Sábado 11/Enero/2020

Ayer:

- Espacios vectoriales
- $\mathbb{R}^n$ ← Ejemplo estándar (Para nuestros objetivos es el mas importante)
- Subespacios
- Subespacio generado
- Bases, dimensión, combinaciones lineales
-

Ejemplo: Prob. 19 pág 214 (Ley)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad H = \text{gen}(v_1, v_2, v_3)$$

Puede verse que $4v_1 + 5v_2 - 3v_3 = 0 \Rightarrow v_1, v_2$ y v_3 son dependientes

$$v_3 = \frac{4}{3}v_1 + \frac{5}{3}v_2$$

"Entonces" v_1 y v_2 forman una base

$\neq \quad \nparallel \qquad v_2 \neq c\,v_1 \Rightarrow$ si son independientes v_1 y v_2

$\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ es una base de H

Otra base: Eliminamos v_1 pues es redundante

$v_1 = -\frac{5}{4}v_2 + \frac{3}{4}v_3 \Rightarrow \{v_2, v_3\}$ forman una base de H también

Observación: Si tengo 2 vectores y quiero ver si son o no indep.

basta con ver que uno no sea múltiplo del otro (para independencia)

v_1, v_2 indep?

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$

Si fueran dependientes entonces esa igualdad es cierta para al menos un $\alpha_i \neq 0$

si por ejemplo $\alpha_1 \neq 0$ podemos despejar

$$\Rightarrow \quad v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2$$

$$v_1 = c\, v_2$$

Otra forma de encontrar una base de H

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{76}{52} \end{bmatrix} \qquad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{15}{39} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 1 & 9 & -2 \\ 7 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ -4 \\ -4 \end{array}\begin{bmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 1 & 9 & -2 \\ 7 & 11 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} -13 \\ 65 \\ -39 \end{array}\begin{bmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 0 & -39 & 15 \\ 0 & -65 & 25 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} -\frac{1}{52} \\ \frac{1}{39} \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} -52 & 0 & -76 \\ 0 & -39 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ -24 \\ \hline 25 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ 7 \\ \hline -91 \\ +15 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 65 \\ 15 \\ \hline 975 \\ 13 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 76/52 \\ 0 & 1 & -15/39 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

v_1, v_2, v_3

$v_1, \quad (c_1 v_1 + c_2 v_2), \quad (d_1 v_1 + d_2 v_3)$

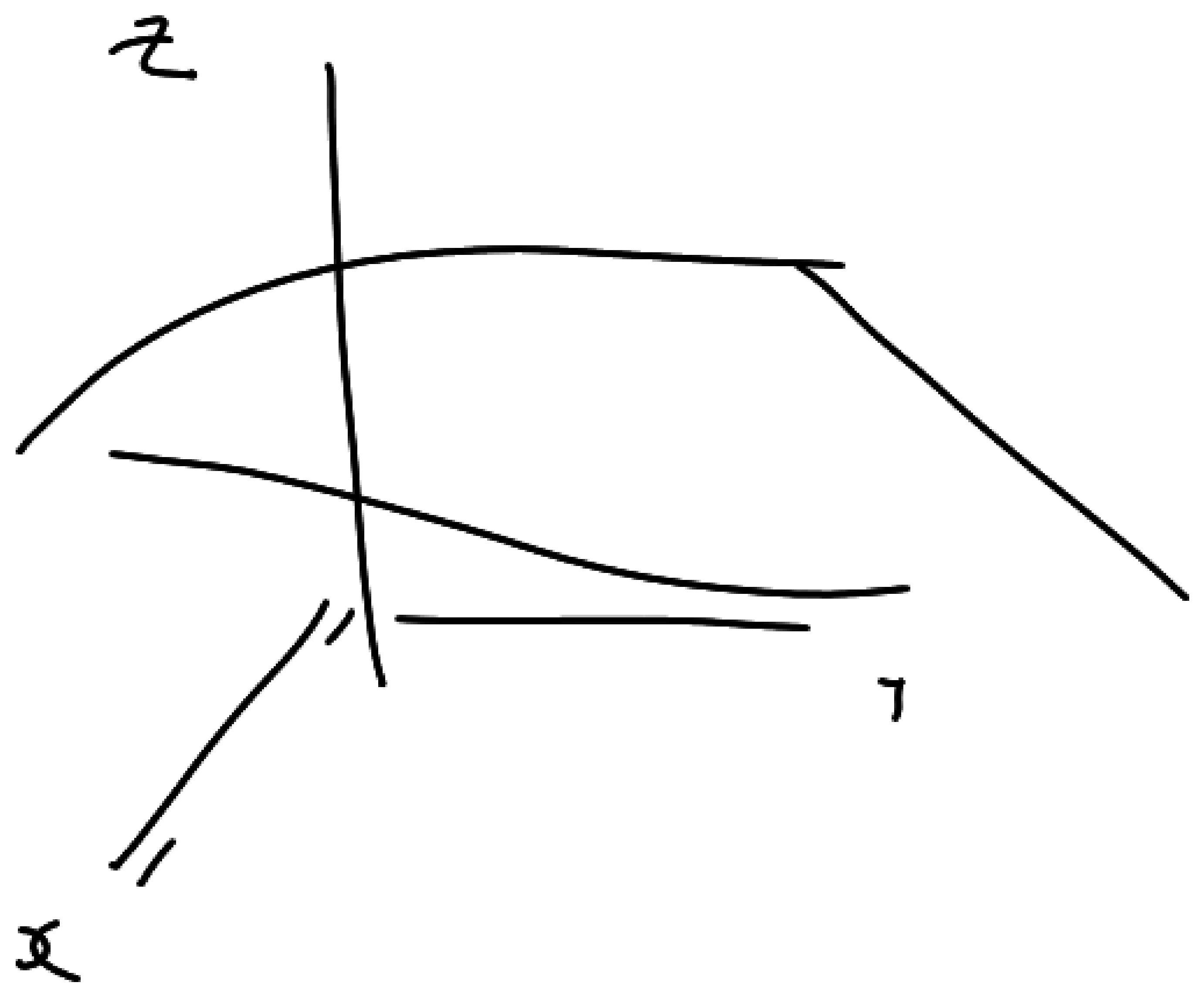
$v_1 - 4v_2 = w_2 \qquad 7v_1 - 4v_3 = w_3$

$$H = \mathrm{gen}(v_1, v_2, v_3) \overset{?}{\equiv} \mathrm{gen}(v_1, w_2, w_3)$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix}} \sim \begin{bmatrix} \cancel{4} & \text{---} \\ \cancel{0} & \text{---} \\ \cancel{0} & \text{---} \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

echelon(A)

$z = f(x, y)$



Prob 25 pág 214 (Ley)

$H =$ conj de vectores en $\mathbb{R}^3$ tales que la segunda y tercera entrada son iguales

$$H = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ b \end{bmatrix} \right\} \quad \mathbb{R}^2 \not\subset \mathbb{R}^3$$

Es subespacio?

Si que es cerrada para suma de vectores y multiplicación por escalares

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ h \\ h \end{bmatrix}$$

Una propuesta de base: ✓

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

v_1, v_2, v_3

$$s v_1 + (t-s) v_2 + s v_3$$

$$s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (t-s) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

$$s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

Si es cierto que v_1, v_2, v_3 generan a H

No son base ~~N~~ a pesar de que son independientes y generan a H

Pregunta: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es base de H ?

Obs : Si v_1, v_2, v_3 son dependientes

ocurre que $v_i = c v_j$ para algún i y j ?

<u>No</u>

$$3v_1 - 2v_2 + 8v_3 = 0$$

Matriz de cambio de base

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ estos son una base de $\mathbb{R}^2$ pues son 2 y son independientes

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de cambio de base

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $B = \{v_1, v_2\}$

Coordenadas con respecto a una base

Cualquier vector $v \in \mathbb{R}^2$ puede escribirse como comb. lin. de la base

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

$[v]_B \equiv \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ = vector de coordenadas de v relativo a la base $\{v_1, v_2\}$

Ahora, demos otra base en $\mathbb{R}^2$

$$w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad w_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \{w_1, w_2\}$$

Cualq. vector v también se puede escribir como

$$v = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2$$

$$[v]_{B_2} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

¿Qué relación hay entre $[v]_{B_2}$ y $[v]_B$

$$[v]_B = \underset{2\times 2}{A} [v]_{B_2}$$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$A = ?$

$\cancel{[v]_{B_2}} =$ $\qquad [v]_{B_2} = A^{-1} [v]_B$

$$[v]_B = A\,[v]_{B_2}$$

$B = \{ v_1, v_2 \}$

$B_2 = \{ w_1, w_2 \}$

$w_1 = a_{11} v_1 + a_{12} v_2$

$w_2 = a_{21} v_1 + a_{22} v_2$

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} =$ matriz de cambio de base

Sea $v \in \mathbb{R}^2$ cualquiera

$$[v]_{B_2} = \cancel{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 \\ &= \beta_1 (a_{11} v_1 + a_{12} v_2) + \beta_2 (a_{21} v_1 + a_{22} v_2) \\ &= (\beta_1 a_{11} + \beta_2 a_{21}) v_1 + (\beta_1 a_{12} + \beta_2 a_{22}) v_2 \end{aligned}$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \beta_1 a_{11} + \beta_2 a_{21} \\ \beta_1 a_{12} + \beta_2 a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de matrices

$$AB = C$$

$$A_{m \times n} \qquad B_{n \times p}$$

$$AB = \underset{m \times n}{\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & & \end{bmatrix}} \underset{n \times p}{\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}} = \underset{m \times q}{\begin{bmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{bmatrix}}$$

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \quad ?$$

$2 \times 3 \qquad 2 \times 2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}$$

$2 \times 3 \qquad 3 \times 2 \qquad 2 \times 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 21 & 15 \\ 1 & 4 & 3 \\ 8 & 18 & 12 \end{bmatrix}$$

$3 \times 2 \qquad 2 \times 3 \qquad 3 \times 3$

$$AB \neq BA$$

$$\underbrace{2 \times 3 \quad 3 \times 4}_{2 \times 4} \qquad \underbrace{3 \times 4 \quad 2 \times 3}_{?}$$

El producto no es conmutativo

Transpuesta de un producto $\qquad (AB)^T = B^T A^T$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} \qquad (AB) = \begin{bmatrix} \cdot \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

$\underset{n \times m}{3 \times 2} \qquad \underset{m \times p}{2 \times 4}$

c_{ij} = ij-esima entrada de la matriz del lado 137 $= (AB)^T$

= ji-ésimo elemento de AB

$= a_{j1} b_{1i} + a_{j2} b_{2i} + \cdots + a_{jm} b_{mi}$ = producto de renglón j de A por columna i de B

= producto de renglón i de B^T por columna j de A^T

$= *$

$*$ = elemento ij de B^T por A^T

$$AB = C$$
$3\times 2 \quad 2\times 4$

$$(AB)^T = C^T = B^T A^T$$

$\cancel{ij}$

$1\ 2$

primera col de B = primer renglon de B^T

segundo renglon de A = segunda col. de A^T y M^T

elemento 1,2 de $(AB)^T$ = elemento 2,1 de AB

= prod de rens 2 de A por columna 1 de B

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

~~1,2 de lado 139~~

$= (a_{21}, a_{22})$ por (b_{11}, b_{21})

$= a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} = b_{11} a_{21} + b_{21} a_{22}$

= prod de (b_{11}, b_{21}) y $(a_{21}\ a_{22})$

= prod de renglón 1 de B^T por segunda col de A^T

= elemento 1,2 de $B^T A^T$

$A \longrightarrow A^T$ $\qquad\qquad (A^T)^T = A$

$a_{ji} =$ ij-ésimo de A^T

a_{ij}

$\downarrow$

ij-ésimo elemento de A

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}}_{A} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}}_{A^T}$$

3,1 de A = 1,3 de A^T

Determinantes

$A_{n \times n}$

$$|A| = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} (-1)^{p} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

5 1 2 3 4
1 5 2 3 4
1 2 5 3 4
1 2 3 5 4
1 2 3 4 5

$(i_1, i_2, \dots i_n)$ permutación de $1, 2, \dots n$

p = paridad de permutación

$(5, 2, 1, 3, 4)$
1 2 5 3 4
1 2 3 5 4
1 2 3 4 5

4 2 1 3 5
3 2 1 4 5
1 2 3 4 5

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{p} a_{i_1 1} a_{i_2 2}$$

$$= \cancel{a_{11} a_{22}} \quad \cancel{a_{21} a_{22}}$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ \cancel{a_{i1}} & \cancel{a_{i2}} & \cdots & \cancel{a_{in}} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right|$$

Desarrollo por menores $\rightarrow$ expansión por renglón i

$$\underset{n\times n}{|A|} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in}$$

$$A_{ij} = \text{cofactor } ij \text{ de } A = (-1)^{i+j} \underbrace{M_{ij}}_{\substack{\text{determinante} \\ \text{eliminando renglón } i \text{ de } A \text{ y su col. } j}}$$

menor ij de A

menores 2° renglón

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0A_{21} + 1A_{22} + 0A_{23} + 0A_{24}$$

$$= A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cdots 1$$

$(\cdot + \cdot)$

$$|I| = \sum (-1)^p a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} = \sum (-1)^p a_{i_1 1} a_{i_3 3} \cdots a_{i_n n} + \sum (-1)^p a_{i_1 1} \cdot a_{i_3 3} \cdots a_{nn}$$

$a_{11} \; a_{22} \cdots a_{nn}$

$$|cA| = c^n |A|$$

$$= c^n \sum \qquad = c^n |A|$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad ?$$

$$AA^{-1} = I$$

$$|AA^{-1}| = |I|$$

$$|A||A^{-1}| = 1$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 1/2 \\ 5 & 10 & 15/2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 10 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\cancel{A = \begin{bmatrix} A_{12} & A_{21} \\ & \end{bmatrix}}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \\ A_{13}^T & A_{23}^T \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 8 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array}\right]$$

$$\underset{p \times q}{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \qquad \Sigma^{-1}$$

$$A^T = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\cancel{A^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \\ A_{13} & A_{23} \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = ?$$

A_{21}

$-A_{11}^{-1}$

$\cancel{-\frac{I}{A_{11}}}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & I & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & I \end{array}\right] \underset{-A_{12}A_{2|1}^{-1}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & I & 0 \\ 0 & \underbrace{A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}}_{\equiv A_{2|1}} & -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{array}\right]$$

$-A_{21}A_{11}^{-1}A_{11}$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} A_{11} & 0 & I + A_{12}A_{2|1}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{12}A_{2|1}^{-1} \\ 0 & A_{2|1} & -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} I & 0 & A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}A_{2|1}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{2|1}^{-1} \\ 0 & I & -A_{2|1}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{2|1}^{-1} \end{array}\right]$$

$$\underset{n\times n}{A} = [a_1\ a_2 \cdots a_n]$$

$$\underset{n\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{x} = [a_1\ a_2 \cdots a_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$AB = [c_1\ c_2 \cdots c_k]\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_k \end{bmatrix}$$

$$AB = c_1 r_1 + c_2 r_2 + \cdots + c_k r_k$$

$$\underset{n\times k}{A}\ \underset{k\times n}{B} = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix}[b_1\ b_2 \cdots b_m]$$

$$= \begin{bmatrix} a_1^T b_1 & a_1^T b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^T b_m \end{bmatrix}$$