Álgebra Lineal

Matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$a_{ij} \in F,\ i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n,\ F = \mathbb{R},\ \mathbb{C}$

$$(a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}_{p\times q}$$

si y solo si $m = p$, $n = q$ y $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i, j$.

Suma de matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+a_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$(c_{ij}), \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Definición

La matriz cero es

$$0_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Si $A = (a_{ij})$,

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

Proposición

Sean A, B, C matrices del mismo tamaño. Entonces

i) $A + B = B + A$

ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$

iii) $A + 0 = 0 + A = A$

iv) $A + (-A) = (-A) + A = 0$

$A - B := A + (-B)$

$A = (a_{ij})$

$r \in \mathbb{R}$

$$rA = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \dots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \dots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \dots & ra_{mn} \end{pmatrix}$$

Proposición

Sean $A = (a_{ij}),\ r, s \in \mathbb{R}$

i) $r(A + B) = rA + rB$

ii) $(r + s)A = rA + sA$

iii) $r(sA) = (rs)A$

Multiplicación de matrices

Definición

Sea $A = (a_{ij})$ *una matriz de tamaño* $m \times n$ *y* $B = (b_{ij})$ *una matriz de tamaño* $n \times p$. *El producto de* A *y* B *es la matriz de de tamaño* $m \times p$

$$AB := (c_{ij})$$

donde

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj}$$

Definición

La matriz identidad $n \times n$ es

$$I_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Proposición

Sean A, B y C matrices para las cuales las operaciones abajo están bien definidas.

i) $A(BC) = (AB)C$

ii) $IA = AI$

iii) $A(B + C) = AB + AC$

iv) $(A + B)C = AC + BC$

Para una matriz cuadrada A, la potencia k-ésima de A es $A^k = AA \cdots A$ (k veces)

Vector columna

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Vector renglón

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

- Suma de vectores
- Multiplicación por escalar
- Producto escalar

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Transpuesta de una matriz

Definición

Sea $A = (a_{ij})$ *una matriz de* $m \times n$*. La transpuesta de* A *es la matriz de* $n \times m$ *dada por*

$$A^t := (b_{ij})$$

donde $b_{ij} = a_{ji}$.

Proposición

Sean A y B matrices para las cuales las operaciones abajo están bien definidas.

i) $(AB)^t = B^t A^t$

ii) $(A^t)^t = A$

iii) $(A+B)^t = A^t + B^t$

iv) $(rA)^t = rA^t, \forall r \in \mathbb{R}$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$a \cdot b = a^t b$$

Definición

Una matrix A de tamaño $n \times n$ es invertible si existe una matriz C, $n \times n$ tal que $AC = CA = I$

En el caso de que A sea invertible, C es única, se le llama la inversa de A y se denota por A^{-1}

Proposición

Sean A una matriz $n \times n$. Entonces

i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

iii) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Matrices por bloques

Una matriz por bloques es una matriz cuyas entradas son matrices.

Dos matrices por bloques pueden sumarse si los bloques correspondientes son iguales y multiplicarse si los bloques correspondientes pueden multiplicarse.

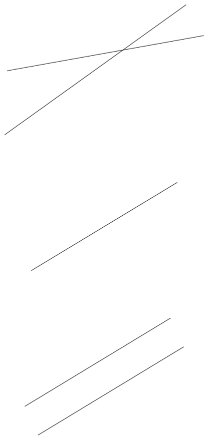
Sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones y n variables es un sistema del tipo

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Una solución es una n-eada $(s_1, \cdots, s_n)$ que hace que las ecuaciones sean ciertas al mismo tiempo.

Tipos de soluciones: única, inexistente, infinitas soluciones.



Para encontrar una solución podemos usar las tres operaciones elementales:

i) Multiplicar un renglón por un número diferente de cero
ii) Intercambiar dos reglones
iii) Sumar un múltiplo de un renglón a otro.

Representación matricial de un sistema lineal

La matriz de coeficientes del sistema está dada por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

La matriz de coeficientes aumentada del sistema está dada por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}_{m\times n}$$

Las tres operaciones elementales de renglones se aplican también a las matrices que representan sistemas.

Dos matrices son equivalentes por renglones si se puede llegar de una a la otra por medio de una sucesión de operaciones elementales por renglones

Teorema

Si dos matrices aumentadas correspondientes a dos sistemas lineales son equivalentes por renglones, entonces los dos sistemas tienen el mismo conjunto solución

Una matriz tiene una forma escalonada por renglones si:

- El primer elemento no cero de un renglón esta a la derecha de la columna del primer elemento no cero del renglón de arriba
- Todos los elementos abajo de un primer elemento no cero son cero
- Todos los renglones de ceros estan abajo de todos los que no son cero

Una matriz tiene una forma escalonada reducida por renglones si:

- Está en forma escalonada por renglones
- El primer elemento no cero en cada renglón es uno
- Todos los primeros elementos no cero son los únicos que no son cero en esa columna

El método de Gauss.

El método de Gauss-Jordan.

La ecuación matricial

Todo sistema lineal se puede escribir en la forma

$$Ax = b$$

Sistemas homogéneos

Un sistema homogéneo tiene la forma

$$Ax = 0$$

Siempre tiene la solución trivial.

Si una matriz es invertible, entonces la solución del sistema $Ax = b$ esta dada por $x = A^{-1}b$.

Para encontrar A^{-1}, se escribe la matriz aumentada $(A \mid I)$ y se encuentra su forma reducida por renglones. Si el bloque de A es reduce a I entonces obtenemos la inversa de la matriz reducida resultante $(I \mid A^{-1})$

Definición

El determinante de

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

está dado por $\det A = ad - bc$.

También se usa la notación $|A|$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

una matriz cuadrada de tamaño n.

Se define A_{ij} como la matriz de tamaño $(n-1)\times(n-1)$ que se forma al borrar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de A.

El cofactor (i,j) de A es $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

Definición

Sea $A = (a_i j)$ *una matriz* $n \times n$, $n \geq 2$. *El determinante de* A *es*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_1 j C_{1j}$$

Proposición

Sea $A = (a_i j)$ *una matriz* $n \times n$, $n \geq 2$. *El determinante de* A *es, fijando* i

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_i j C_{ij}$$

y fijando j

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_i j C_{ij}$$

Proposición

Sea $A = (a_i j)$ *una matriz* $n \times n$

i) *Si se multiplica un renglón de* A *por un número* k *para producir* B, *entonces* $\det B = k \det A$

ii) *Si se intercambian dos reglones de* A *para producir* B *entonces* $\det B = -\det A$

iii) *Si se suma un múltiplo de un renglón de* A *a otro para producir* B *entonces* $\det B = \det A$.

Proposición

Sean A y B matrices $n \times n$. Entonces

i) $\det A^t = \det A$

ii) $\det AB = \det A \det B$