代数语言的初步认识

大二新生

2017 年 8 月 22 日

目录

本篇毒性较弱，请放心食用!

我们从集合和映射开始入手。

会不会感觉整个代数方向，几乎所有的东西都是集合or 映射？他们的普遍性注定了自身的不平凡。集合是静态的，而映射是动态的，之间关系错综复杂。

(假定已知“$\in$”、“$\notin$”、“$\subseteq$”、“$\subsetneqq$”、“$\not\subseteq$”、“$\cap$”、“$\cup$”)

1 集合

单独来看集合，我们主要看两点。①元素的个数，②集合构成的集合，谓之族。

1.1 定义

先不考虑集合的完备性，考虑朴素的集合观点，即“袋子”。一个“袋子”用“{ }”表示，如：$A=\{1,2,3,\varnothing\}$表示A 中有元素。还有一个什么也没有装的袋子，另一种为描述法，如$\{x\in A\big|x\neq 2\}$，竖线左边为“取元素的总范围（A中）”及“元素在右边的表示方法（x）”，右边为“元素满足的条件”。

1.2 集合的势

“数数”是大多数人小时候就学会的东西。其抽象化，即为“皮亚诺公理”——你的数都是一个个数出来的。来数$\mathbb{N}$ 的元素个数：无限个，和地球上的沙子一样多，还是与天上的星星一样？我不知道，但我知道数学家们数数时就拿$\mathbb{N}$作标准，如果这个集合中有一种方法，使得每个元素都有唯一（$\exists!$）的$\mathbb{N}$中的元素一一对应，就说它是可数集。为了让大家听不懂，他们把集合的元素个数称做集合的势。$\mathbb{N}$的势为$\aleph^0$，$\mathbb{R}$的势为$2^{\aleph^0}=\aleph^1$（见后）

小练习 验证$\mathbb{N}^+$为可数集（见后），$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{A}$ 为可数集。

已知：$|A|=t\in\mathbb{N}^+$，求$B=\{X\big|X\subseteq A\}$的势。

1.3 集合构成集合

看这么一个集合:

$$A=\Big\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\Big\}$$

糊涂了？其实就是“袋子套袋子”的小游戏。这个集合有四个元素：$\varnothing,\{\varnothing\},\big\{\{\varnothing\}\big\},\big\{\varnothing,\{\varnothing\}\big\}$；其中一个是空袋子；一个是套着空袋子的袋子，等等。若$A=\big\{\{0\},2\big\}$，则$0\notin A$，因为0 不在“”袋子里”，不是它的元素，就算装着0的袋子是A的元素，即$\{0\}\in A$。

已知$A=\{0,1\}$,写出$B=\{X\big|X\subsetneqq A\}$、$C=\{Y\big|Y\subseteq B\}$。

这么着，看这个：

$$A=\Big\{\varnothing,\{\varnothing\},\big\{\varnothing,\{\varnothing\}\big\},\big\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\big\}\Big\}$$

有这个: $x\in A\Rightarrow x\subseteq A$，有意思吧!

构造一个集合A满足$|A|=5$ 且$x\in A\Rightarrow x\subseteq A$，也不再那么的困难了。

1.4 补充

构造集合的方式：

人们常说的“数”，即数学家们习惯于操纵的“对象”，已经不断扩充致复数域：

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & \mathbb{A} \arrow[dr] & \\
\varnothing \arrow[r, "\exists"] & \{0\} \arrow[r, "+\ \times"] & \mathbb{N} \arrow[r, "-"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\div"] & \mathbb{Q} \arrow[ur] \arrow[r, "lim"] & \mathbb{R} \arrow[r, "root"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

这其中每一步都成为后人不断发展的源泉，作为读者，应对各个扩充（后两个除外）有一些直观的了解。

另外，还可以通过取笛卡尔积（其中$(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow a=c,c=d$）

$$A\times B=\big\{(a,b)\big|a\in A,b\in B\big\}$$

取商模掉等价类$(A/\sim)$

2 映射

接着来看映射，即两组集合间的关系。

2.1 表示方式

看些例子。

$$\begin{aligned}\text{“加1映射”}\mathscr{A}:\mathbb{N} &\quad\to\quad \mathbb{N}\\ i &\quad\mapsto\quad i+1\\ (\mathscr{A}(i) &\quad=\quad i+1\ )\end{aligned}$$

高中学的大部分函数。因为这里不知道什么映射方式，记为$f(x)$。

$$\begin{aligned}f:D\subseteq\mathbb{R} &\quad\to\quad \mathbb{R}\\ x &\quad\mapsto\quad f(x)\end{aligned}$$

来看一下对此的解释。

$$\begin{array}{cccc} \text{映射名称} & \text{定义域} & & \text{映到的可能范围}\\ \Lsh & \mathscr{A}:\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}\\ & \mathrm{i} & \mapsto & \mathrm{i+1}\end{array}$$

也可以举例：

$$\begin{aligned}\mathscr{A}:\{0,1,2\} &\quad\to\quad \{0,1,2\}\\ 0 &\quad\mapsto\quad 1\\ 1 &\quad\mapsto\quad 0\\ 2 &\quad\mapsto\quad 1\end{aligned}$$

注意符号：单射（$\hookrightarrow$）、满射（$\twoheadrightarrow$）、一一映射（$\leftrightarrow$）。

2.2 映射运算

映射的复合：

$$\begin{aligned}g\circ f: A &\xrightarrow{\quad f\quad} B \xrightarrow{\quad g\quad} C\\ x &\longmapsto f(x) \longmapsto g\big(f(x)\big)\end{aligned}$$

如果这两组集合是同一个，那自然可以有多次映射，即映射的幂次。

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^3:\mathbb{N} &\xrightarrow{\quad\mathscr{A}\quad}\mathbb{N}\xrightarrow{\quad\mathscr{A}\quad}\mathbb{N}\xrightarrow{\quad\mathscr{A}\quad}\mathbb{N}\\ i &\longmapsto i+1\longmapsto (i+1)+1\longmapsto i+3\end{aligned}$$

3 集合与映射

3.1 补充

补充关于群、环、域的知识。（希望去看Artin，比较详细）

集合	A	(A)
群	G	$(G,\circ)$
环	R	$(R,+,-,\times,1)$
域	F	$(F,+,-,\times,\div)$
R-模	M	$(M,+,\Delta)$
线性空间	V	$(V,+,\Delta)$

3.2 映射构成的集合

映射可以构成集合。（其实不止）而有时，我们会选择满足一定条件的映射构成集合。

$f : A \to B$	所有的f构成集合A^B。
$\mathscr{A} : \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^n$	所有的线性映射构成集合。
$f : A \leftrightarrow A$	所有的一一映射构成集合。

以上的这种集合可能出现在另一个映射的定义域或者值域中。

抽象群$G \to GL(V)$ 群表示

3.3 代数结构

一个集合自身到自身的映射，可以看成集合自身的性质（比较好的or映射满足一些性质的）（有时是自身的笛卡尔积）

从此，集合$\xrightarrow{\text{升级}}$代数结构，集合的各元素之间开始产生了一些关系，集合动起来了。

而这些些集合的子集，由于满足了一定的运算封闭性，自然满足代数结构的运算律，成为了子群、子环、子空间、子模。子集至原集合有一个自然的嵌入映射：

$$\begin{aligned} i : A \subseteq B &\hookrightarrow B \\ a &\mapsto a \end{aligned}$$

子结构往往容易构造（生成元生成），不需要多余的$\exists!$性的定理，故遇到它、利用它往往是幸福的、简单的。就仿佛已经搭好了框架，在大框架内部处理比较轻松愉快。

然而新的东西、构造、外推、扩充往往是困难的。为愚蠢的我们着想，在许多时候（一般大一时），数学家已经给出了一个大框架，如$\mathbb{C}$：这货对加减乘除封闭，非常数多项式还一定有根，可以很方便的处理问题啦!

3.4 等价

什么是等价？天上有层云、层积云、雨层云、雾、高积云、高层云、卷云、卷层云，它们都是云。有钢笔、圆珠笔、橡皮、水彩笔、圆规，它们都属于文具，但当谈到笔时，橡皮和圆规就和其他的不一样。水彩笔也有各个色系、各种品牌的。一样事物，拥有数不清的信息，但是我们真正需求的信息并不多。单无视部分差异，两种物品无本质差别时，我们就称它们是“等价的”。等价的东西放在一起就称为一个“等价类”。

跑跑题，先来看特征函数。

设$A \subseteq K$

$$\begin{array}{rcl} f: K & \to & \{0,1\} \\ a & \mapsto & 1 \text{ 若} a \in A \\ a & \mapsto & 0 \text{ 若} a \notin A \end{array}$$

一个子集唯一定义了一个特征函数，你可以看得到K的子集与特征函数的一一对应。

等价关系：

$$\begin{array}{rcl} f: A \times A & \to & \{0,1\} \\ (a,b) & \mapsto & f(a,b) \end{array}$$

$$f(a,b) = 1 \Leftrightarrow a \sim b$$

满足：

自反性	$f(a,a) = 1$	$a \sim a$
对称性	$f(a,b) = f(b,a)$	$a \sim b \Rightarrow b \sim a$
传递性	$f(a,b) = f(b,c) = 1 \Rightarrow f(a,c) = 1$	$a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$

等价关系确定了一个等价类，等号为最精确的等价类。

一般而言，在同一个等价类中的两个数有一些共同的性质，换言之，它们的本质是一样的。

很容易看出：（X、Y的元素才是本质）

$$\begin{aligned} f^{-1}(X\cap Y)=f^{-1}(X)\cap f^{-1}(Y)\\ f^{-1}(X\cup Y)=f^{-1}(X)\cup f^{-1}(Y) \end{aligned} \tag{1}$$

等价类构成了一个集合$\overline{A}$。关于这个集合，有一个自然的映射关系（是满射！）：

$$\begin{aligned} \pi: A &\twoheadrightarrow \overline{A}\\ a &\mapsto \overline{a} \end{aligned}$$

下面来看一个一般映射所诱导出来的等价关系。

$$\begin{aligned} f: A &\to B\\ \mathrm{a} &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

考虑定义：$a\sim b\Leftrightarrow f(a)=f(b)$。例如：$f$为取余数的映射。这样做的原因是：如果我们关心的是$f$映射后得到的结果，那么是$a$是$b$ 就变的不再那么重要。

这个等价关系诱导出一个单射⇒化为一一映射

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ \overline{A} \arrow[ur, hook, "\exists!", "f'"'] \arrow[r, leftrightarrow, "\overline{a}"'] & imf \arrow[u, hook, "\text{包含}"'] \end{tikzcd}$$

当f为群同态、环同态、模同态、线性映射时，此即第一同构定理。（事实上，集合的同态即为一一对应）

有了等价类我们自然会关心以下问题：①等价类的个数？②两元素是否等价？

对于①，B集合往往易知，此时只要对B集合进行分析即可。有时从每个等价类中各取出一个特殊、容易处理的元素，（有意而为之，称为标准型）处理问题就以其为模板。

反过来，当有了等价关系后，我们下意识就会去尝试去找其所隐含的函数的显式表达。找到后即可宣称②问题的解决。

来放一个小毒：在$C[0,1]$（定义在$[0,1]$上的连续实值函数）上定义等价关系

$$f \sim g \Leftrightarrow \big(\exists \;\ \delta > 0 \;\ s.t.\text{对} \;\ \forall x \in (a-\delta, a+\delta)\text{，有} f(x) = g(x)\big)$$

该等价类是一个含幺交换环，称作连续函数芽环。目前我还没有见到所隐含的函数的显式表达。这是曲助教放的毒……

3.5 应用：作用

一直在大谈特谈理论性的东西，我们来看上述的几个实例吧：

先来看笛卡尔积自然包含的映射：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, hook, "i"'] & & A \\
& A \times B \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "p'"] & \\
B \arrow[ur, hook, "i"'] & & B
\end{tikzcd}$$

其中i、i'是嵌入，p、p'是投影。注意：$p \circ i = id_A$，而一般情况下，$i \circ p \neq id_{A\times B}$。

来看“二元运算”作为定义域的映射。

$$\begin{array}{rcl} f : A \times B & \to & C \\ (a, b) & \mapsto & ab \end{array}$$

固定$a \in A$，此映射诱导出一个新的映射：

$$\begin{array}{rcl} \varphi_a : B & \to & C \\ b & \mapsto & ab \end{array}$$

$\varphi_A := \big\{\varphi_a \big| a \in A\big\}$构成一个新的集合。自然有同构：$A \leftrightarrow \varphi_A$,映$a \mapsto \varphi_a$。

当$C = B$时，即可以称作A对集合B的作用。

单$A = G$为群时，若满足：①（单位元）$\varphi_1 = id_B$ ②（结合律），则称之为群G对集合B的作用。

4 后记

本小说历时5日，现在终于烂尾了，也算是完成我学LaTeX的一个小练笔吧。说明自己对数学的深入理解还有很长的一段路要走。

向我的各位数学助教致敬。没有你们，我不会了解到这样丰富有情趣的小世界。

另外，文中必有不正确，欠妥当的地方，请不吝赐教。

之后补充作用部分；摘要；加参考文献；加图片；对符号总览分栏。

A　符号总览

①	项目列表	$\to$	一般映射
$\exists!$	存在唯一	$\mapsto$	一般映射2
$\Rightarrow$	推出	$\hookrightarrow$	单射
$\Leftrightarrow$	互推	$\twoheadrightarrow$	满射
$\varnothing$	空集	$\leftrightarrow$	一一映射
$x \in A$	属于	$\circ$	复合运算
$x \notin A$	不属于	$\mathbb{N}$	字体1
$X \subseteq A$	子集	$\mathscr{A}$	字体2
$X \nsubseteq A$	非子集	$a \sim b$	等价关系
$X \subsetneq A$	真子集	$\overline{a}$	等价类
$A \cap B$	集合的交	$\times$	乘法
$A \cup B$	集合的并	$\div$	除法
$A \sqcup B$	集合的无交并	π	圆周率（此刻用作典范映射）
$A \bigotimes B$	笛卡尔积	$\varepsilon - \delta$	语言