NELLA TANA DEL BIANCONIGLIO

TRE O QUATTRO IDEE SULL'ANALISI NONSTANDARD

RELATORE: PROF. ALESSANDRO ANDRETTA

MERENDA SINOIRA 2.0 - 11 DICEMBRE 2020

SIMONE RAMELLO - RAMELLUS.GITHUB.IO

L'IDEA

Cerchiamo un modo formale per parlare di quantità infinitesimali:

"Non sono né quantità finite, né quantità infinitamente piccole, ma nemmeno un nulla. Non potremmo chiamarle fantasmi di quantità defunte?"

George Berkeley

INFINITESIMI E DOVE TROVARLI

Dato un campo ordinato $(\mathbb{F}, \leq)$ di caratteristica zero, un infinitesimo e' un elemento $\varepsilon \in \mathbb{F}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}^{>0}$,

$$\varepsilon \leq \frac{1}{\underbrace{1+1+\dots+1}_{n\text{-volte}}}.$$

Teorema: $\boxed{\text{$\mathbb{R}$ è archimedeo, ovvero non contiene infinitesimi a parte lo zero.}}$

INFINITESIMI E DOVE TROVARLI

Domanda: esistono* campi non archimedei?

* o meglio, ne esistono di interessanti?

L'APPROCCIO CLASSICO

Sia $R = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle successioni di numeri reali.

R è un anello commutativo con unità.

Poniamo

$$(r_n) \equiv (s_n) \iff r_n = s_n \text{ per tanti } n \in \mathbb{N}.$$

Problema: che  vuol dire tanti?

L'APPROCCIO CLASSICO

Un ultrafiltro è un sottoinsieme $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tale che

- se $A \in \mathcal{U}$ e $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$, $B \in \mathcal{U}$,
- se $A, B \in \mathcal{U}$, $A \cap B \in \mathcal{U}$,
- per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$ si ha $A \in \mathcal{U}$ oppure $\bar{A} \in \mathcal{U}$.

Un ultrafiltro è non-principale se contiene tutti i sottoinsiemi cofiniti di $\mathbb{N}$.

L'APPROCCIO CLASSICO

Teorema: $\boxed{\text{esiste un ultrafiltro non-principale.}}$

Serve Zorn!

Sia $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ non-principale: poniamo

$$(r_n) \equiv (s_n) \iff \{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\} \in \mathcal{U}.$$

Il quoziente $R/\equiv$ si chiama ultrapotenza di $\mathbb{R}$ attraverso (?) l'ultrafiltro $\mathcal{U}$.

L'APPROCCIO CLASSICO

Poniamo ${}^*\mathbb{R} = \mathcal{R}/_{\equiv}$, il campo iperreale.

Teorema: $\boxed{{}^*\mathbb{R} \text{ e' un campo non-archimedeo.}}$

Ad esempio, la classe di $\left(\frac{1}{n}\right)$ è un infinitesimo.

Sto barando: non vi ho detto qual è l'ordine. È definito da

$$[(r_n)] \leq [(s_n)] \iff \{n \in \mathbb{N} : r_n \leq s_n\} \in \mathcal{U}.$$

LA STRADA TOPOLOGICA

Dato un insieme I, possiamo estendere la definizione di ultrafiltro a $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(I)$.

Teorema: $\boxed{\text{esiste un ultrafiltro non-principale } \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(I).}$

TOPOLOGICO DI HAUSDORFF

Sia $f: I \longrightarrow X$. Diremo che $\lim\limits_{\lambda \uparrow \mathcal{U}} f(\lambda) = L$ se per ogni aperto $L \in V \subseteq X$ esiste un insieme $Q \in \mathcal{U}$ tale che $f(Q) \subseteq L$.

LA STRADA TOPOLOGICA

Un I-completamento di $\mathbb{R}$ è uno spazio topologico e di Hausdorff $\mathcal{L}$ tale che:

1. $I \times \mathbb{R} \subseteq \mathcal{L}$ ed è un denso,
2. ogni funzione $f : I \to \mathbb{R}$ induce una mappa $(\lambda, f(\lambda)) : I \to I \times \mathbb{R}$ e $\lim_{\lambda \uparrow \Lambda} (\lambda, f(\lambda)) \in \mathcal{L}$,
3. $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{L}$ e $\lim_{\lambda \uparrow \Lambda} (\lambda, c) = c \in \mathbb{R}$,

LA STRADA TOPOLOGICA

4. $$\lim_{\lambda \uparrow \Lambda} (\lambda, f(\lambda)) = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} (\lambda, g(\lambda))$$

se e solo se esiste $Q \in \mathcal{U}$ e $\forall x \in Q$,

$$f(x) = g(x).$$

Teorema: $\boxed{\text{per ogni } I, \text{ esiste un } I\text{-completamento di } \mathbb{R}.}$

LA STRADA TOPOLOGICA

(Idea di) dimostrazione.

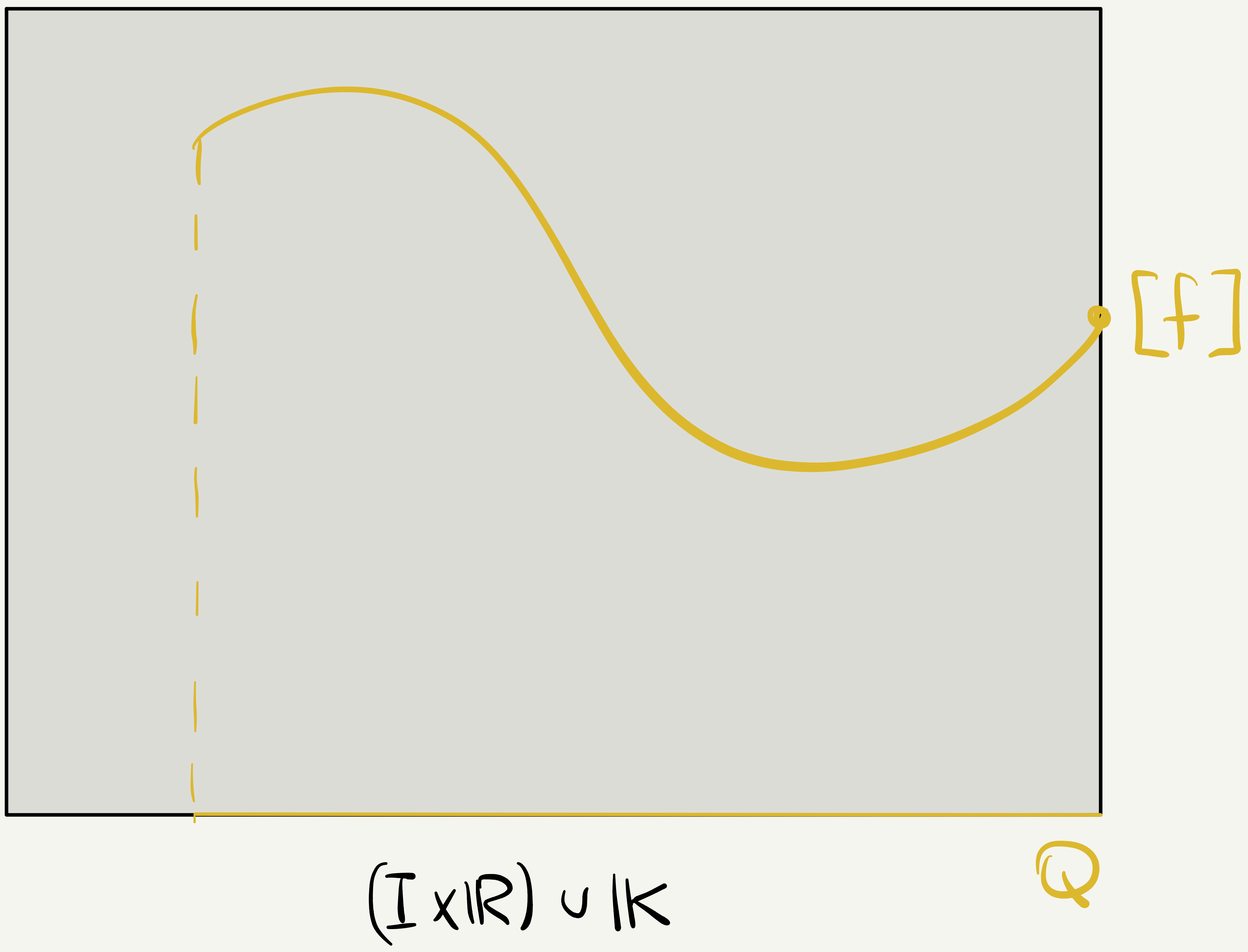
Sia $$M = \{ f : I \to \mathbb{R} \mid \exists Q \in \mathcal{U},\ f|_Q \equiv 0 \} \subseteq \mathbb{R}^I.$$

Considieriamo $$\mathcal{L} = (I \times \mathbb{R}) \cup \mathbb{R}^I / M.$$

È UN CAMPO IK

La topologia è generata da $\mathcal{P}(I \times \mathbb{R})$ e aperti della forma $B_{Q,f} = \{ (x, f(x)) : x \in Q \} \cup \{ [f]_M \}$.

LA STRADA TOPOLOGICA



LA STRADA TOPOLOGICA

Sia $\mathcal{L}$ un I-completamento di $\mathbb{R}$.

Sia $\mathcal{R} = \left\{ \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} (\lambda, f(\lambda)) \;\middle|\; f : I \to \mathbb{R} \right\}$.

Con le operazioni ovvie* $\mathcal{R}$ è un campo.

Teorema: Se $I = \mathbb{N}$, allora $\mathcal{R} \cong {}^*\mathbb{R}$ come campi.

*qualunque cosa voglia dire...

PROBABILITÀ NON-ARCHIMEDEA

Domanda: che ce ne facciamo?

Supponiamo di volere* modellizzare una lotteria su $\mathbb{N}$ in cui estraiamo ogni numero con la stessa probabilità

$\mathbb{P}(\{n\}) = \varepsilon$.

Questo ε deve essere un infinitesimo non nullo, quindi $\mathbb{R}$ non ci basta.

* perché non abbiamo un  da fare

PROBABILITÀ NON-ARCHIMEDEA

Uno spazio NAP è formato da

1. uno spazio degli eventi Ω,
2. un campo $\mathcal{R} \supseteq \mathbb{R}$,
3. un morfismo $\mathcal{J} : \mathrm{Hom}(\mathcal{P}_\omega(\Omega), \mathbb{R}) \to \mathcal{R}$ tale che $\mathcal{J}(\underline{r}) = r$,
4. una mappa $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{R}$ tale che ...

$$\mathcal{P}_\omega(\Omega) = \{ A \subseteq \Omega \mid A \text{ finito} \}, \quad \mathrm{Hom}(\mathcal{P}_\omega(\Omega), \mathbb{R}) = \{ f : \mathcal{P}_\omega(\Omega) \to \mathbb{R} \}$$

PROBABILITÀ NON-ARCHIMEDEA

4a. $\forall A \subseteq \Omega, \quad \mathbb{P}(A) \geq 0,$

4b. $\mathbb{P}(A) = 1 \iff A = \Omega,$

4c. se $A, B \subseteq \Omega$ e $A \cap B = \emptyset,$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B),$$

4d. per ogni $A \subseteq \Omega,$

$$\mathbb{P}(A) = J(\mathbb{P}(A \mid \cdot))$$

dove $\mathbb{P}(A \mid \cdot) : P_\omega(\Omega) \to \mathbb{R}.$

PROBABILITÀ NON-ARCHIMEDEA

Domanda: dove troviamo uno spazio NAP?

Fissiamo $I = \mathcal{P}_\omega(\Omega)$, $\Omega = \mathbb{N}$, sia $R = \mathcal{R}$ dentro un I-completamento di $\mathbb{R}$ fatto per bene*.

Poniamo

$$\mathcal{J}(f) = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} (\lambda, f(\lambda)).$$

*serve qualche ipotesi in più...

PROBABILITÀ NON-ARCHIMEDEA

(Lo so che non è chiaro per un  ma il tempo è tiranno...)

Possiamo costruire la nostra lotteria su $\mathbb{N}$ ponendo

$$\mathbb{P}(\{n\}) = \varepsilon$$

dove $\varepsilon \in \mathcal{R}$ è un qualche infinitesimo.

DOMANDE?