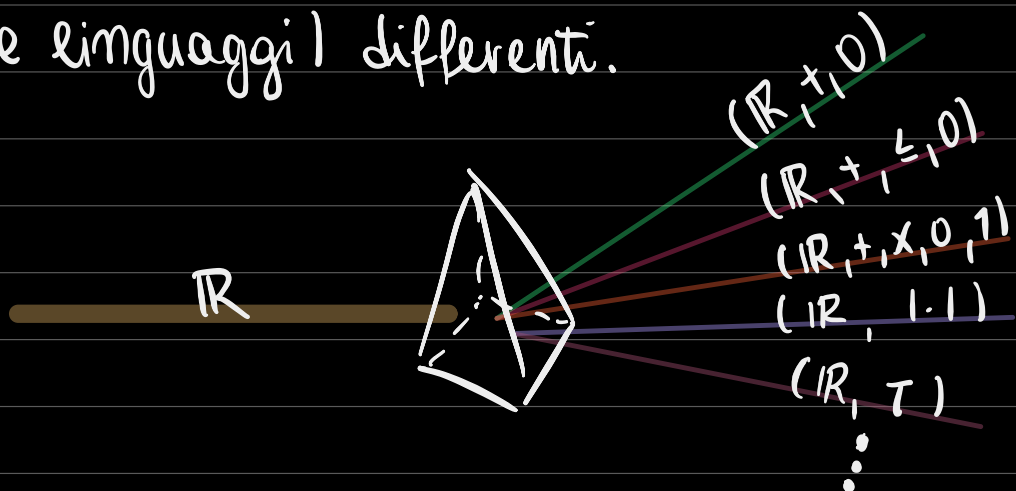
BACK-and-FORTH lectures (simoneramello.it → talks)

UNA PASSEGGIATA NELLA TEORIA DEI MODELLI

una passeggiata nella teoria dei modelli

ATTO PRIMO: traduzioni & linguaggi

Abbiamo già visto che possiamo formalizzare il ragionamento matematico usando linguaggi ($\{+,0\}$ - linguaggio dei gruppi, $\{+,\times,0,1\}$ - linguaggio degli anelli...) e simboli logici ($\wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$...). Lo stesso oggetto si può studiare con punti di vista (e linguaggi) differenti.



e l'ordine? non serve aggiungerlo:

$$x \geq y \iff \exists z\,(x-y=z^2)$$

$\downarrow$

la struttura algebrica conosce l'ordine su $\mathbb{R}$!

La teoria dei modelli, in prima battuta, studia come l'"informazione" di un oggetto matematico (e.g., $\mathbb{R}$) sia catturata da diversi linguaggi.

STRUMENTO FONDAMENTALE:

dualità sintassi-semantica

semantica		sintassi
$\parallel$		$\parallel$
oggetti matematici visti in un certo linguaggio	$\rightleftarrows$	formule in un certo linguaggio

$\forall x\,(x+x=0)$, $\forall x \exists y\,(y-x \geq 0)$, $\forall x \exists z\,(x+z=0 \lor z^2=0)$, ...

Esempio:

semantica

sintassi

strutture: insieme "G"
& operazione "+"
& elemento fissato "0"

non necessariamente un gruppo!

assiomi di gruppo:
$\forall x \exists y\, (x+y=0)$
$\forall x \forall y \forall z$
$((x+y)+z = x+(y+z))$
...

alcune strutture soddisfano questi assiomi

modelli della teoria dei gruppi
(cioè, gruppi)

ma ne soddisfano anche altri!

- teoria dei gruppi abeliani
- teoria dei gruppi senza torsione

...

quanta "informazione" su una struttura posso "leggere" nella sua teoria?

Teorema. se K e' un campo, $|K| = |\mathbb{C}|$, allora

$$(K,+,\times,0,1) \equiv (\mathbb{C},+,\times,0,1) \iff K \cong \mathbb{C}.$$

(come campi)

$\dashrightarrow$ ACF_0 e' categorica in $|\mathbb{C}|$.

Non e' vero in generale: $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^*$, ma $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^*$.

ATTO SECONDO: la mappa dell'universo

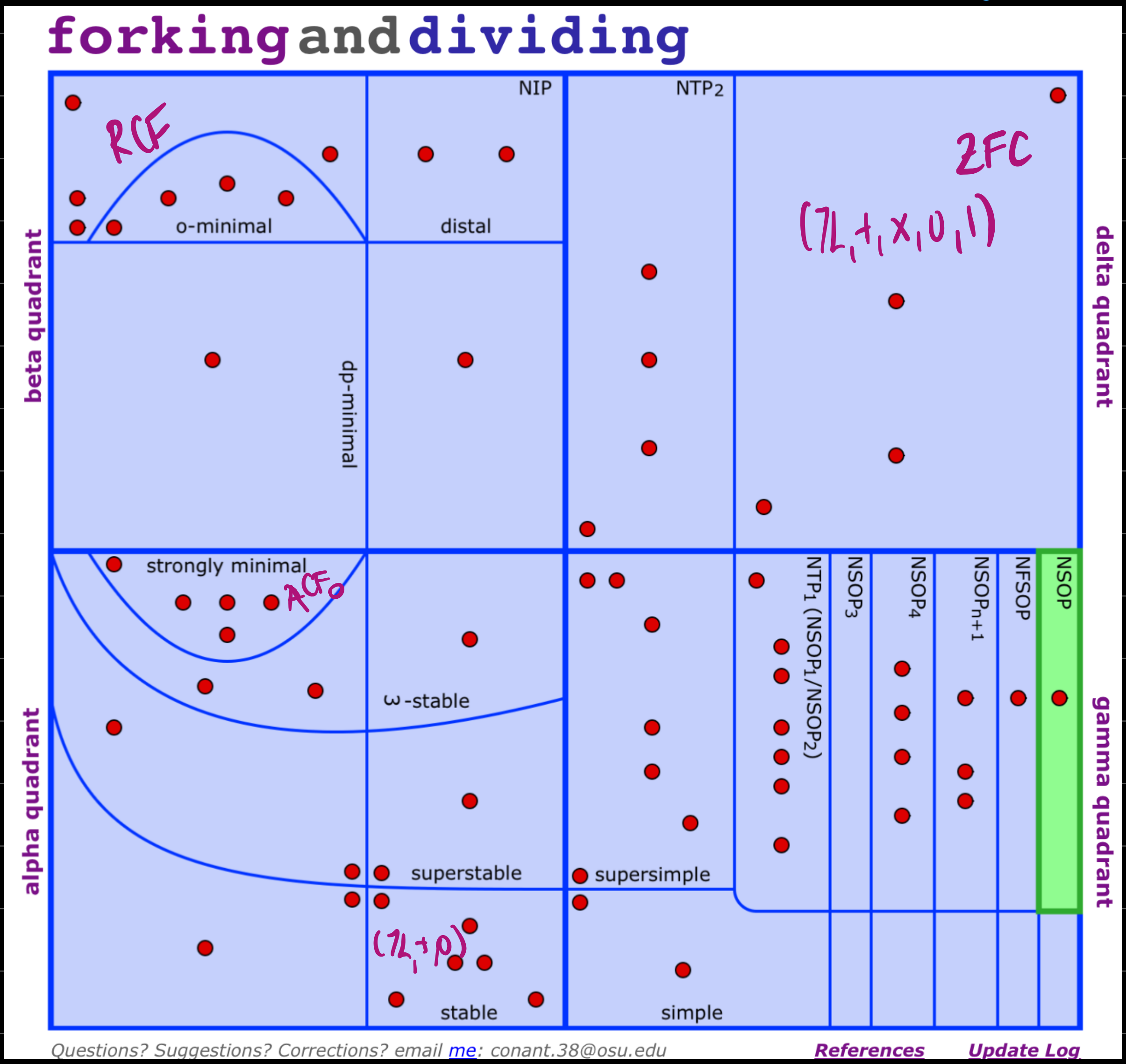
Le teorie vengono mappate in base a "quanto bene" descrivono strutture (quanto siano "tame").

↕ (Shelah)

una teoria è "tame" se omette certi pattern combinatoriali

LA MAPPA

forkinganddividing.com



grazie!

(simoneramello.it → talks)