
b) $\{t=2\}\,;f(2)=2\sqrt{2}$
B3-11:
a) $TMV\,[4,3]=\frac{f(4)-f(3)}{4-3}=\frac{10-\frac{90}{7}}{1}=-\frac{20}{7}=-2.857$
o bien: $f'(4)=-\frac{5}{2}=-2.5$
b) $\{t=2\}\,;f(2)=15$ (miles)
c) $\lim_{t\to\infty}\frac{30t}{t^2-2t+4}=0$
B3-12:
b) $\int_{-1}^{1}e^{2x}dx=-\frac{1}{2}\left(-1+e^{-4}\right)e^2$
c) $\int_{-1}^{0}e^{-2x}dx+\int_{0}^{1}e^{2x}dx=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^2\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^2\right)=e^2-1$
B3-13:
a) $\left\{\begin{array}{llll}\cdot\text{ en }(-\infty,2) & f'(x)>0 & \to & f(x)\text{ es creciente}\\ \cdot\text{ en }(2,+\infty) & f'(x)<0 & \to & f(x)\text{ es decreciente}\end{array}\right.$
$\left\{\begin{array}{llll}\cdot\text{ en }(-\infty,0) & g'(x)<0 & \to & g(x)\text{ es decreciente}\\ \cdot\text{ en }(0,4) & g'(x)>0 & \to & g(x)\text{ es creciente}\\ \cdot\text{ en }(4,+\infty) & g'(x)<0 & \to & g(x)\text{ es decreciente}\end{array}\right.$
b) $\left\{\begin{array}{lllll}\text{- en }x=2 & : & f(x)\text{:creciente}\to\text{decreciente} & \to & \text{Máximo relativo}\end{array}\right.$
$\left\{\begin{array}{lllll}\text{- en }x=0 & : & g(x)\text{:decreciente}\to\text{creciente} & \to & \text{Mínimo relativo}\\ \text{- en }x=4 & : & g(x)\text{:creciente}\to\text{decreciente} & \to & \text{Máximo relativo}\end{array}\right.$
B3-14:
a) Primer tramo: una parábola; convexa; eje $x=10$; $V(10,100)$. Segundo tramo: una constante; recta horizontal. Tercer tramo: recta de pendiente negativa que corta al eje OX en $\{t=120\}$
b) en el vértice de la parábola, es decir en el tiempo $t=10$.
c) $R(60)=100-\frac{5}{6}\cdot 60=50\%$
d) a los 120 minutos, el rendimiento se anula; además:
$\lim_{t\to\infty}R(t)=\lim_{t\to\infty}100-\frac{5}{6}t=-\infty$
B3-15:
a) en $x=-1$: función continua y no derivable; en $x=2$: función discontinua $\to$ no derivable.
b) $\left|\begin{array}{c}\text{mínimo relativo en (-1,0)}\\ \text{máximo relativo en (4,16)}\end{array}\right.$; además:
$\left|\begin{array}{c}\text{decreciente en }(-\infty,-1)\cup(4,\infty)\\ \text{creciente en }(-1,2]\cup(2,4)\end{array}\right.$
B3-16:
a) $B(x)=I(x)-G(x)=-16x^2+24\,000x-700\,000$
b) $B'(x)=0\to\{x=750\}$
c) $B(750)=8300\,000$
d) $\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to\infty}I(x)=28x^2+36000x=\infty\\ \lim_{x\to\infty}G(x)=44x^2+12000x+700000=\infty\\ \lim_{x\to\infty}B(x)=-16x^2+24\,000x-700\,000=-\infty\end{array}\right.$
Como que los gastos se incrementan de manera más rápida que los ingresos, los beneficios tienden a -∞ (pérdidas).
B3-17:

a) $\begin{cases} D : (-\infty, 4) \cup (4, \infty) \\ x \in \Re / x \neq 4 \end{cases}$

b) Asíntota vertical: $x = 4$; asíntota oblicua: $y = -x - 4$

c) Mínimo en $(0, 0)$; máximo en $(8, -16)$

d)

Intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, 8)$	$(8, \infty)$
Signo $f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
Crecimiento	decreciente	creciente	creciente	decreciente

B3-18:

$\{x = 12, y = 6\}$

B3-19:

$y' = \frac{x \cdot (x+2a)}{(x+a)^2}; y'(1) = \frac{1+2a}{(1+a)^2}; y'(1) > 0 \to 1 + 2a > 0 \to a > \frac{-1}{2}$

B3-20:

a) Dos funciones que se diferencien únicamente en una constante tendrán siempre la misma derivada. Por ejemplo: $\left| \begin{array}{lcl} g(x) = 3x^2 + 5 & \to & g'(x) = 6x \\ h(x) = 3x^2 - 7 & \to & h'(x) = 6x \end{array} \right.$

b) $f(x) = -\frac{1}{3x^3} + x^2 + \frac{1}{24}$

B3-21:

$x^2 - \frac{2}{3}x^3 = 0 \to \{x = 0\}, \left\{x = \frac{3}{2}\right\} \to (0, 0), \left(\frac{3}{2}, 0\right)$

Intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo $f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
Crecimiento	decreciente	creciente	decreciente

Intervalos	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
Signo $f''(x)$	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$
Concavidad	convexa (”hacia arriba”)	cóncava (”hacia abajo”)

No presenta asíntotas de ningún tipo.

B3-22:

a) $x = 2\sqrt{5} \to C(2\sqrt{5}) = 2500 + 1200\sqrt{5} = 5183.3$

b) $x = 0; y = 300x + 2500$

B3-23:

a) $\left[3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}\right]$

b) $x = 3$ €; $B(3) = 6$ (miles de €)

B3-24:

a) mínimo en $(-1, -2)$; máximo en $(1, 2)$;

corte con OX: $\left(-\sqrt{3}, 0\right), (0, 0), \left(\sqrt{3}, 0\right)$

b) $\left|\int_{-\sqrt{3}}^{0} f(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{\sqrt{3}} f(x)dx\right| = 6\sqrt{3} - \frac{9}{2} = 5.89$

B3-25:

a) $y(0) = 300$ enfermos.

b) $y'(t) = 40e^{0.2t}$ enfermos/día.

c) $t = 10$ días.$\to$11 de enero

A.4 Soluciones Problemas Bloque 4

B4-01:

b) $f(0) = -3$ millones de euros.

c) $f(x) = 0 \rightarrow \frac{3x-6}{x+2} = 0 \rightarrow \{x = 2\}$

Dadas las características del enunciado, sólo tiene sentido analizar los intervalos: $(0,2)$ y $(2,\infty)$

En el intervalo $(0,2)$: $f(x) < 0 \rightarrow$pérdidas.

En el intervalo $(2,\infty)$: $f(x) > 0 \rightarrow$ganancias.

Luego la empresa deja de tener pérdidas al final del segundo año.

d) Como que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x-6}{x+2} = 3$

Existe una asíntota horizontal para $y = 3$. Por lo tanto, los beneficios estarán limitados a 3 (millones de euros).

e) $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \frac{3x-6}{x+2}dx = \int_0^3 \left(3 - \frac{12}{x+2}\right) dx = [3x - 12\ln(x+2)]_0^3 =$
$= 9 - 12\ln 5 + 12\ln 2 = -1.995$

Luegos los beneficios acumiulados durante los 3 primeros años han supuesto unas pérdidas de: 1.995 millones.

B4-02:

b) $$\left.\begin{array}{l} \int_0^5 \left(-x^2 + 6x\right) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^5 = \frac{100}{3} \\ \int_5^{10} (-x+10)\, dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 10x\right]_5^{10} = \frac{25}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{100}{3} + \frac{25}{2} = \frac{275}{6}$$

B4-03:

a) $\Re - \{4\}$

b) $x = 3; y = -x - 3$

c) mínimo en $(0,0)$; máximo en $(6,-12)$

d) $$\left\{\begin{array}{llll} \cdot \text{ en } (-\infty,0): & f'(x) < 0 & \rightarrow & \text{la función es Decreciente} \\ \cdot \text{ en } (0,6): & f'(x) > 0 & \rightarrow & \text{la función es Creciente} \\ \cdot \text{ en } (6,\infty): & f'(x) < 0 & \rightarrow & \text{la función es Decreciente} \end{array}\right.$$

e) $\left|\int_6^9 \left(\frac{x^2}{3-x}\right) dx\right| - \left|\int_6^9 (-x-3)\, dx\right| = 37.738 - 31.5 = 6.238$

B4-04:

a) $\int \left(4x^3 - 4x\right) dx = x^4 - 2x^2 + k$

b) $\left|\int_{-1}^0 \left(4x^3 - 4x\right) dx\right| + \left|\int_0^1 \left(4x^3 - 4x\right) dx\right| = 2$

c) $\int_{-1}^1 \left(4x^3 - 4x\right) dx = 0$; lo que no significa que el área sea nula, sino que parte se encuentra por encima y parte por debajo del eje de abscisas.

B4-05:

a) Se trata de una parábola: eje: $x = -1$; vértice: $V(-1,4)$; orientación: "hacia arriba"; corte con OY: $v(0) = 8$; corte con OX: no corta a OX.

Interpretación: en el instante $t = 0$ de adquisición de la maquinaria, la variación de los gastos de mantenimiento es de 8.000 €/año. A partir de ese momento, la variación de los gastos de mantenimiento se incrementa con el tiempo de manera cuadrática. No tiene interpretación física la gráfica corresponiente al intervalo $(-\infty,0)$.

b) $\int_0^4 v(t)dt = \int_0^4 \left(8 + 8t + 4t^2\right) dt = \left[8t + 8\frac{t^2}{2} + 4\frac{t^3}{3}\right]_0^4 = \frac{544}{3} = 181.33$

Este resultado representa los gastos de mantenimiento acumulados en los 4 primeros años.

B4-06:

a) $\left\{a=6, b=-\frac{9}{2}\right\} \rightarrow f(x)=2x^3-\frac{9}{2}x^2+6x-5$

B4-07:

a) $\int_0^1 \frac{x^2}{x+2}dx=\int_0^1\left(x-2+\frac{4}{x+2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-2x+4\ln(x+2)\right]_0^1=$

$=4\ln 3-4\ln 2-\frac{3}{2}=0.121$

Representa el área comprendida entre la curva, el eje de abscisas y las rectas $x=0$, $x=1$.

b) $\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}$

B4-08:

a) $3x+9=0\rightarrow\{x=-3\}\,;(x-3)^2=0\rightarrow\{x=3\}$

$\left|\int_{-3}^{0}(3x+9)\,dx\right|+\left|\int_0^3(x-3)^2\,dx\right|=\frac{27}{2}+9=\frac{45}{2}$

B4-09:

$$\left\{\begin{array}{llcr} \text{- en } (0,1): & f'(x)>0 & \rightarrow & f(x) \text{ es creciente} \\ \text{- en } (1,2): & f'(x)<0 & \rightarrow & f(x) \text{ es decreciente} \\ \text{- en } (2,4): & f'(x)<0 & \rightarrow & f(x) \text{ es decreciente} \\ \text{- en } (4,6): & f'(x)>0 & \rightarrow & f(x) \text{ es creciente} \end{array}\right. \text{, además:}$$

la derivada se anula en $x=1$ y en $x=4$

$$\left\{\begin{array}{llcc} \text{- en } x=1: & f(x):\text{creciente}\rightarrow\text{decreciente} & \rightarrow & \text{Máximo} \\ \text{- en } x=4: & f(x):\text{decreciente}\rightarrow\text{creciente} & \rightarrow & \text{Mínimo} \end{array}\right.$$

B4-10:

$f''(x)=\int f'''(x)dx=\int 12xdx=6x^2+c_1;$

$f''(0)=2\rightarrow c_1=2\rightarrow f''(x)=6x^2+2$

$f'(x)=\int f''(x)dx=\int\left(6x^2+2\right)dx=2x^3+2x+c_2;$

$f'(0)=1\rightarrow c_2=1\rightarrow f'(x)=2x^3+2x+1$

$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(2x^3+2x+1\right)dx=\frac{1}{2}x^4+x^2+x+c_3;$

$f(0)=0\rightarrow c_3=0\rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^4+x^2+x$

B4-11:

$y''=3\rightarrow y'=3x+c_1; y\prime(2)=8\rightarrow c_1=2\rightarrow y'=3x+2$

$y=3\frac{x^2}{2}+2x+c_2; y(2)=0\rightarrow c_2=-10$

$y=3\frac{x^2}{2}+2x-10$

B4-12:

a) $\int_1^e\ln xdx=[x\ln x-x]_1^e=$

$=(e\ln e-e)-(1\ln 1-1)=(e-e)-(0-1)=1$

b) $\int_1^e x\ln xdx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right]_1^e=$

$=\left(\frac{e^2}{2}\ln e-\frac{e^2}{4}\right)-\left(\frac{1^2}{2}\ln 1-\frac{1^2}{4}\right)=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$

B4-13:

$f(x)=x^2\ln x-x^2+x$

B4-14:

$f(x)=\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$

B4-15:

a) $f(x) = \int (e^x \cos x)\, dx = \frac{1}{2}e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x \sin x + k$;
$f(0) = 1 \rightarrow \left\{k = \frac{1}{2}\right\}$
b) $f(x) = \int x \ln\left(x^2+1\right) dx = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + k$;
$f(0) = 0 \rightarrow \left\{k = \frac{1}{2}\right\}$

B4-16:

$\int_0^1 x dx + \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$

B4-17:

a) La función $r(t)$ representa el ritmo de las visitas, o la velocidad con que acuden los visitantes (visitantes/hora).

b) La función $r(t) = -2t^2 + 12t$ es una función polinómica de segundo grado, por lo que su representación gráfica es una parábola:
eje: $x = 3$; vértice $V\,(3, 18)$; corte con el eje OX: $(0,0)\,;(6,0)$

c) 10 horas$\rightarrow$ $t = 2; r(2) = 16$. 13 horas$\rightarrow$ $t = 5; r\,(5) = 10$.

d) Las unidades del producto $r(t)\cdot dt$ son "número de visitantes". Este producto representa el número de personas que entra en la exposición en un tiempo dt.

e) La integral definida $\int_0^6 r(t)\cdot dt$ representa el area comprendida entre la curva y el eje OX. Su significado es el número de personas que visitan la exposición desde $t = 0$ hasta $t = 6$, es decir, a lo largo del día.

f) $\int_0^6 r(t)\cdot dt = \int_0^6 \left(-2t^2 + 12t\right) dt = \left[-\frac{2t^3}{3} + 6t^2\right]_0^6 = 72$ personas.

B4-18:

a) $\int_0^{10} C(t)dt = \int_0^{10} (-0.15t + 30)\, dt = 292.5$ litros
b) $\int_0^t C(t)dt = \int_0^t (-0.15t + 30)\, dt = -0.075\, t^2 + 30.0t$
c) $\int_0^t C(t)dt = 3000 \rightarrow -0.075\, t^2 + 30.0t = 3000 \rightarrow \{t = 200\}$

B4-19:

$\int (2x+1)^3\, dx = \frac{1}{8}(2x+1)^4 + k = 300 \rightarrow \frac{1}{8}(1+1)^4 + k = 300 \rightarrow$
$\rightarrow \{k = 298\} \rightarrow \frac{1}{8}(2x+1)^4 + 298$

B4-20:

El número de animales que se recuperarán entre las 11h. y las 16 h. será: $\int_3^8 g(t)dt$

$\int_3^8 g(t)dt = \int_3^8 10e^{-0.02t}dt = 10\int_3^8 e^{-0.02t}dt = 44.81$
Adoptamos como resultado 44 curaciones entre las 11h. y las 16 h.
A las 16 horas quedarán, por tanto: 250 - 45 = 205 enfermos graves.

B4-21:

Depreciación: $\int_0^3 (1200t - 4000)\, dt = -6600$;
Valor a los 3 años: $15000 - 6600 = 8400$ €

B4-22:

$$\left\{\begin{array}{lcl} P(3) = 0 & \rightarrow & 3a + b = -9 \\ \int_0^3 P(x)dx = 6 & \rightarrow & \left(\frac{27}{3} + \frac{9}{2}a + 3b\right) = 6 \end{array}\right. \rightarrow \left\{a = -\frac{16}{3}, b = 7\right\}$$

B4-23:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \text{- las 9 horas} & \rightarrow & t = 1 \\ \text{- las 12 horas} & \rightarrow & t = 4 \end{array}\right. ;$$

$\int_1^4 \left(e^{\frac{3}{2}t} + 500\right) dt = \frac{2}{3}e^6 + 1500 - \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}} = 1766$ personas.

B4-24:
No podemos asegurar que $a = b$.
Ejemplos: $\int_{-4}^{4} x^3 dx = 0; \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$.
B4-25:
$ax^2 - x^3 = 0 \rightarrow \{x = 0\}, \{x = a\}$
$\int_0^a \left(ax^2 - x^3\right) dx = \frac{1}{12}a^4 = 12 \rightarrow \left\{a = 2\sqrt{3}\right\}, \left\{a = -2\sqrt{3}\right\}$

A.5 Soluciones Problemas Bloque 5

B5-01:
a) P(ByB)+P(NyN) $= \frac{4}{7}\frac{4}{6}\frac{4}{6} + \frac{3}{7}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{4}{7}\frac{2}{6}\frac{2}{6} + \frac{3}{7}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{67}{126}$
b) P(distinto color) $= 1 - \frac{67}{126} = \frac{59}{126}$
B5-02:
a) P(Pagado) $= 0.3 \times 0.8 + 0.5 \times 0.75 + 0.2 \times 0.5 = 0.715$
b) P(Vivienda/Impagado) $= \frac{0.3 \times 0.2}{1-0.715} = 0.210$
B5-03:
a) $P(R \cup Tv) = P(R) + P(Tv) - P(R \cap Tv) = 0.3 + 0.6 - 0.2 = 0.7$
b) $P(R/\overline{Tv}) = \frac{P(R \cap \overline{Tv})}{P(\overline{Tv})} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$
c) $P(R \cap \overline{Tv}) + P(\overline{R} \cap Tv) = P(R) - P(R \cap Tv) + P(Tv) - P(R \cap Tv) =$
$= 0.3 - 0.2 + 0.6 - 0.2 = 0.5$
B5-04:
a) P(R∧R∧R) $= 0.3 \cdot 0.7 \cdot 0.5 = 0.105$
b) P(V∧V∧V) $= 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.5 = 0.105$
c) P(uno R y dos V) $= 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.5 + 0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.5 + 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.5 = 0.395$
B5-05:
a) P(Prop.) = P(más de 50∧Prop.) + P(menos de 50∧Prop.) =
$= 0.7 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.3 = 0.51$
b) P(más de 50 / Prop.) $= \frac{\text{P(más de 50}\wedge\text{Prop.)}}{\text{P(Prop.)}} = \frac{0.7 \cdot 0.6}{0.51} = 0.82$
B5-06:
a) P(No Gripe) $= \frac{352}{400} = 0.880$
b) P(Mujer ∧ No Gripe) $= \frac{195}{400} = 0.487$
c) P(Hombre / No Gripe) $= \frac{157}{352} = 0.446$
d) P(No Gripe / Mujer) $= \frac{195}{220} = 0.886$
B5-07:
a) P(R ∨ Tv.) $= \frac{90}{100} = 0.90$
b) P($\overline{\text{R}} \wedge \overline{\text{Tv.}}$) $= \frac{10}{100} = 0.10$
c) P(R ∧ $\overline{\text{Tv.}}$) $= \frac{20}{100} = 0.20$
d) P(Tv. ∧ $\overline{\text{R}}$) $= \frac{40}{100} = 0.40$
B5-08:
a) $P(I \wedge \bar{D}) = 0.2 \cdot 0.25 = 0.05$
b) $P(Otro \wedge D) = 0.6 \cdot 0.2 = 0.12$

c) $P(E/D) = \frac{P(E)\cdot P(D/E)}{P(D)} = \frac{0.2\cdot 0.5}{0.2\cdot 0.75+0.2\cdot 0.5+0.6\cdot 0.2} = 0.\,27$

d) $P((I \vee E)/D) = \frac{P(I\cup E)\cdot P(D/E)}{P(D)} = \frac{0.2\cdot 0.75+0.2\cdot 0.5}{0.2\cdot 0.75+0.2\cdot 0.5+0.6\cdot 0.2} = 0.\,675$

B5-09:

a) $P(Sana/+) = \frac{P(S\cap +)}{P(+)} = \frac{0.85\cdot 0.05}{0.15\cdot 0.9+0.85\cdot 0.05} = 0.239$

b) $P(Enf./-) = \frac{P(E\cap -)}{P(-)} = \frac{0.15\cdot 0.1}{0.15\cdot 0.1+0.85\cdot 0.95} = 0.018$

B5-10:

a) P (2 monedas de 1 €) $= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{27}{140}$

b) P (A / 1€ y 1€) $= \frac{P(A\cap 1\cap 1)}{P(1\cap 1)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{27}{140}} = \frac{7}{27}$

B5-11:

P(destruir)=1-P(no destruir)=$1 - 0.4 \times 0.4 \times 0.4 = 0.936$

B5-12:

b) P(1 solo defecto) = P(solo L) + P(solo A) + P(solo H) =
$= \frac{11}{100} + \frac{5}{100} + \frac{5}{100} = \frac{21}{100} = 0.21$

c) P(solo L) $= \frac{11}{100} = 0.11$

B5-13:

b) P (una sola enfermedad) = P(solo C1) + P(solo C2) =
$= \frac{70}{150} + \frac{30}{150} = \frac{2}{3} = 0.\hat{6}$, o bien:

b) P (una sola enfermedad) $= P(C1) + P(C2) - 2\cdot P(C1\cap C2) =$
$= \frac{90}{150} + \frac{50}{150} - 2\cdot\frac{20}{150} = \frac{2}{3} = 0.\hat{6}$

B5-14:

P (Roja) $= 1\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{13} + 1\cdot\frac{7}{16}\cdot\frac{0}{13} = \frac{9}{208} = 0.043$

B5-15:

a) P(Def.) = P(A)·P(Def./A) + P(B)·P(Def./B) +P(C)·P(Def./C) =
$= 0.7\cdot 0.1 + 0.2\cdot 0.2 + 0.1\cdot 0.4 = 0.15$

b) P (A/Def.) $= \frac{P(A)\cdot P(Def./A)}{P(Def.)} = \frac{0.7\cdot 0.1}{0.15} = 0.4\hat{6}$

B5-16:

$P(F) = P(B\wedge B)$ $+0.3\cdot P(M\wedge M) = 0.95\cdot 0.97 + 0.3\cdot 0.05\cdot 0.03 =$
$= 0.922$

$P(\bar{F}) = 1 - P(F) = 1 - 0.92195 = 0.078$

B5-17:

a) $P(A) = P(<30\wedge A) + P(>30\wedge A) = 0.55\cdot 0.2 + 0.45\cdot 0.9 = 0.\,515$

b) $P(<30/A) = \frac{P(<30\wedge A)}{P(A)} = \frac{0.55\cdot 0.2}{0.55\cdot 0.2+0.45\cdot 0.9} = \frac{0.11}{0.515} = 0.\,213$

B5-18:

$P(Util.) = P(C\wedge C) + 0.5\cdot P(I\wedge I) =$
$= 0.95\cdot 0.98 + 0.5\cdot 0.05\cdot 0.02 = 0.931$

B5-19:

P (Diferentes Cumpleaños) $= \frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\frac{362}{365} = \frac{47\,831\,784}{48\,627\,125} = 0.984$

B5-20:

$P(M\cap S\cap B) = P(B\cap M\cap S) = P(B)\cdot P(M/B)\cdot P(S/M\cap B) =$
$= 0.8\cdot 0.52\cdot 0.4 = 0.1664$

B5-21:

a) Que los dos últimos en entrar sean hombres, es equivalente a que la primera en entrar sea mujer. Por tanto: $P(M) = \frac{1}{3}$

b) Para que los dos sucesos sean independientes, es necesario que:
$P(S_1) \cdot P(S_2) = P(S_1 \cap S_2)$
$P(S_1) = P(A, J, R) + P(A, R, J) + P(J, A, R) + P(R, A, J) =$
$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{2}{3}$
$P(S_2) = P(A, J, R) + P(A, R, J) + P(J, R, A) + P(R, J, A) =$
$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{2}{3}$
$P(S_1 \cap S_2) = P(A, J, R) + P(A, R, J) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{3}$
Como que: $P(S_1) \cdot P(S_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \neq \frac{1}{3} = P(S_1 \cap S_2) \rightarrow$
$\rightarrow$ los sucesos no son independientes

B5-22:

a) $P(Sí, No, No) + P(No, Sí, No) + P(No, No, Sí) =$
$= 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 0.5 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 0.5 \cdot 0.7 = 0.395$
b) $P(Sí, Sí, No) + P(Sí, No, Sí) + P(No, Sí, Sí) =$
$= 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.5 \cdot 0.7 = 0.395$
c) $P(Sí, Sí, Sí) = 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.7 = 0.105$

B5-23:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{19}{24}$
b) $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{19}{24} = \frac{5}{24}$
c) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{6}$
d) $P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{5}{8} = P(A \cap B) \rightarrow$
$\rightarrow$ los sucesos A y B no son independientes.

B5-24:

$P(Azul) = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} + \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{10} = \frac{37}{80}$

B5-25:

a) Dos sucesos A y B son independientes si se verifica que:
$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$;
o bien, "el resultado de uno de ellos no condiciona el resultado del otro":
$$\begin{cases} P(A/B) = P(A) \\ P(B/A) = P(B) \end{cases}$$
Dos sucesos son incompatibles cuando se verifica que: $P(A \cap B) = \emptyset$;
o bien, "cuando no pueden producirse de manera simultánea".
Dos sucesos con probabililades no nulas, no pueden ser simultáneamente independientes e incompatibles:
$$\begin{cases} \cdot \text{ por ser independientes:} & \rightarrow & P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) \\ \cdot \text{ por ser incompatibles:} & \rightarrow & P(A \cap B) = \emptyset \end{cases},$$
lo que nos conduciría a: $P(A) \cdot P(B) = 0$, que resulta contradictorio con que se trate de sucesos de probabilidades no nulas.
b) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow 0.2 = \frac{P(A \cap B)}{0.4} \rightarrow P(A \cap B) = 0.08$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow 0.3 + 0.4 - 0.08 = 0.62$

A.6 Soluciones Problemas Bloque 6

B6-01:

$\hat{p} = \frac{18}{40} = 0.45$
$\alpha = 0.1 \rightarrow$-$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$
$IC = \hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}} = 0.45 \pm 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{40}} = (0.32, 0.58) \rightarrow$
$\rightarrow p \in (0.32, 0.58)$
$\begin{cases} 0.32 \cdot 2500 = 800 \\ 0.58 \cdot 2500 = 1450 \end{cases}$

B6-02:

$\overline{x} = 18.1$
$\alpha = 0.05 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$
$IC = \overline{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 18.1 \pm 1.96 \cdot \frac{0.4}{\sqrt{100}} = (18.022, 18.178) \rightarrow$
$\rightarrow \mu \in (18.022, 18.178)$

B6-03:

$\begin{cases} H_0: & p \geq 0.8 \\ H_1: & p < 0.8 \end{cases}$
$\alpha = 0.05 \rightarrow Z_{\alpha} = 1.645$
$\hat{p} = \frac{100}{150} = 0.\overset{\frown}{6}$
$IC = \hat{p} \pm Z_{\alpha} \sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}} = 0.\overset{\frown}{6} \pm 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.\overset{\frown}{6} \cdot 0.\overset{\frown}{3}}{150}} = (0.602, 0.729) \rightarrow$
$\rightarrow p \in (0.602, 0.729)$
Rechazamos la hipótesis nula H_0.

B6-04:

$\begin{cases} H_0: & \mu \leq 25 \\ H_1: & \mu > 25 \end{cases}$
$\alpha = 0.01 \rightarrow Z_{\alpha} = 2.33$
$\overline{x} = 27$
como que $n > 30 \rightarrow \sigma \simeq s$
$IC = \overline{x} \pm Z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 27 \pm 2.33 \cdot \frac{15}{\sqrt{200}} = (24.529, 29.471) \rightarrow \mu \in (24.529, 29.471)$
Aceptamos la hipótesis nula H_0.

B6-05:

$\hat{p} = \frac{120}{200} = 0.6 \rightarrow \hat{q} = \left(1 - \hat{p}\right) = 0.4 \rightarrow \hat{p} \cdot \hat{q} = 0.6 \cdot 0.4 = 0.24$
$\alpha = 0.05 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$
$IC = \hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}$
El error máximo, coincidirá con el radio del Intervalo de Confianza:
$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}} \rightarrow 0.02 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{n}} \rightarrow \left(\frac{0.02}{1.96}\right)^2 = \frac{0.24}{n} \rightarrow n = 2305$

B6-06:

$\alpha = 0.01 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.58$
$IC = \overline{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
El error máximo, coincidirá con el radio del Intervalo de Confianza:
$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.5 = 2.58 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \rightarrow \left(\frac{0.5}{2.58}\right)^2 = \frac{4}{n} \rightarrow n \simeq 107$

B6-07:

$\begin{cases} H_0: & \mu = 100 \\ H_1: & \mu \neq 100 \end{cases}$

$\overline{x} = 110$

$\alpha = 0.10 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$

$IC = \overline{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 110 \pm 1.645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = (106.71, 113.29)$

El error máximo, coincidirá con el radio del Intervalo de Confianza:

$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow E = 1.645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 3.29$

Rechazamos la hipótesis nula H_0.

B6-08:

$\hat{p} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25} = 0.28$

$\alpha = 0.05 \rightarrow$-$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$IC = \hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}} = 0.28 \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.28 \cdot 0.72}{50}} = (0.155, 0.404) \rightarrow$

$\rightarrow p \in (0.155, 0.404)$

$\begin{cases} 0.155 \cdot 5000 = 775 \\ 0.404 \cdot 5000 = 2020 \end{cases}$

B6-09:

$\overline{x} = 43.2$

$\alpha = 0.10 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$

como que $n > 30 \rightarrow \sigma \simeq s$

$IC = \overline{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 43.2 \pm 1.645 \cdot \frac{18.6}{\sqrt{200}} = (41.036, 45.364) \rightarrow$

$\rightarrow \mu \in (41.036, 45.364)$

B6-10:

$\begin{cases} H_0: & p \geq 0.94 \\ H_1: & p < 0.94 \end{cases}$

$\alpha = 0.05 \rightarrow Z_\alpha = 1.645$

$\hat{p} = \frac{90}{100} = 0.9$

$IC = \hat{p} \pm Z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}} = 0.9 \pm 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.9 \cdot 0.1}{100}} = (0.850, 0.949) \rightarrow$

$\rightarrow p \in (0.850, 0.949)$

Aceptamos la hipótesis nula H_0.

B6-11:

$\begin{cases} H_0: & \mu \leq 12 \\ H_1: & \mu > 12 \end{cases}$

$\alpha = 0.05 \rightarrow Z_\alpha = 1.645$

$\overline{x} = 14$

como que $n > 30 \rightarrow \sigma \simeq s$

$IC = \overline{x} \pm Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 14 \pm 1.645 \cdot \frac{5}{\sqrt{300}} = (13.525, 14.475) \rightarrow \mu \in (13.525, 14.475)$

Rechazamos la hipótesis nula H_0.

B6-12:

$\hat{p} = 0.5 \rightarrow \hat{q} = \left(1 - \hat{p}\right) = 0.5 \rightarrow \hat{p} \cdot \hat{q} = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$

$\alpha = 0.01 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.58$

$IC = \hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}$

El error máximo, coincidirá con el radio del Intervalo de Confianza:

$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}} \rightarrow 5 = 2.58 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \rightarrow \left(\frac{0.03}{2.58}\right)^2 = \frac{0.25}{n} \rightarrow n = 1849$

B6-13:

$\alpha = 0.05 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$IC = \overline{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

El error máximo, coincidirá con el radio del Intervalo de Confianza:

$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 3000 = 1.96 \cdot \frac{20000}{\sqrt{n}} \rightarrow n \simeq 171$

B6-14:

$\begin{cases} H_0 : & \mu = 170 \\ H_1 : & \mu \neq 170 \end{cases}$

$\overline{x} = 169.7$

$\alpha = 0.05 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$IC = \overline{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 169.7 \pm 1.96 \cdot \frac{4.2}{\sqrt{75}} = (168.75, 170.\,65)$

El error máximo, coincidirá con el radio del Intervalo de Confianza:

$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow E = 1.96 \cdot \frac{4.2}{\sqrt{75}} = 0.950$

Aceptamos la hipótesis nula H_0.

B6-15:

$\begin{cases} H_0 : & \mu = 2 \\ H_1 : & \mu \neq 2 \end{cases}$

$\overline{x} = 2.05$

$\alpha = 0.05 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

como que $n > 30 \rightarrow \sigma \simeq s$

$IC = \overline{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.05 \pm 1.96 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{200}} = (2.036, 2.063) \rightarrow \mu \in (2.036, 2.063)$

Rechazamos la hipótesis nula H_0.

B6-16:

$\alpha = 0.05 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$IC = \overline{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \rightarrow \sigma = \sqrt{0.25} = 0.5$

El error máximo, coincidirá con el radio del Intervalo de Confianza:

$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.2 = 1.96 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{n}} \rightarrow n \simeq 25$

B6-17:

$\begin{cases} H_0 : & p = 0.8 \\ H_1 : & p \neq 0.8 \end{cases}$

$n = 120$

$\alpha = 0.01 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.58$

$\hat{p} = \frac{96}{120} = 0.8$

$IC = \hat{p} \pm Z_{\alpha} \sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}} = 0.8 \pm 2.58 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{120}} = (0.705, 0.894) \rightarrow$

$\rightarrow p \in (0.705, 0.894)$

El error máximo, coincidirá con el radio del Intervalo de Confianza:

$E = Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}} \rightarrow 2.58 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{120}} = 0.094$

B6-18:

$\alpha = 0.05 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$\hat{p} = 0.5 \rightarrow \hat{q} = \left(1-\hat{p}\right) = 0.5 \rightarrow \hat{p} \cdot \hat{q} = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$

$IC = \hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}} = 0.5 \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}}$

El error máximo, coincidirá con el radio del Intervalo de Confianza:

$E = Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}} \rightarrow 0.05 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \rightarrow n \simeq 385$

B6-19:

$\begin{cases} H_0: & \mu \leq 6 \\ H_1: & \mu > 6 \end{cases}$

$\alpha = 0.05 \rightarrow Z_{\alpha} = 1.645$

$\overline{x} = 6.5$

como que $n > 30 \rightarrow \sigma \simeq s$

$IC = \overline{x} \pm Z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6.5 \pm 1.645 \cdot \frac{4}{\sqrt{64}} = (5.677, 7.322) \rightarrow \mu \in (5.677, 7.322)$

Aceptamos la hipótesis nula H_0, luego puede justificarse el titular.

B6-20:

a) $\alpha = 0.05 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96; \overline{x} = 1060$

como que $n > 30 \rightarrow \sigma \simeq s$

$IC = \overline{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1060 \pm 1.96 \cdot \frac{200}{\sqrt{100}} = (1020.8, 1099.2) \rightarrow$

$\rightarrow \mu \in (1020.8, 1099.2)$

b) $\alpha = 0.01 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.58$

El error máximo, coincidirá con el radio del Intervalo de Confianza:

$E = Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 30 = 2.58 \cdot \frac{200}{\sqrt{n}} \rightarrow n \simeq 296$

B6-21:

a) $\hat{p} = 0.3 \rightarrow \hat{q} = \left(1-\hat{p}\right) = 0.7 \rightarrow \hat{p} \cdot \hat{q} = 0.3 \cdot 0.7 = 0.21$

$\alpha = 0.05 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$IC = \hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}$

El error máximo, coincidirá con el radio del Intervalo de Confianza:

$E = Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}} \rightarrow 0.031 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{n}} \rightarrow n \simeq 840$

b) $\alpha = 0.01 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.58$

$IC = \hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}} = 0.35 \pm 2.58 \cdot \sqrt{\frac{0.35 \cdot 0.65}{64}} = (0.196, 0.503) \rightarrow$

$\rightarrow p \in (0.196, 0.503)$

B6-22:

$\begin{cases} H_0: & \mu \geq 1600 \\ H_1: & \mu < 1600 \end{cases}$

$\overline{x} = 1570$

$\alpha = 0.05 \rightarrow Z_{\alpha} = 1.645$

como que $n > 30 \rightarrow \sigma \simeq s$
$IC = \overline{x} \pm Z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1570 \pm 1.645 \cdot \frac{120}{\sqrt{100}} = (1550.3, 1589.7)$
Rechazamos la hipótesis nula H_0.

B6-23:

$\begin{cases} H_0: & \mu = 1.25 \\ H_1: & \mu \neq 1.25 \end{cases}$
$\overline{x} = 1.17$
$\alpha = 0.01 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.58$
suponemos que $\sigma \simeq s$
$IC = \overline{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.17 \pm 2.58 \cdot \frac{0.08}{\sqrt{36}} = (1.135, 1.204) \rightarrow \mu \in (1.135, 1.204)$
Rechazamos la hipótesis nula H_0.

B6-24:

a) La mejor estimación puntual es la media muestral observada; es decir, el centro del IC: 50 €
b) $\alpha = 0.01 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.58$
$IC = \overline{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
El error máximo, para una muestra de 100 familias, coincidirá con el radio del Intervalo de Confianza:
$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 8 = 2.58 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \rightarrow \sigma = 31.008$
$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 3 = 2.58 \cdot \frac{31.008}{\sqrt{n}} \rightarrow n \simeq 712$

B6-25:

$\alpha = 0.05 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$
$IC = \overline{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
La amplitud del IC será el doble del radio del mismo:
$2E = 2Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.45 \rightarrow 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{n}} = 2.45 \rightarrow n = 64$
$IC = \overline{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 170 \pm 1.96 \cdot \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = (168.78, 171.23)$