# 补 A3：常用积分

周潇翔

摘要. 列一下 A3 中证明的非平凡的积分公式供概率论临时使用。

- Gauss 积分：$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

  概率论记忆法：$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$
- Dirichlet 积分：$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$
- Laplace 积分:$I(\beta) := \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{x^2 + \alpha^2} dx \qquad J(\beta) := \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{x^2 + \alpha^2} dx$
- Fresnel 积分：$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
- $\Gamma$ 函数：$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$， $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^a \Gamma(x)}{\Gamma(x+a)} = 1$

  $B$ 函数：$B(p,q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}$

就我个人经历，概率论中我用到的主要是 Gauss 积分、$\Gamma$ 函数与 $B$ 函数。

School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei, 230026, P.R. China,

*Email address*: `xx352229@mail.ustc.edu.cn`

# 数分A3期中复习补充(数项级数 & 函数项级数)

## 一、级数的乘法

(Cauchy) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=A$  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=B$ 绝对 $\Rightarrow \sum_{i,j=1}^{\infty} a_ib_j=AB$

(Mertens) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=A$ 绝对 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=B \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n=AB$

(Abel) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=A$  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=B$  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\exists \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n=AB$

## 二、Dirichlet & Abel

$\sum a_nb_n$：$\sum a_n$ 一致有界，$b_n \overset{\downarrow}{\rightrightarrows} 0$

Dirichlet判别法

$\sum a_nb_n$：$\sum a_n \rightrightarrows S$，$b_n\downarrow$ 一致有界

Abel判别法

## 三、一致收敛性质 & Dini定理

$f_n\in C(I)$  $f_n\rightrightarrows f \Rightarrow f\in C(I)$  $u_n(x)\in C(I)$ $\sum u_n(x)\rightrightarrows S(x) \Rightarrow S(x)\in C(I)$

$f_n\in R([a,b])$  $f_n\rightrightarrows f \Rightarrow f\in R([a,b])$  $u_n(x)\in R([a,b])$ $\sum u_n(x)\rightrightarrows S(x) \Rightarrow S(x)\in R([a,b])$

$f_n(x_0)$收敛 $f_n\in C'(\underset{\text{连通}}{I})$  $f_n'\rightrightarrows g \Rightarrow f\in C'(I)$  $\sum u_n(x_0)=S(x_0)$ $u_n(x)\in C'(I)$ $\sum u_n'(x)\rightrightarrows g(x) \Rightarrow S(x)\in C'(I)$

(Dini定理)紧区间的性质

$f_n\in C([a,b])$  $f_n \xrightarrow{\downarrow} f\in C([a,b]) \Rightarrow f_n\rightrightarrows f$

$u_n(x)\in C([a,b])$ $\sum u_n(x)\to S(x)\in C([a,b])$  $u_n(x)\geq 0 \Rightarrow \sum u_n(x)\rightrightarrows S(x)$

## 四、幂级数内部边界性质

$R=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$  内闭一致收敛,可以随意求导积分

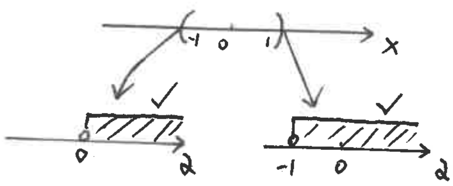
(Abel第二定理) ~~S(R)∃~~ $\sum_{n=0}^{\infty} a_nR^n\,\exists \Rightarrow \lim_{x\to R^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_nR^n$ i.e $[0,R]$上一致收敛

(Tauber定理) $\lim_{x\to R^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n=A$  $a_n=o(\frac{1}{n}) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n=A$

## 五、幂级数展开式

$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots \quad (-1\leq x\leq 1)$

$(1+x)^{\alpha} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$




## 六、紧区间上的多项式逼近与列紧性

(多项式一致逼近) $f\in C([a,b])$ $\exists\{P_n(x)\}$ 多项式函数列 $P_n(x)\rightrightarrows f(x)$

(Arzelà-Ascoli定理) $f_n\in C(I)$ 等度连续且一致有界 $I=[a,b]$

$\Rightarrow \exists\{f_{k_n}\}$  $f_{k_n}(x)\rightrightarrows f(x)$

定义 $F[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$

反变换 $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F[f(x)] e^{i\lambda x} d\lambda$

$$F[F[f(x)]] = 2\pi f(-x)$$

线性性 $F[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = c_1 F[f_1(x)] + c_2 F[f_2(x)]$

膨胀性 $F[f(\alpha x)] = \frac{1}{|\alpha|} F[f(x)]\Big|_{\frac{\lambda}{\alpha}}$

频移性 $F[e^{i\lambda_0 x} f(x)] = F[f(x)]\Big|_{\lambda-\lambda_0}$

时移性 $F[f(x-x_0)] = F[f(x)] e^{-ix_0\lambda}$

微分 $F[f'(x)] = i\lambda F[f(x)]$

积分 $F[\int_{-\infty}^{x} f(\xi) d\xi] = \frac{1}{i\lambda} F[f(x)]$

卷积 $F[f * g(x)] = F[f(x)] F[g(x)]$

线性性 $F^{-1}[(c_1 f_1 + c_2 f_2)(\lambda)] = c_1 F^{-1}[f_1(\lambda)] + c_2 F^{-1}[f_2(\lambda)]$

膨胀性 $F^{-1}[g(\frac{\lambda}{\alpha})] = |\alpha| F^{-1}[\cancel{f}\, g(\lambda)]\Big|_{\alpha x}$

频移性 $F^{-1}[g(\lambda-\lambda_0)] = e^{i\lambda_0 x} F^{-1}[g(\lambda)]$

时移性 $F^{-1}[g(\lambda) e^{-ix_0\lambda}] = F^{-1}[g(\lambda)]\Big|_{x-x_0}$

微分 $F^{-1}[i\lambda g(\lambda)] = (F^{-1}[g(\lambda)])'$

积分 $F^{-1}[\frac{1}{i\lambda} g(\lambda)] = \int_{-\infty}^{x} F^{-1}[f(\lambda)]\Big|_{\xi} d\xi$

卷积 $F^{-1}[f(\lambda) g(\lambda)] = F^{-1}[f(\lambda)] * F^{-1}[g(\lambda)]$

$$F^{-1}[e^{-a^2\lambda^2}] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2}}$$

代数阶 e.g

| | | | |
|---|---|---|---|
| $+\infty$ | $\equiv 0$ | 多项式 | $n+n+0$ |
| $+$ | 零点 | 有理分式 | $n+n+0$ |
| $0$ | 可去奇点 | e.p.分式LT | $1+1+0$ |
| $-$ | 极点 | $e^z$ | $0+0+1$ |
| $-\infty$ | $\equiv\infty$ | $\sin z$ | $\infty+0+1$ |
| $\times$ | 本性奇点 | | |

$$Q:\int_\gamma f(z)dz=0\ ? \Rightarrow \begin{cases} \gamma\sim 0 \quad \int_\gamma pdx+qdy \ \text{局部全微分} \\ \text{多连通区域，线性组合（单连通，补连通）} \\ \text{奇点，留数，} 2\pi i\sum_j n(\gamma,a_j)\operatorname{Res}_{z=a_j}f(z) \end{cases}$$

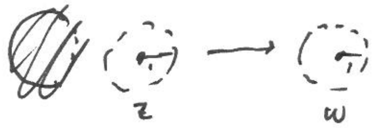
$$\text{表示：} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \Rightarrow \begin{cases} f^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi \\ f_n(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^n(\xi-z)}d\xi \\ f^{-1}(w)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z-z_0|=\varepsilon}\frac{f'(z)}{f(z)-w}z\,dz \quad (f'(z_0)\neq 0) \end{cases}$$

Morera定理：判断解析函数 （$f=u+iv$ $u,v\in C'(\mathbb{C})$ 满足CR方程）

幅角定理 $\sum_j n(\gamma,a_j)-\sum_k n(\gamma,b_k)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz=n(f(\gamma),0)$

$$\sum_j g(a_j)n(\gamma,a_j)-\sum_k g(b_k)n(\gamma,b_k)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}g(z)dz$$

Schwarz引理



$\Rightarrow \begin{cases} |f(z)|\leq|z| \\ |f'(0)|\leq 1 \end{cases}$

Rouché定理

$\gamma\sim 0 \pmod{\Omega}$

$n(\gamma,z)=0$ or $1$

$$|f(z)-g(z)|<|f(z)| \Rightarrow \mathrm{Zero}|_{\gamma内}(f)=\mathrm{Zero}|_{\gamma内}(g)$$

解析函数局部性质 1.在每一点Taylor展开

2. $f(z)=z^n g(z)$ $g(0)\neq 0$ （$n=1$时：局部同胚性质）

$\Rightarrow \exists\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ s.t $\forall|a|<\delta$ $f(z)=a$ 在 $z<\varepsilon$ 中有$n$个根

解析函数全局性质：1. Liouville定理：有界整函数为常值函数

2. 开映射定理 $\Rightarrow$ 极大值原理