No.
Date

[注] 作业本上可能会出现的符号 Ⓢ，表示你的证明~~需要简化~~不够简捷，请写得简单些.

课前练习

1. 设 $(x\to 0)$。证明以下各式：

$e^x=1+x+o(x)$　　$\ln(1+x)=x+o(x)$

$\sin x=x+o(x)$　　$\arcsin x=x+o(x)$

$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$

$\tan x=x+o(x)$　　$\arctan x=x+o(x)$

$(1+x)^a=1+ax+o(x)$

2. 证明：$O(x^m)o(x^n)=o(x^{m+n})$　特别地，$\begin{cases} x^m o(x^n)=o(x^{m+n}) \\ O(1)o(x^n)=o(x^n) \end{cases}$

$o(O(f(x)))=o(f(x))$

[解] 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=0$　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\overset{y=\arcsin x}{=\!=\!=}\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1$

2. 记 $f(x)=O(x^m)$　$g(x)=o(x^n)$ 则

$\frac{f(x)}{x^m}$ 局部有界　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^n}=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x^{m+n}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^m}\frac{g(x)}{x^n}=0$　i.e. $f(x)g(x)=o(x^{m+n})$

记 $g(x)=O(f(x))$　$h(x)=o(g(x))$ 则

$\frac{g(x)}{f(x)}$ 局部有界　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)}{g(x)}=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)}{g(x)}\frac{g(x)}{f(x)}=0$　i.e. $h(x)=o(f(x))$

No.
Date

[注记] 1. 注意这里的"="表示的意思. $e^x=1+x+o(x)$ 表示
e^x可以写为 $1+x$与某一个函数 $\varepsilon(x)$的和,这里 $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$
某种意义上,记 $o(x)=\{f \mid f$在0点的某去心邻域有定义且$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0\}$

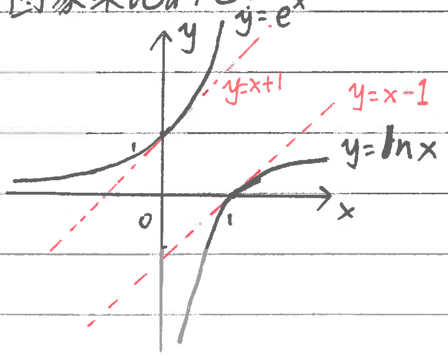
$$1+x+o(x)=\{g \mid \exists f\in o(x)\ s.t\ g(x)=1+x+f(x)\}$$

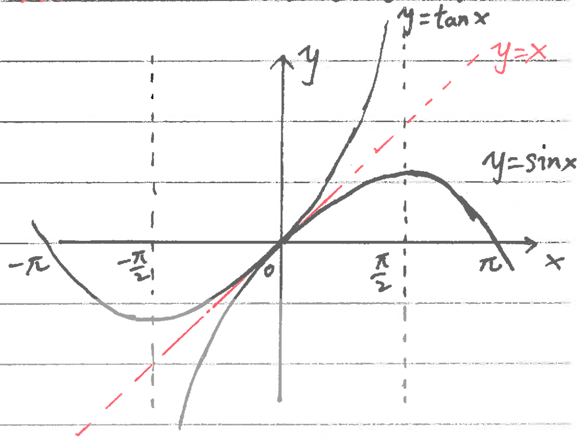
则 $e^x\in 1+x+o(x)$

故当式子中出现符号 O. o 时,"="应理解为"$\in$"或"$\subseteq$".

2. 练习1中的各式是对各种常用极限的总结。事实上,这样的式子不会出现更多,因为基本初等函数(指数.对数.幂.三角.反三角)只有这5类,而我们学到的大多数"好"的函数都可以由这些函数组合($\pm$.$\times$.$\div$.复合.反函数)得到("差"的函数:分段(|·|(绝对值). sgn(符号函数). [ ](取整). 补充定义某点.)分有理点.无理点.定义(Riemann函数).抽象函数)也就是说,你要记的极限式只有这几个。

从另一个角度来说,练习1中的各式只给出了Taylor展开的第一项($\cos x$除外),也就是线性拟合的系数。你亦可以利用图象来记忆.





No.
Date

如何算极限

这个专题分为以下四个部分：

一. $\varepsilon-\delta$ 语言：极限式的原始积累

二. 等价无穷小：极限式的工厂

三. Taylor展开：极限式的大杀器（原子弹）

四. Stolz：递推数列的阶

（五. 洛必达法则：修鞋匠（造原子弹））

一. $\varepsilon-\delta$ 语言：极限式的原始积累

极限式的最基本的例子和结论往往是用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明的。要求要学会用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明最基本的极限式。

7) 2) [例 2.4.4 (4)] 证明：$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+2x}=1$

[分析] $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta=\min\{\frac{1}{3},\frac{\varepsilon}{2}\}$ s.t $\forall 0<|x-0|<\delta$，有

$$\left|\sqrt{1+2x}-1\right|=\frac{2|x|}{\left|\sqrt{1+2x}+1\right|}\leq 2|x|<\varepsilon \quad \therefore \lim_{x\to 0}\sqrt{1+2x}=1$$

[注] 常见问题：1. 格式与顺序（$0<|x-0|$?）

2. $\delta>0$?

3. $f(x)$ 有无定义？（取 $\delta=\frac{(\varepsilon+1)^2-1}{2}$）

4. 放缩是否正确？

5. 用 ε 控制 δ?（思维方式不当） 6)

6) 8) [例 2.4.4 (1)] 证明：$\lim\limits_{x\to 2}x^3=8$

[分析] 见"常见错误"

放缩要大气，不要叽叽歪歪。

$\varepsilon-\delta$ 语言推论：（极限是局部性质）

若 $\exists\delta>0$ $f(x)\equiv g(x)$ in $B_\delta(\check{x}_0)$ 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

[2.4.13(4)] $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{[4x]}{1+x}$

No.
Date . .

二. 等价无穷小：极限式的工厂

等价无穷小是极限式运~~筒~~算中最基本、最重要的一个方法，~~也是~~它~~精确地~~将大量复杂的极限式快速简化。

Thm 1 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ $A\in\mathbb{R}$，则

$$\lim_{x\to 0} f(x)h(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} g(x)h(x)=A$$

[注记] 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\cancel{g(x)}}=\lim\limits_{x\to 0} g(x) \not\Rightarrow f(x)\sim g(x)\ (x\to 0)$

2. 观察 Thm 1 这意味着我们可以将~~因~~极限式中的"因子"换为更简单的~~极限~~等价无穷小而不改变其极限值。

3. 我们在计算过程中，往往写作（设 $f\sim g\ (x\to 0)$）

$$\lim_{x\to 0} f(x)h(x)=\lim_{x\to 0} g(x)h(x)$$

注意这里的"="的意义：两边"share"相同的极限值。~~假~~大家可以同 Stolz 定理中的"="做对比：（省略部分条件）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\overset{\text{Stolz}}{=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$$

（Stolz 定理中的"="是"单方向"的，两个极限式"不平等"）

[例] 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$

[错解] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}\overset{\sin x\sim x}{\underset{\tan x\sim x}{=\!=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$

[正] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{\cos x\cdot x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(-\frac{1}{2}x^2)}{1\cdot x^3}=-\frac{1}{2}$ □

No.
Date . .

计算极限式的方法：三步走

Step 1. 换元　令 $x=x_0+t$ $(x\to x_0)$ 或 $x=\frac{1}{t}$ $(x\to\infty)$

Thm 2. ‖ 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域有定义，~~则~~，$a\in\mathbb{R}$，则
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to 0} f(x_0+t)=a$

Thm 2′ ‖ 设 $f(x)$ 在 ∞ 附近有定义，$a\in\mathbb{R}$，则
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to 0} f(\frac{1}{t})=a$

[注] 1. 上式也常记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{t\to 0} f(x_0+t)$
(or $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{t\to 0} f(\frac{1}{t})$)，其中"="的解释同等价无穷小类似

2. "无穷小量一统天下"，万般极限皆化归为一种

Step 2. 因式分解 & $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$
注意常见的三角公式(e.g. 和差化积)，提取系数

Step 3 换成简单的等价无穷小

往往不需要走完这3步，~~但~~ 这只是一个常见思路

[例] $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln(1+\frac{1}{x})}$

$\xlongequal{t=\frac{1}{x}} e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln(1+t)}=e$

[2.4.11(4)] $(\beta\neq 0)$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}\xlongequal{x=1+t}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+t)^\alpha-1}{(1+t)^\beta-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha t}{\beta t}=\frac{\alpha}{\beta}$

[2.5.5] $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi(\sqrt{n^2+1}-n))$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi n(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1))$

$=\cancel{\lim}\ 0$ $\cancel{(n(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1)=n}$

$(\because \lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1)=\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}=0)$

No.
Date . .

[2.6.3(5)] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x+x^2)^{\frac{1}{n}}-1}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{n}(x+x^2)}{\cancel{x}\,2x}=\dfrac{1}{2n}$

[2.4.12(6)] $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{h}=\cos x$

[2.4.12(1)] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}\quad(b\neq 0)$

[例] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$

[2.8.3(3)] $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$

你可以用等价无穷小造出相当复杂的极限式，比如：

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)^x-1}{\sqrt[3]{\cos x^{\frac{3}{2}}}-1}=?$$

No.
Date

三. Taylor展开: 大杀~~器~~器, 无往而不胜

预备: o. O的运算

[例 2.4.12(7)] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}$ 比较两种做法

[例] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

[例 1.3.12] $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$

[注]: 展开项数: 足够算出因子中第一项非0系数即可

四. Stolz: ~~递推~~迭代生成数列的阶

E.g. $a_n=\sin a_{n-1}$ $\left(\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)$

$a_1=\sqrt{2}$ $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$

$a_n=a_{n-1}-ka_{n-1}^2$ $k>0$ $0<a_1<\frac{1}{2k}$

[订正] 在习题课上讲的有误, 在此更正。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\frac{k}{n^2}+o\left(\frac{k}{n^2}\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\frac{k}{n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\cdot\frac{n(n-1)k}{4n^2}+n\,o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{k}{4}+\lim_{n\to\infty}o(1)=\frac{k}{4}$$

No.
Date

补充：集合的势 $\underbrace{\text{有限}\ \overbrace{\text{可数}}^{}}_{\text{至多可数}}\!\!\overbrace{\ \text{不可数}}^{\text{无限}}$

[练习题 2.2.4] $S=\{\{x_i\}_{i=1}^{+\infty} \mid x_i\in\{0,1\}\} \longrightarrow [0,1]$

$f: \{x_i\}_{i=1}^{+\infty} \longmapsto \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{2^i}$ 满射

$(\mathrm{Im}\,g=\text{Cartor集})\ g: \{x_i\}_{i=1}^{+\infty} \longmapsto \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2x_i}{3^i}$ 单射

$h: [0,1] \longrightarrow S=\{\{x_i\}_{i=1}^{+\infty} \mid x_i\in\{0,1\}\}$

$a=(0.a_1a_2\cdots a_n\cdots)_{(2)} \longmapsto \{a_i\}_{i=1}^{+\infty}$

h不为映射，因为其映射不为良定义的。

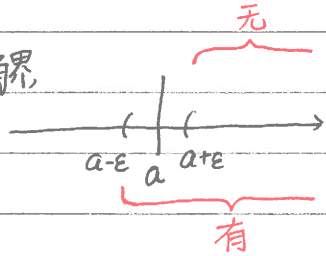
[补充题] 试证明"函数的第一类间断点至多可数。

补充：集合（$\mathbb{R}$的子集）的上确界

Prop ~~若~~设 $E\subseteq\mathbb{R}$　$a\in\mathbb{R}$，我们称 a 为 E 的上确界是指：

① $\forall\varepsilon>0$，$\forall x\in E$，$x<a+\varepsilon$

② $\forall\varepsilon>0$，$\exists x\in E$，$x>a-\varepsilon$



注：①可以换成更强的结论：

①′ $\forall x\in E$　$x\leq a$　（a 为 E 的上界）

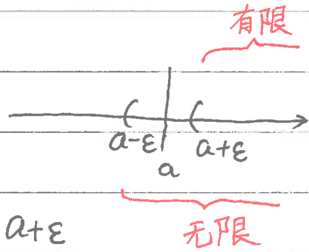
数列的上极限

Prop 设 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 为数列，$a\in\mathbb{R}$.

我们称 a 为 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 的上极限是指.

① $\forall\varepsilon>0$　$\exists N\in\mathbb{N}^+$ s.t $\forall n>N$　$a_n<a+\varepsilon$

② $\forall\varepsilon>0$　$\cancel{\exists}\forall N\in\mathbb{N}^+$　$\exists n>N$　$a_n>a-\varepsilon$



注：①+②与①+②′等价：

②′ $\exists$ 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 的子列 $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{+\infty}$，s.t

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n}=a$　（a 为 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 的极限点.）

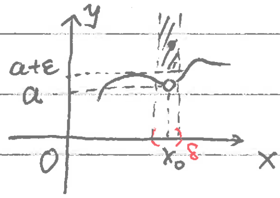
函数的上极限

Prop 设 f 在 x_0 附近有定义，$a\in\mathbb{R}$.

我们称 a 为 f 在 x_0 点的上极限是指.

① $\forall\varepsilon>0$　$\exists\delta>0$ s.t $\forall x\in B_\delta(\check{x}_0)$　$f(x)<a+\varepsilon$

② $\forall\varepsilon>0$　$\forall\delta>0$　$\exists x\in B_\delta(\check{x}_0)$　$f(x)>a-\varepsilon$



注.①+②与①+②′等价

②′ $\exists$ 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 恒不为 x_0，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=a$

[注意] 上确界、上极限均不满足四则运算。

No.
Date

求导计算与Taylor展开

这次习题课的主要目的是补充上一次习题课中缺失的部分，从而把上半学期的计算部分大范围覆盖一遍。顺序如下：

零. 开胃小菜：证明的严谨性；一致性

一. 求导的艺术
- 定义法
- 求导公式
- 高阶导数
- 反函数（略）

二. Taylor展开
- 概念厘清
- 预备：洛比达法则（跳过）
- 计算Taylor展开
- 使用Taylor展开（跳过）

三. 简单的期中复习

一. 求导的艺术

1. 定义　回顾 $f(x)$ 在 x_0 点处可导是指

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，称其极限值为 $f'(x_0)$，称为 $f(x)$ 在 x_0 点处的导数；

记 $U=\{x_0 \mid 极限 \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} 存在\}$

定义 $f(x)$ 的导函数

$$f':\ U \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x_0 \longmapsto f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

注. 1. 该定义有直观的几何背景，有时需从图中直接看出导数是否存在.

2. 导函数是局部定义的，故在 x_0 处的导数只与 $f(x)$ 在 x_0 附近的值有关

例子：这两节课会不断提到的两个例子：

$$f_{\alpha,\beta}(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\frac{1}{x^{\beta}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases} \qquad T(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

计算 $f_{\alpha,\beta}(x)$. $T(x)$ 在0点处导数是否存在？[另: $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$]

注："振荡函数"：如何去让一个函数在两个函数图象之间"振荡"？控制振荡的"快慢"？

Ex. [谢 P183 14]. [谢 P232 8.1.9] [谢 P276 2]

这三道题的结论很重要，之后在复分析中将起到重要作用

14. Sol. 取 $\varphi(x)=\begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x\neq x_0 \\ f'(x_0) & x=x_0 \end{cases}$ 则 $f(x)=(x-x_0)\varphi(x)+f(x_0)$

"将小量用函数写下来，思维会更清晰"

2. 求导公式

~~任何~~类比计算机程序.

很多时候我们不必返回原始的定义，我们有求导公式.

	"易"	
高级语言	↑	导数
汇编语言		极限
机器语言	"难"	实数完备性

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{线性}\ (f\pm g)'=f'\pm g' \\ &\qquad (kf)'=kf' \\ &\text{Leibniz法则: } (fg)'=f'g+fg' \end{aligned}}$$

这两个公式体现了求导的本质，它可以推广至流形定义抽象的切向量

$$\boxed{\text{链式法则} \left.\frac{d}{dx}f(g(x))\right|_{x=x_0}=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)}$$

这个公式在计算中被重复用到，请熟练应用。

初等函数：$(e^x)'=e^x$ $(\sin x)'=\cos x$ $(\cos x)'=-\sin x$

$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$ 等等

No.
Date

我们来看看如何重新记忆求导公式 $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = (fg^{-1})' = f'g^{-1} + f(g^{-1})' = f'g^{-1} - fg^{-2}g'$$

很多时候这一步能简化计算

$$= \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

E.g. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ 计算 $f'(x)$

方法①: $f'(x) = -\frac{(\sqrt{x^2+a^2})'}{x^2+a^2} = -\frac{1}{x^2+a^2}\frac{(x^2+a^2)'}{2\sqrt{x^2+a^2}}$

$$= \frac{1}{x^2+a^2}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

方法②: $f(x) = (x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x^2+a^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

E.x. 计算 $f''(x)$

E.g. $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 求 $f^{(5)}(x)$

方法①: $f'(x) = -\frac{2x+3}{(x^2+3x+2)^2}$ $f''(x) = \cdots$ (算不动)

方法②: $f(x) = (x^2+3x+2)^{-1}$ 令 $g(x) = x^2+3x+2$ $h(x) = x^{-1}$, 则

$f(x) = h(g(x))$ 使用老师的公式 (我也记不住)

方法③: Tricks: 裂项

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = (x+1)^{-1} - (x+2)^{-1}$$

$$f^{(5)}(x) = (-1)(-2)(-3)(-4)(-5)\left((x+1)^{-6} - (x+2)^{-6}\right)$$

$$= 120\left(\frac{1}{(x+2)^6} - \frac{1}{(x+1)^6}\right)$$

Ex. [谢 P168 6.2.2] $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ 求 $f^{(n)}(x)$

求导公式的直接推论:

有限求和: $\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x)$

有限乘积: $\left(\prod_{k=1}^{n} f_k(x)\right)' = \sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} f_k(x)\cdot f_j'(x)\right)$

e.g. $(f_1f_2f_3)' = f_1'f_2f_3 + f_1f_2'f_3 + f_1f_2f_3'$

Ex. 试验证, 当 $\alpha>1$ 时, $f_{\alpha,\beta}'(x) = \begin{cases} x^{\alpha-1}\left(\alpha\sin\frac{1}{x^\beta} - \beta\cdot\frac{1}{x^\beta}\cos\frac{1}{x^\beta}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

$$T'(x) = \begin{cases} 2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

3. 高阶导数

做这类题目有两个决窍: 一个是尝试, 一个是公式

Tips: 有时不需要真的算出导数, 观察有益. (例如 n 阶多项式求 $n+1$ 次导为 0. 一个之后观察的特例)

~~*~~归纳几个常见套路:

1. 多项式

① 熟练利用多项式的~~求~~乘积形式 & 单项式求和形式

若 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1x + a_0$, 则

$f^{(k)}(0) = k!\,a_k$

E.g. [谢 P176.12]

$y(x) = (6+5x)(4+3x)^2(2+x)^3$ 求 $y^{(5)}(0)$

Ex. 求 $y^{(6)}(0)$

② 非零多项式的求导与零点 (用导数看零点的阶数)

Thm. $P(x)$ 在 x_0 点处有 k 阶零点 $\Leftrightarrow \begin{cases} P^{i}(x_0)=0 & \forall\, 1\leq i<k \\ P^{k}(x_0)\neq 0 \end{cases}$

2. 多项式×别的函数（公式法）

Ex. $f(x)=(x^2+1)\cos x$，求 $f^{(50)}(x)$

3. 出现 $\sin x$. $\cos x$

Ex. $\cancel{e^x\sin x}$ $f(x)=e^x\sin x$ 求 $f^{(n)}(x)$ (Ex. 形式计算 $\int e^x\sin x\,dx$)

(一个验算方法) $e^x\sin x = e^x\cdot\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$

$$=\frac{1}{2i}e^{(1+i)x}-\frac{1}{2i}e^{(1-i)x}$$

$$(e^x\sin x)^{(n)}=\frac{(1+i)^n}{2i}e^{(1+i)x}-\frac{(1-i)^n}{2i}e^{(1-i)x}$$

再对 n 进~~形~~行模4分类讨论即可。

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

形式计算：$e^{ix}=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\cdots$

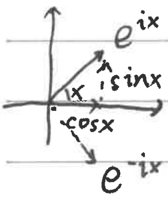
$$=1+ix-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{ix^5}{5!}$$

$$=(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots)+i(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots)$$

$$=\cos x+i\sin x$$

我们得到著名的 Euler 公式：

$\boxed{e^{ix}=\cos x+i\sin x}$ “指数函数蕴含周期”



$$\begin{cases} e^{ix}=\cos x+i\sin x \\ e^{-ix}=\cos x-i\sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}) \\ \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}) \end{cases}$$

类似地，可以定义 $\underbrace{\cosh x \ . \ \sinh x}_{\text{符号，双曲正/余弦}}$. $\begin{cases}\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) \\ \sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\end{cases}$

Ex. 其他材料见谢惠民 §6.2.

No.
Date . .

Ex. 定义 $\begin{cases} \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \end{cases}$

⓪ 画出 $\cosh(x)$. $\sinh(x)$ 的图像，完成 [练习题 2.3.10]

① 计算 $\cosh(x \pm y)$ $\sinh(x \pm y)$ $\cosh(2x)$ $\sinh(2x)$

② 写出 $\cosh$. $\sinh$ 的和差化积与积化和差公式

③ 计算 $(\sinh(x))'$. $(\cosh(x))'$

④ 求其反函数 [练习题 2.3.11]，及其反函数的导数
(两种方法：直接求导，或应用反函数定理)

⑤ 形式计算：$\begin{cases} \cosh(ix) = \cos x \\ \sinh(ix) = i\sin x \end{cases}$ $\begin{cases} \cos ix = \cosh x \\ \sin ix = -i\sinh x \end{cases}$

⑥ 定义 $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$，试导出 $\tanh(x)$ 的性质 (类比 $\tan x$)

No.
Date . .

二. Taylor展开.

"做分析的数学家有两种，一种是一辈子都在用Taylor展开的，另一种是大部分时间都在用Taylor展开的"

—— 刘党政老师

1. 概念厘清

给定函数 $f(x)$（足够好的展开次数）

$\rightsquigarrow$ 带余项的展开：
- Peano （$x_0=0$时 Maclaurin展开）
- Lagrange
- Cauchy
- 积分余项（待学）

$\rightsquigarrow$ Taylor级数 $f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\frac{x^3}{3!}+\cdots$（无限项）

对 $f_n(x)=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，考虑 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)$（若存在）

记 $\tilde{f}(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)$

注意：（用到幂级数知识）

1. Taylor级数不一定会收敛（可以没有正的收敛半径）
2. 就算该级数收敛在收敛半径内也未必收敛到原来的函数，i.e.

$$\tilde{f}(x) \not\equiv f(x) \quad 若\ x\in D(\tilde{f}) \leftarrow \tilde{f}的定义域$$

Eg. $f(x)=\begin{cases} e^{-x^{-2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

- 对比解析函数，在收敛半径内收敛至自身 $\left(e^x=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}\right)$

3. Taylor展开的唯一性定理［谢 P203 7.2.1］
& 在收敛半径内部可以逐项求导，

$$\tilde{f}'(x)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}f_n'(x)$$

（Q：$\arctan x$ 如何算？已知 $\arctan x$ 为解析函数）

3. 计算Taylor展开

回忆: $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

$(x\to 0)$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$\Rightarrow -\ln(1-x) = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots\binom{\alpha}{n}x^n+o(x^n)$$

$$\Rightarrow (1-x)^{-\alpha} = 1+\alpha x+\binom{\alpha+1}{2}x^2+\cdots\binom{\alpha+n-1}{n}x^n+o(x^n)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots x^n+o(x^n)\\ \frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\cdots(-1)^n x^n+o(x^n)\end{cases}$$

我们使用洛必达法则来计算 $\tan x$ 的9阶展开

① 观察 $\tan x$ 为奇函数, 心里有底. 偶次项系数为0

我们从 $\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$ 开始

② $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x-\frac{1}{3}x^3}{x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1-x^2}{5x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x-x^2}{5x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\tan x-x)(\tan x+x)}{5x^4} = \frac{2}{15}$$

$$\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$$

③ $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x-\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{15}x^5}{x^7} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1-x^2-\frac{2}{3}x^4}{7x^6}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x-x^2-\frac{2}{3}x^4}{7x^6} = \lim_{x\to 0}\frac{(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5))^2-x^2-\frac{2}{3}x^4}{7x^6}$$

$$= \left(2\cdot\frac{2}{15}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)/7$$

9阶展开留作练习

展开的另一个练习:

证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=\frac{e}{2}$

方法①: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1}\cdot e$

$= e\left\{1+[n\ln(1+\frac{1}{n})-1]+\frac{1}{2!}[n\ln(1+\frac{1}{n})-1]^2+o(\frac{1}{n^2})\right\}$

$= e\left\{1+n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3})\right)-1\right.$
$\left.+\frac{1}{2!}[n(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))-1]^2+o(\frac{1}{n^2})\right\}$

$= e\left\{1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{4n^2}\right\}+o(\frac{1}{n^2})$

$= e\left\{1-\frac{1}{2n}+\frac{11}{24n^2}\right\}+o(\frac{1}{n^2})$

$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 e\left\{1-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{11}{24(n+1)^2}-1+\frac{1}{2n}-\frac{11}{24n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right\}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 e\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{n(n+1)}+\frac{11}{24}\cdot\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+o(\frac{1}{n^2})\right\}$

$= \frac{e}{2}$

方法②: 令 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, 则 $f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1}\right)$

可马验证 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f'(x)=\frac{e}{2}$

故 ~~$n\geq 3$时~~ $n^2(f(n+1)-f(n)) \xlongequal{\exists\xi_n\in(n,n+1)} n^2 f'(\xi_n)$ ~~$\in(\xi_n+1)^2 f'(\xi_n),\xi_n$~~
$\in\left(\xi_n^2 f'(\xi_n),(\xi_n+1)^2 f'(\xi_n)\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} n^2(\cdots)=\frac{e}{2}$.

另外,完整详尽的Taylor展开方法可以参见[Ahlfors Ch5 1.2]

No.
Date

三. 期末复习

1. 重要概念

集合. 集合的势

ε-N. ε-δ语言 实数完备性中出现的:有界子列.开覆盖等

数列极限、函数极限 (含上.下极限)

连续性.一致连续.Lipchitz连续

导数定义及计算

中值定理.Taylor展开的应用

2. 重要例子.

Riemann & Dirichlet 函数

$\frac{\sin x}{x}$ $(x^{\alpha}\sin\frac{1}{x^{\beta}})$ $(1+\frac{1}{x})^{x}$ $\sqrt{x}$ $e^{-\frac{1}{x^2}}$ 等

单调函数, 凸函数 ⟶ 不等式

$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}$

3. 函数性质与函数类

$\mathbb{R}^{[a,b]}$

Ch6 $R[a,b]\longrightarrow L'[a,b]$

Ch2 $C[a,b]$ $Lip[a,b]$

Ch3 $C'[a,b]$

Ch4 $C^{\infty}[a,b]$

$C^{\omega}[a,b]$

代基 $P[a,b]$

性质: ·单调性 ·奇偶性 ·有(无)界性 ·周期性 ·连续性

·特殊点.值

·渐近线

·单调性 - 驻点.

凸性 - 拐点.

·函数方程 $(f(x+y)=f(x)+f(y)$

·一点处的Taylor展开.

· 杂项：记忆公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^n\theta\, d\theta = \begin{cases} 0 & n \text{ odd} \\ \frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2} & n \text{ even} \end{cases}$$

记 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$，则 （见18.4节）

· $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=1$

· $\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty}t^se^{-t}dt$

$$= -\int_0^{+\infty}t^s d(e^{-t})$$

$$= -t^se^{-t}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{s-1}dt = s\Gamma(s)$$

· $\forall n\in\mathbb{N}^+,\ \Gamma(n+1)=n!$

（Γ函数是阶乘的推广） 见Wiki. Stirling.

形式~~地~~计算推导$\Gamma(n)$的渐近表达式（Laplace方法）

（在复分析中，这被称为渐近展开，见（~~Alfors~~ Ahlfors. 5.2.5））

$$n!=\Gamma(n+1)=\int_0^{\infty}e^{n\ln x-x}dx \overset{x=ny}{=\!=} e^{n\ln n}n\int_0^{\infty}e^{n(\ln y-y)}dy$$

$$\int_0^{\infty}e^{n(\ln y-y)}dy \overset{t(y)=y-1}{=\!=} \int_0^{\infty}e^{n(\ln(1+t)-t-1)}dy$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty}e^{n(-\frac{t^2}{2}-1)}dy = e^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\sqrt{\frac{n}{2}}t)^2}dt$$

$$=\sqrt{\frac{2}{n}}e^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}e^{-n} \quad (\text{用到了}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi})$$

$$\therefore n! \approx e^{n\ln n}n\sqrt{\frac{2\pi}{n}}e^{-n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$$

注：改进误差项，$n!$还可以算得更加精确.

$$n! \approx e^{n\ln n}n\sqrt{\frac{2\pi}{n}}e^{-n}\left(1+\frac{1}{12n}\right) = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}\right)$$

Ex. ~~形式~~计算 ~~图~~ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}x^ke^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\begin{cases}0 & k \text{ odd}\\ (2m-1)!! & k=2m\end{cases}$

· 极限＋积分（非振荡型）

(习6.4.11) 例 设 $f(x)\in C[-1,1]$，证明：

$$\lim_{h\to0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx=\pi f(0)$$

不妨设 ~~f∈C[~~ $f\geq0$ 在 $[-1,1]$ 上

证明：记 $g(h)=\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx-\pi f(0)$ ($h\in[0,1]$)，只需证明

$\lim_{h\to0^+}g(h)=0$，i.e $\overline{\lim_{h\to0^+}}g(h)=\underline{\lim_{h\to0^+}}g(h)=0$

记 $M=\max_{x\in[-1,1]}f(x)$，$M(a)=\max_{x\in[-a,a]}f(x)$，则

对固定 $0<\delta<1$，$g(h)=\int_{[-1,-\delta]\cup[\delta,1]}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx+\int_{[-\delta,\delta]}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx-\pi f(0)$

$$\leq\int_{[-1,-\delta]\cup[\delta,1]}\frac{h}{h^2+\delta^2}Mdx+\int_{-\delta}^{\delta}\frac{h}{h^2+x^2}M(\delta)dx-\pi f(0)$$

$$=2(1-\delta)\frac{h}{h^2+\delta^2}M+2M(\delta)\arctan\frac{\delta}{h}-\pi f(0)$$

$\therefore\overline{\lim_{h\to0^+}}g(h)\leq\pi M(\delta)-\pi f(0)$ 该式对 $\forall\delta\in(0,1)$ 成立，故

$\overline{\lim_{h\to0^+}}g(h)\leq0$ 同理可证 $\underline{\lim_{h\to0^+}}g(h)\geq0$

$$\therefore 0\leq\underline{\lim_{h\to0^+}}g(h)\leq\overline{\lim_{h\to0^+}}g(h)\leq0 \quad\square$$

注 对 $\forall f(x)\in C[-1,1]$，~~f(x)+M≥~~ 记其界为 $\tilde{M}$，$f+\tilde{M}\geq0$，再运用之前的证明。

Ex. 设 $f(x)\in C[0,1]$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx^n f(x)dx=f(1)$$

Ex.（谢 P333 13）设 f 在 $[a,b]$ 上单调增，试计算

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(t)dt\right)^{\frac{1}{n}}=?$$

Ex（谢 P310 例10.2.4；P312 例10.2.5）

Ex（问题6.2.3）

Date

Remark. 习题 6.4.11. 有更加容易自然的做法。

取 $\hat{f}(x)=f(x)-f(0)$，则 $\hat{f}(0)=0$ $\hat{f}\in C[-1,1]$.

令 $g(h)=\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}\hat{f}(x)dx$ ， ~~$M=\max_{x\in[-1,1]} f(x)-f(a)=\max$~~

$M=\max_{x\in[-1,1]}|\hat{f}(x)|dx$，$M(a)=\max_{x\in[-a,a]}|\hat{f}(x)|$，则

对固定的 $\delta\in(0,1)$，

$$|g(h)|\leq\int_{[-1,1]\setminus[-\delta,\delta]}\frac{h}{h^2+x^2}|\hat{f}(x)|dx+\int_{-\delta}^{\delta}\frac{h}{h^2+x^2}|\hat{f}(x)|dx$$

$$\leq 2(1-\delta)\frac{h}{h^2+\delta^2}M+2M(\delta)\arctan\frac{\delta}{h}$$

$\therefore\ \overline{\lim_{h\to0^+}}|g(h)|\leq\pi M(\delta)$ 又 $\because$ 该式对 $\forall\,\delta\in(0,1)$ 成立，故

$\overline{\lim_{h\to0^+}}|g(h)|=0 \Rightarrow \lim_{h\to0^+}g(h)=0$

而显然 $\lim_{h\to0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(0)dx=\pi f(0)$ (计算得)

$$\therefore\ \lim_{h\to0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx=\pi f(0)$$ □

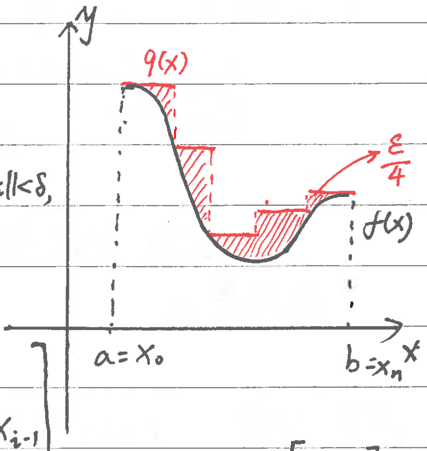
范数逼近问题

练习题6.5.

1. 设 f 有界 $M>0$，由 f 可积

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ s.t $\forall$ 分割 π 满足 $\|\pi\|<\delta$，

有 $\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4}$



[这里 π: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

$M_i=\sup\limits_{\xi\in[x_{i-1},x_i]} f(\xi)$ $m_i=\inf\limits_{\xi\in[x_{i-1},x_i]} f(\xi)$ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$]

~~取分割：$n=$~~

取分割：$n=\left[\frac{b-a}{\delta}\right]+1$

$x_i = a+(b-a)\frac{i}{n}$

π: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

取 $q(x)=\begin{cases} M_i & 若\ x\in[x_{i-1},x_i) \\ M_n & 若\ x=x_n \end{cases}$

$p(x)=\begin{cases} m_i & 若\ x\in[x_{i-1},x_i) \\ m_n & 若\ x=x_n \end{cases}$

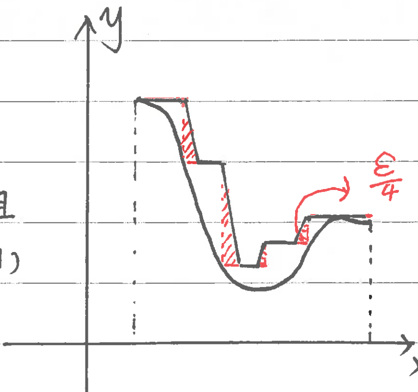
则 在 $[a,b]$ 上，$p\le f\le q$，且

$$\int_a^b (q(x)-p(x))dx = \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \square$$

注：n 依赖于分割 π 的选取

2. 由 1，我们知 $\forall\varepsilon>0$，存在 $[a,b]$ 上阶梯宽度相等 ($\Delta x_i=\Delta x_j\ \forall i,j$) 的阶梯函数 $\tilde{p},\tilde{q}$，s.t 在 $[a,b]$ 上，$\tilde{p}\le f\le\tilde{q}$ 且

$$\int_a^b (\tilde{q}(x)-\tilde{p}(x))dx < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$



设 $\tilde{q}$ 有 n 阶阶梯，$x_i = a+(b-a)\frac{i}{n}$，

记 $\tilde{q}|_{[x_{i-1},x_i)} \overset{记为}{\equiv} A_i$

设 $\tilde{q}$ 有界 M，取 $\delta_0=\min\left\{\frac{b-a}{3n}, \frac{1}{2Mn}\cdot\frac{\varepsilon}{4}\right\}$，令

$$q(x)=\begin{cases} A_i - \frac{x-x_i}{\delta_0}(A_i-A_{i+1}) & 若\ x\in[x_i,x_i+\delta_0]\ 且\ A_i\ge A_{i+1} \\ A_{i+1}-\frac{x_i-x}{\delta_0}(A_{i+1}-A_i) & 若\ x\in[x_i-\delta_0,x_i]\ 且\ A_i<A_{i+1} \\ \tilde{q}(x) & 其他情况 \end{cases}$$

则 · $q(x)$连续

· $q(x) \geq \tilde{q}(x)$ 　对 $\forall x \in [a,b]$

· $\int_a^b (q(x)-\tilde{q}(x))\,dx < \frac{\varepsilon}{4}$ 　(2)

同理可以构造连续函数 $p(x)$ 满足 $p(x) \leq \tilde{p}(x)$ 且

$$\int_a^b (\tilde{p}(x)-p(x))\,dx < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (3)$$

由 (1)(2)(3), $\int_a^b (q(x)-p(x))\,dx < \varepsilon$ 且显然 $p \leq f \leq q$ □

注. 1. 该证明方法可以轻易延拓至 C^1 逼近。对 C^∞ 逼近,
你需要利用函数

$$\chi(x) = \frac{\phi(2-x)}{\phi(2-x)+\phi(x-1)} \quad x \in [0,3]$$

其中 $\phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

~~(难)~~ Q. 将连续函数换为多项式函数, 命题还成立否? 成立

2. 若将结论① $\int_a^b (q(x)-p(x))\,dx < \varepsilon$ 换成
② $\sup_{x\in[a,b]} q(x)-p(x) < \varepsilon$, 则原命题不成立;
试举出例子来验证这一陈述。

当然, 我们有著名的 Weierstrass 逼近定理.

试使用 Weierstrass 逼近定理证明

给定 $f \in C([a,b])$, 对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists P(x) \in P([a,b])$ s.t

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)-P(x)| < \varepsilon$$

该定理的证明参见清华练习题W(第十次)

3. 利用~~该~~阶梯函数逼近可以证明（任爷课上证法）

[谢, P313. 10.2.7]（Riemann 定理）（证明参考谢 P328 例 10.4.12）

设 $f, g \in R[a,b]$，其中 g 以 T 为周期，则

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^b f(x)g(tx)\,dx = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,dx\int_a^b f(x)\,dx \triangleq A$$

证明：只需证 · 对 $f \equiv C$ 成立

· 对 f 为~~周期~~阶梯函数成立

· 用阶梯函数~~成立~~逼近 Riemann 可积函数

记 $\hat{M}$ 为 $g(x)$ 的界，$\forall \varepsilon>0$ $\exists$ $p(x)$ 阶梯函数 $p\geq f$ s.t

$$\int_a^b (p(x)-f(x))\,dx < \frac{\varepsilon}{4(\hat{M}+|\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx|)}$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b (p(x)g(tx)-f(x)g(tx))\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (1)$$

而 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_a^b p(x)g(tx)\,dx = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,dx\int_a^b p(x)\,dx \triangleq \tilde{A}$

$\Rightarrow$ $\exists$ $A_0>0$ s.t $\forall t>A_0$，有

$$\left|\int_a^b p(x)g(tx)\,dx - \hat{A}\right| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (2)$$

而 $\displaystyle |A-\hat{A}| \leq \left|\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,dx\right|\int_a^b (p(x)-f(x))\,dx < \frac{\varepsilon}{4}$ (3)

$$\xRightarrow{由(1)(2)(3)} \left|\int_a^b f(x)g(tx)\,dx - A\right| < \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon \qquad \square$$

· 卷积 (自行阅读) (参见wiki Convolution)

~~设~~设 f 为IR上的函数。称 f 为紧支函数，是指：

$\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\neq 0\}$ 为IR上的有界集。

~~设 $f,g\in R[a,R(\mathbb{R})]$ 为~~

设 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 ~~对 $\forall a\le b$ 有~~

· 对 $\forall a<b$，有 $f|_{[a,b]}, g|_{[a,b]}\in R([a,b])$ (f,g 在 $[a,b]$ 上可积)

· g 为紧支函数

此时可以定义 f 与 g 的卷积：

Def. $f*g:\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

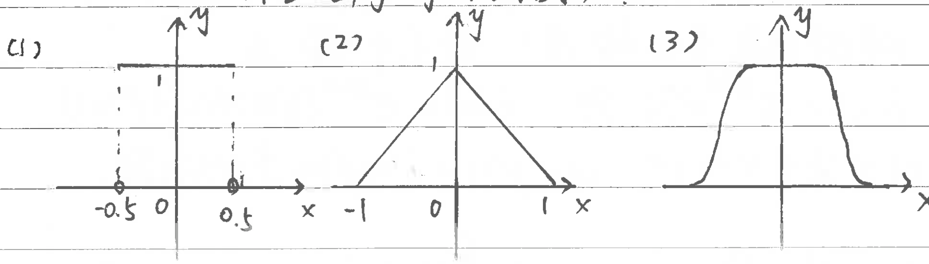
$x\longmapsto\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt$

i.e. $(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt$

从某种意义上说，卷积是对函数的一种“平均化”，往往卷积过后的函数都会更加“光滑”。~~i.e.~~ 我们将会使用下列例子来熟悉这一点。

Eg. 记 $f(x)=\begin{cases}100 & |x|<100\\ 0 & |x|\ge 100\end{cases}$，~~试~~试画出 $f(x)$ 的图象

并画出 $f*g(x)$ 的图象。



$g(x)=\begin{cases}1 & |x|\le 0.5\\ 0 & |x|>0.5\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ $g(x)=\dfrac{\chi(x)}{\int_{-3}^{3}\chi(t)\,dt}$

试问：$f*g$ 在各个例子中性质如何？(连续、C^1、C^∞？)

Ex. 设 $g\in C_0^\infty(\mathbb{R})$，证明 $f*g\in C^\infty(\mathbb{R})$

更多的卷积相关性质请参阅Stein的Fourier分析。

· 例题10.2.1的应用：

设 $f\in C([a,b])$ 只有有限个零点，$g\in R([a,b])$，且

$$\int_a^b g(x)\,dx>0$$

证明：$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx>0$

· 零测集的概念：

Def 设 $A\subseteq\mathbb{R}$，若 $\forall\varepsilon>0$，存在至多可数个开区间 $\{I_n\mid n\in\mathbb{N}^+\}$ 组成 A 的一个开覆盖，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\le\varepsilon$$

则称 A 为零测集

Rmk. 1. 零测集是测度论的概念，
集合的势是集合论的概念。请勿混淆。

$\mathbb{R}$中：

有限 $\{1,\dots,n\}$	$\mathbb{Z}$ 可数 $\mathbb{Q}$	Cantor 不可数 类Cantor

$\underbrace{\text{有限, 可数, Cantor}}_{\text{零测集}}$

Rmk. 2. 至多可数的条件不可忽~~略，否~~ 改为有限。
试说明，更改后 $\mathbb{Z}$ 不为零测集。

Rmk. 3. 零测集满足的性质往往与可数有很大的兼容性，

例如：· 可数零测集的并亦零测

(不可数零测集的并亦零测吗？)

· 可数零测集的极限(上下)亦零测，其中

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n:=\bigcap_{N=1}^{+\infty}\bigcup_{k=N}^{+\infty}A_k$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n:=\bigcup_{N=1}^{+\infty}\bigcap_{k=N}^{+\infty}A_k$$

No.

Date

· 常见的易忘验证的条件：

— ~~定~~定理 6.2.5.（积分平均值）

$f,g\in C[a,b]$，g 在 $[a,b]$ 上不改变符号，则 $\exists\xi\in[a,b]$，s.t

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)dx$$

— 定理 6.3.~~4~~（~~微积分基本定理~~）（N-L公式）

设 f 在 $[a,b]$ 上连续，$G(x)\in C'[a,b]$，$G'(x)=f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx = G(b)-G(a)$$

（经常对 f 补充定义）（f 可积则不一定成立。[谢] 332]）

— 定理 6.3.5. 若 $G(x)\in C'([a,b])$，则

$$\int_a^x G'(t)\,dt = G(x)-G(a) \qquad \forall x\in[a,b]$$

— 定理 6.4.2（换元公式）（这里条件比书中弱一些）

设 $f\in C([a,b])$，$\varphi\in C'([\alpha,\beta])$，~~且~~且

$\varphi(\alpha)=a$　$\varphi(\beta)=b$　$\varphi([\alpha,\beta])\subset[a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

（经常出现 φ 有间断点的~~情况~~错误，见[谢, 332, 例10.5.3]）

— 命题 10.2.2（谢）（积分第二中值定理）

设 $f\in R[a,b]$，g 在 $[a,b]$ 上单调，则 $\exists\xi\in[a,b]$，

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$