"Constellations in a dark night sky": dal problema del continuo all'ipotesi del Multiverso

Beatrice Pitton, Simone Ramello

14 luglio 2020

Introduciamo il problema del continuo CH, concepito da Cantor come ipotesi e successivamente dimostrato essere indipendente dagli assiomi di ZFC, e indaghiamo le conseguenze filosofiche di tali risultati, evidenziando come dagli anni Sessanta del secolo scorso ad oggi il metodo del forcing abbia aperto le porte a tutta una serie di questioni ontologiche delicate, parzialmente risolte dalla posizione multiversista proposta da Joel David Hamkins in [Ham].

Indice

Introduzione al problema del continuo

Leggendo nel 2020 l'articolo che Kurt Gödel scrive nel 1947, fresco dei risultati di coerenza dell'ipotesi del continuo con ZFC, è impossibile non percepire una traccia di ironia nella frase di apertura:

> Cantor's continuum problem is simply the question: How many points are there on a straight line in euclidean space?
>
> Kurt Gödel, *What is Cantor's continuum problem?* [God47]

Quasi settant'anni dopo, quel "*simply*" suona come una sarcastica previsione dello tsunami culturale che la domanda posta da Georg Cantor porterà sulla comunità matematica. Per fare *damage control* correttamente, ovverosia capire a quale punto di rottura abbia condotto l'indagine di Cantor e dei teorici degli insiemi, è necessario un passo indietro. Nel suo articolo seminale "*Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*" Georg Cantor introduce l'ipotesi del continuo, di qui in poi CH, con queste parole:

> Se spogliamo questo problema della sua veste geometrica e per molteplicità *lineare* di numeri reali intendiamo, come è già stato chiarito nel §3, ogni concepibile pluralità di infiniti numeri reali distinti, si pone una questione: in *quante* e quali classi si dividono le molteplicità lineari, se si mettono in una stessa classe molteplicità di uguale potenza e in classi diverse molteplicità di potenze diverse? Con un procedimento induttivo che qui non descriveremo in dettaglio si arriva molto vicino a concludere che il numero delle classi di molteplicità lineari risultati da questo principio di suddivisione è finito e uguale, per l'esattezza, a *due*.
>
> Georg Cantor, nella traduzione italiana [CR12]

Cantor non partorisce CH come una domanda, in effetti, quanto più come una congettura — come se avesse la certezza che, presto o tardi, qualche altro matematico o lui stesso porterà a termine la procedura induttiva e concluderà che, in effetti, di molteplicità lineari ce ne sono esattamente due. Naturalmente, con il senno di poi, sappiamo che si tratta di un'impresa disperata: già nel 1947, nel medesimo articolo citato sopra Kurt Gödel scrive che

> [...] it may be conjectured that the continuum problem cannot be solved on the basis of the axioms set up so far [...].
>
> Kurt Gödel, *What is Cantor's continuum problem?* [God47]

La prova di consistenza della negazione dell'ipotesi del continuo non arriverà prima di una decina d'anni, grazie al lavoro di Paul Cohen, ma ci sono già diversi segnali che l'ipotesi del continuo non possa essere vera in ogni modello della teoria degli insiemi. Risultati di teoria descrittiva degli insiemi di inizio secolo svelano, ad esempio, come la complessità di un insieme che violi CH debba essere piuttosto alta; in altre parole — e con una leggera licenza poetica — un qualsiasi insieme che *ci venga in mente* non sarà una violazione dell'ipotesi del continuo. L'idea di indipendenza aveva già iniziato a diffondersi perciò fin dagli anni Quaranta, infettando le convinzioni monolitiche di chi era convinto che l'intera matematica potesse basarsi su ZFC o, in effetti, su un qualunque insieme di assiomi — l'ennesimo, se non l'ultimo colpo inferto al futuro paradisiaco profetizzato da Hilbert a inizio secolo. Prima di proseguire e vedere come proceda un attacco all'ipotesi del continuo è necessario un piccolo detour sulla nomenclatura e sul trattamento moderno di CH. Diremo che due insiemi sono **equipotenti**, o che hanno la medesima cardinalità, se esiste una biezione fra di loro. Cantor dimostra che i naturali e i reali non sono equipotenti e, subito dopo, congettura che qualunque sottoinsieme dei reali sia equipotente ai naturali o ai reali. Ci riferiremo, dunque, sempre al seguente enunciato quando parleremo di CH:

> Sia $S \subseteq \mathbb{R}$. Allora si ha la seguente dicotomia: o esiste una biezione fra S e $\mathbb{R}$, o esiste una biezione fra S e $\mathbb{N}$.

In futuro, risulterà opportuno identificare i seguenti insiemi, fra cui è un risultato classico che esistano biezioni:

$$\mathbb{R} \cong 2^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to 2\} \cong \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{S \subseteq \mathbb{N}\}.$$

Forcing e risultati di indipendenza

Punto di arrivo del lavoro di Gödel sull'ipotesi del continuo è la dimostrazione della validità di CH nell'universo costruibile L, modello interno di ZF.
Se spetta a Gödel il merito di aver provato la coerenza di CH con gli assiomi di ZFC, il primo vero risultato di indipendenza arriva solo nel 1963 grazie al contributo di Paul Joseph Cohen con l'introduzione della tecnica del forcing.

CH è indipendente da ZFC.

Kurt Gödel, 1938	$\mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}) \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC} + \mathsf{CH})$
Paul J. Cohen, 1963	$\mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}) \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC} + \neg\mathsf{CH})$

L'obiettivo che si prefisse Cohen consisteva nel provare che CH non può essere dimostrato in ZFC se si assume che ZFC sia coerente. Da qui l'idea di considerare M un modello di base di ZFC dal quale costruire l'estensione $N \supseteq M$ tale che $N \models \mathsf{ZFC} + |\mathbb{R}| = \aleph_\alpha$.
Il forcing è la tecnica con cui si costruisce il modello esteso N e ha avuto una grande fortuna per la sua estrema versatilità. Cohen ha infatti introdotto uno strumento che permette di dimostrare che esiste un'ampia gamma di ipotesi indipendenti da ZFC, semplicemente mostrando che esistono modelli che soddisfano contemporaneamente ZFC e la negazione dell'ipotesi in considerazione.
Esistono vari approcci al forcing. Il metodo generale prevede di partire da un modello V di ZFC detto *ground model* e da un ordine parziale $\mathbb{P}$ su V i cui elementi $p \in \mathbb{P}$ sono chiamati *condizioni*. Supponendo che $G \subseteq \mathbb{P}$ sia un filtro V-generico non appartenente a V, ovvero supponendo che il filtro G contenga almeno un elemento di ogni sottoinsieme denso di $\mathbb{P}$ in V, si procede costruendo l'estensione di forcing $V[G]$ semplicemente con la chiusura per operazioni insiemistiche elementari. Il modello esteso così costruito è ancora un modello di ZFC, ha gli stessi ordinali del precedente — il che significa che intuitivamente i due modelli "hanno la stessa altezza" e $V \subseteq V[G]$. In particolare $V \neq V[G]$ dal momento che per costruzione $G \in V[G]$.
Ogni oggetto in $V[G]$ ha un *nome* in V, che porta con se l'informazione di come è stato costruito a partire dal filtro G. Viceversa, anche V ha in un certo senso accesso agli elementi di $V[G]$: possiamo affermare che gli abitanti di V vedano gli oggetti in $V[G]$ senza tuttavia poter intervenire su di essi, dal momento che questo richiederebbe loro la conoscenza di G. È utile parafrasare il concetto usando l'analogia con Dio: abbiamo le parole e il linguaggio per parlarne, ma non possiamo provarne l'esistenza.
A questo punto, fissato l'enunciato ϕ, si procede definendo una relazione di forcing $p \Vdash \phi$ che vale quando ogni filtro V-generico G contenente la condi-

zione p verifica $V[G] \models \phi$.
Di fondamentale importanza in questa costruzione vi è che:

- $V[G]$ è sempre un modello di ZFC. Inoltre, $V[G]$ è in grado di provare anche altri enunciati nel linguaggio della teoria degli insiemi a seconda dalla scelta di $\mathbb{P}$.
- Ogni enunciato ϕ valido in $V[G]$ è forzato da qualche condizione $p \in G$.
- Fissato l'enunciato ϕ, la relazione di forcing $p \Vdash \phi$ è definibile nel ground model.

La difficoltà della tecnica si concentra perlopiù nel trovare il filtro generico adeguato. La strategia maggiormente utilizzata prevede che il ground model sia transitivo e numerabile. È una tradizionale soluzione a cui Hamkins si riferisce con il termine *Toy Model* per la relativa semplicità con cui si svolge l'argomentazione.
Il vantaggio della costruzione sta nel fatto che, supponendo M sia numerabile, si ha al più una quantità numerabile di sottoinsiemi densi di $\mathbb{P}$. Enumerandoli come $D_0, D_1, D_2, \cdots$ e scegliendo una condizione in ogni insieme denso, si costruisce una successione decrescente $p_0 \geqslant p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots$ tale che $p_n \in D_n$. Ne consegue che il filtro generato dalla successione è M-generico e da qui si può proseguire come precedentemente illustrato per ottenere il modello esteso $M[G]$.
Per quanto conveniente e concreta, la costruzione dell'estensione di forcing con l'utilizzo del Toy Model non è priva di svantaggi.
Prima di tutto Hamkins sottolinea come sia limitante restringere una tecnica potente come il forcing solo a specifici modelli di teoria degli insiemi. Inoltre sorge una seconda questione riguardante l'esistenza del ground model M. È bene specificare che per il Teorema di incompletezza di Gödel non è possibile dimostrare l'esistenza di modelli di tutto ZFC se si assume la consistenza di ZFC stesso. Un tale ostacolo è solitamente superato dal momento che, come conseguenza al Teorema di Riflessione, è possibile produrre all'interno di ZFC modelli numerabili e transitivi per una qualunque lista finita di assiomi di ZFC. In questo caso, quando si afferma *"Sia M un modello numerabile e transitivo di ZFC"* è quindi opportuno leggere *"Sia M un modello numerabile e transitivo di un pezzo di ZFC sufficiente per proseguire la dimostrazione"*. Tale scelta è spesso criticata per il fatto che non comporta l'effettiva creazione di un modello di $\mathsf{ZFC} + \phi$ ma piuttoto si limita a dimostrarne la consistenza.
Altra soluzione per ovviare il problema consiste nell'abbandonare la richiesta che M sia transitivo. Tale ipotesi non è strettamente necessaria per la costruzione dell'estensione di forcing, ma rinunciarvi richiede di lavorare con modelli mal fondati — scelta di solito non gradita ai teorici degli insiemi.
Un altro tradizionale approccio al forcing è quello dei modelli a valori Booleani. Una struttura a valori Booleani consiste di un'algebra di Boole completa $\mathbb{B}$, di una collezione di oggetti detti *nomi* e di una valutazione delle formule ato-

miche che assegni loro un valore booleano — ovvero un elemento di $\mathbb{B}$ tale che gli assiomi di uguaglianza siano rispettati. I valori Booleani di enunciati più complessi seguono poi per ricorsione.
Nel caso della teoria degli insiemi, si costruisce la struttura booleana $V^{\mathbb{B}}$ a partire da un universo V e da un’algebra di Boole completa $\mathbb{B}$. Tralasciando i dettagli tecnici, è rilevante il fatto che ogni assioma di ZFC sia valido in $V^{\mathbb{B}}$ con valore Booleano 1.
Costruito questo frame, per dimostrare risultati di consistenza relativa è sufficiente "posizionarsi" all’interno di un modello di ZFC e ivi trovare un’algebra di boole completa, avendo cura che il valore booleano dell’enunciato desiderato sia non nullo. Dal momento che tutti gli assiomi di ZFC hanno valore Booleano 1, ne consegue che anche $\mathsf{ZFC} + \phi$ sarà consistente.
A completamento di questa breve e incompleta panoramica, è importante sottolineare di nuovo come il forcing, ormai largamente utilizzato in teoria degli insiemi, favorendo il proliferare di risultati di indipendenza abbia anche prodotto svariati nuovi modelli di teoria degli insiemi di cui è naturale indagarne l’ontologia — obiettivo che si prefigge anche J. D. Hamkins nel sostenere la tesi multiversista.

> Set theory appears to have discovered an entire cosmos of set-theoretic universes, revealing a category-theoretic nature for the subject, in which the universes are connected by the forcing relation or by large cardinal embeddings in complex commutative diagrams, like constellations filling a dark night sky.
>
> Joel David Hamkins, *The Set-Theoretic Multiverse* [Ham]

Come evidenziato da Neil Barton in [Bar18], sezione 2, un controargomento addirittura *a priori* rispetto all’intera discussione che stiamo per affrontare potrebbe essere che l’uso di simboli come V e $V[G]$ non sia letterale, o che il forcing sia una costruzione illecita. La risposta alla seconda obiezione è puramente empirica: l’uso del forcing fa parte da troppo tempo della scatola degli attrezzi di un insiemista perché la si possa invalidare senza un argomento più convincente. Per quanto riguarda l’idea di un uso puramente simbolico di V e $V[G]$, si osserva come l’uso del forcing determini la scoperta di principi e assiomi che, a loro volta, portano alla luce proprietà potenziali di V. Pensare che l’uso del forcing correlato alla nozione di universo sia un mero fatto simbolico, dunque, va contro l’intuizione del “*working set theorist*”.

Ontologia del forcing

Per fare il passo successivo, ovverosia analizzare lo status ontologico delle estensioni ottenute tramite il forcing, vale la pena spendere alcune parole su un caso più elementare, ma significativo. Quando un matematico dice

Non esiste la radice quadrata di -1,

ciò che intende in effetti è

Non esiste la radice quadrata di -1 *nei numeri reali*:

assume, insomma, inconosciamente la posizione di un abitante della città di $\mathbb{R}$ che, seduto a cavalcioni sulla retta reale, non ha proprio idea di come risolvere l’equazione $x^2 + 1 = 0$. Questa visione è l’eredità di anni di scuole superiori in cui viene ripetuto il mantra “*Discriminante minore di zero, nessuna soluzione...*”: nel momento in cui si mette piede all’università, però, ci si trova come Alice mentre precipita nella tana del Bianconiglio — un nuovo universo, i numeri complessi, si estende di fronte a noi, un mondo curioso dove una soluzione per $x^2 + 1 = 0$ si riesce a trovare.

Il parallelismo con il forcing è profondo. Espandiamo un attimo su un punto citato in precedenza: per forzare su modelli di ZFC si deve costruire un filtro generico, G, la cui struttura combinatoriale codifica le proprietà del nuovo universo che si andrà a creare, e tramite operazioni algebriche si trasmuta il modello di partenza, V, in un nuovo modello $V[G]$. Questa ricetta ha un punto molto delicato che, coincidentalmente, è il punto di partenza: chi è V? Sappiamo, per risultati classici di incompletezza, che ZFC non può mostrare la propria consistenza e dunque di certo non possiamo esibire un modello di ZFC usando ZFC; anche teorie più forti cadono in una trappola simile. Per procurarci il primo ingrediente, perciò, è necessario fermarsi a ragionare sull'*uso* che si vuole fare del forcing: Cohen, inizialmente, costruì l'intero armamentario per dimostrare la consistenza relativa di vari enunciati insiemistici. L'obiettivo, dunque, è dimostrare un risultato di questa forma:

$$\mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}) \implies \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC} + \phi).$$

Una dimostrazione è, per definizione, un oggetto finitario: in particolare, possiamo rilevare l'incoerenza di $\mathsf{ZFC} + \phi$ utilizzando una quantità finita di assiomi di ZFC. Se dunque riuscissimo a produrre un modello di una qualsiasi quantità finita di assiomi di ZFC e trasformarlo in un modello di questi assiomi di ZFC assieme con ϕ potremmo dire di aver provato la consistenza di $\mathsf{ZFC} + \phi$, dato che un'eventuale contraddizione dovrebbe avvenire ad un livello finito (e noi costruiamo modelli di segmenti finiti arbitrariamente lunghi). Questo punto ci permette di sfruttare i già citati teoremi di riflessione ed esibire modelli transitivi e numerabili di *abbastanza* teoria degli insiemi ma ci offre, anche, una prima e apparente soluzione a quella che Hamkins indica come domanda centrale nell'indagine filosofica del forcing:

Do forcing extensions of the universe exist?

Riflettendo più a fondo sul procedimento appena spiegato, uno potrebbe argomentare come la domanda stessa sia malposta: quando parliamo di estensioni di forcing, ciò che intendiamo (almeno in questo approccio al forcing) è un procedimento puramente finitario, in cui conduciamo dimostrazioni nella nostra mente con metodi semantici ma, di fatto, tutto è riconducibile a lunghe stringhe di simboli su carta. Questa risposta *a priori* richiede un *commitment* ontologico molto debole, nominalmente il fatto che i simboli su carta esistano. Il resto è zucchero psicologico, pura immaginazione dei matematici. Se l'argomento è inoppugnabile da un punto di vista tecnico, non appena si sale di un gradino e se ne analizzano le conseguenze filosofiche e in qualche senso "sociologichÈ' emergono alcune falle: in primis, naturalmente, il fatto che c'è una grossa discrepanza fra il forcing venduto in questi termini e come i matematici, e gli insiemisti in particolare, pensano alla matematica. Non è realistico che, qualunque che sia la posizione ontologica sulla matematica del singolo, questa ammetta che il procedimento di forcing è una pura manipolazione di inchiostro su cellulosa. D'altra parte, questo è uno dei tanti approcci al forcing possibili; altri metodi non si appoggiano così facilmente su una visione sintattica. In definitiva, si tratta di una vittoria di Pirro: si risolve il problema così nettamente da togliervi qualunque colore e identità.

Proseguiamo oltre e riprendiamo l’analogia con i numeri complessi: sebbene argomenti classici ci mostrano che il filtro generico G non può vivere nel modello di partenza, gli abitanti di tale universo hanno modo di parlare di questo oggetto ideale e, in qualche modo, vedere un ologramma dell’universo che si andrà a costruire. In particolare un risultato noto come approccio Naturalista ricalca un fatto ben noto di algebra: è possibile simulare i numeri complessi dentro i numeri reali, in gergo si parla di *interpretare*, identificando $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Allo stesso modo, è possibile realizzare l’estensione di forcing $\overline{V}[G]$ come classe definibile in V, in particolare ottenendo un’estensione elementare $V \preceq \overline{V} \subseteq \overline{V}[G]$, dove $\overline{V}$ è proprio l’interpretazione del predicato per V relativizzato a $\overline{V}[G]$. $\overline{V}[G]$ risulta quindi essere un ologramma dell’estensione di forcing che viene visto e manipolato liberamente dagli abitanti di V. Di fatto quindi possiamo immaginare e descrivere completamente gli universi generati tramite forcing all’interno del “nostro” universo, accedendo alle loro proprietà solo in maniera *potenziale* — ricordiamo che, in ZFC, con *classe definibile* non s’intende altro che una formula al prim’ordine con una variabile libera. Sotto questo punto di vista, gli universi prodotti dal forcing non sono dissimili dagli universi letterari generati dai romanzi: mondi che possiamo indagare e scoprire tramite gli artifici della scrittura e dell’immaginazione, ma che a priori non esistono a meno di non ammettere che, quando diciamo “universo”, compiamo la medesima imprecisione che si compie dicendo che -1 non ammette radice quadrata. Il riconoscimento di tale paraocchi è la rampa di lancio della posizione multiversista.

A latere, quello appena enunciato risulta essere uno schema di teoremi e non un teorema: il teorema di Tarski di non-definibilità della verità mette un limite a quanto gli abitanti di V possano sapere su loro stessi, in particolare su $\overline{V}$.

Universo o Multiverso? Le due posizioni a confronto

Nell’intraprendere il viaggio nel multiverso è opportuno non perdere di vista la visione universista, ovvero quella che ha tradizionalmente guidato la teoria degli insiemi e che ancora oggi è la più largamente diffusa.
Dall’umana necessità di risalire a un fondamento comune e unitario a cui riferire tutta la nostra esperienza scaturisce la ricerca filosofica che sempre ha accompagnato l’uomo e che non poteva mancare nemmeno nella matematica. La teoria degli insiemi in questo senso si propone di dare una risposta, individuando nell’universo set-teoretico V il reame di tutta la matematica.
L’universo V è la gerarchia cumulativa di tutti gli insiemi e si costruisce a partire dall’insieme vuoto, iterando per induzione transfinita l’operazione di powerset ai passi successore e l’operazione di unione ai passi limite.
I più ortodossi tra gli insiemisti mostrano una natura platonista nell’affermare che tutti gli oggetti matematici possono esistere in qualità di insiemi e che tali insiemi, accumulandosi a formare l’universo di tutti gli insiemi, godono di una *reale* esistenza matematica. In questo contesto, il principale obiettivo

che si pone la teoria degli insiemi è scoprire quali fondamentali verità caratterizzano l’universo V, dal momento che queste includono tutte le verità matematiche.

È dato per scontato che il concetto di insieme sia fissato, unico ed esclusivo, allocato nell’ universo cumulativo di tutti gli insiemi V, all’interno del quale ogni enunciato ha un valore di verità ben definito.

In questa visione è coperta non solo la questione ontologica ma, con il determinismo, anche quella epistemologica. Tutte le domande interessanti da un punto di vista set-teorico, come per esempio CH, hanno nell’universo V una risposta definitiva.

Come si concilia questa posizione con la larga diffusione dei fenomeni di indipendenza e con il pluralismo di possibili varianti set-teoretiche venuto alla luce negli ultimi cinquant’anni? La visione universista guarda agli universi alternativi come "mondi immaginari" e si limita a riconoscerne l’utilità solo al fine di provare risultati d’indipendenza. Riportando le parole dello stesso Hamkins in [Ham]

> "The pervasive independence phenomenon in set theory is described on this view a distraction, a side discussion about provability rather than truth—about the weakness of our theories in finding the truth, rather than about the truth itself."

— motivo per cui in questa prospettiva l’indipendenza di un enunciato da ZFC non aggiunge nessuna informazione sulla sua validità nell’universo.

La prospettiva Multiversista proposta da Hamkins, in contrapposizione a quanto appena illustrato, è la posizione filosofica secondo la quale esistono invece *vari* universi set-teoretici. Questa visione sostiene che esistano diversi concetti di insieme: a ognuno corrisponde un universo insiemistico da lui generato e all’interno del quale l’insieme stesso è posto.

Osserviamo che la nuova prospettiva non si vuole porre in contrasto con l’obiettivo di usare la teoria degli insiemi per dare un fondamento ontologico ed epistemologico alla matematica. Hamkins semplicemente attacca l’idea di assumere un concetto di insieme esclusivo, da cui costruire un universo in cui tutte le verità insiemistiche sono immutabili. La visione universista secondo Hamkins non riesce a giustificare l’esistenza di modelli interni ma soprattutto viene sfidata dai modelli esterni, come ad esempio le estensioni di forcing. Quindi, sulla base delle molteplici possibilità di costruzione di nuovi universi set-teoretici che la posizione universista cataloga come immaginari, la prospettiva multiversista si pone di giustificare la loro esistenza considerandoli reali: ogni universo è legittimato di esistenza propria e indipendente, così come platonicamente è accettata l’esistenza dell’universo di tutti gli insiemi V.

Hamkins sviluppa in parallelo l’analogia con la geometria e la scoperta delle geometrie non-Euclidee, inizialmente guardate come una divertente reinterpretazione dei concetti tradizionali e solo successivamente riconosciute significative e reali.

Nel frattempo, tra i sostenitori dell’universismo è ancora in corso la disputa su quale universo V fissare. Le varie posizioni riguardo la risposta alla domanda *"L’ipotesi del continuo è vera oppure no?"* riportano indirettamente alla domanda *"Quali caratteristiche e verità deve soddisfare l’universo* V*?"*.

Osserviamo che ogni matematico multiversista può fingersi universista saltando in un universo V specifico e dimenticando temporaneamente il mondo al di fuori.

Hamkins osserva, con una punta di sarcasmo, come tale dibattito si stia svol-

gendo per sua natura proprio sul terreno multiversista. È esplicito obiettivo dei multiversisti confrontare le diverse nozioni di insieme e di universo, considerando l’idea che ci siano vari e fondalmentalmente diversi concetti di insieme, tutti legittimi.
Il nostro viaggio di matematici arriva così a un punto cruciale: la nozione classica di insieme, ideata da Cantor e a cui sempre siamo stati abituati, esplode e si frammenta in un ventaglio di concetti paralleli. Questo significa che quando una questione matematica si rivela avere una dipendenza set-teoretica, come ad esempio nel caso dei risultati d’indipendenza, la spiegazione multiversista da una risposta accurata del fenomeno matematico: dipende dall’universo.
Si apre una nuova prospettiva, più larga, in cui la scelta delle ipotesi set-teoretiche di base è pesata dalle loro conseguenze matematiche. Assumendo questo punto di vista appare quasi testardo — parafrasando Hemkins— insistere a trovare una unica risposta alle questioni di indipendenza.
Un insiemista con la prospettiva universista può insistere nel ricondurre tutta la sua conoscenza a un solo universo V, guardando alle estensioni di forcing e agli altri modelli come curiose e complesse simulazioni al suo interno, ma va riconosciuto che questa visione è limitante e scomoda a ulteriori sviluppi matematici che potrebbero invece fiorire se solo si accettasse una predisposizione filosofica alla questione nel considerarli degni di esistenza propria.

> "The history of mathematics provides numerous examples where initially puzzling imaginary objects become accepted as real. Irrational numbers, such as $\sqrt{2}$, became accepted; zero became a number; negative numbers and then imaginary and complex numbers were accepted; and then non-Euclidean geometries. Now is the time for V-generic filters."
>
> Joel David Hamkins, *The Set-Theoretic Multiverse* [Ham]

Una critica alla tradizione categorica

La visione universista è spesso associata al consequenzialismo come criterio di verità. I teorici degli insiemi puntano a costruire un universo sempre più stabile e regolare sfruttando la gerarchia dei grandi cardinali. Dal momento che le proprietà di regolarità sono altamente desiderabili in matematica, nonchè ampiamente esplicative, la tesi dei grandi cardinali sembra sufficiente a fornire una teoria coerente e unificante e questo sembra bastare come testimonianza della verità di questi assiomi. A supporto di questa visione si presenta la questione della categoricità supportata da Donald A. Martin.
Secondo Martin l’universo set-teoretico è unico dal momento che ogni coppia di universi V, V' può essere confrontata per livelli: per ogni ordinale α si prova che $V_\alpha = V'_\alpha$ (e ognuno di questi *"pensa"* di essere l’universo di tutti gli insiemi), conseguentemente per induzione transfinita essi concidono su tutti i livelli e si conclude che $V = V'$.
Quello che Hamkins obietta alla posizione di Martin è la presupposizione di poter comparare due concetti diversi di insieme in modo coerente — *"Which set*

concept are we using when undertaking the comparison?" — chiede Hamkins. L’argomentazione di Martin usa il concetto di "appartenenza" proprio del contesto set-teoretico tradizionale e ciò risulta ingiustificato. Se un tale punto di vista insiemistico viene esplicitato, allora l’argomentazione sembra ridursi all’affermare che "fissato un qualunque background set teoretico, ogni nozione di insieme che include tutti gli insiemi coinciderà con il background fissato". Inoltre, altro problema più tecnico nella posizione di Martin, è l’assunzione che i due concetti di insieme siano sufficientemente d’accordo sulla nozione di ordinale per riuscire a svolgere un confronto per ricorsione.

Martin assume una posizione inappuntabile sia sul concetto di "numero naturale" che di " buon ordinamento" per proseguire la sua argomentazione. Tuttavia ammette deroghe riguardo la possibilità di avere nozioni alternative di buon ordinamento, da cui segue che il processo comparativo possa risultare alla fine incoerente.

Il problema del continuo: revival

L’intricato percorso che, partendo da semplici questioni su sottoinsiemi della retta reale, ci ha portato a mettere in discussione il fondamento stesso di come vediamo la matematica e l’universo in cui essa vive in qualche modo fa il giro e torna al punto di partenza, offrendo un cambio di prospettiva fruttuoso ed una possibile risposta al problema del continuo. Se, da un lato, ponendoci come multiversisti rifiutiamo con una certa stizza l’idea che i risultati di indipendenza non siano altro che fatti cosmetici che non fanno altro che confondere e dirottare la ricerca della verità ultima sulla natura degli insiemi, dall’altro una posizione ontologica di così ampio respiro deve, per acquisire un minimo di credibilità, offrire risposte a domande basilari come l’ipotesi del continuo. Se l’universista si aspetta di vedere un giorno fiorire una teoria (nel senso tecnico) degli insiemi universalmente[1] accettata e che catturi appieno la nostra idea di *insieme*, questa teoria necessariamente dovrà essere completa e dunque decidere fra CH e $\neg\mathsf{CH}$. La risposta del multiversista chiede di fare un passo indietro e rinunciare all’idea di assegnare un valore di verità netto all’ipotesi del continuo partendo, nell’argomentare questa posizione comprensibilmente bizzarra e aliena per chi fa matematica, da un risultato tecnico. Si dimostra, infatti, che CH è, nelle parole di Hamkins, un interruttore della luce: partendo da un universo V è possibile costruire un’estensione $V[G]$ in cui l’ipotesi del continuo è vera ed una, $V[G']$, in cui l’ipotesi del continuo è falsa. Si tratta peraltro di estensioni poco sconvolgenti, che lasciano inalterate molte delle proprietà dell’universo (per esempio lasciano intoccati i grandi cardinali che, come si è scoperto negli ultimi decenni, governano la struttura dell’universo in maniera profonda e radicale). Se per un universista è poco chiaro come inquadrare lo statuto ontologico di CH alla luce di questo fatto, la posizione multiversista accoglie con piacere il teorema come un risultato che rivela i funzionamenti interni del multiverso, svelando l’esistenza di ordine all’interno di quello che, in potenza, era un enorme caos di universi. Simili scoperte che, alla luce di questa posizione, rivelano una rigidità strutturale del multiverso sono stati ottenuti dagli insiemisti nella storia della materia, creando un corpo di conoscenza esteso e preciso che, secondo Hamkins, risulta essere *de facto* la risposta all’ipotesi del continuo. Se non possiamo aspettarci un valore

[1] battuta involontaria...

di verità per quest’enunciato, possiamo accontentarci di sapere esattamente quali interruttori accendere o spegnere per ottenere uno o l’altro. Chi crede nell’universo vive alla ricerca di quella che Hamkins chiama “*dream solution*”, riassumibile in questo modo: anzitutto, è necessario trovare un enunciato ϕ che esprima un fatto insiemistico *ovviamente vero*, o se non altro difficile da contestare sulla base dell’intuizione; a questo punto bisogna dimostrare che $\phi \implies \mathsf{CH}$ oppure che $\phi \implies \neg\mathsf{CH}$. Sulla base dell’ovvietà di ϕ risulterebbe perciò difficile argomentare contro la verità manifesta di uno o dell’altro. La falla evidenziata dall’autore ha un’origine tanto filosofica quanto storica: allo stato attuale, la comunità degli insiemisti ha sviluppato e prodotto un enorme *corpus* di risultati e descrizioni tanto di universi in cui l’ipotesi del continuo è vera quanto di universi in cui è falsa; in particolare, gli insiemisti hanno avuto esperienza di entrambe le tipologie di mondi possibili al punto che è venuta a mancare, in primis psicologicamente, la capacità di discernere quale sia l’universo “giusto”. Qualunque proposta di ϕ [2] potrebbe essere attaccata sulla base di un concetto di naturalità che, in questo momento storico, è ben lungi dall’essere universale e condiviso — si potrebbe addirittura pensare che, in un contesto in cui è così usuale saltare da un universo all’altro, si debba rinunciare del tutto ad un ideale di naturale, allo stesso modo in cui la visita su altri pianeti ci impedisce di dire che, per esempio, è più naturale avere un’atmosfera respirabile per l’uomo che piena di gas nocivi come Venere. [3] Al cuore del fallimento della *dream solution*, dunque, sta una rottura insanabile fra l’ontologia universalista, semplice e possibilmente più comoda, e l’evoluzione storica effettiva della teoria degli insiemi.

[2] Hamkins ne fa due: l’assioma di simmetria di Freiling e il *powerset size axiom*.

[3] Si potrebbe sostenere invece un principio di *vivibilità*, la cui efficacia in astrofisica è evidente, anche in teoria degli insiemi. In particolare, si potrebbe pretendere di vivere nell’universo migliore possibile nel senso di Placido di Voltaire. Questo dibattito, per quanto interessante, è al di fuori dell’obiettivo di questo breve testo.

Gli assiomi del multiverso

In quest’ultima sezione illustriamo i principi che, in modo non del tutto privo di provocazione, Hamkins formula a completamento della visione multiversista. In linea con quanto esposto fin’ora, non ci aspettiamo di riuscire a formalizzare in un linguaggio al primo o secondo ordine di qualche teoria degli insiemi: il cuore del multiversismo consiste nel non ridursi a un singolo universo o a un limitato formalismo. Apparentemente alcune questioni matematiche si spostano sul piano speculativo e la teoria degli insiemi richiede l’intervento filosofico per poter procedere.

In realtà si dimostra che molte interessanti questioni nate a partire dalla prospettiva multiversista sono interamente formalizzabili al primo ordine. Hamkins riporta nel suo articolo ben due esempi di argomenti di natura matematica che però rimangono fortemente ancorati al problema filosofico: la Modal Logic of Forcing e la Set-Theoretic geology.

L’idea fondante di tutta la posizione multiversista è, come ormai chiaro, che il nostro tradizionale campo visivo insiemistico debba essere ampliato. Iniziamo con un principio banale ma necessario:

Esiste un universo.

Assunto questo, vogliamo affermare l’esistenza di una grande collezione di universi, ognuno modello di qualche particolare tipo di teoria degli insiemi, dando quindi dignità di esistenza anche agli universi costruiti con quello che Hamkins chiama Principio di Realizzabilità. Risulta inoltre utile pensare che

il multiverso possa essere tanto grande quanto possiamo immaginare e che in ogni momento noi saremo all’interno di uno dei suoi universi, a cui ci riferiremo come a V. Con vari mezzi — matematici e non — ci è possibile viaggiare all’interno del multiverso, trasferendoci da un universo all’altro. Se ci sorge la domanda *"Come sarà vivere all’interno di quell’universo?"* possiamo soddisfare la nostra curiosità semplicemente saltando al suo interno e considerandolo come l’universo reale.
Ogni modello di teoria degli insiemi vede sé stesso come *il più alto*, nel senso che pensa di contenere *tutti* gli ordinali. In realtà contiene solo i *suoi* ordinali e quindi può sbagliarsi sulla sua altezza, in quanto altri modelli potrebbero contenerne di ulteriori. Nella prospettiva multiversita, l’Assioma di Riflessione afferma che possiamo considerare ogni universo come segmento iniziale di un altro, più alto ma con le stesse verità.
Non è un caso che Hamkins parli anche di "Miraggio della Buona fondatezza". Per gli stessi motivi sottesi all’Assioma di Riflessione, non sembra ragionevole affermare che essere ben fondato sia una proprietà assoluta. Ogni modello V crede che i suoi ordinali siano ben fondati, ma, dal momento che V può ampiamente sbagliarsi riguardo ciò, nel nostro multiverso esisterà un W dal cui punto di vista V è mal fondato.
Infine, citiamo il Principio della Numerabilità, secondo cui la nozione di numerabilità dipende dall’ambiente set-teoretico in cui siamo immersi. Non è difficile da immaginare, abbiamo infatti già visto come un’argomentazione di forcing sia sufficiente a dimostrare che qualunque insieme in qualunque modello può essere reso numerabile in un’opportuna estensione di tale universo.

A completamento della descrizione del multiverso, riportiamo di seguito l’elenco di tutti i principi proposti da Hamkins.

- *Realizability Principle*. Per ogni universo V, se W è un modello di teoria degli insiemi definibile o interpretato in V, allora W è un universo.
- *Forcing Extension Principle*. Per ogni universo V e per ogni forcing notion $\mathbb{P}$ in V, esiste un’estensione di forcing $V[G]$, dove $G \subseteq \mathbb{P}$ è V-generico.
- *Reflexion Axiom*. Per ogni universo V esiste un universo più alto W con un ordinale θ tale che $V \precsim W_\theta \prec W$.
- *Countability Principle*. Ogni universo V è numerabile dal punto di vista un altro, migliore universo W.
- *Well-foundedness Mirage*. Ogni universo V è mal fondato dal punto di vista di un altro, migliore universo.
- *Reverse Embedding Axiom*. Per ogni universo V e per ogni embedding $j : V \to M$ in V, esiste un universo W e un embedding h

$$W \xrightarrow{h} V \xrightarrow{j} M$$

  tale che j è l’iterata di h.

- *Absorption into* L. Ogni universo V è un modello numerabile transitivo in un altro universo W che soddisfa $V = L$.

Conclusioni

Nel 1980 Kenneth Kunen, all'inizio del capitolo sul forcing del suo celeberrimo testo [Kun11], cita due grossi ostacoli legati all'apprendimento di questa tecnica: il primo è di natura matematica, legato alla difficoltà tecnica intrinseca degli strumenti utilizzati; il secondo è invece di natura metamatematica, dovuto alla sottile riflessione logica che sta dietro gli argomenti in questione. Il lavoro di Hamkins sembra avere rivelato un terzo ostacolo, di natura filosofica: il forcing e i risultati ad esso associati mettono in discussione il nostro modo di vedere la matematica tanto localmente quanto somma delle proprie parti. Il metodo probabilmente più semplice per cogliere la dimensione di questo problema è sentire le voci di chi, con gli insiemi, ci lavora giornalmente. In due articoli, il prolifico e famoso logico Saharon Shelah afferma che

> I am in my heart a card-carrying Platonist seeing before my eyes the universe of sets, but I cannot discard the independence phenomena.
>
> Saharon Shelah, [She02b]

e che

> . . . I do not agree with the pure Platonic view that the interesting problems in set theory can be decided, we just have to discover the additional axiom. My mental picture is that we have many possible set theories, all conforming to ZFC.
>
> Saharon Shelah, [She02a]

Entrambe le frasi sono a loro volta citate da [Vää14].

Di fatto ci troviamo di fronte ad una rottura irreparabile: se l'istinto ci porta, e ha portato per secoli, molti matematici verso la visione smaccatamente platonista di un unico universo — forse perfettibile, forse non catturato dal solo ZFC, ma uno, santo, cattolico ed apostolico — la realtà dei fatti è che questa visione somiglia terribilmente alla mappe medievali che figuravano, nelle colonne d'Ercole, il termine ultimo della civiltà. Il forcing è simile alla nave di Ulisse, che ci conduce verso l'ignoto un filtro generico alla volta; *fatti non foste per viver come universisti, ma per seguir virtute e canoscenza*.

Riferimenti bibliografici

[God47] Kurt Godel. "What is Cantor's Continuum Problem?" In: *The American Mathematical Monthly* 54.9 (1947), pp. 515–525. ISSN: 00029890, 19300972. URL: `http://www.jstor.org/stable/2304666`.

[She02a] Saharon Shelah. "Logical Dreams". In: (2002). arXiv: `math/0211398 [math.LO]`.

[She02b] Saharon Shelah. "The Future of Set Theory". In: (2002). arXiv: math/0211397 [math.LO].

[Kun11] Kenneth Kunen. *Set Theory*. Studies in logic. College Publications, 2011. ISBN: 9781848900509.

[CR12] Georg Cantor e Gianni Rigamonti. *La formazione della teoria degli insiemi (scritti 1872-1899)*. Volti (Mimesis). Mimesis, 2012. ISBN: 9788857508986.

[Vää14] Jouko Väänänen. "Multiverse set theory and absolutely undecidable propositions". In: *Interpreting Gödel*. A cura di Juliette Kennedy. Cambrigde University Press, 2014, pp. 180–208. ISBN: 9781107002661.

[Bar18] Neil Barton. "Forcing and the Universe of Sets: Must we lose insight?" In: (2018). URL: http://philsci-archive.pitt.edu/15905/.

[Ham] Joel David Hamkins. "The set-theoretic multiverse". In: *The Review of Symbolic Logic* (), pp. 416–449. DOI: 10.1017/s1755020311000359.