1

Fundamentos de Organización de Datos

Clase 6

2

Agenda

Arboles	• Binarios • AVL • Multicamino • Balanceados
Arboles Balanceados	• Características • B, B*, B+ • Operaciones • Prefijos simples

3

Arboles → introducción

Problemas con los índices?

- La búsqueda binaria aun es costosa
- Mantener los índices ordenados es costoso
- Solución → RAM
- Objetivo → persistencia de datos

Árboles

- Estructuras de datos que permiten localizar en forma más rápida información de un archivo, tienen intrínsecamente búsqueda binaria

4

Arboles binarios

Que es un árbol binario?

- Estructuras de datos donde cada nodo tiene a lo sumo dos sucesores, a izquierda y a derecha

Un árbol binario, puede implantarse en disco?

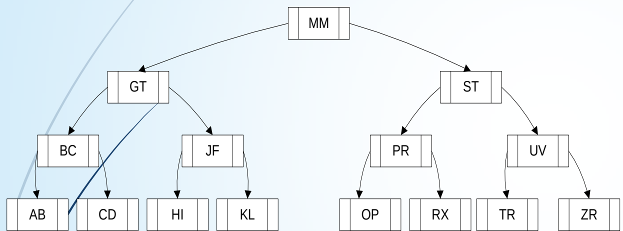
- Como lograr la persistencia?

Ejemplo → supongamos estas claves

- MM ST GT PR JF BC UV CD HI AB KL TR OP RX ZR

5

Arboles binarios



Raíz → 0

	Clave	Hijo izq	Hijo Der
0	MM	1	2
1	GT	3	4
2	ST	8	11
3	BC	5	6
4	JF	7	14
5	AB	-1	-1
6	CD	-1	-1
7	HI	-1	-1

	Clave	Hijo izq	Hijo Der
8	PR	9	10
9	OP	-1	-1
10	RX	-1	-1
11	UV	12	13
12	TR	-1	-1
13	ZR	-1	-1
14	KL	-1	-1

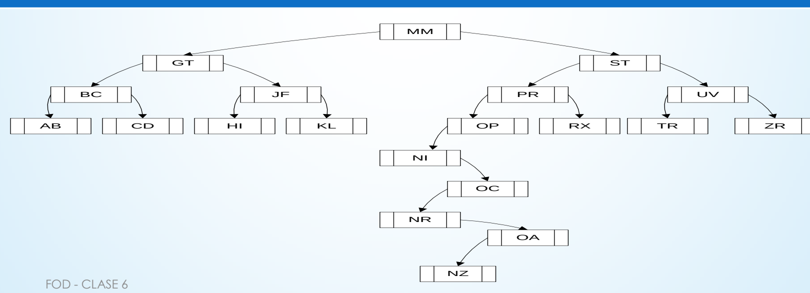
6

Arboles binarios

Árbol balanceado: un árbol está balanceado cuando la altura de la trayectoria más corta hacia una hoja no difiere de la altura de la trayectoria más grande.

Inconveniente de los binarios: se desbalancean fácilmente.

Supongamos que llegan las claves : NI OC NR OA NZ

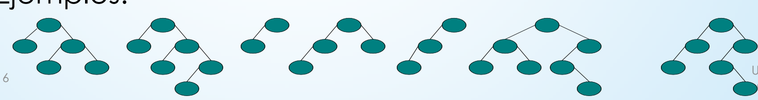


7

Árboles AVL

Árboles AVL

- Árbol binario balanceado en altura (BA(1)) en el que las inserciones y eliminaciones se efectúan con un mínimo de accesos.
- Árbol balanceado en altura:
  - Para cada nodo existe un límite en la diferencia que se permite entre las alturas de cualquiera de los subárboles del nodo (BA(k)), donde k es el nivel de balance)
  - Ejemplos:



8

Arboles AVL y Binarios

Características/Conclusiones

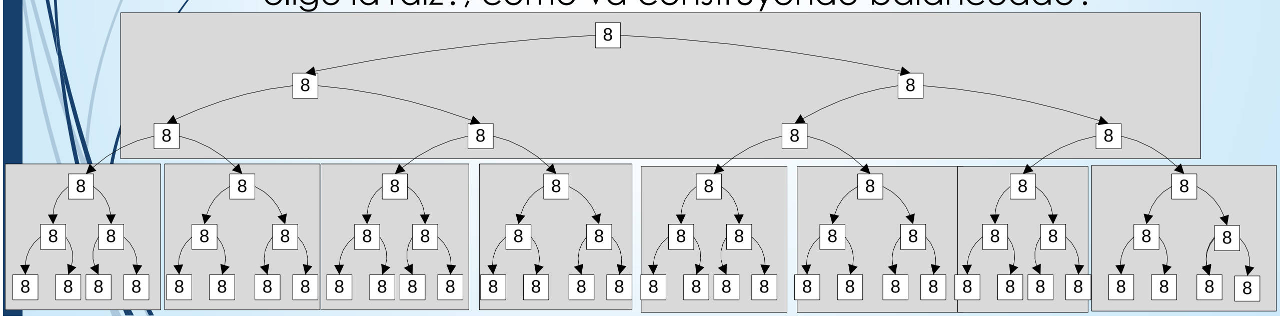
- Estructura que debe ser respetada
- Mantener árbol, rotaciones restringidas a un área local del árbol
  - Binario: → Búsqueda: $\log_2(N+1)$
  - AVL: → Búsqueda: $1.44 \log_2(N+2)$
  - Ambas performance por el peor caso posible

9

Árboles Binarios Paginados

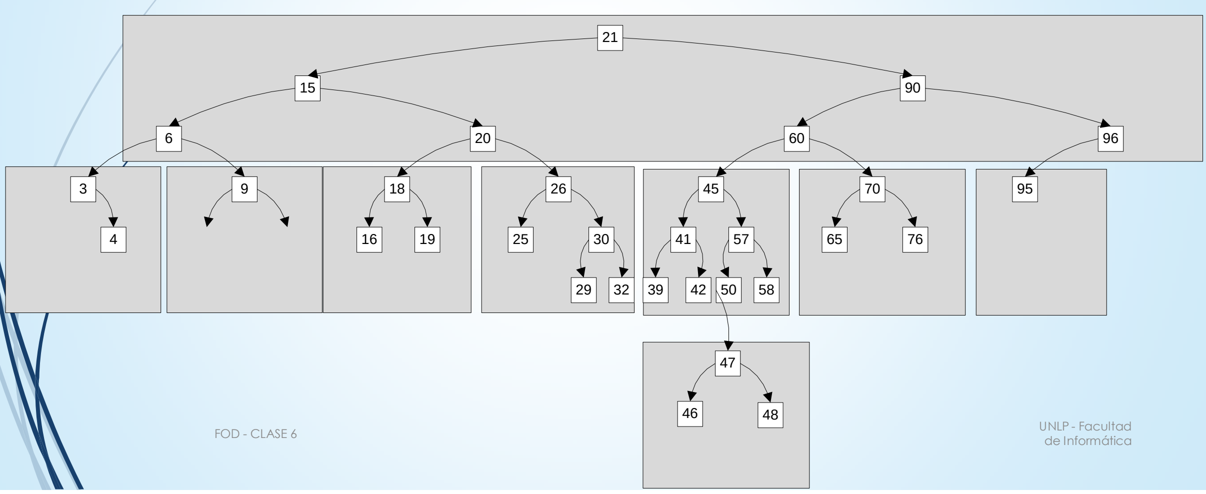
Árboles binarios paginados

- Problemas de almacenamiento secundario, buffering, páginas de memoria, varios registros individuales, minimiza el número de accesos
- Problema: construcción descendente, como se elige la raíz?, cómo va construyendo balanceado?



10

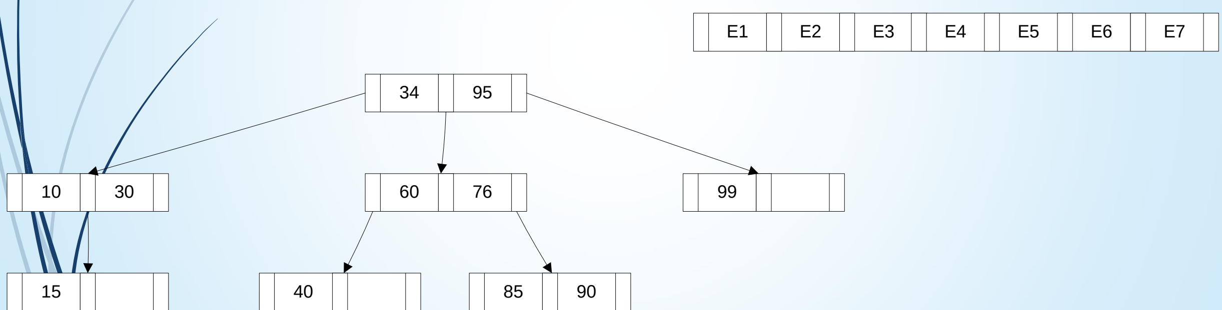
Árboles Binarios Paginados



Árboles multicamino

Generalización de árboles binarios, c/nodo tiene k punteros y k-1 claves (o registros), disminuye la profundidad del árbol,

- Orden del árbol.



Arboles balanceados

Son árboles multicamino con una construcción especial en forma ascendente que permite mantenerlo balanceado a bajo costo.

Propiedades de un árbol B de orden M:

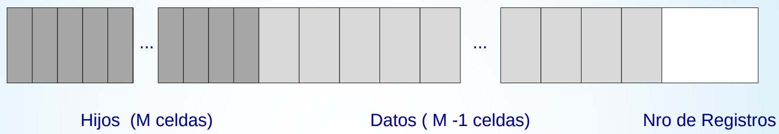
- Ningún nodo tiene más de M hijos
- C/nodo (menos raíz y los terminales) tienen como mínimo [M/2] hijos
- La raíz tiene como mínimo 2 hijos (o sino ninguno)
- Todos los nodos terminales a igual nivel
- Nodos no terminales con K hijos contienen K-1 registros. Los nodos terminales tienen:
  - Mínimo [M/2] –1 registros
  - Máximo M – 1 registros

PO	R1	P1	R2	P2	R3	P3	R4	P4	R5	P5	Nro de registros

13

Arboles Balanceados

- Formato del nodo



Formato del Nodo para archivo del índice arbol b

P0	Dato 1	P1	Dato 2	P2	…..	PM-2	Dato M-2	PM-1	Dato M-1	PM

Formato Gráfico del Nodo del índice arbol B

14

Arboles balanceados

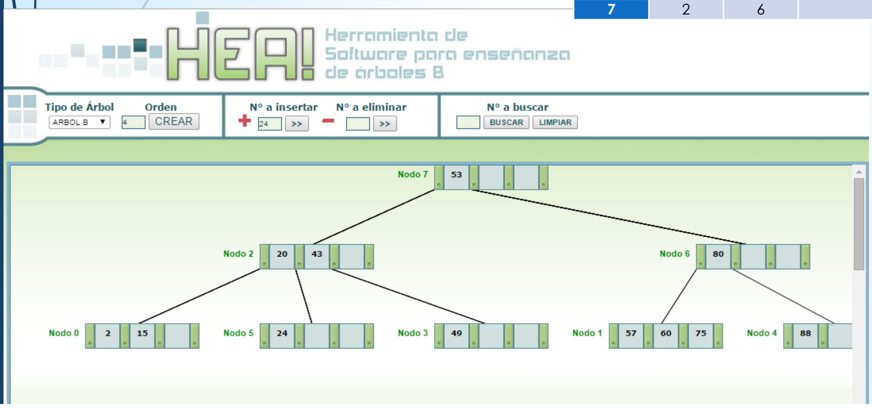
Creacion:

- Dadas las claves: 43 2 53 88 75 80 15 49 60 20 57 24
- Como se construye el árbol?
- Como se general el archivo de datos que persiste el árbol?

15

Arboles Balanceados

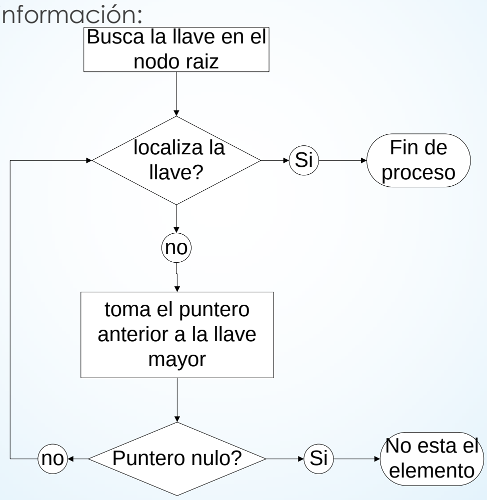
	Nodo Raiz: 7							
	Punteros				Datos			Nro Datos
0	-1	-1	-1		2	15		2
1	-1	-1	-1	-1	57	60	75	3
2	0	5	3		20	43		2
3	-1	-1			49			1
4	-1	-1			88			1
5	-1	-1			24			1
6	1	4			80			1
7	2	6			53			1



16

Árboles Balanceados

- Busqueda de información:



17

Arboles Balanceados

Performance de búsqueda

- Mejor caso: 1 lectura
- Pero caso: h lecturas (con h altura del árbol)
- Cual es el valor de h?
  - Axioma: árbol balanceado de Orden M, si el número de elementos del árbol es N → hay N+1 punteros nulos en nodos terminales.

18

Árboles Balanceados

Cota para h

Nivel	# mínimo de descendientes
1	2
2	2 * [M/2]
3	2 * [M/2] * [M/2]
....	
h	$2 * [M/2]^{h-1}$
Relación entre h y # de nodos	
$N+1 >= 2 * [M/2]^{h-1}$	
$h <= [\ 1 + \log_{[M/2]} ((N+1)/2)\ ]$	
Si M = 512 y N = 1000000 → h <= 3.37 (4 lecturas encuentra un registro)	

19

Árboles Balanceados

Inserción (creación)

- Los registros se insertan en un nodo Terminal
- Casos posibles
  - El registro tiene lugar en el nodo Terminal (no se produce overflow): solo se hacen reacomodaminetos internos en el nodo
  - El registro no tiene lugar en el nodo Terminal (se produce overflow): el nodo se divide y los elementos se reparten entre los nodos, hay una promoción al nivel superior, y esta puede propagarse y generar una nueva raíz.

20

Árboles Balanceados

Performance de la inserción

- Mejor caso (sin overflow)
  - H lecturas
  - 1 escritura
- Peor caso (overflow hasta la raíz, aumenta en uno el nivel del árbol)
  - H lecturas
  - 2h+1 escrituras (dos por nivel más la raíz)
- Estudios realizados
  - M = 10 25% divisiones
  - M = 100 2% divisiones

21

Árboles Balanceados

Eliminación

- Siempre eliminar de nodos terminales (trabajamos con árboles)
- Si se va a eliminar un elemento que no esta en nodo terminal → llevarlo primero a nodo terminal
- Posibilidades ante eliminación
  - Mejor caso: borra un elemento del nodo y no produce underflow, solo reacomodos (# elementos >= [M/2]-1
  - Peor caso: se produce underflow, #elementos < [M/2] – 1
- Dos soluciones
  - Redistribuir
  - concatenar

FOD - CLASE 6

UNLP - Facultad de Informática

22

Árboles Balanceados

Definición: nodo adyacente hermano

- Dos nodos son adyacentes hermanos si tienen el mismo padre y son apuntados por punteros adyacentes en el padre.

Redistribuir

- Cuando un nodo tiene underflow puede trasladarse llaves de un nodo adyacente hermano (en caso que este tenga suficientes elementos)

Concatenación:

- Si un nodo adyacente hermano está al mínimo (no le sobra ningún elemento) no se puede redistribuir, se concatena con un nodo adyacente disminuyendo el # de nodos (y en algunos casos la altura del árbol)

FOD - CLASE 6

UNLP - Facultad de Informática

23

Árboles Balanceados

Performance de la eliminación

- Mejor caso (borra de un nodo Terminal)
  - H lecturas
  - 1 escritura
- Peor caso (concatenación lleva a decrementar el nivel del árbol en 1)
  - 2h – 1 lecturas
  - H + 1 escrituras

24

Árboles Balanceados → B*

Eliminación

- Redistribución
- Concatenación

Inserción

- ??????
- División

25

Árboles Balanceados → B*

La redistribución podría posponer la creación de páginas nuevas

Se pueden generar árboles B más eficientes en términos de utilización de espacio

26

Árboles Balanceados → B*

Árbol B especial en que cada nodo está lleno por lo menos en 2/3 partes

Propiedades (orden M)

- Cada página tiene máximo M descendientes
- Cada página, menos la raíz y las hojas, tienen al menos [(2M – 1) / 3] descendientes
- La raíz tiene al menos dos descendientes (o ninguno)
- Todas las hojas aparecen en igual nivel
- Una página que no sea hoja si tiene K descendientes contiene K-1 llaves
- Una página hoja contiene por lo menos [(2M – 1) / 3] –1 llaves, y no más de M-1.

27

Árboles Balanceados → B*

Operaciones de Búsqueda

- Igual que el árbol B común

Operaciones de Inserción

- Tres casos posible
  - **Derecha**: redistribuir con nodo adyacente hermano de la derecha (o izq. si es el último)
  - **Izquierda o derecha**: si el nodo de la derecha está lleno y no se puede redistribuir, se busca el de la izquierda.
  - **Izquierda y derecha**: busca llenar los tres nodos, estos tendrán un ¾ parte llena.

Ejemplos

28

Árboles Balanceados → B*

Costo de la redistribución

	Mejor	Peor
Derecha	RRWW	RRWWW
Izq o der	RRWW	RRRWWW (divido solo dos)
Izq y der	RRWW	RRRWWWW

29

Árboles Balanceados

Técnicas de paginado

estrategias de reemplazo: LRU (last recently used)

Análisis numérico

llaves = 2400 # páginas = 140 Altura = 3 niveles

1	5	10	20
3.00	1.71	1.42	0.97

30

Árboles Balanceados

Archivos secuenciales indizados

Permiten una mejor recorrida por algún tipo de orden

- Indizado (ordenado por una llave)
- Secuencial (acceder por orden físico, devolviendo el registro en orden de llave)

Hasta ahora métodos disjuntos, se opta:

- rápida recuperación (Árbol)
- Recuperación ordenada (secuencial)

Debemos encontrar una solución que agrupe ambos casos

31

Árboles Balanceados

Conjunto de secuencias

- Conjunto de registros que mantienen un orden físico por llave mientras que se agregan o quitan datos, si podemos mantenerlo podemos indizarlos

Posible solución

- Mantener bloques de datos
- Cada bloque con registros y puntero al siguiente

Alonso Barca Carli Detomaso Fernandez

Alonso Barca Carli Detomaso Fernandez

Hernandez Gutierrez Mouriño Roncaglia Sanchez

IBD - CLASE 7

UNLP - Facultad de Informática

32

Árboles Balanceados

Alonso Barca Carli

Hernandez Gutierrez Mouriño Roncaglia Sanchez

Detomaso Esteves Fernandez

Costo

- Aumenta el tamaño del archivo (fragmentación interna)
- No hay orden físico salvo dentro del un bloque.
- Tamaño del bloque
  - Debe permitir almacenar varios bloques en RAM (redistribucióon)
  - Las E/S deben ser rápidas y sin necesidad de desplazamientos
- Como logramos ahora una rápida búsqueda?

FOD - CLASE 6

UNLP - Facultad de Informática

33

Árboles Balanceados → B+

Consiste en un conjunto de grupos de registros ordenados por clave en forma secuencial, junto con un conjunto de índices, que proporciona acceso rápido a los registros.

Propiedades
- Cada página tiene máximo M descendientes
- Cada página, menos la raíz y las hojas, tienen entre [M/2] y M hijos
- La raíz tiene al menos dos descendientes (o ninguno)
- Todas las hojas aparecen en igual nivel
- Una página que no sea hoja si tiene K descendientes contiene K-1 llaves
- Los nodos terminales representan un conjunto de datos y son linkeados juntos.

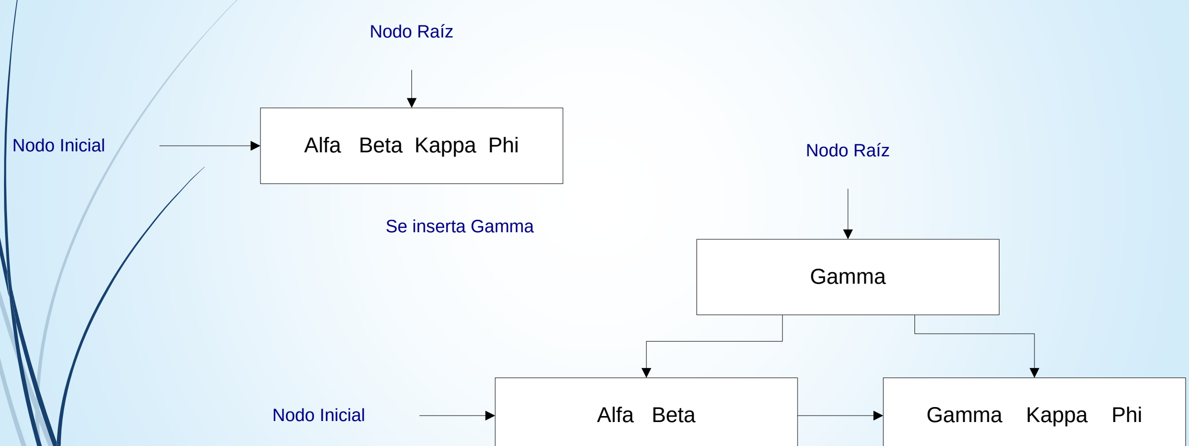
Los nodos no terminales no tienen datos sino punteros a los datos.

IBD - CLASE 7

UNLP - Facultad de Informática

34

Árboles Balanceados → B+



IBD - CLASE 7

UNLP - Facultad de Informática

35

Árboles Balanceados → B+

Separadores

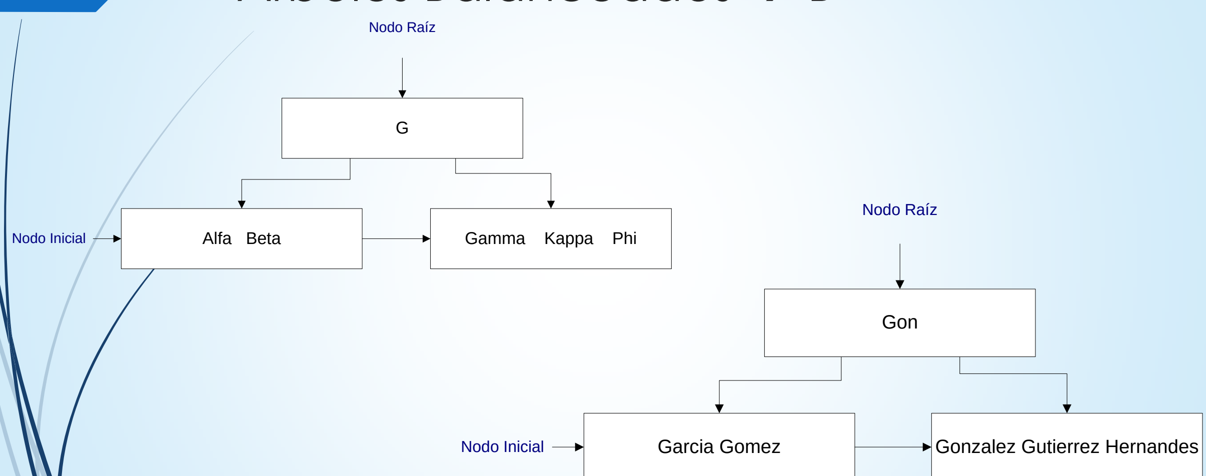
- Derivados de las llaves de los registros que limitan un bloque en el conjunto de secuencia
- Separadores más cortos, ocupan espacio mínimo

Árbol B+ de prefijos simples

- Árbol B+ en el cual el conjunto índice está constituido por separadores más cortos

36

Árboles Balanceados → B+



37

Árboles Balanceados → conclusiones

	Árbol B	Árbol B+
Ubicación de datos	Nodos (cualquiera)	Nodo Terminal
Tiempo de búsqueda	=	=
Procesamiento secuencial	Lento (complejo)	Rápido (con punteros)
Inserción eliminación	Ya discutida	Puede requerir + tiempo

38

Árboles

- Operaciones clásicas
- Comparaciones

	Árbol B	Árbol B+
Ubicación de datos	Nodos (cualquiera)	Nodo Terminal
Tiempo de búsqueda	=	=
Procesamiento secuencial	Lento (complejo)	Rápido (con punteros)
Inserción eliminación	Ya discutida	Puede requerir + tiempo