Date

二阶椭圆边界值问题的读书报告

周潇翔

一. 问题引入
二. 变分理论
  1. 极小化问题与变分方程
  2. Lax-Milgram引理
三. Sobolev空间
  1. 弱导数
  2. 定义与基本性质
  3. Sobolev空间的其他性质
四. 应用：求解方程
参考文献

I 问题引入

设 Ω 为 $\mathbb{R}^N$ 中有界开集，$\Gamma=\partial\Omega$，我们想解决下面的两个边界值问题：

$$\begin{cases} -\Delta u+cu=f & \text{in } \Omega \\ u=0 & \text{on } \Gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta u+cu=f & \text{in } \Omega \\ \partial_N u=g & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

我们知道，一个偏微分方程往往是非常难解的。那么退而求其次，我们能知道这些方程解是否存在吗？它们是否唯一？其实还有一个更加本质的问题：我们是在什么~~区域~~空间中求解 u？要知道，如果一个空间足够差（如~~果~~不完备），那么方程很可能没有解，这样的理论将不再优美。

我们将引入"好的"空间——Sobolev空间，在这个空间上使用我们的变分~~方程~~理论，进而达到求解方程的目的（得到解的存在唯一性）。我们可能会对方程增加一定的约束条件。

Date

Ⅱ 变分理论

我们希望找到一个方程的解，并且希望证明这样的解的存在唯一性。对于一般的方程，这是很难做到的；幸运的是，我们考虑的方程是~~物~~特殊的方程，有两个这样的定理来保证：

—当考虑的二次型对称时，我们能找到一个与之相关的泛函，从而由变分理论，找到使其取值最小的元素，证明解的~~存~~存在唯一性并建立相~~对~~应的变分方程与变分不等式（就是我们欲解的方程）；

—当考虑的~~三次~~空间是Hilbert空间时，我们有对应的Lax-Milgram引理。

下面我们就会分别讨论这两个定理。我们引入如下符号

- $(V, \|\cdot\|)$ 为Banach空间
- $a: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ 为连续二次泛函
- $l: V \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续线性泛函
- $J: V \longrightarrow \mathbb{R}$ （往往 $J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-l(v)$）
- U 为 V 的非空闭凸集。

1. 极小化问题与变分方程

~~Thm 2.1.1. 符号如上：~~

Def 我们称双线性型 $a: V\times V\longrightarrow \mathbb{R}$ 为 V-椭圆的，若
$$\exists\, \alpha>0 \quad s.t. \quad 对\ \forall v\in V,\ a(v,v)\geq \alpha\|v\|^2$$
（比正定性条件略强）

Def. 我们称线性泛函 $J: V\rightarrow \mathbb{R}$ 为二次的，若 J 可以写成形式
$$J(v) := \frac{1}{2}a(v,v)-l(v)$$
其中 $a: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ 为连续对称双线性型。

Thm 2.1.1. 符号如上。设 a 为 V-椭圆的连续对称双线性型，
$$J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-l(v),$$
则 $\exists!\, u\in U \quad s.t \quad J(u) = \inf_{v\in U} J(v)$ （极小化问题）

(续)

此时变动l，则u可视作l的函数Φ：

$$\Phi: V' \longrightarrow U$$
$$l \longmapsto u$$

Φ为Lipschitz连续，且

Φ为线性函数 $\Leftrightarrow$ U为V的线性子空间。

Proof. $\because a$连续，记$M := \|a\|$，则$\forall u,v\in V$，$|a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|$.

容易验证a为V上的一个内积，且其诱导的范数与V上原先的范数等价：

$$\forall v\in V,\ \sqrt{\alpha}\|v\| \leq \sqrt{a(v,v)} \leq \sqrt{M}\|v\|$$

此时V在该内积下成为Hilbert空间。由Riesz表示定理，

$\exists!\ c = c(l)\in V$ s.t. $\forall v\in V$，$l(v) = a(c,v)$

此时 $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - a(c,v) = \frac{1}{2}a(v-c,v-c) - \frac{1}{2}a(c,c)$

由于$U\subseteq V$为非空闭凸集，由投影定理，

① $\exists!\ u\in U$ s.t ~~对$\forall v\in U$~~ $a(u-c,u-c) = \min\limits_{v\in U} a(v-c,v-c)$

② 映射 $c\in V \longrightarrow u\in U$ 为Lipschitz连续映射

③ 映射$c\in V \rightarrow u\in U$为线性映射 $\Leftrightarrow$ U为V的线性子空间。

由①，$\exists!\ u\in U$ s.t. $J(u) = \min\limits_{v\in U} J(v)$；

$l\in V' \rightarrow c\in V$为Lipschitz连续 $\overset{②}{\Longrightarrow}$ Φ为Lipschitz连续；

而Φ为线性映射 $\Leftrightarrow$ $c\in V \rightarrow u\in U$为线性映射

$\overset{③}{\Longleftrightarrow}$ U为V的线性子空间。 □

而更加漂亮的结论在于：我们可以用等价的公式来描述这个使泛函极小化的元素！

Thm (变分方程与变分不等式)

假设和记号同上，则

u ~~?~~ $\in U$为极小化问题的解

$\Leftrightarrow$ 对$\forall v\in U$，$a(u,v-u) \geq l(v-u)$ (变分不等式)

$\overset{U为V的闭线性子空间}{\Longleftrightarrow}$ 对$\forall v\in U$，$a(u,v) = l(v)$ (变分方程)

Proof 设 $c\in V$, s.t. 对 $\forall v\in V$, $l(v)=a(c,v)$ 由投影定理,

u 为 c 在 U 上的投影

$\Leftrightarrow$ 对 $\forall v\in U$, $a(u-c, v-u)\geq 0$

$\Leftrightarrow$ 对 $\forall v\in U$, $a(u,v-u)\geq a(c,v-u)=l(v-u)$

当 U 为 V 的线性子空间时

u 为 c 在 U 上的投影

$\Leftrightarrow$ 对 $\forall v\in U$, $a(u-c, v)=0$

$\Leftrightarrow$ 对 $\forall v\in U$, $a(u,v)=l(v)$. □

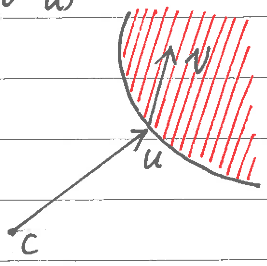

FIG 2-1

Remark. 可以直接计算得到

$$J(u+w)-J(u)=(a(u,w)-l(w))+\frac{1}{2}a(w,w)$$

故在某种意义下, $a(u,w)-l(w)$ 为差分 $J(u+w)-J(u)$ 的线性部分。

我们称 $a(u,w)-l(w)$ 为泛函 J 在 u 点处的第一变分。

从这个角度来说, 上述定理是相当自然的。

2. Lax-Milgram 引理

给定Hilbert空间 V, ~~在~~ V-椭圆的连续双线性泛函 $(a(x,x)\geq \alpha\|x\|^2)$ $a: V\times V\to \mathbb{R}$, 连续线性泛函 $l: V\to\mathbb{R}$,

我们同样可以考虑下列抽象变分问题:

$\boxed{\text{Q: 是否 } \exists u\in V \text{ s.t. 对 } \forall v\in V, \text{ 有 } a(u,v)=l(v)?}$

事实上, 我们有如下定理:

Thm (Lax-Milgram 引理)

假设如上。则关于 $u\in V$ 的变分问题

$$\text{对 } \forall v\in V,\ a(u,v)=l(v) \qquad (***)$$

有且只有一个解 $u(l)$, 且映射 $\Phi: l\in V' \longrightarrow u(l)\in V$ 为连续线性映射。

Proof. 我们分三步来证明:

Step 1 将变分方程化为方程 $Au=l$ (或 $\tau(Au-l)=0$)。

由 a 连续,记 $M=\|a\|$,$\tau: V'\to V$ 为内积 a 所对应的Riesz表示。

可验证 $A: V \longrightarrow V'$ 为连续线性泛函,

$$u \longmapsto \left[\begin{array}{l} Au: V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad v \longmapsto a(u,v) \end{array}\right]$$

且 $\|A\|_{L(V;V')} \le M$ (由于 $\|Au\|_{V'} = \sup\limits_{v\neq 0} \dfrac{|Au(v)|}{\|v\|} \le M\|u\|$)

此时 $\overset{(***)}{\cancel{a(u,v)=l(v)}} \Leftrightarrow Au=l \Leftrightarrow \tau(Au-l)=0$

Step 2 记 $\rho=\frac{\alpha}{M^2}$,我们将证明映射

$$f_\rho: V \longrightarrow V$$
$$v \longmapsto v-\rho\tau(Av-l)$$

为压缩映射,由Banach不动点定理,$\exists!\, u\in V$ 为 f_ρ 的不动点,i.e 满足 $\tau(Au-l)=0$,从而解的存在唯一性成立。

$$\begin{aligned}
\because \|v-\rho\tau Av\|^2 &= \|v\|^2-2\rho(\tau Av,v)+\rho^2\|\tau Av\|^2 \\
&= \|v\|^2-2\rho a(v,v)+\rho^2\|Av\|^2_{V'} \\
&\le (1-2\rho\alpha+\rho^2M^2)\|v\|^2 \\
&= \left(1-\frac{\alpha^2}{M^2}\right)\|v\|^2
\end{aligned}$$

从而 f_ρ 为压缩系数为 $1-\frac{\alpha^2}{M^2}$ 的压缩映射。

Step 3 证明 Φ 为连续线性映射。

此时 $A\in L(V,V')$ 为 V 至 V' 的一一映射

$\therefore \Phi=A^{-1}: V'\longrightarrow V$ 为一一的线性映射且对 $\forall\, l\in V'$ 一阶

$$\|A^{-1}l\|=\|u\|=\frac{\alpha\|u\|^2}{\alpha\|u\|}\le\frac{a(u,u)}{\alpha\|u\|}=\frac{l(u)}{\alpha\|u\|}\le\alpha^{-1}\|l\|$$

从而 Φ 连续。 □

Date

Ⅲ Sobolev空间

我们希望得到Sobolev空间的定义，其中弱导数将会起到一个至关重要的地位。所以，让我们先来探索弱导数的定义和性质，看它是导数在一种什么意义下的推广。

在接下来的章节中，我们会用到以下记号.

- Ω: $\mathbb{R}^N$中的某个开集
- $D(\Omega):=\{\varphi\in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp}\varphi$ 在Ω中紧$\}:=C_0^\infty(\Omega)$
- $L^1_{loc}(\Omega)=\{v\in L(\Omega) \mid \forall\Omega$中紧集$K$, $v|_K\in L^1(K)\}$

一、弱导数

我们先从导数的一个性质说起

Thm 设$m\in\mathbb{N}^+$, $v\in C^m(\Omega)$, $\alpha=(\alpha_1,\cdots\alpha_n)$为多重指标, $|\alpha|\le m$则对 $\forall\varphi\in D(\Omega)$, $\int_\Omega(\partial^\alpha v)\varphi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\partial^\alpha\varphi dx$

Proof. 记 $w(x)=\begin{cases}v(x)\varphi(x) & x\in\Omega\\ 0 & x\in\mathbb{R}^N-\Omega\end{cases}$ 为紧支光滑函数

故 $\exists a>0$ s.t $\operatorname{supp} w\subset(-a,a)^N$; 此时,

$$\int_\Omega\partial_i(v\varphi)dx = \int_{[-a,a]^N}\partial_i w\,dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{[-a,a]^{N-1}}\left(\int_{-a}^{a}\partial_i w(x_1,\cdots x_{i-1},t,x_{i+1},\cdots x_N)\,dt\right)dx_1\cdots\widehat{dx_i}\cdots dx_n$$

$$= 0$$

又 $\int_\Omega\partial_i(v\varphi)dx=\int_\Omega(\partial_i v)\varphi dx+\int_\Omega v\partial_i\varphi dx$

故 $\int_\Omega(\partial_i v)\varphi dx=-\int_\Omega v\partial_i\varphi dx$

这就证明了$|\alpha|=1$时的情况。当$|\alpha|>1$时，使用相似的方法可以得到。□

我们将对其进行推广，从而得到弱导数的定义。

Def（弱导数）

设 $v\in L^1_{loc}(\Omega)$，α 为多重指标，我们称 $v^\alpha\in L^1_{loc}(\Omega)$ 为 v 在 $L^1_{loc}(\Omega)$ 中指标为 α 的弱导数，若

$$\text{对}\ \forall\varphi\in D(\Omega),\quad \int_\Omega v^\alpha\varphi\,dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\,\partial^\alpha\varphi\,dx$$

特别地，当 $\alpha_i=(0,\cdots,0,\underset{i}{1},0,\cdots,0)$ 时，称 $v_i\in L_{loc}(\Omega)$ 为 v 在 $L^1_{loc}(\Omega)$ 中相对于第 i 个分量的 1 阶弱导数，若

$$\text{对}\ \forall\varphi\in D(\Omega),\quad \int_\Omega v_i\varphi\,dx=-\int_\Omega v\,\partial_i\varphi\,dx$$

我们发现弱导数满足一些基本的性质；有了这些性质，我们才能进行更加深入的研究。

Thm（变分学的基本引理）

设 $v\in L_{loc}(\Omega)$ 满足

$$\text{对}\ \forall\varphi\in D(\Omega),\quad \int_\Omega v\varphi\,dx=0$$

则 $v\overset{a.e.}{=}0$.

Proof. 对 $\forall k\geq 1$，定义开集列

$$\Omega_k:=\{x\in\Omega\mid dist(x,\mathbb{R}^N-\Omega)>\tfrac{1}{k}\}\cap B(0,k)$$

则 · $\Omega=\bigcup_{k=1}^\infty\Omega_k$

· 对 $\forall k\geq 1$，$\overline{\Omega_k}$ 为 Ω 中的紧子集

· 对 $\forall k\geq 1$，$v|_{\Omega_k}\in L^1(\Omega)$

令 $\varepsilon_0(k)=\frac{1}{3k}>0$ s.t 对 $\forall\, 0<\varepsilon\leq\varepsilon_0(k)$，

$$\overline{\Omega_{2k}}\subset\Omega_\varepsilon:=\{x\in\Omega\mid dist(x,\mathbb{R}^n-\Omega)>\varepsilon\}$$

接下来，定义
$$\omega(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & |x|<1\\ 0 & |x|\geq 1\end{cases}\qquad(\omega\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$$

$$\omega_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

Date

$$\cdot\ v^k(x)=\begin{cases} v(x) & x\in\Omega_{2k} \\ 0 & x\in\Omega-\Omega_{2k}\end{cases}$$

$$v_\varepsilon^k(x)=\int_{B(x;\varepsilon)}\omega_\varepsilon(x-y)v^k(y)dy$$

则由卷积理论，$\cdot\ v_\varepsilon^k(x)\in C_0^\infty(\Omega)$，$\operatorname{supp} v_\varepsilon^k\subseteq\Omega_{2k-\varepsilon}$

$$\cdot\ \lim_{\varepsilon\to0}\|v_\varepsilon^k-v^k\|_{L^1(\Omega_k)}=0 \qquad (1)$$

而 $v_\varepsilon^k(x)=\int_{B(x;\varepsilon)}v^k(y)\omega_\varepsilon(x-y)dy=\int_\Omega v(y)\omega_\varepsilon(x-y)dy=0$

由(1)，$\|v\|_{L^1(\Omega_k)}=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\|v_\varepsilon^k\|_{L^1(\Omega_k)}=0$

由Fatou引理，$\int_\Omega|v|dx\leqslant\varliminf\limits_{k\to\infty}\int_{\Omega_k}|v|dx=0 \quad \therefore v\equiv0$ □

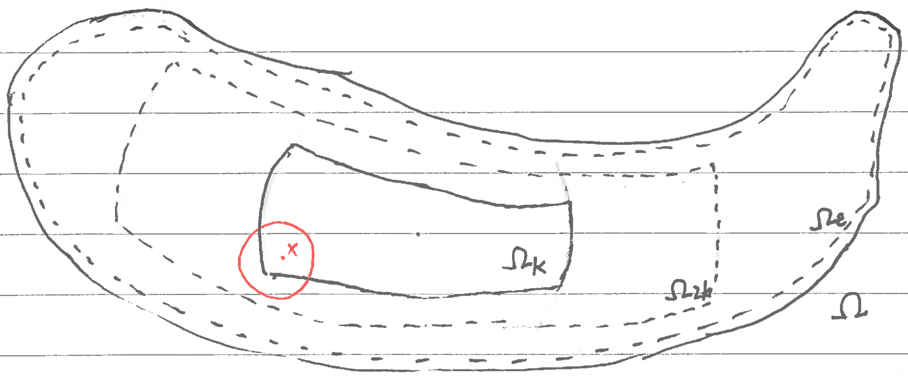

FIG 3-1 证明中的各个集合

另外，我们还有两个期待的弱导数的性质，在这之后我们可以无歧义地使用这个符号。

Prop.（弱导数的唯一性）
设 $v\in L^1_{loc}(\Omega)$，α 为多重指标，$|\alpha|\geq1$，则 v 的指标为 α 的弱导数若存在必唯一。
特别地，当 $v\in C^{|\alpha|}\Omega$ 时，$v^\alpha=\partial^\alpha v$，此时弱导数即为导数。

Proof. 设 $v^\alpha, w^\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ 满足对 $\forall \varphi \in D(\Omega)$,

$$\int_\Omega v^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v \partial^\alpha \varphi \, dx = \int_\Omega w^\alpha \varphi \, dx$$

则由变分学基本引理, $v^\alpha = w^\alpha$. □

Prop. (常值函数的判别法)

设 Ω 为 $\mathbb{R}^N$ 的连通开集, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ s.t

对 $\forall \varphi \in D(\Omega)$ $1 \le i \le n$, 恒有

$$\int_\Omega v \partial_i \varphi \, dx = 0 \qquad (*)$$

则 v 为常值函数.

Proof. 证明思路仍然是利用卷积来构造光滑函数。

只需证明 v 在 Ω 上是局部常值即可。

$\forall x \in \Omega$, $\exists r > 0$ s.t $\overline{B(x;r)} \subset \Omega$.

记 $U = B(x;r)$, $v_\varepsilon = v * w_\varepsilon$, 则

$\exists\, \varepsilon_1 = \varepsilon_1(U) > 0$ s.t. $\forall\, 0 < \varepsilon < \varepsilon_1$,

- $\overline{U} \subset \Omega_\varepsilon$, $v_\varepsilon \in D(\Omega_\varepsilon)$
- $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \|v_\varepsilon - v\|_{L^1(U)} = 0$
- $\partial_i v_\varepsilon(x) = \int_\Omega \partial_i w_\varepsilon(x-y) v(y) \, dy \overset{(*)}{=} 0$

(对 $\forall x \in \Omega_\varepsilon$, $1 \le i \le N$)

$\Rightarrow v_\varepsilon|_{B(x,r)} \equiv C \Rightarrow v|_U \equiv C$ □

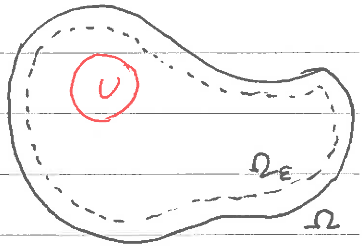

FIG 3-2 各个集合

二. 定义与基本性质

这时,我们可以给出Sobolev空间的定义.

Def (Sobolev空间, 1)

设 $m \ge 1$, $1 \le p \le \infty$, 我们定义

$W^{m,p}(\Omega) := \{ v \in L^p(\Omega) \mid v$ 有全部 $\le m$ 阶弱导数 v^α 且 $v^\alpha \in L^p(\Omega)\}$

$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$.

然后，我们给出其基本性质。

Prop 设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$，$m\geq 1$，则 Sobolev 空间 $W^{m,p}(\Omega)$，$H^m(\Omega)$ 在下述定义的范数

$$\|v\|_{m,p,\Omega}:=\left(\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leq m}|\partial^\alpha v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\|\partial^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}\quad(1\leq p<\infty)$$

$$\|v\|_{m,\infty,\Omega}:=\max_{|\alpha|\leq m}\|\partial^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}\quad(p=\infty)$$

$$\|v\|_{m,\Omega}=\left(\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leq m}|\partial^\alpha v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\|\partial^\alpha v\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\quad(p=2)$$

下成为一个 Banach 空间，且

- 当 $1\leq p<\infty$ 时，$W^{m,p}(\Omega)$ 可分；
- 当 $1<p<\infty$ 时，$W^{m,p}(\Omega)$ 自反；
- 当 $p=2$ 时，$H^m(\Omega)$ 为 Hilbert 空间

Proof. Step 1.（Banach 空间）显然 $W^{m,p}(\Omega)$，$H^m(\Omega)$ 为线性空间。

我们验证范数满足三角不等式.

当 $1\leq p<\infty$ 时，

$$\begin{aligned}\|v+w\|_{m,p,\Omega}&:=\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\|\partial^\alpha(v+w)\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}\\&\underset{\text{连续}}{\overset{\text{Min}}{\leq}}\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\left(\|\partial^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}+\|\partial^\alpha w\|_{L^p(\Omega)}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\\&\underset{\text{离散}}{\overset{\text{Min}}{\leq}}\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\|\partial^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\|\partial^\alpha w\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\|v\|_{m,p,\Omega}+\|w\|_{m,p,\Omega}\end{aligned}$$

当 $p=+\infty$ 时，

$$\begin{aligned}\|v+w\|_{m,\infty,\Omega}&=\max_{|\alpha|\leq m}\|\partial^\alpha(v+w)\|_{L^\infty(\Omega)}\\&\leq\max_{|\alpha|\leq m}\left(\|\partial^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\partial^\alpha w\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\\&\leq\max_{|\alpha|\leq m}\|\partial^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}+\max_{|\alpha|\leq m}\|\partial^\alpha w\|_{L^\infty(\Omega)}\\&=\|v\|_{m,\infty,\Omega}+\|w\|_{m,\infty,\Omega}\end{aligned}$$

范数的另外2条性质是显然的（变分学基本引理），故而对 $\forall\,1\leq p\leq+\infty$，$\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ 成为 $W^{m,p}(\Omega)$ 的范数。

来看完备性。设 $1\le p\le\infty$，令 $(v_k)_{k=1}^{\infty}$ 为 $W^{m,p}(\Omega)$ 在范数 $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ 下的Cauchy列，则对 $\forall\, 0\le|\alpha|\le m$，$\forall k,l\ge 1$，有

$$\|\partial^\alpha v_k-\partial^\alpha v_l\|_{L^p(\Omega)}\le\|v_k-v_l\|_{m,p,\Omega}\xrightarrow{k,l\to+\infty}0$$

$\because$ $L^p(\Omega)$ 完备

$\therefore$ • 对 $\forall\,1\le|\alpha|\le m$，$\exists$ 函数 $v^\alpha\in L^p(\Omega)$ s.t. $\lim\limits_{k\to+\infty}\|\partial^\alpha v_k-v^\alpha\|_{L^p(\Omega)}=0$

• $\exists\, v\in L^p(\Omega)$ s.t. $\lim\limits_{k\to+\infty}\|v_k-v\|_{L^p(\Omega)}=0$

Claim. 这里的 $v^\alpha\in L^p(\Omega)$ 就是 v 的指标为 α 的偏导数。~~此时~~

此时 $v\in W^{m,p}(\Omega)$ 且 $\lim\limits_{k\to+\infty}\|v_k-v\|_{m,p,\Omega}=0$

故 $(W^{m,p}(\Omega),\|\cdot\|_{m,p,\Omega})$ 为Banach空间。

下证Claim. 设 $1\le|\alpha|\le m$，$k\ge 1$，$\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$，则（记 q 为 p 的共轭指标）

• $v_k\in W^{m,p}(\Omega)\Rightarrow\int_\Omega(\partial^\alpha v_k)\varphi\,dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v_k\partial^\alpha\varphi\,dx$

• $\left|\int_\Omega(\partial^\alpha v_k)\varphi\,dx-\int_\Omega v^\alpha\varphi\,dx\right|\overset{\text{Hölder}}{\le}\|\partial^\alpha v_k-v^\alpha\|_{L^p(\Omega)}\|\varphi\|_{L^q(\Omega)}\xrightarrow{k\to+\infty}0$

• $\left|\int_\Omega v_k\partial^\alpha\varphi\,dx-\int_\Omega v\partial^\alpha\varphi\,dx\right|\overset{\text{Hölder}}{\le}\|v_k-v\|_{L^p(\Omega)}\|\partial^\alpha\varphi\|_{L^q(\Omega)}\xrightarrow{k\to+\infty}0$

$\Rightarrow\int_\Omega v^\alpha\varphi\,dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\partial^\alpha\varphi\,dx$ 从而Claim得证。

<u>Step 2.</u>（可分性+自反性）

我们只考虑 $m=1$ 的情况，$m\ge 2$ 时方法相同。

记 $(L^p(\Omega))^{N+1}$ 为装备乘积范数的赋范线性空间，则 $W^{1,p}(\Omega)$ 可自然视作 $(L^p(\Omega))^{N+1}$ 的子空间

$$\left\{(v_0,v_1,\cdots v_n)\in(L^p(\Omega))^{N+1}\,\middle|\,\text{对 }\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega),\ \forall\,1\le i\le N,\ \int_\Omega v_i\varphi\,dx=-\int_\Omega v_0\partial_i\varphi\,dx\right\}$$

当 $1\le p<\infty$ 时，$L^p(\Omega)$ 可分 $\Rightarrow(L^p(\Omega))^{N+1}$ 可分 $\Rightarrow W^{1,p}(\Omega)$ 可分

而 $W^{1,p}(\Omega)$ 在 $(L^p(\Omega))^{N+1}$ 中闭，故

当 $1<p<\infty$ 时，$L^p(\Omega)$ 自反 $\Rightarrow(L^p(\Omega))^{N+1}$ 自反 $\Rightarrow W^{1,p}(\Omega)$ 自反。

Date

Step 3. ($p=2$, Hilbert空间)

显然
$$(\cdot,\cdot)_{m,\Omega}: H^m(\Omega)\times H^m(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u\ ,\ v) \longmapsto \sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega \partial^\alpha u\,\partial^\alpha v\,dx$$

为 $H^m(\Omega)$ 上的内积，且 $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ 为该内积下诱导的范数，$H^m(\Omega)$ 在 $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ 下完备，故 $(H^m(\Omega),\|\cdot\|_{m,\Omega})$ 为 Hilbert空间。 □

为了方便起见，我们进行如下的补充定义。

Def (Sobolev空间 2)

定义 $W^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$ $\quad \|\cdot\|_{0,p,\Omega}:=\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$

$H^0(\Omega)=L^2(\Omega)$ $\quad \|\cdot\|_{0,\Omega}:=\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$

Remark. 显然当 $1\le p<\infty$ 时，$\mathcal{D}(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密，但一般 $\mathcal{D}(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中是不稠密的。这促使我们引入下列Sobolev空间的定义。

Def (Sobolev空间 3)

对 $1\le p<\infty$，定义

$W_0^{m,p}(\Omega)$ 为 $\mathcal{D}(\Omega)$ 在 $(W^{m,p}(\Omega),\|\cdot\|_{m,p,\Omega})$ 中的闭包；

$H_0^m(\Omega):=W_0^{m,2}$

Remark. · 当 $1\le p<\infty$ 时，$W_0^{m,p}(\Omega)$ 为可分Banach空间；

· 当 $1<p<\infty$ 时，$W_0^p(\Omega)$ 为自反空间；

· 当 $p=2$ 时，$H_0^m(\Omega)$ 为 Hilbert 空间。

三. Sobolev空间的其他性质

1. Poincaré-Friedrichs 不等式

我们称集合 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ 为有限宽的，如果它被夹在 $\mathbb{R}^N$ 中的两个平行超平面之间。对 $\forall m\ge 1$，$1\le p<\infty$，我们定义如下 ~~半范数~~ $W_0^{m,p}(\Omega)$ 中元素 v 的半范数.

Date

$$|v|_{m,p,\Omega} := \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$|v|_{m,\Omega} := \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha v\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (当 p=2)$$

注意到由定义，我们显然有 $|v|_{m,p,\Omega} \leq \|v\|_{m,p,\Omega}$。令人惊讶的是，当 Ω 为有限宽时，我们有如下的Poincaré-Friedrich不等式成立。

Thm (Poincaré-Friedrich不等式)

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ 为有限宽的开集。

1) 对 $\forall 1 \leq p < \infty$，$\exists C = C(\Omega, p)$ s.t ~~对~~

对 $\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$，$\|v\|_{0,p,\Omega} \leq C|v|_{1,p,\Omega}$ (**)

2) 对 $\forall m \geq 1$，$1 \leq p < \infty$，$|\cdot|_{m,p,\Omega}$ 为 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 上的范数且与 $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ 等价，i.e $\exists C = C(\Omega, m, p)$ s.t

对 $\forall v \in W_0^{m,p}(\Omega)$，$|v|_{m,p,\Omega} \leq \|v\|_{m,p,\Omega} \leq C|v|_{m,p,\Omega}$

Remark. 不等式(**)蕴含了"用导数控制函数"的思想。

由于 $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$，我们只需证明1)2)对 $D(\Omega)$ 成立即可。

另外，我们可以不妨假设 Ω 夹在垂直于 $(1,0,\cdots,0)$ 的两超平面中央，这样 $\exists a>0$，s.t $\Omega \subset [-a,a] \times \mathbb{R}^{N-1}$，

我们可以自然对 $v \in D(\Omega)$ 在 $(-a,a)\times\mathbb{R}^{N-1}$ 内进行0延拓。

Proof. 1) 对 $\forall v \in D(\Omega)$，$x = (x_1, \cdots x_N) \in (-a,a)\times\mathbb{R}^{N-1}$，我们有公式

$$v(x) = \left(\int_{-a}^{x_1} |\partial_1 v(t, x_2, \cdots x_N)| dt\right)^p$$

$$\Rightarrow |v(x)|^p \leq \left(\int_{-a}^{x_1} |\partial_1 v(t, x_2, \cdots x_N)| dt\right)^p$$

$$\leq (a+x_1)^{p-1} \int_{-a}^{x_1} |\partial_1 v(t, \cdots x_N)|^p dt$$

$$\leq (a+x_1)^{p-1} \int_{-a}^{a} |\partial_1 v(x_1, \cdots x_N)|^p dx_1$$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} |v(x)|^p dx_1 \leq \frac{(2a)^p}{p} \int_{-a}^{a} |\partial_1 v(x_1, \cdots, x_N)|^p dx_1$$

Date

$$\Rightarrow \|v\|_{0,p,\Omega}^p \xlongequal{\text{Fubini}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}}\left(\int_{-a}^{a}|v(x)|^p dx_1\right)dx_2\cdots dx_N$$

$$\leq \frac{(2a)^p}{p}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\left(\int_{-a}^{a}|\partial_1 v(x_1,\cdots x_N)|^p dx_1\right)$$

$$= \frac{(2a)^p}{p}\|\partial_1 v\|_{0,p,\Omega}^p \leq \frac{(2a)^p}{p}|v|_{1,p,\Omega}^p$$

取 $C=\frac{(2a)^p}{p}$ 即证 1)。

2)(不妨设 $v\in D(\Omega)$)

当 $m=1$ 时，由(**)，$\|v\|_{1,p,\Omega}^p = \|v\|_{0,p,\Omega}^p + |v|_{1,p,\Omega}^p \leq (1+C^p)|v|_{1,p,\Omega}^p$

$$\Rightarrow \|v\|_{1,p,\Omega} \leq (1+C^p)^{\frac{1}{p}}|v|_{1,p,\Omega}$$

当 $m=2$ 时，$|v|_{1,p,\Omega}^p = \sum_{i=1}^{N}\|\partial_i v\|_{0,p,\Omega}^p \leq C^p\sum_{i=1}^{N}|\partial_i v|_{1,p,\Omega}^p = C^p|v|_{2,p,\Omega}^p$

$$\|v\|_{2,p,\Omega}^p = \|v\|_{1,p,\Omega}^p + |v|_{2,p,\Omega}^p$$

$$\leq (1+C^p)|v|_{1,p,\Omega}^p + |v|_{2,p,\Omega}^p$$

$$\leq (1+C^p+C^{2p})|v|_{2,p,\Omega}^p$$

一般地，$\|v\|_{m,p,\Omega} \leq \left(\frac{C^{(m+1)p}-1}{C^p-1}\right)^{\frac{1}{p}}|v|_{m,p,\Omega}$ □

2. Sobolev嵌入定理；迹算子

在这里，我们只对之后用到的内容作个简要陈述而略去绝大部分的证明。(若无特殊声明,则设)

以下~~设~~Ω为有界连通开集，边界为C^1的。

Thm (Sobolev嵌入)

我们有嵌入 $\phi: H^1(\Omega)\hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$，i.e. ϕ为单射

且 $\exists\, c>0$ s.t $\forall\, v\in H^1(\Omega)$，$\|\phi(v)\|\leq c\|v\|$

而且，$u,v\in H^1(\Omega)\Rightarrow uv\in H^1(\Omega)$

对于~~Sob~~ $H^1(\Omega)$空间，我们同样有光滑函数的逼近定理.

Thm (光滑函数逼近定理)

设Ω为有界连通开集，则$C^\infty(\bar{\Omega})$在$H^1(\Omega)$中稠密。

接下来,我们定义一个线性赋范空间

$$L^2(\Gamma):=\{f:\Gamma\to\mathbb{R}\mid f\in L(\Gamma),\ |f|^2\in L^1(\Gamma)\}/\text{a.e.}$$

赋予范数 $\|f\|_{L^2(\Gamma)}:=\left(\int_\Gamma |f|^2 d\Gamma\right)^{\frac{1}{2}}$

此时可验证 $(L^2(\Gamma),\|\cdot\|_{L^2(\Gamma)})$构成Banach空间。(事实上,$L^2(\Gamma)$亦为Hilbert空间)

我们可以定义迹算子:

$$tr: C^\infty(\bar{\Omega})\longrightarrow L^2(\Gamma)$$
$$v\longmapsto\left[\begin{array}{l} tr\,v:\Gamma\longrightarrow\mathbb{R}\\ \quad\quad x\longmapsto v(x)\end{array}\right]$$

由于$C^\infty(\bar{\Omega})$在$H^1(\Omega)$中稠密且$H^1(\Omega)$完备,我们可以延拓迹算子至$H^1(\Omega)$. $tr: H^1(\Omega)\longrightarrow L^2(\Gamma)$

并且我们可以证明 $tr\in\mathcal{L}(H^1(\Omega),L^2(\Gamma))$.

这里我们再介绍一个与变分学基本定理类似的定理.

Thm. 设Ω为有界连通开集,$\Gamma:=\partial\Omega$为C^1的,
$w\in L^2(\Gamma)$满足 对$\forall v\in H^1(\Omega)$,有 $\int_{\Gamma} wv\,d\Gamma=0$
则$w=0$。

3. Green 公式

我们将Green公式延拓至Sobolev空间并略去其证明。

Thm 设$\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$为有界开集,$\Gamma:=\partial\Omega$为$C^1$的,记
$\nu=(\nu_i)_{i=1}^N$为沿$\partial\Omega$的单位外法向向量场。
那么,对$\forall u,v\in H^1(\Omega)$, $1\le i\le N$, $uv\nu_i\in L^1(\Gamma)$且

$$\int_\Omega u\,\partial_i v\,dx=-\int_\Omega(\partial_i u)v\,dx+\int_\Gamma uv\nu_i\,d\Gamma$$

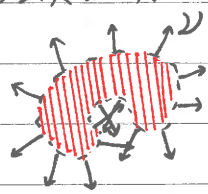

FIG 3-3

(基本Green公式)

Def 算子$\Delta:=\sum_{i=1}^N\partial_{ii}: H^2(\Omega)\longrightarrow L^2(\Omega)$为Laplace算子,
函数Δu称为u的Laplacian;
算子$\partial_\nu:=\sum_{i=1}^N\nu_i\partial_i: H^2(\Omega)\longrightarrow L^2(\Gamma)$称为外法向导数算子,
函数$\partial_\nu u$称为u的外法向导数。

Date

Green公式有许多丰富的变体，如下即为一例.

Thm. 1) 对 $\forall u\in H^2(\Omega)$, $v\in H^1(\Omega)$，令 $\nabla v:=(\partial_i v)_{i=1}^N$

$\nabla u\cdot\nabla v:=\sum_{i=1}^N \partial_i u\,\partial_i v \qquad |\nabla v|:=\left(\sum_{i=1}^N|\partial_i v|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

则Green公式成立.

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx=-\int_\Omega(\Delta u)v\,dx+\int_\Gamma(\partial_\nu u)v\,d\Gamma$$

2) 对 $\forall a\in C^1(\bar\Omega)$, $u\in H^1(\Omega)$，有 $au\in H^1(\Omega)$，

且有Green公式：对 $\forall v\in H^1(\Omega)$, $1\le j\le N$，恒有

$$\int_\Omega au\,\partial_j v\,dx=-\int_\Omega(\partial_j(au))v\,dx+\int_\Gamma auv\nu_j\,d\Gamma.$$

Proof 1) 在基本Green公式中以 $\partial_i u$ 替换 u，即有

$$\int_\Omega \partial_i u\,\partial_i v\,dx=-\int_\Omega\partial_i(\partial_i u)v\,dx+\int_\Gamma\partial_i u\,v\,\nu_i\,d\Gamma$$

$$\Rightarrow\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\,dx=-\int_\Omega(\Delta u)v\,dx+\int_\Gamma(\partial_\nu u)v\,d\Gamma$$

2) $\left.\begin{array}{l}a\in C^1(\bar\Omega)\subseteq L^2(\Omega)\\ u\in H^1(\Omega)\subseteq L^2(\Omega)\end{array}\right\}\Rightarrow au\in L^2(\Omega)$

Claim: $w_j:=(\partial_j a)u+a(\partial_j u)\in L^2(\Omega)$ 为 au 的弱导数。

这是由于，当 $u\in C^\infty(\bar\Omega)$ 时，对 $\forall\varphi\in D(\Omega)$，

$$\int_\Omega au\,\partial_j\varphi\,dx=-\int_\Omega\{(\partial_j a)u\varphi+a(\partial_j u)\varphi\}dx=-\int_\Omega w_j\varphi\,dx$$

而 $C^\infty(\bar\Omega)$ 在 $H^1(\Omega)$ 中稠密，故Claim成立，得 $au\in H^1(\Omega)$。

再一次，在基本Green公式中使用 au 来替换 u，即可得到

$$\int_\Omega au\,\partial_j v\,dx=-\int_\Omega(\partial_j(au))v\,dx+\int_\Gamma auv\nu\,d\Gamma.$$

□

IV 应用：求解方程

现在我们可以回答在开头提出的问题：

Thm. 给定 · $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ 为有界开集，$\Gamma=\partial\Omega$ 为 ~~连续可~~ C^1 的

· $c\in L^\infty(\Omega)$ s.t $c\overset{a.e.}{\geqslant}0$ $\quad f\in L^2(\Omega)$

令 · $V=U=H_0^1(\Omega)$ （以下设 $u,v\in U=H_0^1(\Omega)$）

· $a(u,v):=\int_\Omega(\nabla u\cdot\nabla v+cuv)\,dx$

· $l(v):=\int_\Omega fv\,dx$

· $J(v):=\frac{1}{2}a(v,v)-l(v)=\frac{1}{2}\int_\Omega(|\nabla v|^2+cv^2)\,dx-\int_\Omega fv\,dx$

此时存在唯一的 $u\in H_0^1(\Omega)$ 极小化泛函 $J(v)$, i.e. 满足变分方程：

对 $\forall v\in H_0^1(\Omega)$，$\int_\Omega(\nabla u\cdot\nabla v+cuv)\,dx=\int_\Omega fv\,dx$

而且，映射 $\Phi: L^2\longrightarrow H_0^1(\Omega)$ 为连续线性映射
$$f\longmapsto u$$

最后，函数 u 满足下列边界值问题，是 ~~其在 $H_0^1(\Omega)$~~ $H^1(\Omega)$ 中的唯一解
$$\begin{cases}-\Delta u+cu=f & \text{in }\Omega\\ u=0 & \text{on }\Gamma\end{cases}$$

Proof. 重点是验证 Thm 2.1.1 中的各个条件，而后即一马平川。

· $a(\cdot,\cdot)$ 连续

对 $\forall u,v\in H^1(\Omega)$，（以下省略）

$$|a(u,v)|\overset{C\text{-}S}{\leqslant}\sum_{i=1}^N\|\partial_iu\|_{0,\Omega}\|\partial_iv\|_{0,\Omega}+\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega}$$
$$\overset{C\text{-}S}{\leqslant}\max\{1,\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\}\left(\sum_{i=1}^N\|\partial_iu\|_{0,\Omega}^2+\|u\|_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^N\|\partial_iv\|_{0,\Omega}^2+\|v\|_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\max\{1,\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\}\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}$$

· a 为 $H_0^1(\Omega)$-椭圆.

$$a(v,v)\geqslant\int_\Omega|\nabla v|^2dx=|v|_{1,\Omega}^2$$

Date

· l为连续线性泛函

对$\forall v\in H_0^1(\Omega)$，$|l(v)|\le\|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega}\le\|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}$

之后便是简单而琐碎的论证。

· Φ为连续映射

由Poincaré-Friedrichs不等式，$\exists C(\Omega)>0$, s.t

对$\forall v\in H_0^1(\Omega)$ $\quad\|v\|_{1,\Omega}\le C(\Omega)|v|_{1,\Omega}$

此时，$\frac{\|u\|_{1,\Omega}^2}{(C(\Omega))^2}\le |u|_{1,\Omega}^2\le a(u,u)=l(u)\le\|f\|_{0,\Omega}\|u\|_{1,\Omega}$

$\Rightarrow\|u\|_{1,\Omega}\le C(\Omega)^2\|f\|_{0,\Omega}\quad\Rightarrow\|\Phi\|\le C(\Omega)^2$

· $-\Delta u+cu=f$ in Ω

由Green公式，

$$\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\,dx=-\int_\Omega(\Delta u)v\,dx.$$

故变分方程$a(u,v)=l(v)$ $(\forall v\in D(\Omega))$可写为

对$\forall v\in D(\Omega)$，$\int_\Omega(-\Delta u+cu-f)v\,dx=0$

由变分学基本引理，$-\Delta u+cu=f$ in Ω.

· $u=0$ on Γ

由迹定理，$u\in H_0^1(\Omega)\subset L^2(\Gamma)$满足边界值条件 $u=0$ on Γ.

· u的唯一性

若u满足 $\begin{cases}-\Delta u+cu=f & \text{in }\Omega\\ u=0 & \text{on }\Gamma\end{cases}$

则$u\in H_0^1(\Omega)$，u满足变分方程。

故u必唯一。 $\square$

Date

运用类似的方法，我们可以求解另一个方程组.

Thm. 给定 · $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为有界开集，$\Gamma = \partial\Omega$ 为 C^1 的

· $c \in L^\infty(\Omega)$ s.t. $c \geq c_0 > 0$ in Ω，$f \in L^2(\Omega)$，$g \in L^2(\Gamma)$

令 · $V = U = H^1(\Omega)$ (以下设 $\forall u, v \in U = H^1(\Omega)$)

· $a(u,v) := \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + cuv)\,dx$

· $l(v) := \int_\Omega fv\,dx + \int_\Gamma gv\,d\Gamma$

· $J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - l(v)$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla v|^2 + cv^2)\,dx - \int_\Omega fv\,dx + \int_\Gamma gv\,d\Gamma$$

此时存在唯一的 $u \in H^1(\Omega)$ 极小化泛函 $J(v)$，i.e. 满足变分方程

对 $\forall v \in H^1(\Omega)$，$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + cuv)\,dx = \int_\Omega fv\,dx + \int_\Gamma gv\,d\Gamma$

而且，映射 $\Phi : L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma) \longrightarrow H^1(\Omega)$

$$(f, g) \longmapsto u$$

为连续线性映射。

最后，额外假设 $u \in H^2(\Omega)$，则 u 是下列边界值问题中的唯一解

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{in } \Omega \\ \partial_\nu u = g & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

其中 ~~g为连续~~ $\partial_\nu u \in L^2(\Gamma)$ 为 u 的外法向导数。

Proof. · a 为连续双线性泛函 (同上个定理的证明)

· a 为 $H^1(\Omega)$-椭圆

$\because a(v,v) \geq \min\{1, c_0\}\, \|v\|_{1,\Omega}^2$ (对 $\forall v \in H^1(\Omega)$，以下省略)

· l 为连续线性泛函

$|\int_\Gamma gv\,d\Gamma| \leq \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|tr\|_{L(H^1(\Omega); L^2(\Gamma))} \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{1,\Omega}$

$\therefore |l(v)| \leq |\int_\Omega fv\,dx| + |\int_\Gamma gv\,d\Gamma|$

$\leq (\|f\|_{0,\Omega} + \|tr\|_{L(H^1(\Omega); L^2(\Gamma))} \|g\|_{L^2(\Gamma)}) \|v\|_{1,\Omega}$

Date

· 亚连续

同上个定理的证明，可得

$$\|u\|_{1,\Omega} \le (C(\Omega))^2 \left(\|f\|_{0,\Omega} + \|tr\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega);L^2(\Gamma))} \|g\|_{L^2(\Gamma)}\right)$$
$$\le C(\Omega)^2 \left(1+\|tr\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega);L^2(\Gamma))}\right)\left(\|f\|_{0,\Omega}+\|g\|_{L^2(\Gamma)}\right)$$

以下假设 $u \in H^2(\Omega)$

· $\begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{in } \Omega \\ \partial_\nu u = g & \text{on } \Gamma \end{cases}$

由Green公式，$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = -\int_\Omega (\Delta u) v \, dx + \int_\Gamma (\partial_\nu u) v \, d\Gamma$

故变分方程 $a(u,v) = l(v)$ $(\forall v \in H^1(\Omega))$ 可写为

对 $\forall v \in H^1(\Omega)$，$\int_\Omega (-\Delta u + cu - f) v \, dx = \int_\Gamma (g - \partial_\nu u) v \, d\Gamma$

特别地，

对 $\forall v \in D(\Omega)$，$\int_\Omega (-\Delta u + cu - f) v \, dx = 0$

$\Rightarrow$ 对 $\forall v \in L^2(\Omega)$，$\int_\Omega (-\Delta u + cu - f) v \, dx = 0$

$\Rightarrow$ $-\Delta u + cu - f = 0$ in $L^2(\Omega)$

此时，对 $\forall v \in H(\Omega)$，$\int_\Gamma (g - \partial_\nu u) v \, d\Gamma = 0$

$\Rightarrow$ $g = \partial_\nu u$ in $L^2(\Gamma)$

□

我们引用麻希南老师的语录作结：

发现兴趣，生活愉快。

—— 麻希南

参考文献

[1] Philippe G. Ciarlet Linear and Nonlinear Functional Analysis with applications. ~~2013~~. siam. 2013.