Analisi Matematica 3

Simone Ramello

Indice

CAPITOLO 1

Successioni e serie di funzioni

1. SUCCESSIONI DI FUNZIONI

1.1. Convergenza in spazi metrici.

DEFINIZIONE. Uno *spazio metrico* è una coppia (X, d) dove X è un insieme e d è una funzione definita su X^2 a valori reali che rispetta i seguenti assiomi:

- $\forall x, y \in X,\ d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \iff x = y$,
- $\forall x, y \in X,\ d(x,y) = d(y,x)$,
- $\forall x, y, z \in X,\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ (*disuguaglianza triangolare*, DT).

DEFINIZIONE. Una successione x_n a valori in (X, d) *converge a* $\overline{x}$ se

$$\forall r > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N,\ d(x_n, \overline{x}) < r$$

DEFINIZIONE. Una successione x_n è *di Cauchy* se

$$\forall r > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N,\ d(x_n, d_{n+1}) < r$$

1 TEOREMA. Ogni successione convergente è di Cauchy.

DEFINIZIONE. Sia (X, d) spazio metrico, allora se ogni successione di Cauchy è convergente si dice che X è *completo*.

ESEMPIO. $\mathbb{R}^N$ con qualsivoglia distanza è completo. Se A $\subsetneq \mathbb{R}^N$ (o $\mathbb{C}^N$) è compatto, allora C(A) = {$f : A \to \mathbb{R}^N$ continua} con la distanza

$$d(f,g) = \max_{x \in A} \|f(x) - g(x)\|$$

è uno spazio metrico completo.

1.2. Convergenza in spazi di funzioni.

OSSERVAZIONE. L'esempio di C(A) merita più attenzione: in questo spazio, la convergenza di una successione f_n di funzioni ad una funzione $\overline{f}$ assume questa forma:

$$\forall r > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N :\ d(f_n, \overline{f}) = \max_{x \in A} \|f_n(x) - \overline{f}(x)\| < r$$

Osserviamo che però richiedere che il *massimo* di quella norma sia minore di r su A è equivalente a richiedere che, per ogni elemento di A, la norma della differenza fra le immagini di f_n ed $\overline{f}$ sia minore di r. In altre parole, la definizione precedente è equivalente a:

$$\forall r > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall x \in A :\ \|f_n(x) - \overline{f}(x)\| < r$$

Se l'esistenza del massimo (e dunque la coerenza della definizione di distanza su C(A)) richiede la continuità delle funzioni, la definizione appena scritta non richiede alcuna condizione di regolarità e può essere, perciò, generalizzata.

DEFINIZIONE. Consideriamo $f_n, f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora diciamo che f_n *converge uniformemente a f su A* se vale la seguente condizione:

$$\forall r > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall x \in A :\ \|f_n(x) - f(x)\| < r.$$

Equivalentemente,

$$\forall r > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \sup_{x \in A} \|f_n(x) - f(x)\| < r.$$

OSSERVAZIONE. La convergenza è detta *uniforme* per due motivi: anzitutto, l'N la cui esistenza è richiesta dalla definizione non dipende dal punto $x \in A$, e vale perciò per tutto A *uniformemente*. Inoltre è detta tale in contrasto con un'altra definizione di convergenza, che è la convergenza delle successioni di numeri reali che si ottengono *fissando* un punto $x \in A$.

DEFINIZIONE. Siano $f_n, f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora diciamo che f_n *converge puntualmente ad f in A* se

$$\forall x \in A \, \forall r > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : \ \|f_n(x) - f(x)\| < r.$$

In questo caso si ha in effetti $N = N(r, x)$, mentre nel caso di una convergenza uniforme N va a dipendere solamente da r.

OSSERVAZIONE. La convergenza uniforme su A implica quella puntuale in ogni punto di A nel modo ovvio.

ESEMPIO. Sia $f_n : (0, 1) \to (0, 1), \ f_n(x) = x^n$. Allora per ogni x in (0,1) $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, ovvero f_n converge puntualmente a $f(x) \equiv 0$. Osserviamo che $\|f_n(x) - f(x)\| = \|f_n(x)\| = f_n(x) = x^n$, e che $x^n < r$ se e solo se $n > \frac{\log(r)}{\log(x)}$. Tuttavia, $\sup_{x\in(0,1)} \frac{\log(r)}{\log(x)} = +\infty$, dunque non è possibile trovare un N massimale che permetta alla successione di convergere uniformemente a $f(x)$. Se anziché (0, 1) si fosse preso (0, a) con a < 1, allora ci sarebbe stata convergenza uniforme.

2 TEOREMA *(criterio di cauchy)*. f_n converge uniformemente su A se e solo se

$$\forall r > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall m, n \geq N \, \forall x \in A : \|f_n(x) - f_m(x)\| < r.$$

1.3. Proprietà della convergenza uniforme.

3 TEOREMA *(limitatezza, continuita' e scambio del limite)* Siano $f_n : A \subsetneq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che convergono uniformemente a f. Allora valgono le seguenti proprietà:

- f_n limitate $\implies$ f limitata,
- f_n continue $\implies$ f continua
- (**scambio del limite**) x* punto di accumulazione per A, esiste finito $\lim_{x\to x*} f_n(x)$ per ogni n ≥ 1 $\implies$ esistono finiti e sono uguali i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x*} f_n(x) = \lim_{x\to x*} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

DIMOSTRAZIONE. Partiamo dalla limitatezza.
Sia c_n tale che per ogni x in A, $\|f_n(x)\| \leq c_n$. Per la definizione di convergenza uniforme, esiste un N_1 tale che, per ogni x in A, $\|f_{N_1}(x) - f(x)\| < 1$. Allora si ha che:

$$\|f(x)\| \leq \|f(x) - f_{N_1}(x)\| + \|f_{N_1}(x)\| \leq 1 + c_{N_1}.$$

Per quanto riguarda la continuità, l'ipotesi che ogni f_n sia continua equivale a dire che (indichiamo la distanza sulle variabili con d_n per evidenziare la dipendenza da n):

$$\forall n \in \mathbb{N} \, \forall r > 0 \, \exists d_n > 0 \, \forall x, y \in A : \|x - y\| < d_n \implies \|f_n(x) - f_n(y)\| < \frac{r}{3}$$

Per il criterio di Cauchy, chiedere che f_n converga uniformemente equivale a richiedere che

$$\forall r > 0 \, \exists N_1 \in \mathbb{N} \, \forall n, m \geq N_1 \, \forall x \in A : \|f_n(x) - f_m(x)\| < \frac{r}{3}$$

Equivalentemente,

$$\forall r > 0 \, \exists N_2 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N_2 \, \forall x \in A : \|f_n(x) - f(x)\| < \frac{r}{3}$$

Si ha dunque che preso comunque $r > 0$ e definito $N = \max(N_1, N_2)$, se $x, y \in A$ sono tali che $\|x - y\| < d_N$, allora

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(y)\| &\leq \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x) - f_N(y)\| + \|f_N(y) - f(y)\| \\ &\leq \frac{r}{3} + \frac{r}{3} + \frac{r}{3} \\ &= r\end{aligned}$$

Sia infine $\lambda_n = \lim_{x\to x*} f_n(x)$. Mostriamo che λ_n converge precisamente a $\lim_{x\to x*} f(x)$. Sia dunque $r > 0$, allora dal momento che esiste finito il limite, si ha che:

$$\exists d_n > 0 \, \forall x \in A : \|x - x^*\| < d_n \implies \|f_n(x) - \lambda_n\| < \frac{r}{3}.$$

Inoltre le f_n convergono uniformemente a f, dunque si ha che:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \, \forall n, m \geq N_1 \, \forall x \in A : \|f_n(x) - f_m(x)\| < \frac{r}{3}.$$

Siano $n, m \geq N_1$ e $x \in A$ tale che $\|x - x^*\| < \min(d_n, d_m)$, allora

$$\begin{aligned}\|\lambda_n - \lambda_m\| &\leq \|\lambda_n - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_m(x)\| + \|f_m(x) - \lambda_m\| \\ &\leq \frac{r}{3} + \frac{r}{3} + \frac{r}{3} \\ &= r\end{aligned}$$

dunque per il criterio di Cauchy la successione λ_n converge, sia λ il suo limite. Mostriamo dunque che $\lim_{x \to x*} f(x) = \lambda$. Sia N_2 come da definizione classica di convergenza uniforme, N_3 come da definizione di convergenza di λ_n a λ e sia $N = \max(N_2, N_3)$. Sia poi $x \in A$ tale che $\|x - x^*\| < d_N$, allora

$$\begin{aligned}\|f(x) - \lambda\| &\leq \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x) - \lambda_n\| + \|\lambda_N - \lambda\| \\ &\leq \frac{r}{3} + \frac{r}{3} + \frac{r}{3} \\ &= r.\end{aligned}$$

□

ESEMPIO. La convergenza puntuale non è sufficiente a garantire che la limitatezza passi al limite, infatti sia $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n$ se $0 < x < \frac{1}{n}$, $f_n(x) = \frac{1}{x}$ se $\frac{1}{n} < x < 1$. Allora f_n converge puntualmente ad $f(x) = \frac{1}{x}$, che non è limitata (e in effetti non c'è convergenza uniforme).

ESEMPIO. La convergenza puntuale non garantisce nemmeno il trasporto della continuità. Come controesempio, sia $f_n(x) = x^n$. Abbiamo che, per $n \to +\infty$, il limite non esiste per $x \leq -1$, esiste e vale $+\infty$ se $x > 1$, 1 se $x = 1$, 0 se $-1 < x < 1$. Dunque $f_n(x)$ converge puntualmente su (-1, 1] a $f(x)$ costantemente uguale a 0 su (-1, 1) e uguale a 1 per $x = 1$ che, al contrario di ogni f_n, non è continua. In effetti non si ha convergenza uniforme su (-1, 1]: per ogni $n \geq 0$, $\sup_{x \in (-1,1]} \|x^n - f(x)\| = 1$, per cui non c'è uniforme convergenza. Su un qualsiasi (a, b), per $-1 < a < b < 1$, si avrebbe uniforme convergenza.

4 TEOREMA *(derivabilita')* Siano $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabili su (a, b). Allora se esiste $x^* \in (a, b)$ tale per cui $f_n(x^*)$ converge e f'_n converge uniformemente su (a, b), allora esiste $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ tale per cui f_n converge uniformemente su (a, b) ad f, e questa f è derivabile con derivata $f'(x) = \lim_{n \to +\infty} f'_n(x)$.

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo che le f_n convergono uniformemente su (a, b) ad una funzione f: per farlo, utilizziamo il criterio di Cauchy. Sia dunque $\varepsilon > 0$. I dati che abbiamo sono che $f_n(x_0)$ converge, dunque (per Cauchy) esisterà un $N_1(\varepsilon, x_0)$ per cui, presi $n, m \geq N_1$,

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Inoltre, le f'_n convergono uniformemente su (a, b), per cui (per Cauchy) si avrà che esiste un $N_2 = N_2(\varepsilon)$ tale che, presi $n, m \geq N_2$ e $x \in (a, b)$,

$$|f'_n(x) - f'_m(x)| < \min\{\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\}.$$

A questo punto possiamo mostrare che le f_n convergono uniformemente nel modo seguente: sia $x \in (a, b)$ e $n, m \geq \max\{N_1, N_2\}$, allora

$$\begin{aligned}&|f_n(x) - f_m(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\ &< |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Possiamo applicare il teorema di Lagrange alla funzione $f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))$. Risulta che esiste un $\psi \in (a, b)$ tale che

$$(f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))) = (f'_n(\psi) - f'_m(\psi))(x - x_0).$$

Dunque, tornando alla maggiorazione che stavamo facendo, dal momento che N_2 non dipende da x_0 possiamo procedere a maggiorare anche in ψ e otteniamo:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < |f'_n(\psi) - f'_m(\psi)||x - x_0| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Risulta quindi che le f_n convergano uniformemente ad una certa funzione f.
Ora, sia $y \in (a, b)$. Se f fosse derivabile in y, si avrebbe per definizione

$$f'(y) = \lim_{x \to y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

D'altro canto, f è il limite delle f_n, dunque si avrebbe

$$f'(y) = \lim_{x \to y} \frac{\lim_{n \to +\infty} f_n(x) - f_n(y)}{x - y} = \lim_{x \to y} \lim_{n \to +\infty} \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y}.$$

Viceversa,

$$\lim_{n \to +\infty} f_n'(y) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to y} \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y}.$$

La tesi si riduce dunque ad un'applicazione del teorema dello scambio dei limiti. Anzitutto, verifichiamo le ipotesi: devono esistere i limiti interni, ed infatti

$$\lim_{x \to y} \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y}$$

esiste per la derivabilità delle f_n, e

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} = \frac{1}{x - y} \lim_{n \to +\infty} (f_n(x) - f_n(y))$$

esiste per la convergenza delle f_n. Dobbiamo ancora mostrare che la successione

$$g_n(x) := \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y}$$

converga uniformemente su $(a, b) \setminus \{y\}$. Di nuovo, sia $\varepsilon > 0$, allora esiste $N = N(\varepsilon)$ per cui per ogni $n, m \geq N$,

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon.$$

Cerchiamo di utilizzare il criterio di Cauchy: siano $n, m \geq N$,

$$|g_n(x) - g_m(x)| = \left| \frac{f_n(x) - f_m(x) - (f_n(y) - f_m(y))}{x - y} \right|$$

e, per il teorema di Lagrange, esiste $\xi \in (a, b) \setminus \{y\}$ tale per cui

$$(f_n(x) - f_m(x) - (f_n(y) - f_m(y))) = (f_n'(\xi) - f_m'(\xi))(x - y).$$

Allora si ha che

$$|g_n(x) - g_m(x)| = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| < \varepsilon.$$

□

5 TEOREMA *(integrabilita')* Sia data una successione f_n di funzioni limitate ed integrabili su $[a, b]$ che converge uniformemente a f. Allora anche f è integrabile e risulta

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x) \, dx = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

DIMOSTRAZIONE. f risulta limitata perché lo sono le f_n. Sia $\mathcal{D}$ una partizione di $[a, b]$ in $\Delta_i = (x_{i-1}, x_i)$ per $i = 1, 2, ...k$, allora

$$|S(\mathcal{D}, f) - S(\mathcal{D}, f_n)| = \left| \sum_{i=1}^{k} (\sup_{\Delta_i} f - \sup_{\Delta_i} f_n)(t_i - t_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^{k} \sup_{\Delta_i} |f - f_n|(t_i - t_{i-1}).$$

Ora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un N tale che $\sup_{[a,b]} |f - f_N| < \frac{\varepsilon}{3}$, da cui

$$|S(\mathcal{D}, f) - S(\mathcal{D}, f_N)| \leq \sum_{i=1}^{k} \sup_{\Delta_i} |f - f_N|(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{3} \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{3}(b - a).$$

Analogamente,

$$|s(\mathcal{D}, f) - s(\mathcal{D}, f_N)| < \frac{\varepsilon}{3}(b - a)$$

da cui, noto che esiste una $\mathcal{D}$ per cui $|S(\mathcal{D}, f) - s(\mathcal{D}, f)| < \frac{\varepsilon}{3}(b-a)$, possiamo verificare che

$$\begin{aligned}
&|S(\mathcal{D}, f) - s(\mathcal{D}, f)| \\
&\leq |S(\mathcal{D}, f) - S(\mathcal{D}, f_N)| + |S(\mathcal{D}, f_N) - s(\mathcal{D}, f_N)| + |s(\mathcal{D}, f) - s(\mathcal{D}, f_N)| \\
&< \varepsilon(b-a)
\end{aligned}$$

e così anche f è integrabile. Inoltre,

$$\left| \int_a^b f_n(x)\, \mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, \mathrm{d}x \leq (b-a) \sup_{[a,b]} |f_n - f|$$

e facendo tendere $n \to +\infty$, questa quantità tende a zero quindi in particolare tende a zero la differenza fra i due limiti, da cui la tesi. □

2. SERIE DI FUNZIONI

DEFINIZIONE. Sia (X, $\|\cdot\|$) uno spazio normato. Sia x_n una successione a valori in X. Diciamo che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ *converge* se converge la successione $S_k = \sum_{n=0}^{k} x_n$ e chiamiamo il suo limite la *somma* della serie.
DEFINIZIONE. Diciamo che una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ *converge assolutamente* (o *totalmente*) se converge la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$.
6 TEOREMA Sia (X, $\|\cdot\|$) uno spazio normato completo, allora ogni serie totalmente convergente è convergente.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie totalmente convergente — ovverosia, converge la serie a valori reali $\sum_{n=1}^{+\infty} \|a_n\|$. In particolare, questo significa che la successione $S_n = \sum_{k=1}^{n} \|a_k\|$ è di Cauchy, ovvero che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un N tale per cui, preso $p \geq N$ e $q > 0$, si ha

$$\|a_p\| + \|a_{p+1}\| + \ldots + \|a_{p+q}\| < \varepsilon.$$

Siano dunque N, p e q come appena detto, allora

$$\|a_p + a_{p+1} + \ldots + a_{p+q}\| \leq \|a_p\| + \|a_{p+1}\| + \ldots + \|a_{p+q}\| < \varepsilon.$$

Questo mostra che la successione $P_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ è di Cauchy, ed essendo lo spazio di Banach risulta convergente. □

DEFINIZIONE. Sia $\mathsf{Hom}(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$ lo spazio delle funzioni da $\mathbb{R}^M$ in $\mathbb{R}^N$ con la norma dell'estremo superiore. Allora diciamo che una serie a valori in questo spazio *converge uniformemente* se converge uniformemente la successione delle sue ridotte, ed analogamente *converge puntualmente* se converge puntualmente la successione delle sue ridotte.
OSSERVAZIONE. Si applicano tutte le conseguenze della convergenza uniforme trasferendo proprietà dalle funzioni alla funzione somma; in particolare vale la proprietà seguente.

2.1. Derivabilità ed integrabilità.

7 TEOREMA Siano $f_n\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili su (a,b). Se esiste $x^* \in (a,b)$ tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x^*)$ converge e $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$ converge uniformemente su (a,b), allora esiste $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ vi converge uniformemente su (a,b) e si ha che

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

DIMOSTRAZIONE. Applicando il teorema di scambio di limite e derivata alle successioni di ridotte:

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{d}{dx}(\sum_{k=0}^{n} f_k(x)) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d}{dx} f_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$$

□

8 TEOREMA Sia f_n una successione di funzioni limitate ed integrabili sull'intervallo (a,b): se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in (a,b) con somma $f(x)$, allora f è integrabile e si ha

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

DIMOSTRAZIONE. Per definizione, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f_n(x)$. Applicando il teorema di scambio limite-integrale,

$$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

3. SERIE DI POTENZE

DEFINIZIONE. Sia a_n una successione a valori in $\mathbb{C}$, allora una *serie di potenze* è una serie di funzioni della forma, per $z_0 \in \mathbb{C}$ fissato, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$. Chiamiamo z_0 il *centro* della serie.
OSSERVAZIONE. Modulo una traslazione si può sempre considerare $z_0 = 0$.
9 TEOREMA Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ una serie di potenze in campo complesso. Allora:

- converge in $z = 0$,
- se esiste $z_1 \neq 0$ tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_1^n$ converge, allora converge assolutamente per ogni z_2 tale che $|z_2| < |z_1|$,
- se esiste z_3 tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_3^n$ non converge, allora la serie non converge per qualunque z_4 con $|z_4| > |z_3|$.

DIMOSTRAZIONE. Per il primo punto, osserviamo che la successione delle ridotte in $z = 0$ è la successione costante in a_0, che dunque converge.
Per il secondo punto, sia $z_1 \neq 0$ tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_1^n$ converge, e sia z_2 con $|z_2| > |z_1|$. Dalla convergenza abbiamo che $\forall r > 0\ \exists N_r \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_r : |a_n z_1^n| < r$. In particolare, posto $r = 1$, si ha che esiste N_1 tale che per ogni $n \geq N_1$, $|a_n| < \frac{1}{|z_1|^n}$. Si ha perciò che:

$$|a_n z_2^n| < |a_n||z_2|^n < \frac{1}{|z_1|^n}|z_2|^n = \left(\frac{|z_2|}{|z_1|}\right)^n = \alpha^n$$

per $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Dal momento che $\alpha < 1$, si ha che $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n$ converge e dunque la convergenza (per confronto) della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_2^n$.
Infine, per il terzo punto si supponga che la serie converga in z_4 con $|z_4| > |z_3|$. Allora per il secondo punto dovrà convergere anche in z_3, che è assurdo. □

Conseguenza della precedente proposizione è che i domini di convergenza saranno sempre palle aperte centrate in zero. Possiamo dunque definire:
DEFINIZIONE. Il *raggio di convergenza* di una serie è

$$\sup\{|z| : z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ converge}\}.$$

OSSERVAZIONE. L'esistenza di tale numero è garantita dal fatto che l'insieme in questione è non vuoto (contiene sempre almeno lo zero). Se tale estremo superiore è $+\infty$, allora la serie converge su tutto $\mathbb{C}$. Rimane da studiare cosa succeda sulla frontiera del dominio di convergenza.

3.1. Teoremi di convergenza.

10 TEOREMA *(d'alembert).* Sia $a_n \neq 0$ definitivamente per $n \to +\infty$. Se esiste

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

allora si ha che il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ è:

- R = $+\infty$, se L = 0;

- R = $\frac{1}{L}$, se $0 < L < +\infty$;
- R = 0, se L = $+\infty$.

DIMOSTRAZIONE. Si applica il criterio del rapporto alla serie dei moduli. □

11 TEOREMA *(cauchy-hadamard)* Sia $\lambda = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Allora si ha che:

- se $\lambda = 0$, la serie di potenze converge su tutto $\mathbb{C}$;
- se $\lambda = +\infty$, la serie converge solamente per $z = 0$;
- se 0 < λ < $+\infty$, il raggio di convergenza è $\frac{1}{\lambda}$.

DIMOSTRAZIONE. Poniamoci nel caso di $\lambda \in (0, +\infty)$. Sia $\rho = \frac{1}{\lambda}$. Mostriamo che c'è convergenza dentro $B_\rho(0)$ e non fuori.
Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| \neq 0$ e $|z| < \rho$. Quest'ultima relazione si può riscrivere come $\lambda < \frac{1}{|z|}$. Per la densità dei reali esiste λ' compreso fra λ e $\frac{1}{|z|}$. Essendo che λ è il $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$, esisterà un N tale che, per ogni $n \geq N$, $|a_n|^{\frac{1}{n}} < \lambda'$. Ma allora $|a_n z^n| = (|a_n|^{\frac{1}{n}}|z|)^n < (\lambda'|z|)^n$, e poiché $\lambda'|z| < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda'|z|)^n$ converge e, per confronto, converge anche la serie di potenze in esame. Se invece $\rho < |z|$, esistono infiniti n tali per cui $\frac{1}{|z|} < |a_n|^{\frac{1}{n}}$, equivalentemente per cui $|a_n|^{\frac{1}{n}}|z| > 1$ ovvero, elevando alla n, $|a_n||z|^n > 1$. In particolare il $\liminf_{n\to+\infty} |a_n z^n|$ sarà maggiore o uguale a 1, per cui il limite di $|a_n z^n|$ non potrà essere zero, e la serie non potrà convergere.
Sia ora $\lambda = 0$: allora preso comunque $z \in \mathbb{C}$ di norma non nulla risulta che esistono infiniti n per cui $|a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{|z|}$, da cui $|a_n|^{\frac{1}{n}}|z| < 1$ e, per confronto, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n||z|^n$ converge.
Se infine $\lambda = +\infty$, sia $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > 0$, allora esistono infiniti n per cui $|a_n|^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{|z|}$, da cui $|a_n|^{\frac{1}{n}}|z| > 1$ e dunque il limite di $|a_n z^n|$ non potrà mai tendere a zero. □

ESEMPIO. Un esempio per ciascuno dei tre casi:

- per $\sum n = 0^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ si ha $L = 0$, ovvero la serie converge su tutto $\mathbb{C}$;
- per $\sum_{n=0}^{+\infty} n! z^n$ si ha $L = +\infty$, ovvero convergenza solo per $z = 0$;
- per $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}$ si ha $L = 1$, ovvero convergenza assoluta sulla palla aperta di raggio 1.

Sorge dunque spontanea la domanda: che succede per $|z| = 1$?

Non esiste un criterio generale per la frontiera. Si presentano tutti i casi possibili:
ESEMPIO.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

Se $|z| = 1$, $\lim_{n\to+\infty} |z_n| = 1 \neq 0$. La serie non può convergere, perché se lo facesse $lim_{n\to+\infty} z^n = 0$ e di conseguenza andrebbe a zero anche la successione dei moduli.
ESEMPIO.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^\alpha},\ \alpha > 1$$

Se $|z| = 1$, la serie dei moduli assume la forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{z^n}{n^\alpha}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

che converge, dunque si ha convergenza assoluta anche sulla frontiera.

Il caso che segue è il più complesso; prima di affrontarlo, richiamiamo un teorema che ci servirà.

12 TEOREMA *(abel-dirichlet)*. Sia data $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n b_n$, con $b_n \in \mathbb{R}^+$ decrescente a zero, $c_n \in \mathbb{C}$ tale che esista $\mathcal{C} > 0$ per cui, $\forall n \geq 0$, $|\sum_{k=1}^{n} c_k| < \mathcal{C}$. Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n b_n$ converge.
ESEMPIO.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^\alpha},\ 0 < \alpha < 1$$

Con un argomento simile all'esempio precedente si osserva che sulla frontiera non c'è convergenza assoluta. Rimane da testare la convergenza semplice. Osserviamo che se ci restringiamo a $\mathbb{R}$ allora per $z = 1$ non si ha convergenza e per $z = -1$ si ha convergenza per il criterio di Leibniz. Il criterio di Abel-Dirichlet appena enunciato è una generalizzazione di Leibniz che possiamo applicare al caso complesso: sia $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $c_n = z^n$. Per $z \neq 1$, $\sum_{k=1}^n c_k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} - 1 = \frac{z-z^{n+1}}{1-z}$. Si ha dunque che:

$$\left|\sum_{k=1}^n c_k\right| \leq \frac{|z| + |z^{n+1}|}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|}$$

Abbiamo trovato una maggiorazione indipendente da n, dunque per il criterio di Abel-Dirichlet possiamo concludere che abbiamo convergenza (semplice).
Riassumendo, la serie in esame converge assolutamente per $|z| < 1$, converge semplicemente per $|z| = 1, z \neq 1$ e non converge per $z = 1$ o $|z| > 1$.

La convergenza uniforme richiede un argomento più delicato. Prima di enunciare e dimostrare il teorema, richiamiamo un risultato che servirà a dimostrarlo:

13 LEMMA *(criterio di weierstrass).* Sia $f_n : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Se esiste una successione $c_n \in \mathbb{R}$ tale che $|f_n(z)| \leq c_n$ per ogni $z \in A$ ed ogni $n \geq 0$, e $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ converge, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ converge uniformemente su A.

14 TEOREMA Sia data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ serie di potenze con raggio di convergenza $0 < R < +\infty$. Allora la serie converge *uniformemente* solo su ogni insieme $D \subset \mathbb{C}$ compattamente contenuto in $B_R(0)$, ovverosia tale che $\overline{D} \subset B_R(0)$. Se la serie converge *assolutamente* anche sulla frontiera di $B_R(0)$, allora la serie converge uniformemente su tutto $\overline{B_R(0)}$.

OSSERVAZIONE. Se R = $+\infty$, si ha convergenza uniforme su ogni sottoinsieme di $\mathbb{C}$ limitato.

DIMOSTRAZIONE. Dal momento che $\overline{D} \subset B_R(0)$, esiste $w \in \mathbb{C}$ tale che $|z| \leq |w| < R$ per ogni $z \in \overline{D}$. Allora $|a_n z^n| \leq |a_n||w|^n = |a_n w^n|$. Quest'ultima converge ed è la c_n richiesta dal criterio di Weierstrass, dunque si ha convergenza uniforme su D. Un argomento del tutto analogo può essere ripetuto nel caso in cui si abbia convergenza assoluta sulla frontiera scegliendo un $w \in \partial B_R(0)$. □

Se la convergenza è solamente in *qualche* punto della frontiera, abbiamo un risultato parziale:

15 TEOREMA *(abel)* Sia data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ serie di potenze di raggio $0 < R < +\infty$. Sia $z_0 \in \partial B_R(0)$ tale che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z_0)^n$ converge, e sia $z_0 = R\exp(i\theta_0)$. Allora risulta definita $f(z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z_0)^n$, c'è convergenza uniforme su $\Sigma_0 = \{z \in \mathbb{C} : z = \rho\exp(i\theta_0),\ 0 \leq \rho \leq R\}$ e si ha che $\lim_{\rho \to R^-} f(\rho\exp(i\theta_0)) = f(z_0)$.

DIMOSTRAZIONE. Assumiamo, senza perdere di generalità, $\theta_0 = 0$ e $R = 1$. Abbiamo dunque che converge la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = f(1)$, ed è definita per ogni $x \in [0, 1)$ la funzione $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$. Poniamo $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. La formula di sommazione per parti ci permette di dire che

$$\sum_{n=p}^{q} a_n x^n = \sum_{n=p}^{q-1} S_n(x^n - x^{n+1}) + S_q x^q - S_{p-1} x^p.$$

Inoltre si ha che

$$\sum_{n=p}^{q-1} S(x^n - x^n + 1) + Sx^q - Sx^p = 0,$$

da cui

$$\sum_{n=p}^{q} a_n x^n = \sum_{n=p}^{q-1} (S_n - S)(x^n - x^{n+1}) + (S_q - S)x^q - (S_{p-1} - S)x^p,$$

e poiché per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un p_0 tale che per ogni $p \geq p_0$ si ha $|S_p - S| < \varepsilon$, allora

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n x^n\right| \leq \varepsilon \left|\sum_{n=p}^{q-1} (x^n - x^{n+1}) + x^q + x^p\right| = 2x^p\varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Abbiamo provato, tramite il criterio di Cauchy, la convergenza uniforme di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ per $x \in [0, 1]$. Pertanto la sua somma è continua sull'intervallo. □

3.2. Continuità, derivabilità ed integrabilità.

16 TEOREMA Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$. Allora risulta definita su $B_R(0)$ la funzione somma, $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ ed è continua.

DIMOSTRAZIONE. Per definizione, $f(z) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k z^k$ — è, cioè, il limite di una successione di polinomi, ovvero il limite di una successione di funzioni continue. Tuttavia, la convergenza uniforme non è garantita su tutto $B_R(0)$, e pertanto la continuità potrebbe non passare al limite. Possiamo però, preso $z \in B_R(0)$, recuperare una palla aperta centrata nell'origine che sia del tutto contenuta in $B_R(0)$ (la cui frontiera pertanto non intersechi quella di $B_R(0)$) e che contenga anche z, ad esempio scegliendo $R' = \frac{|z|+R}{2}$. In questo modo si ha convergenza uniforme su $B_{R'}(0)$, e la continuità in quanto concetto locale è garantita in z dai teoremi di passaggio al limite per successioni di funzioni. □

Enunciamo e dimostriamo il teorema di derivabilità nel caso reale.

17 TEOREMA Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ una serie di potenze a valori reali con raggio di convergenza $R > 0$. Allora risulta definita su $B_R(0)$ la funzione somma, questa è $C^\infty((-R, R))$ e si ha che $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo a lavorare per poter applicare il teorema di derivazione termine a termine per le serie di funzioni. La serie delle derivate ha la forma $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$ che può essere riscritta nella forma canonica delle serie di potenze come $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$. Denotiamo con $b_n = (n+1)a_{n+1}$. Allora si ha che $\lambda = \limsup_{n\to+\infty} |b_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to+\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}(|a_{n+1}|^{n+1})^{\frac{n+1}{n}} = \limsup_{n\to+\infty} |a_{n+1}|^{n+1} = R$, ovvero la serie delle derivate ha il medesimo raggio di convergenza della serie di partenza. Allora preso D compattamente contenuto in $B_R(0)$, in $z \in D$ c'è convergenza uniforme della serie delle derivate. Inoltre, essendo nel cerchio di convergenza abbiamo convergenza in almeno un punto della serie di potenze. Possiamo applicare il teorema di derivazione termine a termine ed otteniamo la derivabilità della funzione somma e che la sua derivata sia la somma delle derivate. In particolare, $f'(0) = a_1$. Iterando questo processo su $f'(x)$ otteniamo che f è $C^{+\infty}((-R, R))$ e la relazione richiesta fra a_k ed $f^{(k)}(0)$. □

3.3. Funzioni analitiche e sviluppi di Taylor.

DEFINIZIONE. Una funzione $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice analitica in 0 se è sviluppabile in serie di Taylor in un qualche intorno di 0. Si dirà analitica in A se è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di ogni punto di A.

18 TEOREMA Sia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^{+\infty}((-R, R))$ tale che esiste $M > 0$ per cui, definitivamente in n,

$$\sup_{(-R,R)} |f^{(n)}(x)| \leq M n! R^{-n}.$$

Allora f è analitica nell'origine.

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo il resto del polinomio di Taylor in forma di Lagrange:

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\psi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Per n abbastanza grande, risulta

$$|E_n(x)| \leq \frac{M\ (n+1)!\ R^{-(n+1)}\ |x|^{n+1}}{(n+1)!} = M\left(\frac{|x|}{R}\right)^{n+1}$$

per $x \in (-R, R)$, dunque $\frac{|x|}{R} < 1$ e il limite tende a zero. □

CAPITOLO 2

Teoria della misura e dell'integrazione

1. TEORIA DELLA MISURA ASTRATTA

1.1. Definizioni preliminari.

DEFINIZIONE. Sia X un insieme, allora $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$(X) è una *$\sigma$-algebra* se $X \in \mathcal{M}$ ed inoltre è chiusa per complementi ed unioni numerabili.

DEFINIZIONE. Diciamo che la coppia (X, $\mathcal{M}$), dove X è un insieme ed $\mathcal{M}$ una σ-algebra, definisce uno *spazio misurabile*. Gli elementi di $\mathcal{M}$ sono detti insiemi misurabili.

19 PROPOSIZIONE. Sia $\mathcal{M}$ una σ-algebra, allora $\mathcal{M}$ è chiusa per intersezioni finite o numerabili, per unioni finite e contiene $\emptyset$.

20 TEOREMA Se (X, $\mathcal{M}$) è uno spazio misurabile ed è data una funzione f: X $\to$ Y, allora è indotta la struttura di spazio misurabile su Y tramite la σ-algebra

$$\mathcal{M}_f = \{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo che $\mathcal{M}_f$ è in effetti una σ-algebra. In particolare, f^{-1}(Y) = X $\in \mathcal{M}$, dunque Y $\in \mathcal{M}_f$. Inoltre, per ogni E $\subset$ Y si ha f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c, dunque $\mathcal{M}_f$ è chiusa per complementi. Analogamente, quali che siano $A_n \subset Y$,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$$

□

DEFINIZIONE. Siano (X, $\mathcal{M}$) uno spazio misurabile ed (Y, τ) uno spazio topologico. Allora diciamo che f: X $\to$ Y è una *funzione misurabile* se ogni preimmagine di aperto è misurabile. In altre parole, se per ogni E $\in \tau$, f^{-1}(E) $\in \mathcal{M}$.

DEFINIZIONE. Sia (Y, τ) uno spazio topologico, allora i *boreliani di Y* (denotati con bor(Y)) sono la più piccola σ-algebra contenente gli insiemi aperti di Y.

21 TEOREMA Siano (X, $\mathcal{M}$) uno spazio misurabile ed (Y, τ) uno spazio topologico. Allora si ha che:

(1) f è misurabile se e solo se per ogni B boreliano di Y, f^{-1}(B) è misurabile;
(2) se in particolare Y = [-∞, +∞], allora f è misurabile se e solo se per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((\alpha, +\infty])$ è misurabile.

DIMOSTRAZIONE. Per quanto riguarda **(1)**, i boreliani contengono tutti gli aperti di Y, dunque l'implicazione da destra verso sinistra non necessita di dimostrazione. Viceversa, osserviamo che $\tau \subset \mathcal{M}_f$ per definizione di misurabilità, dunque poiché i boreliani sono la più piccola σ-algebra a contenere gli aperti, bor(Y) $\subset \mathcal{M}_f$.

Quanto a **(2)**, se f è misurabile allora le preimmagini di aperti sono insiemi misurabili, e gli insiemi della forma $(\alpha, +\infty]$ sono aperti nella topologia standard di Y. Se invece ogni insieme di questa forma è misurabile, sia A un aperto di Y. Una base per la topologia di Y è fornita da insiemi della forma (α, β), $(\alpha, +\infty]$ oppure $[-\infty, \beta)$ per α e β numeri reali, perciò A è dato da un'unione numerabile di insiemi siffatti. È dunque sufficiente mostrare che tutte e tre le tipologie sono misurabili. Poiché $(\alpha, +\infty]$ è misurabile per ipotesi, allora lo è anche $[-\infty, \alpha)$, in quanto

$$[-\infty, \alpha) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[-\infty, \alpha - \frac{1}{n}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty\right]\right)^c.$$

Infine, per ogni α e β reali si ha che $(\alpha, \beta) = [-\infty, \beta) \cap (\alpha, +\infty]$. □

22 PROPOSIZIONE. Sia (X, $\mathcal{M}$) uno spazio misurabile, Y ed Z spazi topologici, allora se f: X $\to$ Y è misurabile e g: Y $\to$ Z è continua, $g \circ f$ è misurabile.

23 PROPOSIZIONE. Sia (X, $\mathcal{M}$) uno spazio misurabile, e sia f: X $\to \mathbb{C}$, allora si ha che:

(1) se $f = u + iv$ ed u, v: X $\to \mathbb{R}$ sono misurabili, f è misurabile;
(2) se f è misurabile, sono misurabili anche $\mathbb{R}e(f)$ e $\Im(f)$;
(3) se f è misurabile, e g: X $\to \mathbb{C}$ è un'altra funzione misurabile, allora sono misurabili $f + g$ ed fg;
(4) se f è misurabile, allora esiste α_f: X $\to \mathbb{C}$ misurabile tale che $|\alpha_f(x)| = 1$ e $f(x) = \alpha_f(x)|f(x)|$ per ogni $x \in$ X.

24 PROPOSIZIONE. Sia (X, $\mathcal{M}$) uno spazio misurabile, e siano f_n: X $\to [-\infty, +\infty]$ misurabili $\forall n \geq 1$, allora si ha che sono misurabili anche $\liminf f_n$, $\limsup f_n$, $\inf f_n$, $\sup f_n$, $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \min(f, 0)$ e se $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in$ X, f è misurabile.

1.2. Funzioni semplici.

DEFINIZIONE. Sia (X, $\mathcal{M}$) uno spazio misurabile, allora f: X $\to \mathbb{C}$ si dice *semplice* se $\mathsf{img}(f)$ è un sottoinsieme finito. In tal caso, f ammette una *decomposizione standard*: dal momento che $\mathsf{img}(f) = \{s_1, \ldots s_n\}$, definiamo $A_i = f^{-1}(s_i)$ e possiamo scrivere, per ogni $x \in$ X,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} s_i \chi_{A_i}(x),$$

dove con χ_{A_i} s'intende la funzione indicatrice dell'insieme A_i.

25 PROPOSIZIONE. Sia f semplice con decomposizione come sopra, allora f è misurabile se e solo se lo sono gli insiemi A_i.

26 TEOREMA *(approssimazione mediante funzioni semplici)* Sia (X, $\mathcal{M}$) spazio misurabile. Allora:

(1) se f: X $\to [0, +\infty]$ è misurabile, esiste una successione $\{S_n\}$ di funzioni semplici e misurabili tali che $S_n(x) \to f(x)$ ed inoltre $0 \leq S_1(x) \leq S_2(x) \leq \ldots S_n(x) \leq S_{n+1}(x) \leq \ldots f(x)$;
(2) se f: X $\to \mathbb{C}$ è misurabile, esiste una successione $\{S_n\}$ di funzioni semplici e misurabili tali che $S_n(x) \to f(x)$ ed inoltre $0 \leq |S_1(x)| \leq |S_2(x)| \leq \ldots |S_n(x)| \leq |S_{n+1}(x)| \leq \ldots |f(x)|$.

DIMOSTRAZIONE. **(1)**: per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo suddividere $[0, +\infty]$ in $n2^n$ intervalli:

$$[0, +\infty] = \left[0, \frac{1}{2^n}\right) \cup \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right) \cup \ldots \cup \left[\frac{n2^n - 1}{2^n}, n\right) \cup [n, +\infty].$$

Definiamo i seguenti insiemi: $F_n = f^{-1}([n, +\infty])$, $E_{n,i} = f^{-1}(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right])$. In questo modo, possiamo definire, per ogni $x \in$ X ed $n \geq 1$, la successione di funzioni che approssimerà f:

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}}(x) + n\chi_{F_n}(x).$$

S_n è una funzione semplice, dunque è misurabile se e solo se lo sono gli insiemi su cui ammette valori, ovvero F_n e $E_{n,i}$. Questi ultimi sono preimmagini di boreliani, dunque sono misurabili.
Mostriamo dunque che si tratta di una successione crescente. Avendo scelto come estremi degli intervalli della partizione punti della forma $\frac{1}{2^n}$, ad ogni successiva iterazione del procedimento (e.g., nel passare da S_1 ad S_2) l'insieme $[0, +\infty]$ viene diviso in più sottointervalli e, su alcuni di essi, il valore della funzione aumenta. Perciò si osserva che la successione di funzioni è crescente (là dove il valore rimane lo stesso, due funzioni a passi diversi hanno lo stesso valore, mentre altrove quella al passo $n + 1$-esimo ha valore maggiore di quella al passo n-esimo).
Infine, sia $x \in$ X. Allora se $f(x) = +\infty$ si ha che per ogni n, $f(x) > n$, per cui $S_n(x) = n$ per ogni $n \geq 1$. Segue che $\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \lim_{n \to +\infty} n = +\infty = f(x)$. Se invece $f(x) < +\infty$, per ogni $n > f(x)$ esiste un j tale che $f(x) \in \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right) = \left[S_n(x), S_n(x) + \frac{1}{2^n}\right)$, dunque $0 \leq f(x) - S_n(x) \lneq \frac{1}{2^n}$. Per il teorema del confronto segue la convergenza puntuale di S_n ad f. □

1.3. Misure.

DEFINIZIONE. Sia (X, $\mathcal{M}$) uno spazio misurabile. Allora μ: $\mathcal{M} \to [0, +\infty]$ si dice *misura* se rispetta i seguenti due assiomi:

(1) (σ-additività) per ogni famiglia numerabile di insiemi {A_n} a due a due disgiunti, $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$,
(2) esiste un A $\in \mathcal{M}$ tale che $\mu(A) \lneq +\infty$.

Diciamo che (X, $\mathcal{M}$, μ) è uno *spazio di misura*.

27 TEOREMA Sia (X, $\mathcal{M}$, μ) uno spazio di misura, allora:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$,
(2) se {A_i, i = 1, ... n} è una famiglia finita di insiemi misurabili a due a due disgiunti, $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$,
(3) se A $\subseteq$ B, allora $\mu(A) \leq \mu(B)$,
(4) se {A_n} è una famiglia numerabile di insiemi misurabili, allora
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n),$$
(5) sia {A_n} una famiglia numerabile di insiemi misurabili tali che per ogni $i < j$, $A_i \subseteq A_j$. Allora $\mu(\cup_{n\geq1} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$,
(6) sia {A_n} una famiglia numerabile di insiemi misurabili tali che per ogni $i < j$, $A_i \supseteq A_j$. Allora se $\mu(A_1) < +\infty$, $\mu(\cap_{n\geq1} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$.

DIMOSTRAZIONE. (1) Per definizione di misura, esiste un sottoinsieme di X di misura finita. Lo si chiami B. Allora si definisca la successione di insiemi misurabili A_n nel modo seguente: se $n = 1$, $A_n = B$; altrimenti, $A_n = \emptyset$. Si tratta di una successione di insiemi a due a due disgiunti, e dunque per σ-additività:
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$
Tuttavia, il primo membro è effettivamente la sola misura di B, e si ottiene:
$$\mu(B) = \mu(B) + \sum_{n=2}^{+\infty} \mu(\emptyset),$$
da cui segue necessariamente che $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) Sia B_k definita nel modo seguente: se $k \leq n$, $B_k = A_k$; se $k > n$, $B_k = \emptyset$. Segue che $\mu(\cup_{k=1}^\infty B_k) = \mu(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$.

(3) Dal momento che B = $A \cup (B - A)$ e questi due sono disgiunti, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A)$ perché la misura prende valori positivi.

(4) Definiamo $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \cap (A_1)^c$, $B_3 = A_3 \cap (A_2)^c \cap (A_1)^c$ e così via. I B_k risultanti sono disgiunti e sono contenuti nei rispettivi A_k, inoltre la loro unione è esattamente l'unione di tutti gli A_k, dunque per monotonia $\mu(\cup_{k=1}^\infty A_k) = \mu(\cup_{k=1}^\infty B_k) = \sum_{k=1}^\infty \mu(B_k) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k)$.

(5) Consideriamo la successione di insiemi definita da $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \cap (A_1)^c$, $B_3 = A_3 \cap (A_2)^c \cap (A_1)^c$ e così via; allora risulta che siano tutti a due a due disgiunti e che dunque, per *finito*-additività, valga per ogni n:
$$\sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \mu(A_n).$$
Mandando al limite, per $n \to +\infty$, otteniamo:
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(B_k) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n),$$
tuttavia l'unione di tutti i B_k è uguale all'unione di tutti gli A_n, da cui
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

(6) Per ogni n risulta $\mu(A_n) < +\infty$ (dal momento che ogni A_n è contenuto in A_1 e quest'ultimo ha misura finita). Consideriamo dunque la decomposizione $A_1 = A_n \cup ((A_n)^c \cap A_1)$: siccome sono insiemi disgiunti di misura finita possiamo scrivere

$$\mu(A_n) = \mu(A_1) - \mu((A_n)^c \cap A_1).$$

Mandando al limite otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to+\infty} \mu((A_n)^c \cap A_1).$$

Ora chiamiamo $B_n = (A_n)^c \cap A_1$. Si ha che B_n è una successione crescente, dunque per (5) risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \mu((A_n)^c \cap A_1) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}((A_n)^c \cap A_1)\right) =$$
$$\mu(A_1 \cap \cup_{n=1}^{+\infty}(A_n)^c) = \mu(A_1 \cap (\cap_{n=1}^{+\infty} A_n)^c) = \mu(A_1) - \mu(\cap_{n=1}^{+\infty} A_n)$$

andando a sostituire nella seconda equazione,

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_1) + \mu(\cap_{n=1}^{+\infty} A_n) = \mu(\cap_{n=1}^{+\infty} A_n).$$

□

OSSERVAZIONE. Per la proprietà **(6)** è necessario assumere che $\mu(A_1) < +\infty$, infatti sia $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \mu)$ lo spazio di misura dei reali con la misura di Lebesgue (che nel caso di intervalli coincide con la loro lunghezza). Allora $A_n = [n, +\infty)$ rispetta le ipotesi in (6) tranne che $\mu(A_1) = +\infty$ e si ha che $\cap_{n\geq1} A_n = \emptyset$, dunque $\mu(\cap_{n\geq1} A_n) = 0$, mentre $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = +\infty$.
ESEMPIO. (X, $\mathcal{P}$(X), δ) è, fissato $x_0 \in$ X, uno spazio di misura secondo la *misura di Dirac concentrata in* x_0 definita come $\delta(A) = \chi_A(x_0)$.
($\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, c) è uno spazio di misura secondo la *misura conteggio* definita nel modo seguente: se E $\subset \mathbb{N}$ è finito, c(E) = card(E); se E è infinito, c(E) = $+\infty$.

1.4. Proprietà quasi-ovunque e misure complete. Sia (X, $\mathcal{M}$, μ) uno spazio di misura e sia $\phi(x)$ una formula al prim'ordine nella variabile libera x. Diciamo che $\phi(x)$ *vale quasi-ovunque su* X, in breve $\phi(x)$ *q.o.*, se esiste un sottoinsieme misurabile E di misura nulla tale per cui

$$(X, \mathcal{M}, \mu) \vDash \phi\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff y \in X \setminus E.$$

DEFINIZIONE. Sia f_n: X $\to \mathbb{C}$ una successione di funzioni. Diremo che la successione *converge q.o.* se esiste f: X $\to \mathbb{C}$ ed E $\in \mathcal{M}$ tali che μ(E) = 0 e $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in X \setminus E$.

La convergenza q.o. porta al limite alcune proprietà utili solo in presenza di particolari misure.
DEFINIZIONE. Una misura μ si dice *completa* se, preso comunque un insieme misurabile E con misura nulla, ogni suo sottoinsieme è misurabile e ha misura nulla.
NOTA. Ogni misura μ ammette un *completamento* costruito nel modo seguente: anzitutto, si aggiungono alla σ-algebra $\mathcal{M}$ tutti i sottoinsiemi di insiemi di misura nulla. Dopodiché si definisce $\overline{\mu}$ estendendo μ e assegnando valore zero a tutti gli insiemi appena aggiunti. Per questo motivo, l'integrazione rispetto a questa misura è assolutamente identica a quella rispetto a μ e, pertanto, si può in generale sempre assumere che la misura sia completa.
28 PROPOSIZIONE. Sia (X, $\mathcal{M}$, μ) uno spazio di misura con μ completa, allora:

(1) se $f = g$ q.o., e g è misurabile, f è misurabile,
(2) se f_n sono misurabili e convergono q.o. a f, allora f è misurabile.

1.5. Assoluta continuità.
DEFINIZIONE. Sia μ: $\mathcal{M} \to [0, +\infty]$ una misura.
μ si dice *finita* se μ(X) < $+\infty$. μ si dice *σ-finita* se esiste una successione di insiemi misurabili {X$_n$} tali che $\cup_{n\geq1}$X$_n$ = X e si ha che μ(X$_n$) < $+\infty$.
Sia poi λ: $\mathcal{M} \to +\infty$ un'altra misura. Allora λ è *assolutamente continua rispetto a* μ se per ogni E $\in \mathcal{M}$, μ(E) = 0 $\implies$ λ(E) = 0.
29 TEOREMA. Siano μ, λ due misure e sia λ finita. Allora λ è assolutamente continua rispetto a μ se e solo se $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tale che $\forall E \in \mathcal{M}$, μ(E) < δ $\implies$ λ(E) < ϵ.

DIMOSTRAZIONE. **TBD** □

2. MISURA DI LEBESGUE

Costruiamo passo a passo una misura molto importante nella teoria dell'integrazione, la già citata *misura di Lebesgue*. Iniziamo dagli insiemi cosiddetti elementari, ovvero sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ della forma $\Pi_{i=1}^N I_i$, dove I_i è un intervallo limitato (chiuso, aperto o né chiuso né aperto). Supponiamo che gli I_i abbiano come estremi i numeri reali a_i e b_i, allora definiamo sull'insieme $\mathcal{E}$ degli insiemi elementari la misura ν: $\mathcal{E} \to (0, +\infty)$. Se P $\in \mathcal{E}$ ha la forma $\Pi_{i=1}^N I_i$, allora $\nu(P) = \Pi_{i=1}^N (b_i - a_i)$.
Estendiamo ora la misura appena definita, definendo la *misura esterna* di un insieme, che chiameremo m_N^*: $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, +\infty]$. Per E $\subset \mathbb{R}^N$, m_N^*(E) = inf$\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(P_n)$, con E $\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ e $P_n \in \mathcal{E}$ aperto$\}$. La misura esterna è dotata di alcune proprietà:

30 PROPOSIZIONE.
(1) $m_N^*(\emptyset) = 0$,
(2) $m_N^*(\{x\}) = 0$ per qualunque $x \in \mathbb{R}^N$,
(3) se E $\subset$ F, $m_N^*(E) \leq m_N^*(F)$,
(4) $m_N^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m_N^*(E_n)$,
(5) se $P \in \mathcal{E}$, $m_N^*(P) = \nu(P)$.

DEFINIZIONE. E $\subset \mathbb{R}^N$ è *misurabile secondo Lebesgue* se preso comunque A $\subset \mathbb{R}^N$,

$$m_N^*(A) = m_N^*(A \cap E) + m_N^*(A \cap E^c).$$

DEFINIZIONE. Chiamiamo $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ misurabili, e per questi definiamo la *misura di Lebesgue* m_N ponendola uguale a m_N^*.

31 TEOREMA. Sia m_N la misura di Lebesgue N-dimensionale su $\mathbb{R}^N$, allora:

(1) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ è una σ-algebra,
(2) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ contiene gli aperti e, dunque, i boreliani di $\mathbb{R}^N$,
(3) m_N è una misura su $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$.

2.1. Misura e numerabilità.

32 PROPOSIZIONE. Sia A $\subset \mathbb{R}^N$ numerabile, allora A è misurabile e m_N(A) = 0.

33 PROPOSIZIONE. L'insieme di Cantor ha misura nulla.

2.2. Misura e topologia.

34 PROPOSIZIONE. Scelto comunque $\epsilon > 0$, esiste un aperto A denso in $\mathbb{R}^N$ tale che m_N(A) < ϵ.

35 PROPOSIZIONE. Scelto comunque $\epsilon > 0$, esiste un chiuso B mai denso (i.e., con interno della chiusura vuoto) tale che m_N(B) $\geq 1 - \epsilon$.

2.3. Proprietà di regolarità.

36 TEOREMA Sono equivalenti,

(1) E misurabile,
(2) per ogni $\epsilon > 0$, esiste un aperto A $\supset$ E tale che m_N^*(A$\setminus$E) < ϵ,
(3) esiste un boreliano B, B $\supset$ E, tale che m_N^*(B$\setminus$E) = 0,
(4) per ogni $\epsilon > 0$, esiste un chiuso C, C $\subset$ E, tale che m_N^*(E$\setminus$C) < ϵ,
(5) esiste un boreliano D, D $\subset$ E, tale che m_N^*(E$\setminus$D) = 0,

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo da (1) $\to$ (2). Anzitutto supponiamo $m_N^*(E)$ finita: per definizione di misura esterna, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento in parallelepipedi (aperti) $\{\mathcal{P}_n\}$ di E tali che $m_N^*(\cup_n \mathcal{P}_n) < m_N^*(E) + \varepsilon$. Dal momento che la misura di E è finita possiamo manipolare algebricamente la disequazione fino ad ottenere

$$m_N^*((\cup_n \mathcal{P}_n) \setminus E) < \varepsilon.$$

Consideriamo dunque come aperto $A = \cup_n \mathcal{P}_n$ ed otteniamo la tesi. Sia ora $m_N^*(E) = +\infty$. Sia $\{Q_n\}$ una partizione di $\mathbb{R}^N$ in parallelepipedi. Definiamo $E_n = E \cap Q_n$ una decomposizione di E nei Q_n, e osserviamo che per ogni n, $E_n \subseteq E$, dunque sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ misurabili (in quanto intersezione finita di sottoinsiemi misurabili) e di misura finita. Allora vale quanto appena mostrato e per ogni n possiamo trovare $A_n \supseteq E_n$ tale che $m^*_N(A_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Possiamo dunque chiamare $A = \cup_n A_n$, e verificare che

$$m^*_N((\cup_n A_n) \setminus E) = m^*_N((\cup_n A_n) \cap E^c) = m^*_N((\cup_n A_n) \cap (\cup_k E_k)^c)) =$$
$$m^*_N((\cup_n A_n) \cap (\cap_k E^c_k)) = m^*_N(\cup_n (A_n \cap (\cap_k E^c_k)))$$

e notando che per ogni n, $A_n \cap (\cap_k E^c_k) \subseteq A_n \cap E^c_n$ concludiamo, per monotonia e sub-additività, che

$$m^*_N((\cup_n A_n) \setminus E) = m^*_N((\cup_n A_n) \cap E^c) =$$
$$m^*_N(\cup_n (A_n \cap (\cap_k E^c_k))) \leq m^*_N(\cup_n A_n \cap E^c_n) \leq \sum_n m^*_N(A_n \cap E^c_n) = \varepsilon.$$

Per mostrare che (2) $\to$ (3), consideriamo quanto appena visto e costruiamo una successione U_n di aperti tali che $m^*_N(U_n \setminus E) < \frac{1}{n}$. Sia $U = \cap_{n=1}^{+\infty} U_n$, allora per ogni n risulta $m^*_N(U \setminus E) \leq m^*_N(U_n \setminus E) = \frac{1}{n}$ per monotonia; essendo $m^*_N(U \setminus E) < \frac{1}{n}$ per ogni n questi non può essere che uguale a zero. Mostriamo ora che (3) $\to$ (1): $U \setminus E$ risulta misurabile in quanto di misura nulla, e $E = U \setminus (U \setminus E)$, dunque E è misurabile. Per mostrare che (1) $\to$ (4), (4) $\to$ (5) e (5) $\to$ (1) ripetiamo gli argomenti precedenti per E^c. □

2.4. Insiemi patologici. In questa sezione costruiremo due insiemi per così dire *patologici*: l'insieme di Vitali e quello di Cantor. Il primo mostrerà l'esistenza di insiemi non Lebesgue-misurabili, mentre al secondo si dovrà un esempio di insieme non numerabile (in effetti della cardinalità del continuo) di misura nulla.

DEFINIZIONE. L'*assioma della scelta* (AC) afferma che, preso comunque un insieme X, esiste una funzione (detta *funzione di scelta*) f: $\mathcal{P}$(X)$\setminus\{\emptyset\} \to$ X che assegna ad ogni sottoinsieme A di X un suo elemento.

DEFINIZIONE. Si consideri [0,1] e vi si introduca la seguente relazione di equivalenza: $x \sim y$ se e solo se $x - y \in \mathbb{Q}$. Si chiami $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$([0,1]) il quoziente dato da [0,1] rispetto alla relazione d'equivalenza $\sim$.

Per AC, esiste una funzione di scelta f da $\mathcal{P}$([0,1])$\setminus\{\emptyset\}$ in [0,1]. Si consideri g definita come la restrizione di f ad $\mathcal{A}$. Definiamo così,

DEFINIZIONE. L'*insieme di Vitali* $\mathbb{V}$ è l'immagine dell'insieme $\mathcal{A}$ sotto g, ovvero

$$\mathbb{V} = \{g([x]_\sim),\ x \in [0,1]\}$$

Si osservi che $\mathbb{V} \subset$ [0,1]. Inoltre si ha che card($\mathbb{V}$) $\gneq$ card($\mathbb{N}$).

Sia ora q_n un'enumerazione di $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$, e si consideri per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{V}_n = \mathbb{V} + q_n.$$

Si ha che, presi $q_{n_1} \neq q_{n_2}$, allora $\mathbb{V}_{n_1} \cap \mathbb{V}_{n_2} = \emptyset$ e, inoltre, [0,1] $\subset \cup_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{V}_n) \subset [-1,2]$, per cui per monotonia:

$$1 = m^*([0,1]) \leq m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{V}_n\right) \leq m^*([-1,2]) = 3.$$

Si supponga ora $\mathbb{V}$ misurabile, allora sono misurabili anche tutti i $\mathbb{V}_n$, dunque lo è la loro unione $\cup_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{V}_n)$. Dal momento che sono disgiunti, si avrebbe che $m(\cup_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{V}_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} m(\mathbb{V}_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} m(\mathbb{V})$ che è pari a 0 se m($\mathbb{V}$) = 0, oppure è +∞ se m($\mathbb{V}$) > 0. In entrambi i casi si contraddicono i limiti imposti poco sopra dalle misure esterne. Si conclude che $\mathbb{V}$ non può essere misurabile.

— Insieme di Cantor (**TBD**)

2.5. Completezza ed altre proprietà.

37 PROPOSIZIONE. La misura di Lebesgue che stiamo per definire è completa.

DIMOSTRAZIONE. **TBD** □

3. TEORIA DELL'INTEGRAZIONE

Iniziamo a definire l'integrale esteso secondo Lebesgue nel caso di funzioni semplici, positive e misurabili. Utilizzando i teoremi di approssimazione, estenderemo poi la definizione.

DEFINIZIONE. Sia (X, $\mathcal{M}$, μ) uno spazio di misura e sia S: X $\to$ $[0, +\infty)$ una funzione semplice misurabile. Sia data la sua decomposizione standard $S(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$, con A$_i$ = $S^{-1}(\{\alpha_i\})$. Definiamo allora l'*integrale esteso ad X* di S come

$$\int_X S \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

OSSERVAZIONE. L'integrale appena definito è un elemento dell'insieme $[0, +\infty]$. Dal momento che si può avere, per qualche j, $\alpha_j = 0$ e $\mu(A_j) = +\infty$, si pone per convenzione che $0 \cdot +\infty = 0$. Inoltre, se S è una funzione costantemente uguale a s, allora l'integrale esteso di S ad X è semplicemente $s\mu(X)$, ed in particolare se $s = 1$ si ha che l'integrale restituisce la misura di X.

DEFINIZIONE. Sia (X, $\mathcal{M}$, μ) uno spazio di misura e sia f: X $\to$ $[0, +\infty]$ una funzione misurabile. Definiamo Σ_f l'insieme $\{s : X \to [0, +\infty)$: s è semplice, misurabile e su tutto X si ha $s \leq f\}$. Allora l'*integrale esteso ad X di* f è definito come

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{S \in \Sigma_f} \int_X S \, \mathrm{d}\mu.$$

OSSERVAZIONE. Questa definizione coincide, nel caso di una funzione semplice, con quella data poco sopra, infatti se S è semplice allora l'estremo superiore è realizzato da S stessa.

DEFINIZIONE. Estendiamo infine la definizione di integrale ad insiemi E $\subsetneq X$. In questo caso, se S è semplice, misurabile e positiva (finita) si ha che

$$\int_E S \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E),$$

e così, per f funzione misurabile positiva,

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{S \in \Sigma_f} \int_E S \, \mathrm{d}\mu.$$

38 PROPOSIZIONE. Sia (X, $\mathcal{M}$, μ) uno spazio di misura, e siano f, g: X $\to$ $[0, +\infty]$ misurabili, A, B $\in \mathcal{M}$, $\lambda > 0$. Allora:

(1) $f \leq g \implies \int_A f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_A g \, \mathrm{d}\mu$,
(2) $A \subset B \implies \int_A f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_B f \, \mathrm{d}\mu$,
(3) $\int_A \lambda f \, \mathrm{d}\mu = \lambda \int_A f \, \mathrm{d}\mu$,
(4) $\mu(A) = 0 \implies \int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

DIMOSTRAZIONE. **TBD** □

3.1. Integrale di funzioni complesse.

DEFINIZIONE. Sia (X, $\mathcal{M}$, μ) uno spazio di misura, e sia f: X $\to \mathbb{C}$ misurabile. Allora f si dice *integrabile* (oppure *sommabile*) rispetto a μ se

$$\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Indichiamo l'insieme delle funzioni integrabili rispetto a μ con $\mathcal{L}^1(\mu)$.

DEFINIZIONE. Sia (X, $\mathcal{M}$, μ) uno spazio di misura ed $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Siano $u = \mathbb{R}\mathrm{e}f$ e $v = \Im f$. Si ha $f = u + \mathrm{i}v$ $= (u^+ - u^-) + \mathrm{i}(v^+ - v^-)$, con tutte le funzioni in gioco a valori positivi. In particolare, f è misurabile e dunque lo sono anche $u^\pm$ e $v^\pm$, e poiché $0 \leq u^\pm \leq |u| \leq |f|$ e $0 \leq v^\pm \leq |v| \leq |f|$, dal fatto che f è integrabile si ha che anche $u^\pm$ e $v^\pm$ lo sono. Si pone perciò

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X u^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X u^- \, \mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \left(\int_X v^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X v^- \, \mathrm{d}\mu \right).$$

ESEMPIO. Se μ(X) < $+\infty$ e f è limitata e misurabile, allora f è integrabile.

39 PROPOSIZIONE. $\mathcal{L}^1(\mu)$ è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni su funzioni, e l'integrale appena definito è lineare.

40 PROPOSIZIONE. Per ogni $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

3.2. Passaggio al limite sotto il segno di integrale.

3.2.1. *Teorema di convergenza monotona e conseguenze.*

41 TEOREMA *(convergenza monotona, o di beppo levi)* Sia (X, $\mathcal{M}$, μ) uno spazio di misura e siano f_n, f: X $\to [0, +\infty]$ tali che

(1) f_n è misurabile per qualsiasi $n \geq 1$,
(2) $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ per qualunque $x \in$ X e
(3) $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ per ogni $n \geq 1$ ed $x \in$ X.

Allora si ha che f è misurabile e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Prima di procedere con la dimostrazione, mostriamo un lemma ausiliario:

42 TEOREMA Sia (X, $\mathcal{M}$, μ) uno spazio di misura e sia S: X $\to [0, +\infty]$ una funzione semplice misurabile. Allora μ_S è una misura.

DIMOSTRAZIONE. S ammette una decomposizione standard, $S(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \chi_{A_i}(x)$, dunque per ogni E $\in \mathcal{M}$ si ha che μ_S(E) = $\int_E S \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(A_i \cap E)$. Se A = $\emptyset$, allora μ_S(A) = 0 < $+\infty$. Sia dunque {E$_n$} una famiglia numerabile di insiemi a due a due disgiunti e sia E = $\cup_{n\geq1} E_n$. Allora si ha che

$$\begin{aligned}
\mu_S(E) = \int_E S \,\mathrm{d}\mu &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(A_i \cap E) \\
&= \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu\left(\bigcup_{n\geq1} (A_i \cap E_n)\right) \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_i \mu(A_i \cap E_n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(A_i \cap E_n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E_n} S \,\mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_S(E_n),
\end{aligned}$$

dove lo scambio delle serie è reso possibile dalla positività di $\alpha_i \mu(A_i \cap E_n)$. □

DIMOSTRAZIONE. (*Convergenza monotona*).
La misurabilità passa al limite sotto le ipotesi di convergenza puntuale, dunque resta da dimostrare l'uguaglianza. Per ipotesi, $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in$ X ed ogni $n \geq 1$. Dunque si ha che, per monotonia dell'integrale,

$$\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f_{n+1} \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu,$$

dunque la successione degli integrali ammette limite, sia esso $\alpha = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$. Dalla relazione sopra, $\alpha \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu$. Scelti comunque $S \in \Sigma_f$ e $C \in (0,1)$, sia E$_n$ = $\{x \in$ X: $f_n(x) \geq CS(x)\}$. Si ha che E$_n$ $\in \mathcal{M}$ per qualunque n, infatti E$_n$ = $(f_n - CS)^{-1}([0, +\infty])$, ovvero è la preimmagine di un boreliano mediante una funzione misurabile. Inoltre, E$_n$ $\subseteq$ E$_{n+1}$ per ogni n, dal momento che se $x \in$ E$_n$ si ha che $f_n(x) \geq CS(x)$, ma per ogni $x \in$ X $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, da cui $x \in$ E$_{n+1}$. Infine, $\cup_{n\geq1} E_n$ = X. Di conseguenza, per la continuità della misura $\mu_S(X) = \mu_S(\cup_{n\geq1} E_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu_S(E_n)$. Per monotonia dell'integrale, $\mu_S(X) \geq \mu_S(E_n) \geq \mu_{CS}(E_n) = C\mu_S(E_n)$ e, passando al limite per $n \to +\infty$,

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \geq C\mu_S(X) = C \int_X S \,\mathrm{d}\mu$$

e poi per $C \to 1^-$,

$$\alpha = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X S \, \mathrm{d}\mu.$$

Dal momento che questo è vero per qualunque scelta di S, α è un maggiorante dell'insieme degli integrali di funzioni di Σ_f su X; in particolare, è maggiore o uguale dell'estremo superiore di questo insieme, ovverosia $\alpha \geq \int_X f \, \mathrm{d}\mu$. □

43 TEOREMA *(fatou)* Sia (X, $\mathcal{M}$, μ) uno spazio di misura, f_n: X $\to [0, +\infty]$ misurabili, allora:

$$\int_X \liminf_{n \to +\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

DIMOSTRAZIONE. Definiamo $g_k = \inf_{n \geq k} f_n$. Si ha che $g_k \leq g_{k+1}$ e converge a $\liminf_{n \to +\infty} f_n$ per definizione. Allora la tesi può essere riscritta nel modo seguente,

$$\int_X \lim_{n \to +\infty} g_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Dal momento che per ogni $x \in X$ ed ogni $n \geq k$, $g_k(x) \leq f_n(x)$, allora per monotonia:

$$\int_X g_k \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Perciò,

$$\int_X g_k \, \mathrm{d}\mu \leq \inf_{n \geq k} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu,$$

da cui per conservazione del segno,

$$\lim_{k \to +\infty} \int_X g_k \, \mathrm{d}\mu \leq \lim_{k \to +\infty} \inf_{n \geq k} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Per il teorema di convergenza monotona possiamo scambiare limite e integrale,

$$\int_X \lim_{k \to +\infty} g_k \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

□

Le serie numeriche possono essere ridefinite a partire dall'integrale esteso. Nello specifico, sia X = $\mathbb{N}$ con la struttura di spazio misurabile data dalla σ-algebra $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Sia inoltre c la misura conteggio. Sia poi f: $\mathbb{N} \to [0, +\infty]$ una qualsiasi funzione (dal momento che ogni funzione è misurabile). Allora si verifica che

$$\int_{\mathbb{N}} f \, \mathrm{d}\mathsf{c} = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n).$$

Infatti, sia definita f_n nel modo seguente: $f_n(x) = f(x)$, se $1 \leq x \leq n$, mentre $f_n(x) = 0$ se $x > n$. Poiché per ogni $x \in \mathbb{N}$ si ha $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$, il teorema della convergenza monotona ci garantisce che

$$\int_{\mathbb{N}} f \, \mathrm{d}\mathsf{c} = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n \, \mathrm{d}\mathsf{c} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(i)\mathsf{c}(\{i\}) + 0\mathsf{c}(\{n+1, \ldots\}) = \sum_{i=1}^{+\infty} f(i).$$

44 PROPOSIZIONE. Sia (X, $\mathcal{M}$, μ) uno spazio di misura, f, g: X $\to [0, +\infty]$ misurabili, allora

$$\int_X (f+g) \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

DIMOSTRAZIONE. **TBD** □

45 TEOREMA Sia (X, $\mathcal{M}$, μ) uno spazio di misura e siano f_n: X $\to [0, +\infty]$ misurabili, allora

$$\int_X \sum_{n \geq 1} f_n \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n \geq 1} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

DIMOSTRAZIONE. Definiamo $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. Allora la tesi si può riscrivere come

$$\int_X \lim_{n\to+\infty} S_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu.$$

Poiché a secondo membro ora abbiamo una somma finita di integrali, possiamo riscrivere la tesi come

$$\int_X \lim_{n\to+\infty} S_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X \sum_{k=1}^{n} f_k \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X S_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Osserviamo che, essendo le f_n a valori positivi, S_n è una successione di funzioni crescente. Per il teorema di convergenza monotona segue la tesi. □

46 TEOREMA Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura, e sia $f\colon X \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile. Allora la funzione $\mu_f\colon \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ definita nel modo seguente,

$$\mu_f(E) = \int_E f \,\mathrm{d}\mu,$$

è una misura e si ha

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu_f = \int_X fg \,\mathrm{d}\mu.$$

DIMOSTRAZIONE. Anzitutto, $\mu_f(\emptyset) = 0 < +\infty$.
Per mostrare la σ-additività, dobbiamo mostrare che

$$\int_{\bigcup\limits_{n\geq 1} E_n} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\geq 1} \int_{E_n} f \,\mathrm{d}\mu$$

o, equivalentemente, che (detto $E = \cup_{n\geq 1} E_n$)

$$\int_X \chi_E \, f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\geq 1} \int_X \chi_{E_n} \, f \,\mathrm{d}\mu.$$

Dal momento che gli E_n sono a due a due disgiunti, $\chi_E = \sum_{n\geq 1} \chi_{E_n}$, dunque ci si riduce a voler mostrare che

$$\int_X \sum_{n\geq 1} (\chi_{E_n} \, f) \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\geq 1} \int_X \chi_{E_n} \, f \,\mathrm{d}\mu.$$

Essendo gli E_n misurabili lo sono anche le loro funzioni caratteristiche e così il loro prodotto per f, dunque questo segue dal teorema di scambio serie-integrale appena dimostrato. Per la seconda parte, procediamo per step: anzitutto, proviamolo per le funzioni indicatrici χ_A di insiemi misurabili. Si ha infatti che

$$\int_X \chi_A \,\mathrm{d}\mu_f = \mu_f(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_X \chi_A f \,\mathrm{d}\mu.$$

A questo punto sia $g = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i}$. Il risultato vale per la linearità dell'integrale.
Sia ora g una qualsiasi funzione misurabile. Per il teorema di approssimazione mediante funzioni semplici esiste una successione di funzioni $S_n(x) \to g(x)$ tale per cui $0 \leq |S_1(x)| \leq |S_2(x)| \leq \ldots \leq |g(x)|$. Per il teorema di convergenza monotona,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X S_n \,\mathrm{d}\mu_f = \int_X g \,\mathrm{d}\mu_f.$$

Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X S_n \,\mathrm{d}\mu_f = \lim_{n\to+\infty} \int_X f S_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Chiamiamo $Q_n(x) = f(x)S_n(x)$. $f(x)$ è una funzione positiva, dunque la successione $Q_n(x)$ rimane crescente e convergente puntualmente a $f(x)g(x)$. Allora per il teorema di convergenza monotona,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X Q_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X fg \,\mathrm{d}\mu.$$

□

47 COROLLARIO. Sia (X, $\mathcal{M}$, μ) uno spazio di misura e f: X $\to [0, +\infty]$ misurabile con $\int_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty$, allora $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0$ tale che $\forall E \in \mathcal{M}$, μ(E) < $\delta \implies \mu_f$(E) < ϵ.

48 TEOREMA *(radon-nikodym)*. Siano μ, λ: $\mathcal{M} \to [0, +\infty]$ due misure. Siano μ σ-finita e λ finita: se λ è assolutamente continua rispetto a μ, allora esiste f: X $\to [0, +\infty]$ misurabile tale che $\int_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty$ e per ogni E $\in \mathcal{M}$, λ(E) = $\int_E f \, \mathrm{d}\mu$.

3.2.2. *Teorema della convergenza dominata.*

49 TEOREMA *(convergenza dominata, o di lebesgue)* Sia (X, $\mathcal{M}$, μ) uno spazio di misura, e siano f_n: X $\to \mathbb{C}$ misurabili tali che:

(1) esiste f: X $\to \mathbb{C}$ tale che, per ogni $x \in$ X, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$,
(2) esiste g: X $\to [0, +\infty]$ integrabile tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in$ X ed ogni $n \geq 1$.

Allora tanto f quanto f_n sono integrabili, e si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha che $|f| \leq g$ per conservazione del segno, dunque in particolare $f \in \mathrm{L}^1(\mu)$. Inoltre $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$, da cui applicando il lemma di Fatou alla funzione $2g - |f_n - f|$ si ottiene che

$$\begin{aligned}
&\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X 2g - |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int_X 2g \, \mathrm{d}\mu + \liminf_{n\to+\infty} \left(- \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \right) \\
&= \int_X 2g \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

g è sommabile dunque il suo integrale è finito e si ottiene, sottraendolo due volte ad ambo i membri,

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \leq 0.$$

Una successione a valori positivi può ammettere limite superiore nullo (se converge a zero) o, in ogni altro caso, ha limite superiore positivo. Non può che essere, dunque che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

In particolare, si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \int_X f_n - f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0,$$

da cui segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n - f \, \mathrm{d}\mu = 0,$$

che per linearità è la tesi cercata. □

50 COROLLARIO. Sia (X, $\mathcal{M}$, μ) uno spazio di misura, e siano f_n: X $\to \mathbb{C}$ misurabili tali che:

(1) esiste f: X $\to \mathbb{C}$ tale che, per ogni $x \in$ X, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$,
(2) esiste $C > 0$ tale che $|f_n(x)| \leq C$ per ogni $x \in$ X e $n \geq 1$,
(3) $\mu(X) < +\infty$.

Allora tanto f quanto f_n sono integrabili, e si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0$$

e
$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

51 COROLLARIO. Sia (X, $\mathcal{M}$, μ) uno spazio di misura, siano f_n: X $\to \mathbb{C}$ misurabili. Se $\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(x)| < +\infty$ per ogni $x \in$ X e la somma è integrabile, allora
$$\int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

DIMOSTRAZIONE. **TBD** □

ESEMPIO. Sia $f_n(x) = x^n$ per $x \in [0,1]$. Questa successione converge puntualmente a $f(x)$ = 0 per $x \in [0,1)$ e $f(x)$ = 1 per $x = 1$, ma non vi converge uniformemente. Inoltre, $|x^n| \leq 1$ per ogni $x \in [0,1]$ e $\mu([0,1]) = 1$, dunque per il corollario del teorema della convergenza dominata,
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,1]} x^n \,\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

NOTA. Il lemma di Fatou e i teoremi di convergenza valgono anche se all'ipotesi di convergenza puntuale si sostituisce quella di convergenza q.o..

3.3. Lo spazio $\mathsf{L}^1(\mu)$. Svilupperemo ora la teoria necessaria a dotare lo spazio $\mathcal{L}^1(\mu)$ della struttura di spazio normato. In effetti, non sarà possibile farlo su $\mathcal{L}^1(\mu)$, ma dovremo ricorrere ad una sofisticazione. Definiamo, per $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$,
$$\|f\| = \int_X |f|\mathrm{d}\mu.$$
Questa funzione rispetta quasi tutti gli assiomi necessari a renderla una norma, tranne uno. Infatti, si ha che $\|f\| \geq 0$ per ogni f integrabile (per via della monotonia dell'integrale), inoltre per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ si ha che
$$\|\lambda f\| = \int_X |\lambda f|\,\mathrm{d}\mu = |\lambda|\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu = |\lambda|\|f\|,$$
e inoltre per ogni f, g integrabili,
$$\|f+g\| = \int_X |f+g|\,\mathrm{d}\mu \leq \int_X |f|+|g|\,\mathrm{d}\mu = \|f\|+\|g\|.$$
La proprietà che viene a mancare è quella che afferma che, presa f integrabile, se $\|f\| = 0$, allora $f \equiv 0$. Il motivo è che, presa una qualunque funzione nulla ovunque tranne che su di un insieme di misura nulla, il suo integrale sarà pari a zero senza che essa sia costantemente zero. Per risolvere questo problema, dobbiamo anzitutto verificare che sia l'unica patologia possibile:

52 PROPOSIZIONE. Sia $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tale che $\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu = 0$. Allora esiste A $\in \mathcal{M}$ tale che $\mu(A) = 0$ e per ogni $x \in X$, se $x \in A$ allora $f(x) \neq 0$, se $x \in X \setminus A$ invece $f(x) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{Z}_f$ = {$x \in$ X: $f(x) = 0$}.
Allora $\mathcal{Z}_f^c$ = {$x \in$ X: $|f(x)| \neq 0$} = $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}$ {$x \in$ X: $|f(x)| > \frac{1}{n}$}, dunque si ha che
$$\int_{A_n}|f|\,\mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{n}\int_{A_n} 1\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{n}\mu(A_n).$$
Tuttavia,
$$0 \leq \frac{1}{n}\mu(A_n) \leq \int_{A_n}|f|\mathrm{d}\mu \leq \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu = 0$$
da cui $\mu(A_n) = 0$ per qualsiasi $n \geq 1$. Per la subaddività della misura, $\mu(\mathcal{Z}_f^c) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\geq 1}\mu(A_n) = 0$, da cui $\mu(\mathcal{Z}_f^c) = 0$. □

DEFINIZIONE. Diciamo che f è nulla *quasi ovunque* se $\mu(\mathcal{Z}_f^c) = 0$. Diciamo inoltre che f è equivalente a g se e solo se $f - g$ è nulla quasi ovunque. Chiamiamo $\mathsf{L}^1(\mu)$ il quoziente di $\mathcal{L}^1(\mu)$ rispetto a questa relazione d'equivalenza.

OSSERVAZIONE. D'ora in poi sarà frequente un abuso di notazione in cui si confonderanno f e la sua classe di equivalenza in $\mathsf{L}^1(\mu)$. Si tratta di un abuso innocuo, dal momento che f e g equivalenti implica che $\|f\| = \|g\|$.

53 TEOREMA $\mathsf{L}^1(\mu)$ con la mappa indotta sul quoziente da $\|\cdot\|$ (che chiameremo ancora con lo stesso nome) è uno spazio normato completo.

In quanto spazio normato, $\mathsf{L}^1(\mu)$ acquista una struttura topologica, dunque è possibile parlare di *densità* di un sottoinsieme di $\mathsf{L}^1(\mu)$. In particolare, diremo che $E \subset \mathsf{L}^1(\mu)$ è denso se e solo se $\forall \epsilon > 0\, \forall g \in \mathsf{L}^1(\mu)\, \exists h \in E\, \|h-g\| < \epsilon$, in altre parole se esiste una successione $\{h_n\} \subset E$ tale per cui $\|h_n - g\| \to 0$. Mostriamo ora che alcuni sottoinsiemi interessanti di $\mathsf{L}^1(\mu)$ sono densi:

54 TEOREMA S_μ = {s: X $\to \mathbb{C}$ semplice, misurabile ed integrabile} è un sottoinsieme denso di $\mathsf{L}^1(\mu)$.

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che, presa comunque $f \in \mathsf{L}^1(\mu)$, esiste una successione $\{s_n\}$ di funzioni semplici e misurabili tali che $s_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in$ X e, per ogni $n \geq 1$, $|s_n| \leq |f|$. Per monotonia dell'integrale segue che $s_n \in \mathsf{L}^1(\mu)$ per ogni $n \geq 1$. Per il teorema della convergenza dominata, $\lim_{n\to+\infty} \int_X |s_n - f|\, \mathrm{d}\mu = 0$, ossia $\lim_{n\to+\infty} \|s_n - f\| = 0$. □

55 TEOREMA. Sia ($\mathbb{R}^N$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, μ) lo spazio euclideo N-dimensionale con la struttura di spazio di misura data dalla misura di Lebesgue μ. Allora C_C = {f: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ continue a supporto compatto} è un sottoinsieme denso di $\mathsf{L}^1(\mathbb{R}^N;\mu)$.

3.4. Misura in spazi prodotto. Siano (X, $\mathcal{M}$, μ) e (Y, $\mathcal{N}$, λ) due spazi di misura, con μ e λ σ-finite. L'obiettivo sarà dare una struttura di spazio di misura all'insieme prodotto, X $\times$ Y. Anzitutto, dotiamolo della struttura di spazio misurabile: definiamo $\mathcal{F}$ l'insieme {A $\times$ B: A $\in \mathcal{M}$, B $\in \mathcal{N}$} e chiamiamo $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ la σ-algebra generata da $\mathcal{F}$.
Per costruire la misura prodotto ci ispiriamo al caso di $\mathbb{R}^2$. L'obiettivo sarà ricalcolare ciò che si ha nel caso dell'integrale doppio *à la Riemann*: si può suddividere l'insieme in questione in *sezioni* orizzontali (Q_y) e verticali (Q_x) e a quel punto richiedere che valgano le seguenti formule:

$$(\mu\times\lambda)(Q) = \int\limits_{X\times Y} \chi_Q\, \mathrm{d}(\mu\times\lambda) = \int\limits_X \left(\int_{Q_x} \chi_Q\, \mathrm{d}\lambda(y)\right) \mathrm{d}\mu(x) = \int\limits_Y \left(\int_{Q_y} \chi_Q\, \mathrm{d}\mu(x)\right) \mathrm{d}\lambda(y)$$

che in qualche modo sono una versione più generale delle formule di separazione per integrali multipli. Prima di poter definire la misura prodotto in questo modo, però, è necessario verificare che sia possibile calcolare questi integrali.
DEFINIZIONE. Definiamo le sezioni di un sottoinsieme Q di X $\times$ Y. Se $x \in$ X ed $y \in$ Y, Q_x = $\{z \in$ Y: $(x,z) \in Q\}$ e Q_y = $\{z \in$ X: $(z,y) \in Q\}$.

56 PROPOSIZIONE. Sia Q $\in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, allora $Q_x \in \mathcal{N}$ e $Q_y \in \mathcal{M}$ per qualunque $x \in X$, $y \in Y$. Dunque esistono $\lambda(Q_x)$ e $\mu(Q_y)$ e risultano definite e misurabili le funzioni $\lambda(Q_*)$ e $\mu(Q_*)$ che associano rispettivamente a x la misura di $\lambda(Q_x)$ e ad y la misura di $\mu(Q_y)$.

57 TEOREMA. Risultano definiti e uguali i seguenti integrali, per qualunque $x \in$ X ed $y \in$ Y:

$$\int\limits_X \lambda(Q_x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \int\limits_Y \mu(Q_y)\, \mathrm{d}\lambda(y).$$

DEFINIZIONE. La misura $\mu \times \lambda$ è definita su $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ nel modo seguente: ad un insieme misurabile Q associa $\int_X \lambda(Q_x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(Q_y)\, \mathrm{d}\lambda(y)$.
ESEMPIO. A partire da due spazi euclidei $\mathbb{R}^N$ ed $\mathbb{R}^M$ dotati della misura di Lebesgue si può costruire lo spazio prodotto e, sebbene la σ-algebra prodotto sia la stessa costruita su $\mathbb{R}^{N+M}$, la misura prodotto non è la stessa: $m_N \times m_M \neq m_{N+M}$. In effetti, quest'ultima è il completamento della prima.
DEFINIZIONE. Sia f: X $\times$ Y $\to \mathbb{C}$ misurabile. Definiamo le funzioni $f_x = f(x,\cdot)$ e $f^y = f(\cdot,y)$.

58 PROPOSIZIONE. Se f è misurabile, sono misurabili f_x ed f^y.

In virtù delle definizioni appena date, possiamo enunciare il seguente importante teorema:

59 TEOREMA *(fubini-tonelli, caso complesso).* Siano (X, $\mathcal{M}$, μ) e (Y, $\mathcal{N}$, λ) due spazi di misura. Sia f: X$\times$Y $\to \mathbb{C}$. Allora:

(1) se $f \in \mathsf{L}^1(\mu \times \lambda)$, allora sia f_x che f^y sono nei rispettivi spazi L^1 per quasi ogni x od y, le funzioni

$$x \to \int_Y f_x \, \mathrm{d}\lambda$$
$$y \to \int_X f^y \, \mathrm{d}\mu$$

sono nei rispettivi spazi L^1 (e prendono solo valori finiti) e si ha

$$\int_{X\times Y} f(x,y) \, \mathrm{d}(\mu\times\lambda) = \int_X \int_Y f(x,y) \, \mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}\mu = \int_Y \int_X f(x,y) \, \mathrm{d}\mu \, \mathrm{d}\lambda,$$

(2) se f è misurabile e vale una delle due condizioni,

$$\int_X \int_Y |f_x| \, \mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}\mu < +\infty$$

oppure

$$\int_Y \int_X |f^y| \, \mathrm{d}\mu \, \mathrm{d}\lambda < +\infty$$

allora $f \in \mathsf{L}^1(\mu \times \lambda)$.

60 TEOREMA *(fubini-tonelli, caso reale).* Sia $f\colon \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to [0, +\infty]$: se f è misurabile, allora vale

$$\int_{X\times Y} f(x,y) \, \mathrm{d}(\mu\times\lambda) = \int_X \int_Y f(x,y) \, \mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}\mu = \int_Y \int_X f(x,y) \, \mathrm{d}\mu \, \mathrm{d}\lambda,$$

dove le uguaglianze sono da intendersi in $[0, +\infty]$.

3.5. Riemann vs. Lebesgue. Procediamo a fare un confronto fra le due teorie dell'integrazione. Anzitutto, è bene ricordare come l'integrazione secondo Riemann abbia un significato teorico diverso a seconda che gli insiemi su cui si integra abbiano misura finita o infinita, mentre per Lebesgue questo tipo di problema non viene a porsi. Soffermiamoci dapprima sull'integrazione su insiemi di misura finita, il cosiddetto integrale *definito* (à la Riemann). D'ora in poi, sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Allora perché si possa scrivere l'integrale di Riemann si richiede che f sia limitata, mentre quello di Lebesgue prevede come clausola una funzione misurabile. Entrambi vengono costruiti a partire da funzioni *semplici*, ma se nel caso di Riemann (d'ora in poi, funzioni R-semplici) queste sono funzioni che prendono valori costanti su intervalli della retta reale, nel caso di Lebesgue (L-semplici) prendono valori costanti su sottoinsiemi misurabili della retta. In effetti, si ha che R-semplice $\implies$ L-semplice, ma non viceversa (ad esempio, $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ è L-semplice ma non R-semplice). D'altro canto, se f è una funzione R-semplice si ha

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^N s_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^N s_i m([x_{i-1}, x_i]) = \int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}m,$$

ovvero gli integrali vanno a coincidere. La famiglia di funzioni L-semplici è perciò più grande di quella di funzioni R-semplici — diventano integrabili molte più funzioni. Si ha in effetti che, in particolare, rimangono integrabili tutte le precedenti funzioni integrabili:

61 TEOREMA Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata e integrabile secondo Riemann, allora f è misurabile e vale

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}m.$$

TRACCIA. Per l'ipotesi di Riemann-integrabilità, esistono due successioni g_n e G_n R-semplici tali che $g_n \le f \le G_n$ per ogni $n \ge 1$ e

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b G_n(x) \, \mathrm{d}x.$$

Si avrà che $g_n = \sum_{i=1}^{N_n} (\inf_{[x_{i-1},x_i]} f) \, \chi_{[x_{i-1},x_i]}$ e $G_n = \sum_{i=1}^{N_n} (\sup_{[x_{i-1},x_i]} f) \, \chi_{[x_{i-1},x_i]}$ su un'opportuna partizione di $[a, b]$ in intervalli. In particolare, manipolando gli intervalli si possono costruire g_n e G_n rispettivamente crescenti e decrescenti. Su $[a, b]$ esisteranno allora $f_*(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)$ e $f^*(x) = \lim_{n\to+\infty} G_n(x)$, con $f_*(x) \leq f(x) \leq f^*(x)$ per ogni $x \in [a,b]$. Dal momento che g_n e G_n sono misurabili lo sono anche f_* e f^*. Attraverso il teorema della convergenza dominata (**TBD**) si ottiene che

$$\int_{[a,b]} f_* \,\mathrm{d}m = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} g_n \,\mathrm{d}m = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

e, analogamente,

$$\int_{[a,b]} f^* \,\mathrm{d}m = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} G_n \,\mathrm{d}m = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b G_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

da cui,

$$\int_{[a,b]} f_* \,\mathrm{d}m = \int_{[a,b]} f^* \,\mathrm{d}m.$$

Dal momento che, per costruzione, $f^*(x) - f_*(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$, questo significa che

$$\int_{[a,b]} |f^* - f_*| \,\mathrm{d}m = 0$$

ovvero che f^* e f_* sono uguali q.o. su $[a,b]$, ed entrambe sono uguali a f da cui gli integrali vanno a coincidere. □

Nel caso di integrali impropri per via del dominio, risulta ancora che gli integrali vanno a coincidere ma, questa volta, si ha un'uguaglianza in $[0,+\infty]$. Infatti vale che:

62 TEOREMA. Sia $f : X \to [0,+\infty)$ limitata e integrabile secondo Riemann su $[0,\alpha]$ per ogni $\alpha > 0$. Allora si ha che

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,+\infty)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

In particolare, f è integrabile secondo Lebesgue se e solo se il suo integrale improprio secondo Riemann converge.

DIMOSTRAZIONE. Per definizione,

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\alpha_n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

per una qualche successione α_n divergente. Per ipotesi, f è Lebesgue-integrabile su $[0,\alpha_n]$ per ogni n, per cui

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\alpha_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,\alpha_n]} f\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,+\infty)} \chi_{[0,\alpha_n]} f\,\mathrm{d}x.$$

Definiamo $g_n = \chi_{[0,\alpha_n]} f$ ed osserviamo che, per ogni n, $|g_n| \leq |f| \in \mathsf{L}^1$. Per il teorema di convergenza dominata, allora

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,+\infty)} \lim_{n\to+\infty} \chi_{[0,\alpha_n]} f\,\mathrm{d}x = \int_{[0,+\infty)} f\,\mathrm{d}x.$$

□

3.6. Misura e probabilità. È possibile rileggere l'intera teoria della probabilità *à la Kolmogorov* in luce della teoria della misura. Diciamo che uno spazio di misura $(\Omega,\ \mathcal{M},\ \mathbb{P})$ è uno **spazio di probabilità** se $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. In particolare, gli elementi di Ω si diranno *eventi*. Allora una funzione $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile verrà detta *variabile aleatoria*: questa permetterà di costruire una *misura indotta* sui boreliani di $\mathbb{R}$ assegnando, per ogni B boreliano, $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$.
In luce di questo nuovo linguaggio, una variabile aleatoria X si dirà *discreta* se $\mathbb{P}_X$ è una misura discreta, ovverosia se esiste un sottoinsieme E al più numerabile di $\mathbb{R}$, E = $\{x_1, x_2, ...x_n, x_{n+1}, ...\}$, per cui $\mathbb{P}_X(E) = 1$ e per ogni boreliano B, $\mathbb{P}_X(B) = \sum_{n\colon x_n \in B} \mathbb{P}_X(\{x_n\})$. Una variabile aleatoria si dirà invece *assolutamente continua* se $\mathbb{P}_X$ risulterà assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue: per il teorema di Radon-Nykodim si avrà che esiste una $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}, \mathsf{bor}(\mathbb{R}))$ tale che $\mathbb{P}_X(B) = \int_B f\,\mathrm{d}m$, la cosiddetta *densità* della variabile aleatoria.

3.7. Integrazione dipendente da un parametro. Siano $I,\ J \subset \mathbb{R}$, e sia $g\colon\ I \times J \to \mathbb{C}$. Se $g(\cdot, x) \in \mathsf{L}^1(I, \mathsf{bor}(\mathbb{R}))$, allora risulta definito l'*integrale dipendente da un parametro* $F\colon\ J \to \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ dato da

$$F(x) = \int_I g(t,x)\ \mathrm{d}m(t).$$

3.8. Proprietà di regolarità. Enunciamo ora un teorema che riassume le proprietà di regolarità dell'integrale dipendente da un parametro nel caso della teoria di Riemann e in quello della teoria di Lebesgue:

63 TEOREMA Sia I = $[a,b]$ e $F(x) = \int_a^b g(t,x)\ \mathrm{d}t$, allora

(1) se g è continua su $[a,b] \times J$, F è continua su J,
(2) se g e $\frac{\partial g}{\partial x}$ sono continue su $[a,b] \times J$, allora F è derivabile su J e vale

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(t,x)\ \mathrm{d}t$$

per ogni $t \in J$.

Siano invece più in generale I e J sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}$ e sia $g(t,\cdot) \in \mathsf{L}^1(I,m)$ per ogni $t \in I$,

(1) se $g(t,\cdot)$ è continua su J ed esiste $\varphi \in \mathsf{L}^1(I,m)$ tale che $|g(t,x)| \le \varphi(t)$ per ogni $(t,x) \in I \times J$, allora F è continua su J,
(2) se esiste $\frac{\partial g}{\partial x}$ e $\psi \in \mathsf{L}^1(I,m)$ tale che $|\frac{\partial g}{\partial x}(t,x)| \le \psi(t)$ per ogni $(t,x) \in I \times J$, allora F è derivabile su J e vale

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial g}{\partial x}(t,x)\ \mathrm{d}t$$

per ogni $x \in J$.

DIMOSTRAZIONE. Concentriamoci sui due risultati (1), ovvero di continuità: vogliamo mostrare che $\lim_{x\to x_0} F(x) = F(x_0) = \int_I g(t,x_0)\ \mathrm{d}t$, o equivalentemente che per ogni successione x_n a valori reali che converga a x_0, $\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = F(x_0) = \int_I g(t,x_0)\ \mathrm{d}t$. Definiamo $g(t,x_0) = g_0(t)$ e $g(t,x_n) = g_n(t)$: risulta che, per l'ipotesi di continuità su g, $\lim_{n\to+\infty} g_n(t) = g_0(t)$. Stiamo quindi cercando di mostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I g_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_I g_0(t)\ \mathrm{d}t = \int_I \lim_{n\to+\infty} g_n(t)\ \mathrm{d}t,$$

ovvero un risultato di passaggio al limite sotto il segno d'integrale. Nel caso di Lebesgue, l'ipotesi ci fornisce una funzione dominatrice — possiamo concludere immediatamente per il teorema di convergenza dominata. Nel caso di Riemann la questione è più complessa: per poter passare al limite dobbiamo esibire prova di convergenza uniforme della nostra successione g_n. Ora, g è continua su $[a,b] \times J$, dunque se J_0 è un intervallo compatto a cui appartiene x_0 e che è contenuto in J, a sua volta $R_0 = [a,b] \times J_0$ sarà un compatto contenuto in $[a,b] \times J$ e per il teorema di *Heine-Cantor* si avrà continuità uniforme della g su R_0. Questo ci permette di dire che, scelto comunque $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $(t,x),\ (t',x') \in R_0$, se $\|(t,x) - (t',x')\| \le \delta$, allora $|g(t,x) - g(t',x')| < \varepsilon$. Fissiamo δ come sopra, allora per la convergenza di x_n a x_0 si avrà che esiste un N per cui, $\forall n \ge N\ |x_n - x_0| < \delta$. Allora ricordiamo la tesi: vogliamo mostrare che, preso comunque $\varepsilon > 0$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale per cui $\forall n \ge N$ e $\forall t \in [a,b]$, $|g_n(t) - g_0(t)| < \varepsilon$. Scelti perciò δ e N come sopra, si ha che per ogni $n \ge N$ e per ogni $t \in [a,b]$, $\|(t,x_n) - (t,x_0)\| = |x_n - x_0| < \delta$ e perciò $|g(t,x_n) - g(t,x_0)| = |g_n(t) - g_0(t)| < \varepsilon$.

Per i risultati (2) di derivabilità, dapprima lavoriamo sulla tesi: vogliamo provare che, fissato x_0,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_I \frac{\partial g}{\partial x}(t,x)\ \mathrm{d}t,$$

o equivalentemente che presa comunque $x_n \to x_0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} = \int_I \frac{\partial g}{\partial x}(t,x_0)\ \mathrm{d}t.$$

Detta $\frac{\partial g}{\partial x}(t,x_0) = h_0(t)$, si ha inoltre che

$$\frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{1}{x_n - x_0}\left(\int_I g(t,x_n)\ \mathrm{d}t - \int_I g(t,x_0)\ \mathrm{d}t\right) = \int_I \frac{g(t,x_n) - g(t,x_0)}{x_n - x_0}\ \mathrm{d}t.$$

Chiamiamo l'integranda dell'ultimo integrale $h_n(t)$. Allora l'obiettivo è mostrare, nuovamente, che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I h_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I h_0(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si ha la convergenza puntuale di h_n a h_0 (per definizione di derivata parziale), ma ciò non è sufficiente. Per il teorema di Lagrange applicato nella variabile x,

$$h_n(t) = \frac{g(t,x_n)-g(t,x_0)}{x_n-x_0} = \frac{\partial g}{\partial x}(t, x_0+\theta(x_n-x_0)).$$

La tesi perciò diventa,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I \frac{\partial g}{\partial x}(t, x_0+\theta(x_n-x_0))\,\mathrm{d}t = \int_I \frac{\partial g}{\partial x}(t,x_0)\,\mathrm{d}t.$$

Ancora una volta nel caso di Lebesgue questa segue dal teorema della convergenza dominata, mentre nel caso di Riemann da un argomento di convergenza uniforme su un compatto contenuto in $[a,b]\times J$. □

3.9. Modi di convergenza. $\mathsf{L}^1(\mu)$ è dotato di una norma — questa vi induce una struttura topologica e, dunque, una nozione di convergenza. In particolare, si avrà che $f_n \to_{\mathsf{L}^1} f$ se e solo se $\int_X |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \to 0$ per $n\to+\infty$. D'ora in poi denoteremo la convergenza uniforme con $\to_{\mathsf{un}}$, la convergenza puntuale con la semplice freccia $\to$ e la convergenza q.o. con $\to_{\mathsf{q.o.}}$. Esiste un ultimo modo di convergenza interessante:
DEFINIZIONE. Una successione di funzioni f_n misurabili a valori complessi **converge in misura** ad f ($f_n \to_\mu f$) se per ogni $\kappa > 0$,

$$\mu\left(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \kappa\}\right) \to 0,$$

per $n\to+\infty$.

Risulta legittimo chiedersi quali siano le implicazioni fra questi modi di convergenza. È noto che la convergenza uniforme implichi quella puntuale, e quest'ultima quella q.o.; tuttavia, non è chiaro in quali casi queste implichino quella L^1. In effetti, la risposta è *in nessun caso*.
ESEMPIO. Sia $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{(0,n)}(x)$. Sia $f(x) = 0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, allora $f_n \to f$ e in effetti, dal momento che $\sup_{\mathbb{R}} f_n = \frac{1}{n}$, $f_n \to_{\mathsf{un}} f$. Tuttavia $\int_{\mathbb{R}} |f_n|\,\mathrm{d}m = \frac{1}{n}$, dunque non c'è convergenza L^1 a f. Si ha invece convergenza in misura.
ESEMPIO. Sia $f_n(x) = \chi_{(n,n+1)}(x)$. Per ogni $x\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ (infatti da un certo n in poi x non apparterrà all'intervallo $(n, n+1)$). Tuttavia, $\sup_{\mathbb{R}} f_n = 1$ che non tende a 0, da cui la convergenza è solo puntuale e non uniforme. L'integrale ancora una volta ha valore 1 costante — non c'è nemmeno convergenza L^1.
ESEMPIO. Sia $f_n(x) = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$. Per $x\neq 0$ il limite di $f_n(x)$ tende a zero come nell'esempio precedente; in $x=0$ il limite diverge a $+\infty$, dunque si ha convergenza solamente q.o.. Anche in questo caso l'integrale vale 1 e non si ha convergenza L^1. Si ha invece convergenza in misura.
ESEMPIO. Sia $f_n(x) = \chi_{[j2^{-k},(j+1)2^{-k}]}$, con $0\leq j < 2^k$ e $n = j + 2^k$. Si ha che, per ogni n ed ogni k, $2^k \leq n \leq 2^{k+1}$, da cui $\int_{\mathbb{R}} |f_n|\,\mathrm{d}m = 2^{-k} \to 0$ per $n\to+\infty$. Tuttavia, $f_n(x)$ non converge nemmeno q.o. su $[0,1]$ dal momento che il suo valore continua a oscillare fra 0 ed 1 per $n\to+\infty$. Si ha, inoltre, convergenza in misura.

L'ipotesi di finitezza sulla misura, tuttavia, è sufficiente a garantire che la convergenza uniforme implichi quella L^1:
64 TEOREMA. Sia f_n: X $\to\mathbb{R}$ integrabile per ogni n, e si abbia $f_n \to_{\mathsf{un}} f$ su X. Sia $\mu(X) < +\infty$, allora f è integrabile e $f_n \to_{\mathsf{L}^1} f$.

DIMOSTRAZIONE. f risulta misurabile perché la misurabilità passa al limite. Inoltre per la convergenza uniforme si ha che esiste un N tale per cui ogni $n\geq N$ è tale che $|f_n(x) - f(x)| < 1$ per ogni $x\in X$. Allora in particolare per ogni $x\in X$ si ha $|f(x)| \leq |f - f_N| + |f_N| \leq 1 + |f_N|$, che per monotonia implica che

$$\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu \leq \int_X 1 + |f_N|\,\mathrm{d}\mu = \mu(X) + \int_X f_N\,\mathrm{d}\mu.$$

Per ipotesi $\mu(X) < +\infty$ e così l'integrale di $|f_N|$, dal momento che è integrabile. Segue che anche f è integrabile. Preso comunque $\varepsilon > 0$, inoltre, esiste N tale che ogni $n\geq N$ è tale che $|f_n - f| < \varepsilon$, dunque $\int_X |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu < \int_X \varepsilon\,\mathrm{d}\mu = \varepsilon\mu(X)$ e siccome $\mu(X) < +\infty$, questo significa che l'integrale di $|f_n - f|$ tende a zero, ovvero $f_n \to_{\mathsf{L}^1} f$. □

Inoltre, risulta che la convergenza L^1 implichi quella in misura:

65 TEOREMA Sia $f_n \to_{\mathsf{L}^1} f$, allora $f_n \to_\mu f$.

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi $\int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0$, ovvero per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un N tale che per ogni $n \geq N$, $\int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon$. Per ogni $n \geq N$ ed ogni κ, denotiamo con $\Omega_{n,\kappa}$ l'insieme degli $x \in X$ tali che $|f_n(x) - f(x)| \geq \kappa$. Allora risulterà che

$$\int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \geq \int_{\Omega_{n,\kappa}} |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \geq \kappa\mu(\Omega_{n,\kappa}),$$

ovvero presi comunque $\varepsilon > 0$ e $\kappa > 0$, esiste un N per cui ogni $n \geq N$ è tale che $\mu(\Omega_{n,\kappa}) < \varepsilon$, ovverosia $\mu(\Omega_{n,\kappa}) \to 0$. □

Non vi sono altre possibilità di implicazioni fra le convergenze (come testimoniato dagli esempi), tuttavia è possibile un risultato più debole:

66 TEOREMA *(teorema inverso della convergenza dominata)* Sia $f_n \to_{\mathsf{L}^1} f$, allora esiste f_{n_k} sottosuccessione tale che $f_{n_k} \to_{\text{q.o.}} f$ su X e inoltre esiste $g \in \mathsf{L}^1(\mu)$ tale che $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ per $x \in X$.

DIMOSTRAZIONE. Il primo passo sarà esibire una sottosuccessione f_{n_k} tale che $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{\mathsf{L}^1} < \frac{1}{2^k}$.Per ipotesi, $f_n \to_{\mathsf{L}^1} f$ e dunque è di Cauchy, ovvero per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N_ε tale che ogni $m, n \geq N_\varepsilon$ si ha $\|f_m - f_n\|_{\mathsf{L}^1} < \varepsilon$. Dunque scelto $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ci sarà un N_1 tale per cui ogni $m, n \geq N_1$ sia tale che $\|f_m - f_n\| < \frac{1}{2}$. Poniamo $f_{n_1} = f_{N_1}$. Posto $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ esisterà un $N_2 > N_1$ tale per cui presi $m, n \geq N_2$, $\|f_m - f_n\| < \frac{1}{2^2}$. Sia $f_{n_2} = f_{N_2}$. In particolare, essendo $N_2, N_1 \geq N_1$, si avrà $\|f_{n_2} - f_{n_1}\| < \frac{1}{2}$. Iteriamo questa costruzione, al passo k porremo $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ e otterremo un N_k maggiore di tutti i precedenti per cui vale la condizione di Cauchy. Porremo $f_{n_k} = f_{N_k}$. Proprio per la condizione di Cauchy si avrà perciò che, essendo $N_{k+1}, N_k \geq N_k$, si avrà $\|f_{N_{k+1}} - f_{N_k}\| = \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$.
D'ora in poi, chiameremo con un abuso di notazione $f_k = f_{n_k}$. Proviamo che $f_k \to_{\text{q.o.}} f$ su X dominata da una g. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni $x \in X$, poniamo

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} |f_{i+1}(x) - f_i(x)|.$$

Ogni g_n risulta misurabile in quanto somma di funzioni misurabili, positiva e crescente. Segue che esiste una funzione g (non necessariamente a valori esclusivamente finiti) tale che $g_n \to g$. Per il teorema della convergenza monotona,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \|g_n\|_{\mathsf{L}^1} = \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Si ha inoltre che

$$\|g_n\|_{\mathsf{L}^1} \leq \sum_{i=1}^{n} \|f_{i+1} - f_i\|_{\mathsf{L}^1} < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \leq 1$$

per come sono state costruite le f_k al primo passo. Segue che, per la conservazione del segno, anche $\int_X g \, \mathrm{d}\mu \leq 1$, in particolare è finito e dunque $g \in \mathsf{L}^1(\mu)$. Osserviamo che, in particolare, essendo $g \geq 0$ e $\|g\|_{\mathsf{L}^1} < +\infty$, allora $g(x) < +\infty$ per q.o. $x \in X$. Proprio per questi particolari x andremo a costruire il limite puntuale delle f_k, che dunque risulterà un limite q.o. definito: si ha, infatti, che in questi specifici x

$$\begin{aligned}
&|f_m(x) - f_n(x)| \\
&\leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + |f_{m-1}(x) - f_{m-2}(x)| + \ldots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \\
&= g_{m-1}(x) - g_n(x) \leq g(x) - g_n(x)
\end{aligned}$$

per monotonia della successione delle g_k. Ora, siccome le g_n convergono a g si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un N per cui ogni $n \geq N$ è tale che $|g(x) - g_n(x)| < \varepsilon$. Scelto comunque $\varepsilon > 0$, dunque, sia N come appena detto: allora per ogni $m \geq n \geq N$, $|f_m(x) - f_n(x)| \leq |g(x) - g_n(x)| < \varepsilon$. In particolare, per q.o. $x \in X$ $f_k(x)$ risulta di Cauchy in $\mathbb{R}$, dunque converge ad un certo limite $f^*(x)$.
Rimane da mostrare che $f^* = f$ e che la convergenza è dominata. È noto che $|f_m(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_n(x) \leq$

$g(x)$, essendo $g_n(x) \geq 0$ per ogni $x \in X$; allora per $m \to +\infty$ risulta $|f^*(x) - f_n(x)| \leq g(x)$ q.o. su X. Per il teorema della convergenza dominata (essendo $g \in \mathsf{L}^1(\mu)$) si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X |f^* - f_n| \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Di conseguenza, essendo $\mathsf{L}^1(\mu)$ normato e dunque Hausdorff, si ha l'unicità del limite e $f = f^*$ (in $\mathsf{L}^1(\mu)$). Infine, $|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leq g(x) + |f(x)| =: h(x) \in \mathsf{L}^1(\mu)$ per q.o. $x \in X$. $\square$