Schauder 边界估计

周潇翔

摘要. 本文的目的是较为细致地证明 [3, 定理 3.1]. 在此, 我们追随 [3] 的步伐, 推导出一系列的先验估计, 在此基础上证明边界估计.

1. 问题的提出

我们要证明以下定理：

Theorem 1.1. 设 $0<\alpha<1$. 设 $f\in C^{\alpha}(\overline{B}_1^+)$ 和 $u\in C^2(\overline{B}_1^+)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta u = f & in\ B_1^+ \\ u=0 & on\ \partial B_1^+ \end{cases}$$

则 $u\in C^{2,\alpha}(\overline{B}_1^+)$, 且存在 $C_0>0$, 使得

$$[D^2u]_{C^{\alpha}(B_{1/2}^+)} \leqslant C_0(\|f\|_{C^{\alpha}(\overline{B}_1^+)}+\|u\|_{C(\overline{B}_1^+)}) \tag{1.1}$$

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2}^+)} \leqslant C_0(\|f\|_{C^{\alpha}(\overline{B}_1^+)}+\|u\|_{C(\overline{B}_1^+)}) \tag{1.2}$$

Remark 1.2. 当 (1.1) 成立时, 我们有

$$\begin{aligned}
\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2}^+)} &= [D^2u]_{C^{\alpha}(B_{1/2}^+)}+\|u\|_{C^2(\overline{B}_{1/2}^+)} \\
&\leqslant [D^2u]_{C^{\alpha}(B_{1/2}^+)}+[D^2u]_{C^{\alpha}(B_{1/2}^+)}+C_1\|u\|_{C^2(\overline{B}_{1/2}^+)} && [3, \text{引理 } 1.1] \\
&\leqslant 2C_0(\|f\|_{C^{\alpha}(\overline{B}_1^+)}+\|u\|_{C(\overline{B}_1^+)})+C_1\|u\|_{C^2(\overline{B}_{1/2}^+)} && \text{由 } (1.1) \\
&\leqslant (2C_0+C_1)(\|f\|_{C^{\alpha}(\overline{B}_1^+)}+\|u\|_{C(\overline{B}_1^+)})
\end{aligned} \tag{1.3}$$

故 (1.2) 自动成立, 此时 $u\in C^{2,\alpha}(\overline{B}_1^+)$. 故证明的关键在于 (1.1).

为方便起见, 我们引入以下符号 (如图1所示)：

$$\partial_0 B_1^+ = \partial B_1^+ \cap \{x\in\mathbb{R}^n \mid x_n=0\}$$

$$\partial_+ B_1^+ = \partial B_1^+ \cap \{x\in\mathbb{R}^n \mid x_n>0\}$$

$$F=\sup_{B_1^+}|f|$$

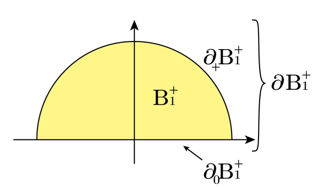

图 1.

以下皆设 $0<\alpha<1$,$C_0=C_0(n,\alpha)$ 为只与 n,α 有关的常数, 在不同的公式中可代表不同的值.

2. 单点估计

Lemma 2.1. 设在半球 B_1^+ 上有 $-\Delta u = f$, 则

$$u(x) \leqslant \sup_{\partial B_1^+} u + \frac{1-|x|^2}{2n} F$$

证明. 构造函数

$$w(x) = u(x) - \left(\sup_{\partial B_1^+} u + \frac{1-|x|^2}{2n} F \right)$$

经计算得知

$$-\Delta w(x) \leqslant 0, \qquad w(x) \leqslant 0 \text{ in } \partial B_1^+$$

故由极值原理 [2, 定理 2.22] 知 $w(x) \leqslant 0$. □

Corollary 2.2. 设在半球 B_1^+ 上有 $-\Delta u = f$, 调和函数 v 满足 $v = u$ *on* ∂B_1^+, 则

$$|u(x) - v(x)| \leqslant \frac{1-|x|^2}{2n} F \qquad \textit{for } x \in B_1^+$$

下面的这个定理尝试使用一个二次调和多项式来估计函数在零点附近的情况.

Theorem 2.3. 存在 $\varepsilon_0 > 0, \lambda \in (0,1)$, 对任意满足

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ \sup_{B_1^+} |f| \leqslant \varepsilon_0 \\ \sup_{B_1^+} |u| \leqslant 1 \end{cases}$$

的函数 $f \in C(\overline{B}_1^+)$ 和 $u \in C^2(\overline{B}_1^+)$, 存在一个调和多项式

$$q(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + B \cdot x + C$$

满足:

(1) $\|A\| + |B| + |C| \leqslant C_0$.
(2) 对所有 $x \in B_\lambda^+$, $|u(x) - q(x)| \leqslant \lambda^{2+\alpha}$.

证明. 令 v 为 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & x \in B_1 \\ v = u, & x \in \partial B_1 \end{cases}$$

的解, 则:

- 由 [2, 定理 2.5],

$$\sup_{B_1^+} |v| = \sup_{\partial B_1^+} |v| = \sup_{\partial B_1^+} |u| \leqslant \sup_{B_1^+} |u| \leqslant 1$$

- 由于 $v|_{\partial B_1}=0$,v 为调和函数, 同 [4, Thm24, p172] 类似,v 可以延拓至 B_1(by $v(-x)=-v(x)$) 且

$$\sup_{B_1}|v|=\sup_{B_1^+}|v|\leqslant 1$$

- 对任意 $x\in B_{1/2}^+$,

$$|D^\beta v(x)|\leqslant C(n,|\beta|)\sup_{B_1}|v|\leqslant C(n,|\beta|)$$

取

$$q(x)=\frac{1}{2}\left\langle D^2v(0)x,x\right\rangle+Dv(0)\cdot x+v(0).$$

我们验证 $q(x)$ 满足所需的性质：

- 由 $\Delta q(x)=\Delta v(0)=0$,$q(x)$ 调和.
- $\|A\|+|B|+|C|\leqslant C_0$.
- $$v(x)-q(x)\xlongequal[t\in(0,1)]{\exists\xi=tx}\frac{1}{3!}\left[(x\cdot D)^3v(\xi)\right]$$

  我们有

$$\begin{aligned}|u(x)-q(x)|&\leqslant|u(x)-v(x)|+|v(x)-q(x)|\\&\leqslant\frac{1-|x|^2}{2n}F+C_1(n)|x|^3\sup_{B_1^+}\left|D^3u\right|\\&\leqslant\frac{1}{2n}F+C_2(n)|x|^3\end{aligned}\tag{$*$}$$

  其中 $C_1(n),C_2(n)$ 是只与 n 有关的常数.

  取 $\lambda=(2C_2(n))^{-\frac{1}{1-\alpha}},\varepsilon_0=n\lambda^{2+\alpha}$, 则当 $|x|<\lambda$ 时,

$$\text{RHS of }(*)\leqslant\frac{1}{2n}\varepsilon_0+C_2(n)\lambda^3\leqslant\lambda^{2+\alpha}$$

  故对所有 $x\in B_\lambda^+$, $|u(x)-q(x)|\leqslant\lambda^{2+\alpha}$.

$\square$

Theorem 2.4. *设 $u\in C^2(B_1^+)\cap C(\overline{B}_1^+),-\Delta u=f,f$ 在原点处 Holder 连续, 则存在多项式*

$$p(x,0)=\frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle+B\cdot x+C$$

满足:

(1)

$$\|A\|+|B|+|C|\leqslant C_0([f]_{\alpha,0}+|f(0)|+\sup_{B_1^+}|u|)$$

.

(2) 对所有 $x \in B_{1/2}^+$,

$$|u(x)-p(x,0)| \leqslant C_1|x|^{2+\alpha}$$

其中

$$C_1 \leqslant C_0([f]_{\alpha,0}+|f(0)|+\sup_{B_1^+}|u|)$$

证明. 不妨设

- $f(0)=0$.
- $|f(x)| \leqslant \varepsilon_0|x|^\alpha$. 当 $x \in B_1^+$.
- $\sup_{B_1^+}|u| \leqslant 1$.

否则, 令

$$v(x)=u(x)-\frac{|x|^2}{2n}f(0)$$

$$\overline{u}(x)=\varepsilon_0\frac{v(x)}{[f]_{\alpha,0}+\sup_{B_1^+}|v|} \qquad h(x)=\varepsilon_0\frac{f(x)-f(0)}{[f]_{\alpha,0}+\sup_{B_1^+}|v|}$$

以 $\overline{u},h$ 代替 u,f 即可.

Claim 2.5. 当 $x \in B_1^+$.
$\sup_{B_1^+}|u| \leqslant 1$ 时, 存在一串二次调和多项式 $p_k(x)=\frac{1}{2}\langle A_kx,x\rangle+B_k\cdot x+C_k(k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$ 满足

- $\forall\, x \in B_{\lambda^k}^+$, 有
$$|u(x)-p_k(x)| \leqslant \lambda^{(2+\alpha)k}$$
- $$\begin{cases}\|A_k-A_{k-1}\| \leqslant C_0\lambda^{\alpha(k-1)}\\ |B_k-B_{k-1}| \leqslant C_0\lambda^{(\alpha+1)(k-1)}\\ |C_k-C_{k-1}| \leqslant C_0\lambda^{(\alpha+2)(k-1)}\end{cases}$$

此时我们能够构造所需的多项式. 由于 A_k,B_k,C_k 是柯西列, 故收敛, 分别记为 $A_\infty,B_\infty,C_\infty$, 而

$$p(x,0)=\frac{1}{2}\langle A_\infty x,x\rangle+B_\infty\cdot x+C_\infty$$

即为所求的二次多项式.
固定 $x \in B_{1/2}^+$ 不为零 (否则显然成立), 则存在 $k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 使得 $\lambda^{k+1}<|x|\leqslant\lambda^k$, 此时

$$|p_k(x)-p(x,0)| \leqslant C_0\left(\lambda^{\alpha k}|x|^2+\lambda^{(\alpha+1)k}|x|+\lambda^{(\alpha+2)k}\right) \leqslant C_0'|x|^{2+\alpha}$$

$$|u(x)-p(x,0)| \leqslant |u(x)-p_k(x)|+|p_k(x)-p(x,0)| \leqslant C|x|^{2+\alpha}$$

注意到之前的 “不妨设” 时我们所做的替换, 将其替换回即可得到结论. □

Claim 2.5 的证明. 我们使用归纳法.

当 $k=0$ 时, 取 $p_0(x)=0$ 即可. 当 $k=1$ 时, 取 $p_1(x)$ 为 Theorem 2.3 中的二次调和多项式, 则条件亦成立.

下设 $p_k(x)$ 已被构造, 我们希望构造 $p_{k+1}(x)$. 取 $w_k(x)=\frac{(u-p_k)(\lambda^k x)}{\lambda^{(2+\alpha)k}}$, 则 $w_k(x), -\Delta w_k(x)$ 满足 Theorem 2.3 的条件, 故存在一个二次调和多项式 $q_k(x)=\frac{1}{2}\langle A_k^* x, x\rangle + B_k^*\cdot x + C_k^*$ 满足

(1) $\|A_k^*\|+|B_k^*|+|C_k^*|\leqslant C_0$.

(2) 对所有 $x\in B_\lambda^+$, $|w(x)-q_k(x)|\leqslant \lambda^{2+\alpha}$.

此时可直接验证多项式 $p_{k+1}(x)=p_k(x)+\lambda^{(2+\alpha)k}q_k(\frac{x}{\lambda^k})$ 满足条件. □

3. 大范围的估计

Lemma 3.1. *设 $v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, 记*

$$B_1^v=\{x\in B_1 | x\cdot v>0\}$$

存在函数 $\varphi^v\in C_0^\infty(B_1^v)$ 使得任意 $\varepsilon>0, P(x)$ 为次数小于 3 的多项式, 有

$$\varphi_\varepsilon^v * P = P$$

其中 $\varphi_\varepsilon^v(x)=\varepsilon^{-n}\varphi^v(x/\varepsilon)$.

证明可参见 [3] 附录中的情形 2.

Theorem 3.2. *设 $u\in C^2(B_1^+)$. 如果存在常数 $C_1>0, 0<\alpha<1$, 对任意 $y\in B_{1/2}^+$ 都存在关于 x 的二次多项式 $p(x,y)$ 满足条件*

$$|u(x)-p(x,y)|\le C_1|x-y|^{2+\alpha}, \qquad \textit{for any } x\in B_{1/4}^+(y)\cap B_1^+$$

则有

$$p(x,y)=\frac{1}{2}(x-y)^T D^2u(y)(x-y)+Du(y)\cdot(x-y)+u(y) \tag{3.1}$$

且对于 $i,j\in\{1,\dots,n\}, x_1,x_2\in B_{1/2}^+$, 有

$$|D_{ij}u(x_1)-D_{ij}u(x_2)|\le C_0C_1|x_1-x_2|^\alpha \tag{3.2}$$

证明. 证明分 3 步.

Step1.

$$\begin{cases} u(y)=p(y,y) \\ Du(y)=D_x p(y,y) \\ D^2u(y)=D_x^2 p(y,y) \end{cases}$$

(1) 显然 $u(y)=p(y,y)$.

(2)

$$
\begin{aligned}
D_j u(y) &= \lim_{h\to 0}\frac{u\left(y+he_j\right)-u(y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{p\left(y+he_j,y\right)-p(y,y)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{O\left(h^{2+\alpha}\right)}{h} \\
&= \quad D_{x_j}p(y,y)
\end{aligned}
$$

故 $Du(y)=D_x p(y,y)$.

(3) 若 $\eta\in(\mathbb{R}^n)^+$, 记 $g_\eta(h)=u(y+h\eta)$, 则

$$
\begin{aligned}
g_\eta''(0) &= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g_\eta(h)+g_\eta(-h)-2g_\eta(0)}{h^2} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{u(y+h\eta)+u(y-h\eta)-2u(y)}{h^2} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{p(y+h\eta,y)+p(y-h\eta,y)-2p(y,y)}{h^2}+\lim_{h\to 0}\frac{O\left(h^{2+\alpha}\right)}{h^2} \\
&= D_{\eta\eta}p(x,y)
\end{aligned}
$$

而

$$
g_\eta''(h)=\sum_{i,j=1}^{n}\eta_i\eta_j D_{ij}u(y+t\eta)\ \Rightarrow\ \begin{cases} g_{e_k}''(0)=D_{kk}u(y) \\ g_{e_k+e_l}''(0)=D_{kk}u(y)+2D_{kl}u(y)+D_{ll}u(y)\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow D_{kl}u(y)=\frac{1}{2}\left[g_{e_k+e_l}''(0)-g_{e_k}''(0)-g_{e_l}''(0)\right]=D_{kl}p(y,y)
$$

故 $D^2u(y)=D_x^2p(y,y)$.

Step2. 对 $x_1,x_2\in B_{1/2}$, 当 $|x_1-x_2|\leqslant\frac{1}{4}$ 时证明 (3.2).
取 $v\in\mathbb{R}^n$ 满足 $v\cdot(x_1-x_2)=0$ 且 $v_n>0$, 则对任意 $z\in B_1^+$, 有

$$
p(z,x_1)-p(z,x_2)=(p(z,x_1)-u(z))-(p(z,x_2)-u(z))
$$

取 $x_0=\left(x_1+x_2\right)/2,\varepsilon=\left|x_1-x_2\right|/2$, 两边对 φ_ε^v 在 $B_\varepsilon^+(x_0)$ 做卷积, 得

$$
p(z,x_1)-p(z,x_2)=[(p(\cdot,x_1)-u)*\varphi_\varepsilon^v](z)-[(p(\cdot,x_2)-u)*\varphi_\varepsilon^v](z)
$$

两边在 x_0 处求导得

$$
D_{ij}u\left(x_1\right)-D_{ij}u\left(x_2\right)=[(p(\cdot,x_1)-u)*D_{ij}\varphi_\varepsilon^v](z)-[(p(\cdot,x_2)-u)*D_{ij}\varphi_\varepsilon^v](z)
$$

而

$$\begin{aligned}\left|[(p(\cdot,x_1)-u)*D_{ij}\varphi_\varepsilon^v](z)\right| &\leqslant \varepsilon^{-n-2}\int_{\substack{|y-x|<\varepsilon\\(y-x)\cdot v>0}}|u(y)-p\,(y,x_1)|\left|D_{ij}\varphi^v(\frac{x-y}{\varepsilon})\right|dy\\ &\leqslant \varepsilon^{-n-2}\sup_{B_1}|D_{ij}\varphi^v|\int_{A_{x_1}}|u(y)-p\,(y,x_1)|\,dy\\ &\leqslant \varepsilon^{-n-2}\sup_{B_1}|D_{ij}\varphi^v|C_1\int_{A_{x_1}}|y-x_1|^{2+\alpha}\,dy\\ &\leqslant C_0'C_1\varepsilon^\alpha\\ &= C_0C_1|x_2-x_1|^\alpha\end{aligned}$$

同理

$$\left|[(p(\cdot,x_2)-u)*D_{ij}\varphi_\varepsilon^v](z)\right|\leqslant C_0C_1|x_2-x_1|^\alpha$$

从而得到 (3.2).

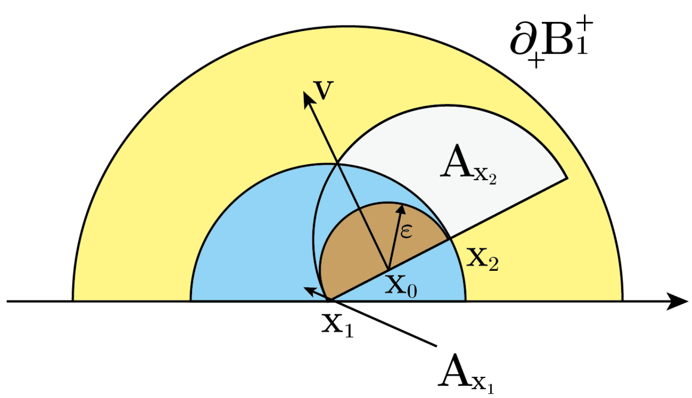

图 2.

Step3. 对一般的 $x_1,x_2\in B_{1/2}$ 证明 (3.2).
取 $z_i=x_1+\frac{i}{4}(x_2-x_1)$ $(i=0,1,2,3,4)$, 对 $(z_0,z_1),\ldots,(z_3,z_4)$ 分别应用 Step2 即可. □

4. 原命题的证明

现在我们可以证明主定理:

Theorem 4.1. 设 $0<\alpha<1$. 设 $f\in C^\alpha(\overline{B}_1^+)$ 和 $u\in C^2(\overline{B}_1^+)$ 满足

$$\begin{cases}\Delta u=f & in\ B_1^+\\ \quad u=0 & on\ \partial B_1^+\end{cases}$$

则 $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B}_1^+)$, 且存在 $C_0 > 0$, 使得

$$[D^2u]_{C^\alpha(B_{1/2}^+)} \leqslant C_0(\|f\|_{C^\alpha(\overline{B}_1^+)} + \|u\|_{C(\overline{B}_1^+)}) \tag{4.1}$$

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2}^+)} \leqslant C_0(\|f\|_{C^\alpha(\overline{B}_1^+)} + \|u\|_{C(\overline{B}_1^+)}) \tag{4.2}$$

证明：固定 $y \in B_{1/2}^+$, 令

$$r = \operatorname{dist}(y, \partial_+ B_1) > 1/2,$$

$$v(x) = u(y + rx), \quad g(x) = r^2 f(y + rx)\ (x \in B_1^+),$$

则在 B_1^+ 上,$-\Delta v = g$ 满足 Theorem 2.4 的条件, 故存在二次多项式 $p_0(x)$ 满足

$$|v(x) - p_0(x)| \leqslant C_1|x|^{2+\alpha} \quad \text{for any } x \in B_{1/2}^+ \tag{4.3}$$

其中

$$C_1 \leqslant C_0([g]_{\alpha,0} + |g(0)| + \sup_{B_1^+}|v|)$$

取 $q(x,y) = p_0((x-y)/r)$, 我们通过对 (4.3) 的变形验证 $q(x,y)$ 满足 Theorem 3.2 的条件：

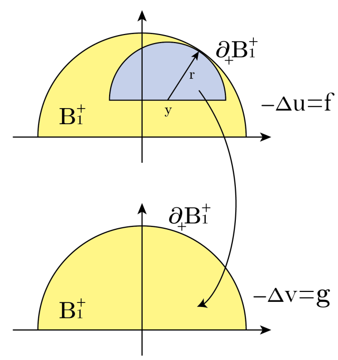

图 3.

$$|u(x) - q(x,y)| \leqslant C_1^*|x|^{2+\alpha} \qquad \text{for any } z \in B_{1/4}^+(y) \subseteq B_{r/2}^+(y)$$

其中 $C_1^* \leqslant C_0([f]_{\alpha,0} + \sup_{B_1^+}|v| + \sup_{B_1^+}|u|)$.
故而有

$$|D_{ij}u(x_1) - D_{ij}u(x_2)| \leq C_0' C_1^* |x_1 - x_2|^\alpha$$

原命题得证.

5. 致谢

特别感谢北大的李泽兴学长, 他教会了我很多如何将内估计推广到边界估计的办法. 可以说这篇小论文中大部分新颖的点子都是他想出来的, 没有他我就真的无法完成大作业了.

References

[1] 吴兰成陈亚浙. 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组. 北京: 科学出版社, 1991.

[2] 周蜀林. 本科生数学基础课教材偏微分方程. 北京大学出版社, 2005.

[3] 周蜀林. 位势方程的 schauder 理论, March 2019.

[4] Lars Valerian Ahlfors. *Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. McGraw-Hill, 1979.

[5] Alberto P Calderón and Antoni Zygmund. Local properties of solutions of elliptic partial differential equations. In *Selected Papers of Antoni Zygmund*, pages 285–339. Springer, 1989.

[6] David Gilbarg and Neil S Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. springer, 2015.

School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei, 230026, P.R. China,

Email address: xx352229@mail.ustc.edu.cn