Álgebra Matricial y Optimización

Asesoría

Jorge Sánchez, Ana Rodríguez

Centro de Investigación en Matemáticas

February 21, 2020

Repaso de Tareas

TAREA

1

Repaso de Tareas

Tarea 1 Algebra Matricial y Optimización.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ 1 & 17 \end{pmatrix}$ ¿B?

Solución:

$$A^{-1} \cdot AB = I \cdot B = B$$

Calculando A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & -3/4 & -1/4 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/4 & -3/4 \\ -3/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow B = \begin{pmatrix} -5/4 & -3/4 \\ -3/4 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ 1 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Repaso de Tareas

③ Muestre que $\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix}$ es invertible y encuentre su inversa.

$\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix}$ es triangular $\Rightarrow \det\left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix}\right] = \prod_i a_{ii}$

$\Rightarrow \det\left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix}\right] = \prod_i 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix}$ es invertible

Sea $X = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{pmatrix}$.

$X \cdot Y = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = I_n$

$Y \cdot X = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = I_n$

$\Rightarrow Y = X^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix}^{-1}$

Repaso de Tareas

④ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$

¿ $w \in \text{gen}\{v_1, v_2\}$?

Si $w \in \text{gen}\{v_1, v_2\}$, entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$w = \alpha v_1 + \beta v_2$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \alpha - 2\beta = -3 \Rightarrow \alpha = -3 + 2\beta \\ 3\alpha - 3\beta = -3 \Rightarrow \alpha = -1 + \beta \\ -4\alpha + 7\beta = 10 \end{array} \Bigg\} \begin{array}{l} -3 + 2\beta = -1 + \beta \\ \Rightarrow \boxed{\beta = 2} \end{array}$$

$$-4\alpha + 7(2) = 10 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

$$\Rightarrow w = v_1 + 2v_2$$

$$\therefore w \in \text{gen}\{v_1, v_2\}$$

Repaso de Tareas

5. $b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$x \in H, \quad H = \text{gen}\{b_1, b_2\}$$

como $x \in H, \Longrightarrow x = \alpha b_1 + \beta b_2 = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} -3\alpha + 7\beta = 5 \\ 2\alpha - 3\beta = 0 \Longrightarrow \alpha = 3/2\,\beta \\ -4\alpha + 5\beta = -2 \Longrightarrow -4\left(3/2\right)\beta + 5\beta = 2 \Longrightarrow -6\beta + 5\beta = -2 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \beta = 2$$

$$\Longrightarrow \alpha = \left(\tfrac{3}{2}\right)(2) = 3$$

$$\therefore \quad x = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\{b_1, b_2\}}$$

Repaso de Tareas

8.- W : vectores de la forma $\begin{pmatrix} 2s+4t \\ 2s \\ 2s-3t \\ 5t \end{pmatrix}$

P.D W es un subespacio de $\mathbb{R}^4$

- Sean $x = \begin{pmatrix} 2s_1+4t_1 \\ 2s_1 \\ 2s_1-3t_1 \\ 5t_1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 2s_2+4t_2 \\ 2s_2 \\ 2s_2-3t_2 \\ 5t_2 \end{pmatrix} \in W$

– Cerradura bajo la suma

$$x+y = \begin{pmatrix} 2s_1+4t_1+2s_2+4t_2 \\ 2s_1+2s_2 \\ 2s_1-3t_1+2s_2-3t_2 \\ 5t_1+5t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(s_1+s_2)+4(t_1+t_2) \\ 2(s_1+s_2) \\ 2(s_1+s_2)-3(t_1+t_2) \\ 5(t_1+t_2) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $x+y \in W$

$\Rightarrow$ W es cerrado bajo la suma

Repaso de Tareas

- PD $\alpha X \in W,\quad \alpha \in \mathbb{R},\ X \in W$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha X = \begin{pmatrix} 2(\alpha s_1) + 4(\alpha t_1) \\ 2(\alpha s_1) \\ 2(\alpha s_1) - 3(\alpha t_1) \\ 5(\alpha t_1) \end{pmatrix} \in W \quad \text{ya que} \quad \alpha s_1, \alpha t_1 \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ W es un subespacio de $\mathbb{R}^4$

$$W = s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow W = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Sea $\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{aligned} &2\alpha + 4\beta = 0 \\ \Rightarrow\ &2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \alpha = 0 \\ &2\alpha - 3\beta = 0 \\ &5\alpha + 5\beta = 0 \quad \Rightarrow \beta = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes

$\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ forman una base de W

$\Rightarrow \dim(W) = 2$.

Repaso de Tareas

T A R E A

2

Repaso de Tareas

2. La matriz aumentada de un sistema lineal se transformó, mediante operaciones de fila, en la forma que se indica a continuación. Determine si el sistema es consistente.

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Solución: Al reducir el sistema, en realidad se eliminó una ecuación, por lo que ahora se tienen 2 ecuaciones y 3 incógnitas, por lo tanto el sistema es consistente, aunque no tiene solución determinada, es decir, se tiene una infinidad de soluciones. Una solución general sería al fijar $x_3 = x_3$, despejando $x_2 = -1 - x_3$ y sustituyendo en la primera ecuación, se obtiene $x_1 = 3 + \frac{1}{2}x_3$, con lo que la solución general queda:

$$X = \begin{pmatrix} 3 + \frac{1}{2}x_3 \\ -1 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Repaso de Tareas

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Solución: En la reducción se llega a la inconsistencia de la forma: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$, que evidentemente no tiene solución alguna. Por tanto, el sistema es inconsistente.

c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Solución: El sistema se ha reducido a su forma escalonada y es consistente, pues claramente $x_3 = 0$ de la tercera ecuación, y por sustitución progresiva se obtiene $x_2 = 1$ y $x_1 = -\frac{8}{3}$.

Repaso de Tareas

d)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Solución: El sistema es similar al del inciso a. Se tienen 3 ecuaciones y dos incógnitas, por lo que el sistema es consistente y tiene una infinidad de soluciones. Si fijamos $x_3 = x_3$, se obtiene $x_2 = x_3$ y $x_1 = -x_3$, como solución general del sistema.

Repaso de Tareas

4. Encuentre una ecuación que incluya a g, h y k, y que permita que esta matriz aumentada corresponda a un sistema consistente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{array}\right)$$

Solución: Se reduce la matriz ampliada por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{array}\right) \xrightarrow{F3 = 2F1 + F3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & -3 & 5 & 2g + k \end{array}\right) \xrightarrow{F3 = F2 + F3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & 0 & 0 & 2g + k + h \end{array}\right)$$

De modo que se llega a un sistema reducido en el que la condición necesaria para que sea consistente es que se cumpla la ecuación: $2g + k + h = 0$.

Repaso de Tareas

5. Determine la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a)

$3x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 10x_4 = 0$

$5x_1 + 4x_2 + 20x_3 - 8x_4 = 0$

$2x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 10x_4 = 7$

Solución: Se reduce la matriz ampliada correspondiente al sistema, por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 3 & -5 & 12 & 10 & 0 \\ 5 & 4 & 20 & -8 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & -10 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{F2 = -\frac{5}{3}F1 + F2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 12 & 10 & 0 \\ 0 & \frac{37}{3} & 0 & -\frac{74}{3} & 0 \\ 2 & 5 & 8 & -10 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{F3 = -\frac{2}{3}F1 + F3} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 12 & 10 & 0 \\ 0 & \frac{37}{3} & 0 & -\frac{74}{3} & 0 \\ 0 & \frac{25}{3} & 0 & -\frac{50}{3} & 7 \end{array}\right)$$

Y en un último paso:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 12 & 10 & 0 \\ 0 & \frac{37}{3} & 0 & -\frac{74}{3} & 0 \\ 0 & \frac{25}{3} & 0 & -\frac{50}{3} & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{F3 = -\frac{25}{37}F2 + F3} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 12 & 10 & 0 \\ 0 & \frac{37}{3} & 0 & -\frac{74}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

Como puede verse, en la reducción se llega a una inconsistencia del tipo:
$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 7$, lo que significa que el sistema es inconsistente y no tiene solución general.

Repaso de Tareas

b)

$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$

$6x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0$

Solución: Se reduce la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F2 = -3F1 + F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & 10 & 0 \end{array}\right)$$

Con lo que la ecuación 2 del sistema queda $-14x_2 + 10x_3 = 0$, que despejando da: $x_2 = \frac{5}{7}x_3$. Y sustituyendo en la primera ecuación, $2x_1 = -3(\frac{5}{7}x_3) + x_3 = -\frac{8}{7}x_3$, por lo que $x_1 = -\frac{4}{7}x_3$.

La solución general del sistema queda expresada entonces como:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7}x_3 \\ \frac{5}{7}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Repaso de Tareas

6. Calcule la matriz inversa de las siguientes matrices, utilizando reducción Gauss-Jordan:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: Se reduce por Gauss-Jordan, aumentando la matriz I_3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2 = \frac{1}{2}F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F3 = -5F1 + F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F3 = -\frac{1}{4}F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{F2 = -\frac{3}{2}F3 + F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{F1 = -F3 + F1} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{F1 = -F2 + F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Repaso de Tareas

7. Con el contenido visto en clase, calcule (de ser posible) la descomposición LU de las siguientes matrices:

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución: Se construye la matriz escalonada U:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2 = -\overbrace{\frac{1}{2}}^{a_{21}} F1 + F2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{2} & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F4 = -\overbrace{\frac{1}{2}}^{a_{41}} F1 + F4}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{2} & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3 = -\overbrace{\frac{2}{5}}^{a_{32}} F2 + F3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{14}{5} & \frac{36}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F4 = \overbrace{\frac{1}{5}}^{a_{42}} F2 + F4}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{14}{5} & \frac{36}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{12}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{F4 = \overbrace{\frac{1}{7}}^{a_{43}} F3 + F4} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{14}{5} & \frac{36}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{24}{7} \end{pmatrix}$$

Repaso de Tareas

Luego, se toma el negativo de los múltiplos usados en la reducción para construir la matriz L (colocados en la posición que se indicó en cada paso), con lo que:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{14}{5} & \frac{36}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{24}{7} \end{pmatrix}$$

Expresa en forma matricial

Suponga que una economía tiene dos sectores: bienes y servicios. Una unidad de producción de bienes requiere insumos de .2 unidades de bienes y .5 unidades de servicios. Una unidad de producción de servicios requiere insumos de .4 unidades de bienes y .3 unidades de servicios. Existe una demanda final de 20 unidades de bienes y 30 unidades de servicios.

Expresa en forma matricial

Se cuenta con los siguientes datos:

	Insumos necesarios por unidad de producción		
Comprados por:	**Bienes**	**Servicios**	**Demanda externa**
Bienes	.2	.4	20
Servicios	.5	.3	30

El modelo de entrada y salida de Leontief es $\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$, donde

$$C = \begin{bmatrix} .2 & .4 \\ .5 & .3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Inversa

Utilice determinantes para establecer cuáles de las siguientes matrices son invertibles:

a) $\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$

Encuentre la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, si existe.

Inversa

a) $\det\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = 3\cdot 6 - (-9)\cdot 2 = 18 + 18 = 36.$ El determinante es diferente de cero, de manera que la matriz es invertible.

b) $\det\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 4\cdot 5 - (-9)\cdot 0 = 20 \neq 0.$ La matriz es invertible.

c) $\det\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = 6\cdot 6 - (-9)(-4) = 36 - 36 = 0.$ La matriz no es invertible.

$$[\,A \quad I\,] \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Así, $[A \quad I]$ es ahora equivalente por filas a la matriz de la forma $[B\ D]$, donde B es una matriz cuadrada y tiene una fila de ceros. Las operaciones de fila adicionales no van a transformar a B en I, así que el proceso se detiene. A no tiene una inversa.

Aplicación

(Calificaciones promedio en el curso) La profesora que aplicó las tres pruebas a cinco estudiantes está preparando los promedios del curso. Ha decidido ponderar las dos primeras pruebas en 30% cada una y la tercera en 40%. La profesora quiere calcular los promedios finales para los cinco estudiantes usando la multiplicación de matrices. La matriz de calificaciones es

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 75 & 82 & 86 \\ 91 & 95 & 100 \\ 65 & 70 & 68 \\ 59 & 80 & 99 \\ 75 & 76 & 74 \end{pmatrix}$$

y los valores ponderados del examen se ponen en el vector fila

$$\mathbf{W} = (0.30 \quad 0.30 \quad 0.40)$$

La profesora necesita multiplicar estas matrices de forma tal que la primera calificación conseguida por *cada* estudiante se multiplique por 0.30, la segunda calificación obtenida por 0.30 y la última calificación por 0.40.

Aplicación

Los promedios finales se calculan así:

$$\begin{pmatrix} 75 & 82 & 86 \\ 91 & 95 & 100 \\ 65 & 70 & 68 \\ 59 & 80 & 99 \\ 75 & 76 & 74 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.30 \\ 0.30 \\ 0.40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75(0.3) + 82(0.3) + 86(0.4) \\ 91(0.3) + 95(0.3) + 100(0.4) \\ 65(0.3) + 70(0.3) + 68(0.4) \\ 59(0.3) + 80(0.3) + 99(0.4) \\ 75(0.3) + 76(0.3) + 74(0.4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81.5 \\ 95.8 \\ 67.7 \\ 81.3 \\ 74.9 \end{pmatrix}$$

Los promedios son 81.5, 95.8, 67.7, 81.3 y 74.9, respectivamente, para los cinco estudiantes.

Matriz por partes

Demuestre que $\begin{bmatrix} I & 0 \\ A & I \end{bmatrix}$ es invertible y encuentre su inversa.

Calcule $X^T X$, donde X está particionada como $[X_1 \quad X_2]$.

Matriz por partes

Si $\begin{bmatrix} I & 0 \\ A & I \end{bmatrix}$ es invertible, su inversa tiene la forma $\begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}$. Compruebe que

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ A & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & X \\ AW + Y & AX + Z \end{bmatrix}$$

Así, W, X, Y, Z deben satisfacer $W = I$, $X = 0$, $AW + Y = 0$, y $AX + Z = I$. Como consecuencia, $Y = -A$ y $Z = I$. Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ A & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

El producto en el orden inverso también es la identidad, de modo que la matriz de bloque es invertible, y su inversa es $\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{bmatrix}$. (También podría recurrir al teorema de la matriz invertible).

$X^T X = \begin{bmatrix} X_1^T \\ X_2^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^T X_1 & X_1^T X_2 \\ X_2^T X_1 & X_2^T X_2 \end{bmatrix}$. Las particiones de X^T y X se conforman de manera automática para la multiplicación por bloques, ya que las columnas de X^T son las filas de X. Esta partición de $X^T X$ se usa en varios algoritmos de computadora para cálculos de matrices.

Transpuesta

Puesto que los vectores en $\mathbb{R}^n$ se pueden considerar como matrices de $n \times 1$, las propiedades de las transpuestas del teorema 3 también se aplican a vectores. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Calcule $(A\mathbf{x})^T$, $\mathbf{x}^T A^T$, $\mathbf{x}\mathbf{x}^T$ y $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$. ¿Está definida $A^T\mathbf{x}^T$?

Sean A una matriz de 4×4 y sea $\mathbf{x}$ un vector en $\mathbb{R}^4$. ¿Cuál es la forma más rápida de calcular $A^2\mathbf{x}$? Cuente las multiplicaciones.

Transpuesta

$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$. De manera que $(A\mathbf{x})^T = [-4 \quad 2]$. También,

$$\mathbf{x}^T A^T = [5 \quad 3]\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = [-4 \quad 2]$$

Las cantidades $(A\mathbf{x})^T$ y $\mathbf{x}^T A^T$ son iguales, por el teorema 3*d*). Después,

$$\mathbf{x}\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}[5 \quad 3] = \begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = [5 \quad 3]\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = [25 + 9] = 34$$

Una matriz de 1×1 como $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$ generalmente se escribe sin corchetes. Por último, $A^T\mathbf{x}^T$ no está definida, ya que $\mathbf{x}^T$ no tiene dos filas que correspondan a las dos columnas de A^T.

La manera más rápida de calcular $A^2\mathbf{x}$ es calculando $A(A\mathbf{x})$. El producto $A\mathbf{x}$ requiere 16 multiplicaciones, 4 por cada entrada, y $A(A\mathbf{x})$ requiere 16 más. En contraste, el producto A^2 requiere 64 multiplicaciones, 4 por cada una de las 16 entradas en A^2. Después de eso, $A^2\mathbf{x}$ requiere 16 multiplicaciones más, para un total de 80.

Vector propio

Si $\mathbf{x}$ es un vector propio de A correspondiente a λ, ¿qué ocurre con $A^3\mathbf{x}$?

Vector propio

Si $\mathbf{x}$ es un vector propio de A correspondiente a λ, entonces $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ y

$$A^2\mathbf{x} = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$$

Otra vez, $A^3\mathbf{x} = A(A^2\mathbf{x}) = A(\lambda^2\mathbf{x}) = \lambda^2 A\mathbf{x} = \lambda^3\mathbf{x}$. El patrón general, $A^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$, se demuestra por inducción.

Espacio vectorial

Demuestre que el conjunto H de todos los puntos en $\mathbb{R}^2$ de la forma $(3s, 2 + 5s)$ no es un espacio vectorial, al mostrar que no es cerrado bajo la multiplicación escalar. (Encuentre un vector específico $\mathbf{u}$ en H y un escalar c tal que $c\mathbf{u}$ no está en H).

Espacio vectorial

Tome cualquier $\mathbf{u}$ en H, digamos, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$, y tome cualquier $c \neq 1$, por ejemplo, $c = 2$. Así, $c\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \end{bmatrix}$. Si esto se encuentra en H, entonces hay alguna s tal que

$$\begin{bmatrix} 3s \\ 2 + 5s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Es decir, $s = 2$ y $s = 12/5$, lo que es imposible. Así que $2\mathbf{u}$ no está en H, y H no es un espacio vectorial.

Subespacio vectorial

Determine la dimensión del subespacio H de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. (Primero, encuentre una base para H).

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}$$

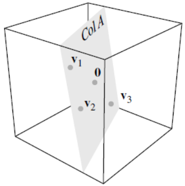
Considere la base

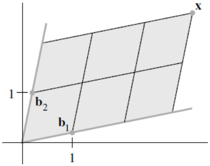
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ .2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} .2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

para $\mathbb{R}^2$. Si $[\,\mathbf{x}\,]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, ¿qué es $\mathbf{x}$?

¿Podría $\mathbb{R}^3$ contener un subespacio cuatridimensional (o tetradimensional)? Explique su respuesta.

Subespacio vectorial





1. Construya $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3]$ de manera que el subespacio generado por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sea el espacio columna de A. Las columnas pivote de A proporcionan una base para este espacio.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -8 & -7 & 6 \\ 6 & -1 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -10 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las primeras dos columnas de A son columnas pivote y forman una base para H. Por lo tanto, $\dim H = 2$.

2. Si $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, entonces $\mathbf{x}$ se forma a partir de una combinación lineal de los vectores básicos usando los pesos 3 y 2:

$$\mathbf{x} = 3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 = 3\begin{bmatrix} 1 \\ .2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} .2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.4 \\ 2.6 \end{bmatrix}$$

La base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ determina un *sistema de coordenadas* para $\mathbb{R}^2$, que se ilustra con la malla de la figura. Observe cómo $\mathbf{x}$ tiene 3 unidades en la dirección $\mathbf{b}_1$ y 2 unidades en la dirección $\mathbf{b}_2$.

Un subespacio cuatridimensional contendría una base de cuatro vectores linealmente independientes. Esto es imposible en $\mathbb{R}^3$. Como cualquier conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^3$ no contiene más de tres vectores, cualquier subespacio de $\mathbb{R}^3$ tiene una dimensión no mayor a 3. El propio espacio $\mathbb{R}^3$ es el único subespacio tridimensional de $\mathbb{R}^3$. Los otros subespacios de $\mathbb{R}^3$ tienen dimensión 2, 1 o 0.

Facturación LU

Encuentre una factorización LU de $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 6 & -9 & -5 & 8 \\ 2 & -7 & -3 & 9 \\ 4 & -2 & -2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Facturación LU

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 6 & -9 & -5 & 8 \\ 2 & -7 & -3 & 9 \\ 4 & -2 & -2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 6 & 2 & -7 \\ 0 & -9 & -3 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Divida las entradas de cada columna resaltada por el pivote en la parte superior. Las columnas resultantes forman las tres primeras columnas de la mitad inferior de L. Esto basta para hacer que la reducción por filas de L a I corresponda a la reducción de A a U. Use las dos últimas columnas de I_5 para hacer que L sea triangular inferior unitaria.

$$
\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \\ -9 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{ccc} \div 2 & \div 3 & \div 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 3 & 1 & & \\ 1 & -1 & 1 & \cdots \\ 2 & 2 & -1 & \\ -3 & -3 & 2 & \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Ecuación característica.

Encuentre la ecuación característica y los valores propios de $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Ecuación característica.

La ecuación característica es

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 4 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(2-\lambda) - (-4)(4) = \lambda^2 - 3\lambda + 18$$

De la fórmula cuadrática,

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(18)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-63}}{2}$$

Es evidente que la ecuación característica no tiene soluciones reales, así que A no tiene valores propios reales. La matriz A está actuando sobre el espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$, y ahí no existe un vector $\mathbf{v}$ distinto de cero, tal que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ para algún escalar λ.