Cálculo

Lilí Guadarrama Bustos

CIMAT

Septiembre 2019

Contenido

CIMAT

¿ Qué es una función?

- DEFINICIÓN: Sean X y Y dos conjuntos no vacíos. Una función de X en Y es una regla que le asigna a cada elemento $x \in X$ una única $y \in Y$.

¿ Qué es una función?

- DEFINICIÓN: Sean X y Y dos conjuntos no vacíos. Una función de X en Y es una regla que le asigna a cada elemento $x \in X$ una única $y \in Y$.

- Si una función asigna y a un $x \in X$ particular, decimos que y es el valor de la función en x.

CIMAT

¿ Qué es una función?

- DEFINICIÓN: Sean X y Y dos conjuntos no vacíos. Una función de X en Y es una regla que le asigna a cada elemento $x \in X$ una única $y \in Y$.

- Si una función asigna y a un $x \in X$ particular, decimos que y es el valor de la función en x.
- Por lo general, una función se denota por letras como f, g, F o G.

CIMAT

¿ Qué es una función?

- DEFINICIÓN: Sean X y Y dos conjuntos no vacíos. Una función de X en Y es una regla que le asigna a cada elemento $x \in X$ una única $y \in Y$.

- Si una función asigna y a un $x \in X$ particular, decimos que y es el valor de la función en x.
- Por lo general, una función se denota por letras como f, g, F o G.

- Denotemos con f una función determinada.
  - El conjunto X para el cual f asigna una única $y \in Y$ se denomina el **dominio** de la función f.

CIMAT

¿ Qué es una función?

- DEFINICIÓN: Sean X y Y dos conjuntos no vacíos. Una función de X en Y es una regla que le asigna a cada elemento $x \in X$ una única $y \in Y$.

- Si una función asigna y a un $x \in X$ particular, decimos que y es el valor de la función en x.
- Por lo general, una función se denota por letras como f, g, F o G.

- Denotemos con f una función determinada.
  - El conjunto X para el cual f asigna una única $y \in Y$ se denomina el **dominio** de la función f.
  - El conjunto de valores correspondiente $y \in Y$ se conoce como el **rango** de la función f.

CIMAT

¿ Qué es una función?

- DEFINICIÓN: Sean X y Y dos conjuntos no vacíos. Una función de X en Y es una regla que le asigna a cada elemento $x \in X$ una única $y \in Y$.

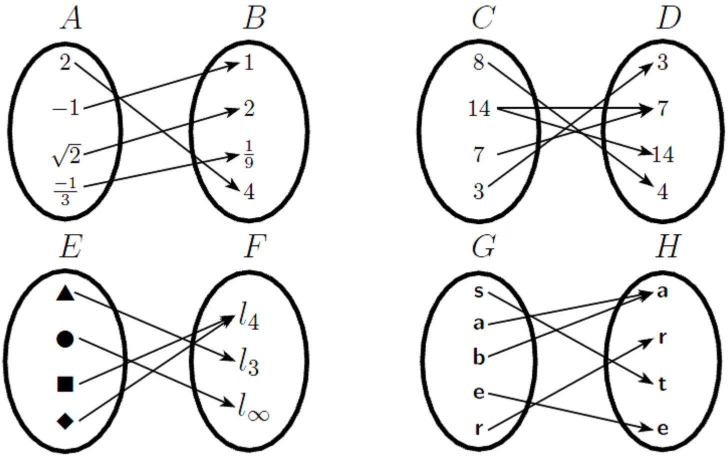
- Si una función asigna y a un $x \in X$ particular, decimos que y es el valor de la función en x.
- Por lo general, una función se denota por letras como f, g, F o G.

- Denotemos con f una función determinada.
  - El conjunto X para el cual f asigna una única $y \in Y$ se denomina el **dominio** de la función f.
  - El conjunto de valores correspondiente $y \in Y$ se conoce como el **rango** de la función f.

CIMAT

Ejemplo

¿ Cuáles de las siguientes relaciones son funciones?



Sea X el conjunto de estudiantes en una clase. Sea f la regla que asigna a cada estudiante su calificación final.

Sea X el conjunto de estudiantes en una clase. Sea f la regla que asigna a cada estudiante su calificación final.

- Cada estudiante tiene una sola calificación final por lo tanto esta regla define una función.

Sea X el conjunto de estudiantes en una clase. Sea f la regla que asigna a cada estudiante su calificación final.

- Cada estudiante tiene una sola calificación final por lo tanto esta regla define una función.

- ¿ cuál es el dominio?

CIMAT

Sea X el conjunto de estudiantes en una clase. Sea f la regla que asigna a cada estudiante su calificación final.

- Cada estudiante tiene una sola calificación final por lo tanto esta regla define una función.

- ¿ cuál es el dominio?
  - El conjunto de todos los estudiantes en la clase

Sea X el conjunto de estudiantes en una clase. Sea f la regla que asigna a cada estudiante su calificación final.

- Cada estudiante tiene una sola calificación final por lo tanto esta regla define una función.
- ¿ cuál es el dominio?
  - El conjunto de todos los estudiantes en la clase
- ¿ cuál es el rango?

CIMAT

Sea X el conjunto de estudiantes en una clase. Sea f la regla que asigna a cada estudiante su calificación final.

- Cada estudiante tiene una sola calificación final por lo tanto esta regla define una función.
- ¿ cuál es el dominio?
  - El conjunto de todos los estudiantes en la clase
- ¿ cuál es el rango?
  - Es el conjunto de todas las calificaciones concedidas:

$$Rangf = \{7, 8, 9, 10\}$$

CIMAT

Determinar cual de las las siguientes expresiones son funciones.

1. $y = x^2 + 1$
2. $y^2 = x + 1$

CIMAT

Determinar cual de las las siguientes expresiones son funciones.

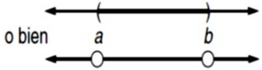
1. $y = x^2 + 1$
2. $y^2 = x + 1$

Consideremos $x = 3$, entonces

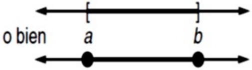
$$y^2 = 3 + 1 = 4 \quad \Rightarrow y = 2 \text{ o } y = -2$$

CIMAT

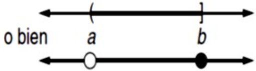
INTERVALOS ACOTADOS



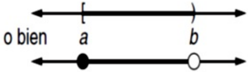
a) Intervalo abierto (a, b)



b) Intervalo cerrado $[a, b]$



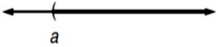
c) Intervalo semicerrado $(a, b]$

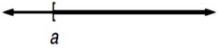


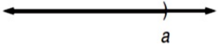
d) Intervalo semicerrado $[a, b)$

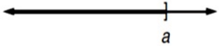
Intervalos infinitos: Usamos los símbolos ∞ (*infinito*) y $-\infty$ (*menos infinito*) para describir intervalos no acotados.

- Incluyen un extremo únicamente por un lado, e infinito por el lado opuesto.

$(a, \infty) =$ 

$[a, \infty) =$ 

$(-\infty, a) =$ 

$(-\infty, a] =$ 

- Totalmente abierto

$(-\infty \ , \infty) =$ 

Notación

Si una función f asigna un valor y en el rango a cierta x en el dominio, escribimos

$$y = f(x)$$

Notación

Si una función f asigna un valor y en el rango a cierta x en el dominio, escribimos

$$y = f(x)$$

Leemos $f(x)$ como $''f$ de x''; es el valor de f en x.

Notación

Si una función f asigna un valor y en el rango a cierta x en el dominio, escribimos

$$y = f(x)$$

Leemos $f(x)$ como $''f$ de x''; es el valor de f en x.

Si una función f se expresa por una relación del tipo $y = f(x)$, entonces x se denomina la **variable independiente o argumento** de f y y se conoce como la **variable dependiente**.

Notación

Las funciones se pueden expresar estableciendo el valor de la función por medio de una fórmula algebraica en términos de la variable independiente de que se trate.

Notación

Las funciones se pueden expresar estableciendo el valor de la función por medio de una fórmula algebraica en términos de la variable independiente de que se trate.

Ejemplos:

- $f(x) = 5x^2 + 7x - 2$
- $g(p) = \frac{2p^3+7}{(p+1)}$.

Ejercicio

Dada $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$, calcule el valor de f cuando

- $x = a$,
- $x = 3$,
- $x = -2$,
- $x = \frac{1}{4}$.
- $f(x - 3)$

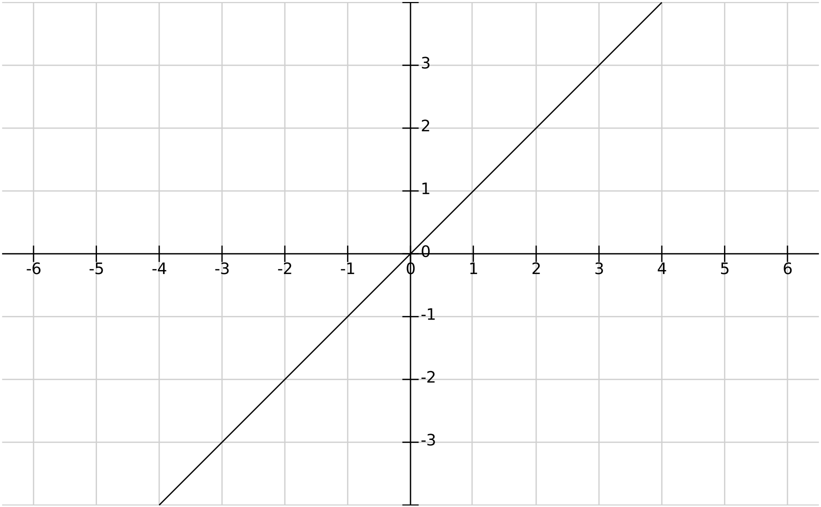
CIMAT

Ejercicio

¿ Cuál es el rango y dominio de cada una de las siguientes funciones?

- $f(x) = 5x - 3$
- $g(t) = \sqrt{4 - 7t}$
- $f(z) = |z - 6| - 3$
- $g(x) = 8$
- $f(x) = \frac{x-4}{x^2-2x-15}$
- $g(t) = \sqrt{6 + t - t^2}$

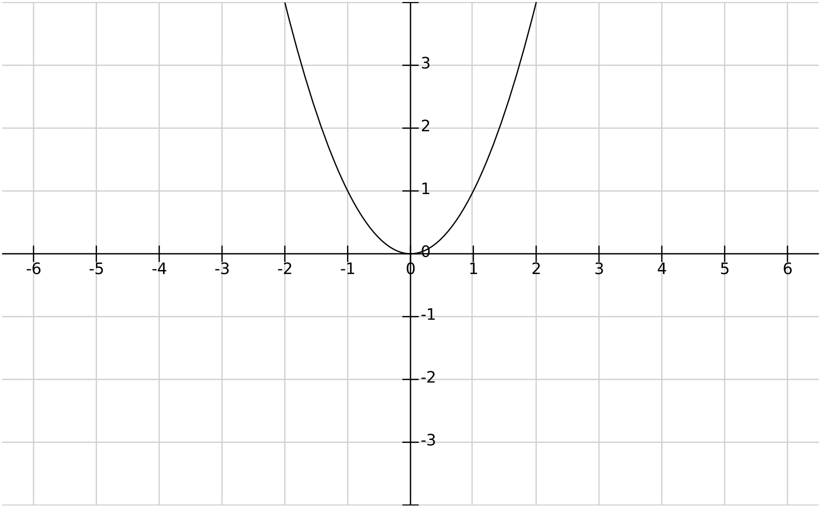
Graficas



$$f(x) = x$$

http://fooplot.com

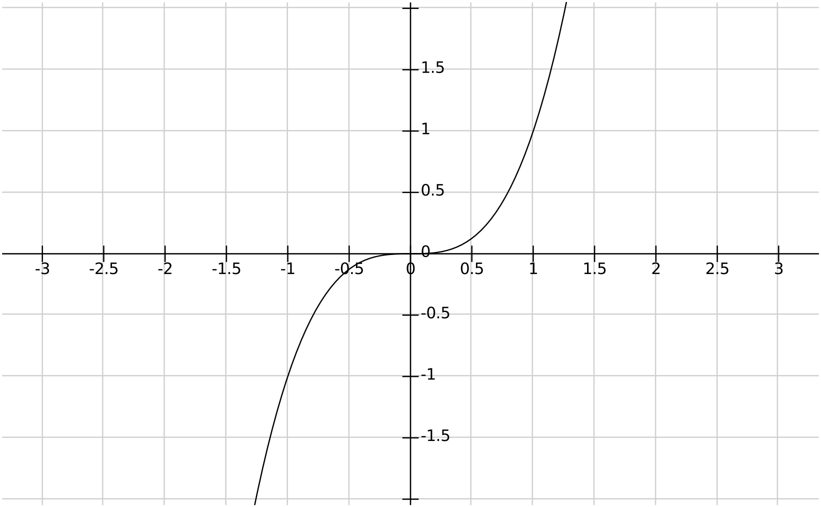
Graficas



$$f(x) = x^2$$

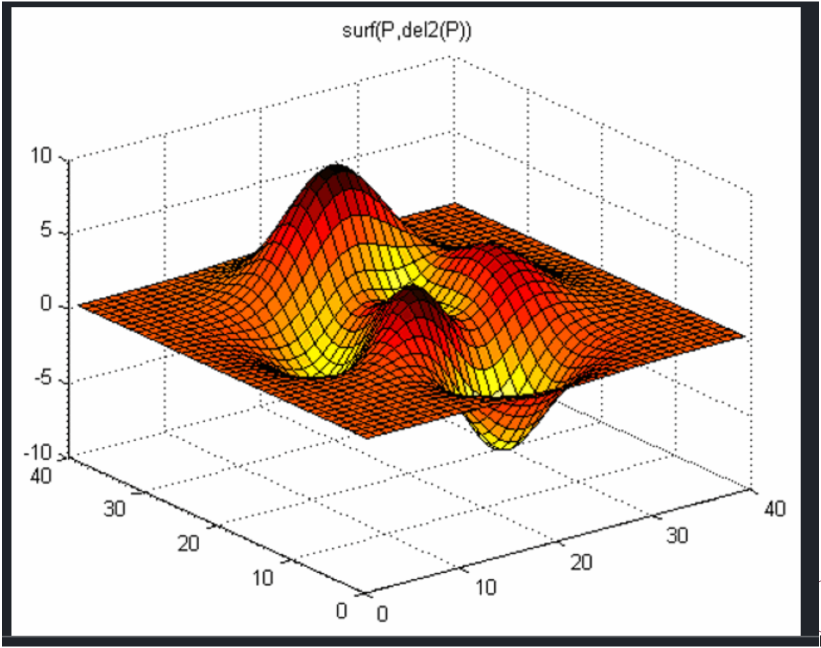
http://fooplot.com

Graficas



$$f(x) = x^3$$

http://fooplot.com



https://ww

and-graphics/

Composición de funciones

La composición de f(x) y g(x) esta definida como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

CIMAT

Sea $f(x) = 3x^2 - x + 10$ y $g(x) = 1 - 20x$, encontar

- $(f \circ g)(5)$
- $(f \circ g)(x)$
- $(g \circ f)(x)$
- $(g \circ g)(x)$

Sea $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, encontar

- $(f \circ g)(x)$
- $(g \circ f)(x)$

Sea $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, encontar

- $(f \circ g)(x)$
- $(g \circ f)(x)$

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$

CIMAT

Decimos que una funcion es uno a uno si

$$f(x_1) \neq f(x_2) \text{ siempre que } x_1 \neq x_2$$

Dos funciones uno a uno, f(x) y g(x) son inversas una de a otra si

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

y lo denotamos como

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

Dos funciones uno a uno, f(x) y g(x) son inversas una de a otra si

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

y lo denotamos como

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

CIMAT

Ejercicio

Sea $g(x) = \sqrt{x-3}$ encontrar $g^{-1}(x)$

Ejercicio

Sea $g(x) = \sqrt{x-3}$ encontrar $g^{-1}(x)$
sustituir y por $g(x)$

$$y = \sqrt{x-3}$$

reemplazar las xs con ys y viceversa

$$x = \sqrt{y-3}$$

resolver para y

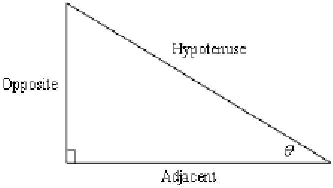
$$x^2 = y - 3 \Rightarrow x^2 + 3 = y$$

asi

$$g^{-1}(x) = x^2 + 3$$

CIMAT

Funciones trigonométricas



$$\cos\theta = \frac{A}{H} \qquad \sin\theta = \frac{O}{H}$$

$$\tan\theta = \frac{O}{A} \qquad \cot\theta = \frac{A}{O}$$

$$\sec\theta = \frac{H}{A} \qquad \csc\theta = \frac{H}{O}$$

CIMAT

Relaciones entre las funciones trigonométricas

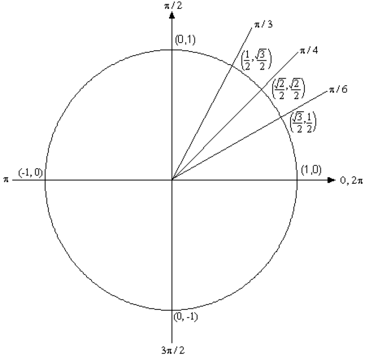
$$\cos\theta \qquad \sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

CIMAT

Ángulo	0	30	45	60	90	180	270	360
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π



Ejercicios

Calcular:

- $\sin \frac{2\pi}{3}$
- $\sec \frac{25\pi}{6}$

CIMAT

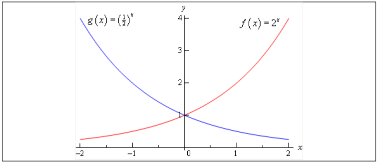
Función exponencial

Sea $b > 0, b \neq 1$. Una función exponencial se define como

$$f(x) = b^x$$

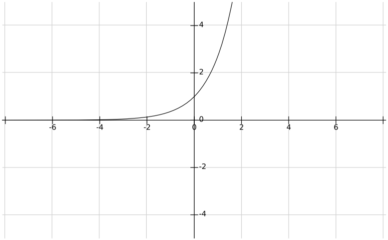
Ejercicio

Hacer el bosquejo de las graficas de $f(x) = 2^x$ y $g(x) = (\frac{1}{2})^x$


$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
$f(x) = 2^x$
y
x
4
3
2
1
−2
−1
0
1
2

Definimos como la funcion exponencial a

$$f(x) = \mathbf{e}^x \qquad \mathbf{e} = 2.718281828459\ldots$$



funciones logarítmicas

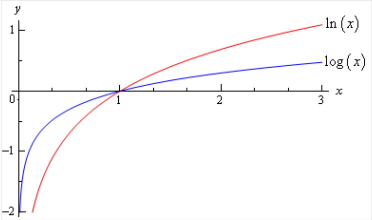
Sea $b > 0, b \neq 1$. Una funciónlogaritmicas esta definida como

$$y = \log_b x \quad \text{es equivalente a} \quad x = b^y$$

Tenemos dos funciones logarítmicas especiales

- Logaritmo natural $\ln x = \log_{\mathbf{e}} x$
- Logaritmo $\log x = \log_{10} x$

CIMAT


y
1
0
−1
−2
1
2
3
x
ln(x)
log(x)

Calcular $\log_2 16$

Propiedades

1. El dominio de la funcin logaritmo es $(0, \infty)$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b 1 = 0$
4. $\log_b b^x = x$
5. $b^{\log_b x} = x$
6. $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
7. $\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b x - \log_b y$
8. $\log_b(x^r) = r \log_b x$

CIMAT

$$f(x) = b^x \qquad g(x) = \log_b x$$

son inversas.

Simplificar las siguientes expresiones

1. $\ln\left(x^3 y^4 z^5\right)$
2. $\log_3\left(\frac{9x^4}{\sqrt{y}}\right)$

CIMAT

Límite

En el lenguje cotidiano límite significa (significado de carácter estático):

- término
- lindero
- confín

Sin embargo en matemáticas el concepto de límite es un conceto dinámico: **acercarse lo más posible** a un punto o valor, $x \to x_0$.

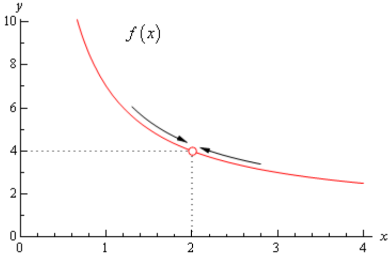
CIMAT

Límite

Decimos que el límite de $f(x)$ es L cuando x se acerca a a y lo denotamos como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si $f(x)$ se acerca tanto como queramos a L para x suficientemente cercana a a, desde ambos lados.



Ejemplo

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4x-12}{x^2-2x}$$

x	$f(x)$	x	$f(x)$
2.5	3.4	1.5	5
2.1	3.857142857	1.9	4.157894737
2.01	3.985074627	1.99	4.015075377
2.001	3.998500750	1.999	4.001500750
2.0001	3.999850007	1.9999	4.000150008
2.00001	3.999985000	1.99999	4.000015000

CIMAT

Ejercicio:

- $g(x) = \frac{|x|}{x}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x-12}{x^2-2x} & x \neq 2 \\ 6 & x = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x-12}{x^2-2x} & x \neq 2 \\ 6 & x = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 2x} = 4$$

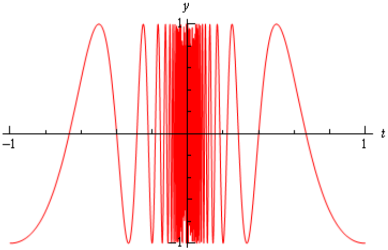
sin embargo ,

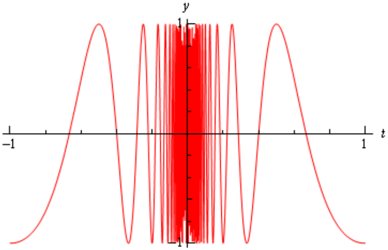
$$f(x) = 6$$

Ejemplo

$$\lim_{t \to 0} \cos(\frac{\pi}{t})$$

t	$f(t)$	t	$f(t)$
1	-1	-1	-1
0.1	1	-0.1	1
0.01	1	-0.01	1
0.001	1	-0.001	1

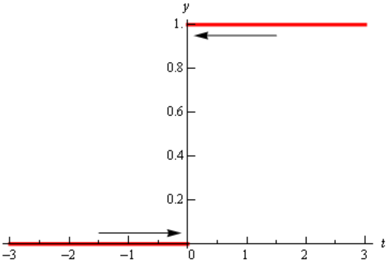

y
1
−1
t
−1
1



El límite no existe.

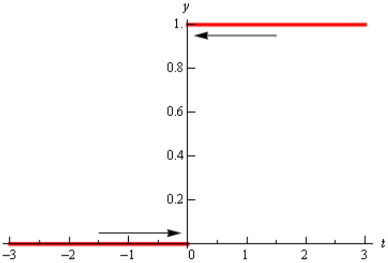
Ejemplo

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

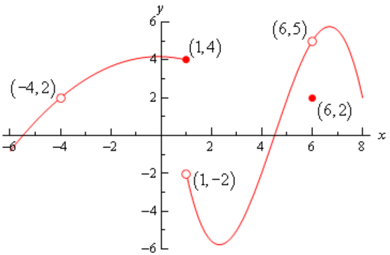


Ejemplo

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0} H(x) \text{ } \textbf{No existe}$$



CIMAT

Propiedades de los límites. Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to a} g(x)$ existen y sea c una constante.

- $\lim_{x\to a} f(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$
- $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$
- Si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

- $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$ donde n es cualquier número real.
- $\lim_{x\to a} c = c$ donde c es cualquier real.

CIMAT

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 3} \left(x^{-\frac{1}{5}} + \frac{\exp^x}{1 + \ln(x)} + \sin x \cos x \right) =$$

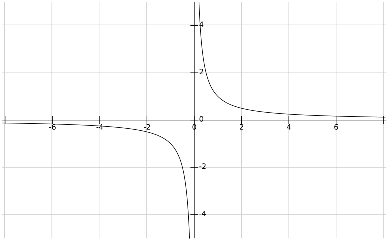
Ejemplo:

$$\lim_{x \to 3} \left(x^{-\frac{1}{5}} + \frac{\exp^x}{1 + \ln(x)} + \sin x \cos x\right) =$$

$$3^{-\frac{1}{5}} + \frac{\exp^3}{1 + \ln(3)} + \sin 3 \cos 3 = 8.18$$

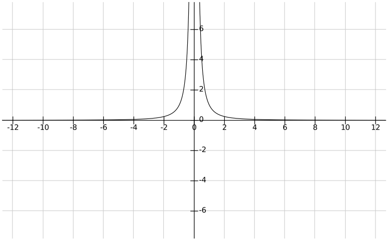
CIMAT

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \quad \text{No existe}$$



CIMAT

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$



Qué es una función continua?

IDEA:

Decimos que una función es continua si al graficarla no despegamos el lápiz de la hoja.

Qué es una función continua?

IDEA:

Decimos que una función es continua si al graficarla no despegamos el lápiz de la hoja.

Ejemplos

- $f(x) = x$
- $f(x) = |x|$
- $$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 3 \\ 3 & 3 \leq x \end{cases}$$

CIMAT

Decimos que una función $f(x)$ es continua en $x = a$ si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Una función es continua en el intervalo $[a, b]$ si es continua en cada punto del intervalo

Teorema del valor intermedio

Una funcioam continua en $[a, b]$ toma TODOS sus valores entre $f(a)$ y $f(b)$

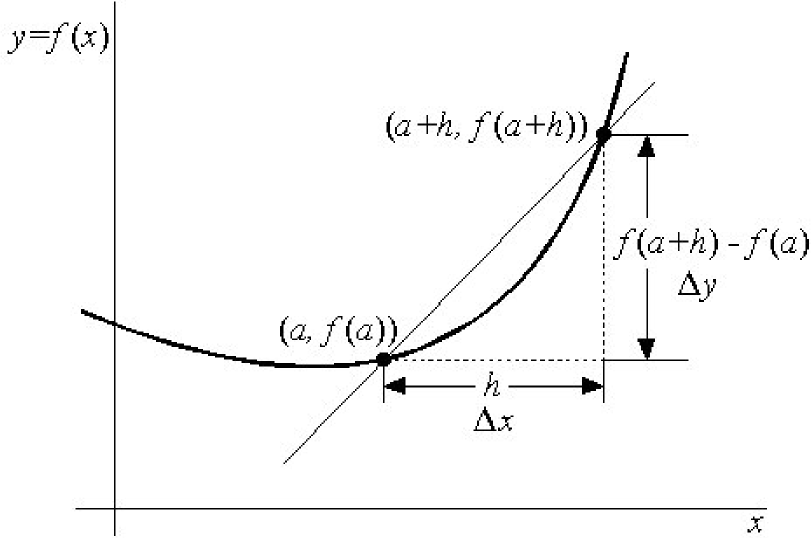
¿ Qué es la recta tangente?

Se le llama tangente a una curva en un punto P a la recta que pasa por P con la misma dirección que la curva.

¿ Qué es la recta tangente?

Se le llama tangente a una curva en un punto P a la recta que pasa por P con la misma dirección que la curva.

¿ Qué relacion tiene con los límites y con la derivada?



CIMAT

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

CIMAT

Ecuación de la recta tangente en $x = a$:

$$y = f(a) + m(x - a)$$

Propiedades

- $((f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(cf(x))' = cf'(x)$

- si $f(x) = c$ entonces $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$ entonces $f'(x) = nx^{n-1}$

Sean $f(x), g(x)$ dos funciones diferenciables, entonces

- fg es diferencible y $(fg)' = f'g + fg'$
- $\frac{f}{g}$ es diferenciable y $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Regla de la cadena

Sean $f(x), g(x)$ dos funciones diferenciables.
Sea
$$F(x) = (f \circ g)(x)$$
entonces $F(x)$ es diferenciable y tenemos
$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Ejercicios:

- $F(x) = \sin(3x^2 + x)$
- $H(x) = \ln(x^{-4} + x^4)$

Decimos que $x = c$ es un punto critico de $f(x)$ si $f(c)$ existe y tenemos

$$f'(c) = 0 \qquad o \qquad f'(c) noexiste$$

CIMAT

Decimos que $x = c$ es un punto critico de $f(x)$ si $f(c)$ existe y tenemos

$$f'(c) = 0 \qquad o \qquad f'(c) noexiste$$

Determinar todos los puntos criticos de la función

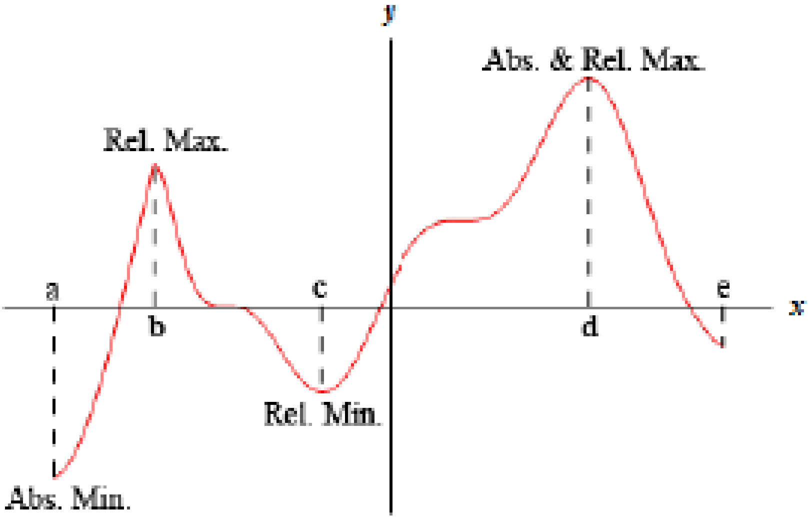
$$f(x) = x^2 ln(3x) + 6$$

CIMAT

Decimos que $f(x)$

- Tienen un máximo absoluto(global) en $x = c$ si $f(x) \leq f(c)$ para todo x en el dominio
- Tienen un máximo relativo(local) en $x = c$ si $f(x) \leq f(c)$ para todo x en algun intervalo abierto de $x = c$
- Tienen un mínimo absoluto(global) en $x = c$ si $f(x) \geq f(c)$ para todo x en el dominio
- Tienen un mínimo relativo(local) en $x = c$ si $f(x) \geq f(c)$ para todo x en algun intervalo abierto de $x = c$

CIMAT



CIMAT

Encontrar los máximos de $f(x) = cosx$

0c Si $f(x)$ tiene un máximo o mínimo de la función en $= c$ y $f'(x)$ existe entonces $x = c$ es un punto critico de $f(x)$

Derivadas parciales

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables.

La derivada parcial de primer orden de la función $z = f(x, y)$ con respecto a x se define como:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

La derivada parcial de primer orden de la función $z = f(x, y)$ con

respecto a y se define como:

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

CIMAT

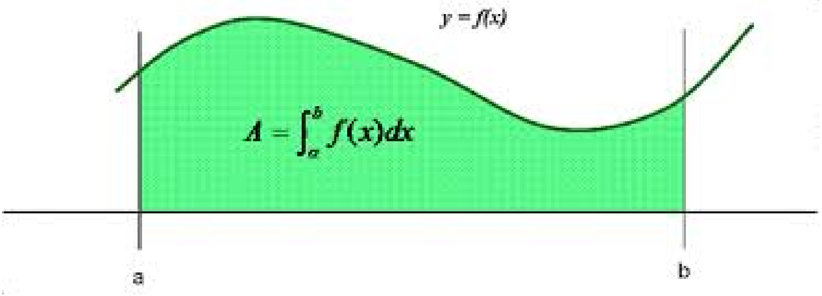
Calcular las derivadas parciales de $y = x^2 + y^2$

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables, el gradiente de f denotado por ∇f es el vector definido por

$$\nabla f(x, y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y))$$

Qué es la integral de una función?

Es el área bajo la curva.



Sumas de Riemann

A la primera de ellas se le llama suma inferior S_{Inf}:

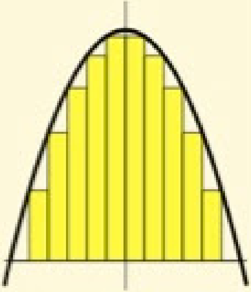
$$S_{Inf} = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$
$$\Longrightarrow \qquad S_{Inf} \leq \text{Área}$$

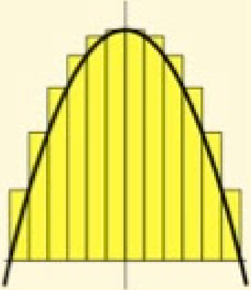
A la segunda de ellas se le llama suma superior S_{Sup}:

$$S_{Sup} = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$
$$\Longrightarrow \qquad S_{Sup} \geq \text{Área}$$

Se tiene así que

$$\boxed{S_{Inf} \leq \text{Área} \leq S_{Sup}}$$





Regla de sustitución

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

donde

$$u = g(x)$$

Calcular

$$\int x^2(3 - 10x^3)^4 dx$$