Metodi étale in teoria dei modelli

25 ottobre 2021 - *candidato:* Simone Ramello - *relatori:* D. Zambella (IT); M. Hils, F. Jahnke (DE)

Prologo: perché metodi étale?

W. Hodges: *teoria dei modelli = geometria algebrica - campi*

Prologo: perché metodi étale?

W. Hodges: *teoria dei modelli = geometria algebrica - campi*

↓

teoria dei modelli + campi = geometria algebrica

Prologo: perché metodi étale?

Idea: prendiamo una struttura, ci imponiamo condizioni combinatoriali*, usiamo la geometria algebrica per vedere che forma assumono gli insiemi definibili in questa struttura.

Prologo: perché metodi étale?

Idea: prendiamo una struttura, ci imponiamo condizioni combinatoriali*, usiamo la geometria algebrica per vedere che forma assumono gli insiemi definibili in questa struttura.

*Condizioni combinatoriali = eliminiamo alcuni pattern di insiemi definibili dalla nostra struttura (e.g., ordini lineari)

Prologo: cosa sono i metodi étale?

Con *metodi étale* intendo l'uso dell'*étale-open topology*, introdotta da Johnson, Tran, Walsberg e Ye [arXiv:2009.02319].

Prologo: cosa sono i metodi étale?

Con *metodi étale* intendo l'uso dell'*étale-open topology*, introdotta da Johnson, Tran, Walsberg e Ye [arXiv:2009.02319].

Dato un campo k ed una k-varietà V, l'étale-open topology su V è la topologia meno fine su $V(k)$ per cui i morfismi étale* sono mappe aperte.

Prologo: cosa sono i metodi étale?

Con *metodi étale* intendo l'uso dell'*étale-open topology*, introdotta da Johnson, Tran, Walsberg e Ye [arXiv:2009.02319].

Dato un campo k ed una k-varietà V, l'étale-open topology su V è la topologia meno fine su $V(k)$ per cui i morfismi étale* sono mappe aperte.

Risulta quindi definito un funtore dalle k-varietà negli spazi topologici, E_k, che solleva il funtore dei punti.

Prologo: cosa sono i metodi étale?

Con *metodi étale* intendo l'uso dell'*étale-open topology*, introdotta da Johnson, Tran, Walsberg e Ye [arXiv:2009.02319].

Dato un campo k ed una k-varietà V, l'étale-open topology su V è la topologia meno fine su $V(k)$ per cui i morfismi étale* sono mappe aperte.

Risulta quindi definito un funtore dalle k-varietà negli spazi topologici, E_k, che solleva il funtore dei punti.

*I morfismi étale sono l'analogo algebrico di omeomorfismi / diffeomorfismi locali, ma sono più scomodi da definire. Secondo Milne, Grothendieck li ha chiamati *étale* perché sono come i raggi della luna sul mare durante l'alta marea (*le mer étale*): paralleli localmente ma non globalmente.

Prologo: perché dovrebbero interessarvi?

L'*étale-open topology* agisce come un dizionario fra nozioni algebriche e nozioni topologiche. Alcuni esempi:

1. k non è separabilmente chiuso se e solo se E_k è Hausdorff su ogni k-varietà quasi-proiettiva,

Prologo: perché dovrebbero interessarvi?

L'*étale-open topology* agisce come un dizionario fra nozioni algebriche e nozioni topologiche. Alcuni esempi:

1. k non è separabilmente chiuso se e solo se E_k è Hausdorff su ogni k-varietà quasi-proiettiva,
2. k è large* se e solo se E_k non è discreta su ogni k-varietà.

*k è large se "tutte le varietà che hanno punti ne hanno infiniti". In altre parole, se ogni k-curva liscia C con almeno un k-punto ne ha infiniti. In pratica, se "non vale Mordell-Lang".

Atto I: applicazioni model-teoretiche

L'*étale-open topology* ci ha fornito un dizionario fra nozioni algebriche e topologiche.

Atto I: applicazioni model-teoretiche

L'*étale-open topology* ci ha fornito un dizionario fra nozioni algebriche e topologiche. In particolare, abbiamo una traduzione topologica di separabilmente chiuso. Questo ci permette di affrontare una congettura nota, quantomeno nel caso "non-triviale" (*large*).

Teorema: se k è large e stabile, allora è separabilmente chiuso.

Atto I: applicazioni model-teoretiche

In maniera simile, possiamo appoggiarci su una nozione leggermente più debole rispetto a stabile, cioè semplice, e dedurre conseguenze algebriche.

Atto I: applicazioni model-teoretiche

In maniera simile, possiamo appoggiarci su una nozione leggermente più debole rispetto a stabile, cioè semplice, e dedurre conseguenze algebriche.

Teorema: se k è large e semplice, allora è *bounded**.

Atto I: applicazioni model-teoretiche

In maniera simile, possiamo appoggiarci su una nozione leggermente più debole rispetto a stabile, cioè semplice, e dedurre conseguenze algebriche.

Teorema: se k è large e semplice, allora è *bounded**.

Questa è l'ennesima istanza di un pattern più generale:

struttura + nozioni model-teoretiche = conseguenze algebriche.

*Un campo è *bounded* se ammette solo un numero finito di estensioni di grado n (dentro la sua chiusura separabile) per ogni possibile $n > 0$.

Atto II: eliminazione dei quantificatori

"Eliminare i quantificatori", per una teoria, significa che gli insiemi definibili hanno una complessità *leggibile* da un essere umano.

Atto II: eliminazione dei quantificatori

"Eliminare i quantificatori", per una teoria, significa che gli insiemi definibili hanno una complessità *leggibile* da un essere umano.

Tuttavia, *se* k è un campo, elimina i quantificatori nel linguaggio degli anelli *se e solo se* è algebricamente chiuso (o finito).

Atto II: eliminazione dei quantificatori

"Eliminare i quantificatori", per una teoria, significa che gli insiemi definibili hanno una complessità *leggibile* da un essere umano.

Tuttavia, se k è un campo, elimina i quantificatori nel linguaggio degli anelli *se e solo se* è algebricamente chiuso (o finito).

Per descrivere gli insiemi definibili servono quindi nozioni *più deboli* (ma comunque sufficienti) di eliminazione dei quantificatori.

Atto II: eliminazione dei quantificatori

Teorema: sia *k* un campo con valutazione henseliano di caratteristica zero.

Allora gli insiemi definibili sono *unioni finite di sottoinsiemi aperti* di chiusi di Zariski*.

*Nella topologia indotta dalla valutazione.

Atto II: eliminazione dei quantificatori

Teorema: sia k un campo con valutazione henseliano di caratteristica zero. Allora gli insiemi definibili sono *unioni finite di sottoinsiemi aperti* di chiusi di Zariski*.

Pattern più generale: definibile = unione finita di "aperti" di chiusi di Zariski.

*Nella topologia indotta dalla valutazione.

Atto II: eliminazione dei quantificatori

Teorema: sia k un campo con valutazione henseliano di caratteristica zero. Allora gli insiemi definibili sono *unioni finite di sottoinsiemi aperti* di chiusi di Zariski*.

Pattern più generale: definibile = unione finita di "aperti" di chiusi di Zariski.

Un campo si dice *éz* se è large e i suoi definibili sono unioni finite di *aperti (dell'étale-open topology) definibili* di chiusi di Zariski.

*Nella topologia indotta dalla valutazione.

Atto II: eliminazione dei quantificatori

Alcuni esempi di campi éz:

1. Campi henseliani di caratteristica zero [van den Dries],

Atto II: eliminazione dei quantificatori

Alcuni esempi di campi éz:

1. Campi henseliani di caratteristica zero [van den Dries],
2. Campi perfetti e model-completi [Walsberg, Ye],

Atto II: eliminazione dei quantificatori

Alcuni esempi di campi éz:

1. Campi henseliani di caratteristica zero [van den Dries],
2. Campi perfetti e model-completi [Walsberg, Ye],
3. Campi con valutazione e perfetti che eliminano i quantificatori nel "linguaggio RV",
   a. *Algebraically maximal* e *Kaplansky*, in caratteristica (p,p),
   b. Henseliani, in caratteristica $(0,p)$ o $(0,0)$.

Epilogo: cosa non abbiamo fatto*

Non è chiaro il contenuto *definibile* dell'*étale-open topology*. Ad esempio, se k^* è un'estensione elementare di k, X è un definibile aperto in k, è vero che X^* è ancora aperto in k^*?

*Ma ci abbiamo provato!

Epilogo: cosa non abbiamo fatto*

Non è chiaro il contenuto *definibile* dell'*étale-open topology*. Ad esempio, se k^* è un'estensione elementare di k, X è un definibile aperto in k, è vero che X^* è ancora aperto in k^*?

Non è chiaro fin dove si possa spingere il "dizionario": ad esempio, ci sono traduzioni di "k pseudofinito" oppure "k PAC"?

*Ma ci abbiamo provato!

Epilogo: cosa non abbiamo fatto*

Non è chiaro il contenuto *definibile* dell'*étale-open topology*. Ad esempio, se k^* è un'estensione elementare di k, X è un definibile aperto in k, è vero che X^* è ancora aperto in k^*?

Non è chiaro fin dove si possa spingere il "dizionario": ad esempio, ci sono traduzioni di "k pseudofinito" oppure "k PAC"?

In casi più deboli di "henseliano", ad esempio p-henseliano, c'è una topologia canonica che emerge. Qual è la relazione con l'*étale-open topology*?

*Ma ci abbiamo provato!

Grazie per l'attenzione.

Grazie per l'attenzione.

Riferimenti:

1. Johnson, Tran, Walsberg, Ye: *The étale-open topology and the stable fields conjecture* [2009.02319]
2. Walsberg, Ye: *Éz fields* [2103.06919]
3. Pillay, Walsberg: *Galois groups of large fields with simple theory* [2011.10018]