练习题 2.11 2 参考格式

周潇翔

2018 年 11 月 16 日

例题

设 $A, B \in \mathbb{R}, A < B$, f 是 (a,b) 上的连续函数, 值在 (a,b) 中的数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = b, \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A, \lim_{n\to\infty} f(y_n) = B$$

证明：对于每一个 $\eta \in (A,B)$, 存在值在 (a,b) 中的数列 $\{z_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} z_n = b, \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \eta$$

[解答]

对 $\forall \eta \in (A,B)$, 固定 $m \in \mathbb{N}$, 我们寻找 $z_m \in (b - \dfrac{1}{m}, b)$:
$\forall \varepsilon > 0$(这里令 $\varepsilon = \min\{\dfrac{B-\eta}{2}, \dfrac{\eta - A}{2}\}$),

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A\colon \exists N_1 \in \mathbb{N}, s.t.\ \forall n > N_1, |f(x_n) - A| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n) < A + \varepsilon \\
&\lim_{n\to\infty} f(y_n) = B\colon \exists N_2 \in \mathbb{N}, s.t.\ \forall n > N_2, |f(y_n) - B| < \varepsilon \Rightarrow f(y_n) > B - \varepsilon \\
&\lim_{n\to\infty} x_n = b\colon \exists N_3 \in \mathbb{N}, s.t.\ \forall n > N_3, |x_n - b| < \frac{1}{m} \qquad \Rightarrow b - \frac{1}{m} < x_n < b \\
&\lim_{n\to\infty} y_n = b\colon \exists N_4 \in \mathbb{N}, s.t.\ \forall n > N_4, |y_n - b| < \frac{1}{m} \qquad \Rightarrow b - \frac{1}{m} < y_n < b
\end{aligned}$$

令 $n_m = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + 1$, 则

$$\begin{cases} b - \dfrac{1}{m} < \ x_{n_m} < b \\ b - \dfrac{1}{m} < \ y_{n_m} < b \end{cases} \qquad f(x_{n_m}) < A + \varepsilon < \eta < B - \varepsilon < f(y_{n_m})$$

则由介值定理，存在 z_m 落于 x_{n_m} 与 y_{n_m} 之间 ($\Rightarrow z_m \in (b - \frac{1}{m}, b)$), 而 $f(z_m) = \eta$,
故我们找到了数列 $\{z_m\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} z_n = b, \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \eta$$

.

4.2 例 10 修正

周潇翔

2019 年 11 月 16 日

例题

证明极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{k}{n^{3/2}}=-\frac{1}{6}$$

[解答]

利用等式 $\ln\cos x=-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x+\dfrac{1}{2}x^2}{x^2}=0$$

此时记 $a_n^{(k)}=\ln\cos\dfrac{k}{n^{3/2}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{k^2}{n^3}$, 则有

$$\lim_{\frac{k}{n^{3/2}}\to 0}\frac{\ln\cos\dfrac{k}{n^{3/2}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{k^2}{n^3}}{\dfrac{k^2}{n^3}}=0$$

> 这里的意思是，对任意的数列 (n_j,k_j) 满足 $\lim\limits_{j\to\infty}\dfrac{k_j}{n_j^{3/2}}=0$，我们有
>
> $$\lim_{j\to\infty}\frac{\ln\cos\dfrac{k_j}{n_j^{3/2}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{k_j^2}{n_j^3}}{\dfrac{k_j^2}{n_j^3}}=0$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\ln\cos\dfrac{k}{n^{3/2}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{k^2}{n^3}}{\dfrac{k^2}{n^3}}\right\}=0\qquad\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}a_n^{(k)}}{\dfrac{1}{n}}=0$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant n}na_n^{(k)}=0\qquad\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_n^{(k)}=0$$

所以有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{k}{n^{3/2}}=-\frac{1}{2n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}a_n^{(k)}=-\frac{1}{2n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+o(1)=-\frac{1}{6}$$