No.
Date

期中评分标准及参考答案

（四.六～九题）

四. 评分标准：· f在$[a,b]$上的最值不在a,b点处取到，2分；

· f有单增区间和单减区间，2分；

· 出现导数 给1分；

· 直接写$\exists x_0 \in (a,b)$为极值点，至少扣2分

参考答案：反证法。若$f(x)$在$[a,b]$上不单调，则

$\exists x_1<x_2<x_3,\ (f(x_1)-f(x_2))(f(x_2)-f(x_3))<0$

不妨设 $f(x_1)<f(x_2)$；不妨设$f(x_1)<f(x_3)$；

则由介值定理，(f连续)，$\exists \eta \in (x_1,x_3)$，$f(\eta)=f(x_2)$

显然$\eta \neq x_2$，与题意矛盾。 □

~~五~~六. 评分标准：· 有写即给友情分1分；（或0.5）

· 分成两部分：有限区间零点个数有限（3分）(*)

利用该定理证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$（3分）

· 其中说明清楚 凝聚点为零点，得3分，

证 凝聚点 导数为0得3分；

参考答案：1 使用 Lebesgue膨胀说明 (*)

2（或者）若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq +\infty$，则$\exists A\in\mathbb{R}$，$\exists \{x_{k_n}\}\subseteq\{x_n\}$

s.t $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n}=A$

(Heine归结) $\begin{cases} \cdot\ f(A)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{k_n})=0 \\ \cdot\ f'(A)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(x_{k_n})-f(A)}{x_{k_n}-A}=0 \end{cases}$ 矛盾！

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ □

No.
Date

七. 评分标准: · 不等式反号 至多7分;
· Peano余项 至多3分
· 约等号 至多3分;

参考答案: 设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x\in(0,+\infty)$, 则
$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$; 当 $x>e$ 时 $f'(x)<0$
$\therefore f(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调减
$\therefore f(\pi)<f(3)$ i.e. $\frac{\ln\pi}{\pi}<\frac{\ln 3}{3} \Rightarrow 3^{\pi}>\pi^{3}$ □

八. 评分标准: · 有写即给友情分 0.5-1 分;
· 指出凸函数给3分;
~~洛必达法则得 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}f'(x)$, 扣1分~~
~~(主要是因为你们~~
· 使用洛必达法则但逻辑错误扣3分;

参考答案: · $f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to0}x=0$
· $f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$

· $f''(x)>0 \Rightarrow f$ 为凸函数
$\therefore f(x)\geq f(0)+xf'(0)=x$ □

No.
Date

九. 评分标准 · 分值~~数~~比例为 4:6

· (2) 写出答案 1分 + $\left(\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}\right)$

\+ Lagrange 余项 2分

\+ Peano 余项 3分 + …

其余方法酌情给分

参考答案: (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f'(x)\cdot x}{x^2}$$

$$\overset{\text{洛}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)\cdot x}{2x} = \frac{f''(0)}{2}$$

~~(2) 引理: 当~~ ~~设 f, g 均可导函数~~

~~设 f, g 在 0 的一邻域处可导, 则~~

~~$f(x)=g(x)+o(x^k)\ (x\to0) \Rightarrow f'(x)=g'(x)+o(x^{k-1})\ (x\to0)$~~

(2) · 使用积分余项

· 归纳法证明

· 直接使用 Leibniz 公式算 $\frac{d^n}{dx^n}\left[f(x)\cdot\frac{1}{x}\right]$

注: 思考当初我们如何证

$$T(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

在零点处任意阶可导? (方法是类似的)

121. [问题3.5.4]. 请先验证 $f(x)$ 可导, 再对 $f(x)e^{f(x)}$ 求导

122 [问题3.5.7] 大部分同学跟着答案跳步了. 请补充为什么 $y(x)=0$.

123 [问题3.5.4] 取 $\ln f(x)$ 时请先补充 $\boxed{\quad}$, $f(x)>0$.

取 $f^{-1}(x)$ 请先证 $f^{-1}(x)$ 存在

124 [问题3.5.4]. 若 $\underbrace{f(x)\text{单调}, \lim_{x\to\infty} f(x)\neq+\infty}_{\text{不能省略.}}$, 则 $\lim_{x\to\infty} f(x)=A\in\mathbb{R}$

125 [习题3.4.12] 导函数只有介~~质~~值性, 不一定连续。

例如:
$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$f'(x)$ 在0点处不连续

126. [习题3.4.11] 设 $y(x)=\sqrt{C}\sin h(x)$ 的话, 需要先证明 $h(x)$ 可导才能再求导 $\left(h(x)=\arcsin\frac{y(x)}{\sqrt{C}}\right)$

127 [习题3.4.12] 有些同学是这么写:

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f^{(n-1)}(h)-f^{(n-1)}(0)}{h}\xlongequal{\exists\xi\in(0,h)}\lim_{h\to0^+}f^{(n)}(\xi)\overset{\triangle}{=}\lim_{x\to0^+}f^{(n)}(x)$$

△ 这里有一处跳步。可以这么写避免跳步.

$$\forall\{h_k\}\text{ 满足 }h_k>0,\ \lim_{k\to\infty}\frac{f^{(n-1)}(h_k)-f^{(n-1)}(0)}{h_k}\xlongequal[\Rightarrow\lim_{k\to+\infty}\xi_k=0]{\exists\xi_k\in(0,h_k)}\lim_{k\to+\infty}f^{(n)}(\xi_k)$$

$$=\lim_{x\to0^+}f^{(n)}(x)$$