Inferencia Estadística

Maestría en Análisis Estadístico y Computación

Tarea 1

Fecha de entrega: ~~Martes 28 de enero, 2020~~
23:00h, Jueves 30 de enero, 2020

1. **Wasserman, Cap 2.** Let X be such that $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = 1/10$ and $\mathbb{P}(X = 5) = 8/10$ Plot the CDF F. Use F to find $\mathbb{P}(2 < X \leq 4.8)$ and $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4.8)$

2. **Dobrow, Cap 1.** A sample space has four elements $\omega_1, \ldots, \omega_4$ such that ω_1 is twice as likely as ω_2, which is three times as likely as ω_3, which is four times as likely as ω_4 Find the probability function.

3. Suppose that a weighted die is tossed. Let X denote the number of dots that appear on the upper face of the die, and suppose that $P(X = x) = (7 - x)/20$ for $x = 1, 2, 3, 4, 5$ and $P(X = 6) = 0$ Determine each of the following:

   a. The probability mass function of X

   b. The cumulative distribution function of X

   c. The expected value of X

   d. The variance of X

   e. The standard deviation of X

4. **Dekking, Cap 4.** A shop receives a batch of 1000 cheap lamps. The odds that a lamp is defective are 0.1%. Let X be the number of defective lamps in the batch.

   a. What kind of distribution does X have? What is/are the value(s) of parameter (s) of this distribution?

   b. What is the probability that the batch contains no defective lamps? One defective lamp? More than two defective ones?

5. El número de personas que accesan nuestra página se clasifican en dos tipos (A y B), según el tiempo promedio que pasan en ésta. Si el número de personas tipo A y B que llegan a la página en 1 minuto, se puede modelar como Poisson(λ_1) y Poisson(λ_2), respectivamente.

   a. Calcula la función generatriz de momentos de una v.a. $X \sim$Pois(λ).

   b. Usando las propiedades de la función generatriz, y el supuesto que las llegadas de usuarios tipo A y tipo B son independientes, calcula la función generatriz de momentos de la v.a. Y que cuenta el número total de personas que accesan a nuestra página en 1 minuto. ¿Qué distribución sigue Y?

   c. ¿Tiene sentido asumir el supuesto de independencia del inciso anterior? ¿Por qué?

6. **Wasserman, Cap 2.** (Ejercicio similar en Dekking, Cap 5) Let X have probability density function

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/4 & 0 < x < 1 \\ 3/8 & 3 < x < 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

   a. Grafica $f_X(x)$.

b. Verifica que esta es una función de densidad

c. Find the cumulative distribution function of X and draw it graph

d. Let $Y = 1/X$. Find the probability density function $f_Y(y)$ for Y Hint: Consider three cases: $\frac{1}{5} \leq y \leq \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} \leq y \leq 1$, and $y \geq 1$

7. **Dekking, Cap 5.** Let a continuous random variable X be given that takes values in $[0, 1]$ and whose distribution function F satisfies

$$F(x) = 2x^2 - x^4 \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1$$

a. Verifica que

i. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

ii. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

iii. $F(x)$ es no decreciente

b. Compute $\mathrm{P}\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}\right)$

c. What is the probability density function of X?

d. Calcula la probabilidad de que $\exp(X) < 2$, sin obtener explicitamente la función de densidad de $Y = \exp(X)$.

e. Obten la función de densidad de the probability density function of $Y = X^2$.

8. Suppose that a jury of 12 persons is to be selected from a pool of 25 persons who were called for jury duty. The pool comprises 12 retired persons, 6 employed persons, 5 unemployed persons, and 2 students. Assuming that each person is equally likely to be selected, answer the following:

a. What is the probability that both students will be selected?

b. What is the probability that the jury will contain exactly twice as many retired persons as employed persons?

9. El ingreso familiar en una ciudad, X se mide en una escala tal que $X = 1$ es el valor a observar más pequeño. La fdp de X se asume ser

$$f(x) = \theta/x^{\theta+1}\mathbb{I}_{(1,\infty)}(x),$$

donde $\theta = 0.5$.

a. Verifica que $f(x)$ es una función de densidad (f.d.) para cualquier valor de $\theta > 0$.

b. Calcula la función de distribución (acumulada) de X, $F(x)$ para cualquier valor de $\theta > 0$.

c. Calcula la probabilidad de que el ingreso de una familia seleccionada aleatoriamente sea menor a 3.

d. Si se seleccionan 10 familias aleatoriamente (con reemplazo), ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos familias tengan ingreso menor a 3?

e. En el sistema de captura nuevo se registra el valor de X si éste es menor a 10 y se registra como un 10 todos los valores de X que rebasan este valor. Obten y grafica la función de densidad de los datos presentes en el sistema. Verifica que ésta función sea una función de densidad verificando que es no negativa y sus valores integran (suman) 1.

f. Usando R, simule 1000 variables uniformes y utilice el *Método de la Función de distribución Inversa* para obtener 1000 simulaciones de X. Grafica el histograma de frecuencias relativas y sobrepon la función de densidad obtenida en el inciso anterior. ¿Son similares? (incluye el código usado).