数学分析讲座

周潇翔

University of Science and Technology of China

2020 年 1 月 1 日

摘要

这是 12 月 8 号数学分析讲座的 ppt (不包含 A2,A3). 主要借鉴了 USTC 基础数学修课指南 (https://www.zhangjy9610.me/USTC/ustcmathplan1.pdf).

讲座中的内容仅代表本人在最近的观点，仅做参考。另外文中的大部分信息均无严格调查，均不严谨，许多应该加“大部分”等修饰语的地方，为了行文的方便没有加。

本讲座与中法班无关，因为中法班上的是《分析》。

我叫周潇翔，来自福建，目前是大四基础数学方向，近期准备申请 (所以没有认真做这份 ppt).

- QQ:1051686409
- 主页:http://home.ustc.edu.cn/~xx352229
- 邮箱:xx352229@mail.ustc.edu.cn

目录

这个讲座的目的，说得直白些，就是这三个问题：

这几个问题的难度是层层下降的。

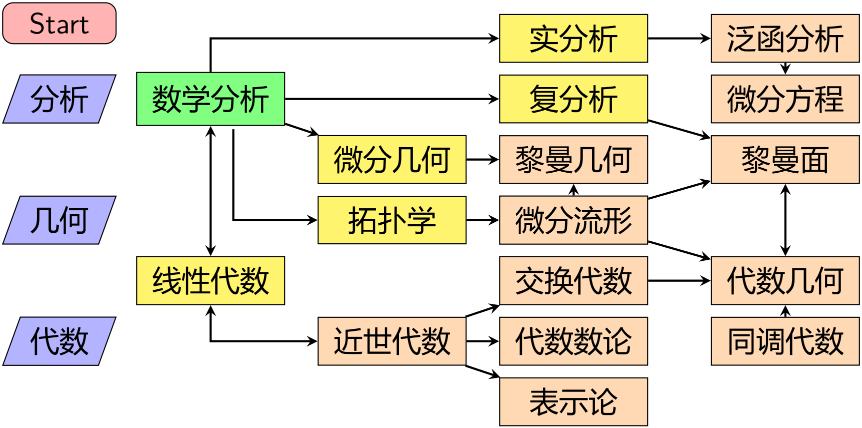
目录

原因

我到现在也没有完全学懂，就只从个人角度谈谈。
为什么学不懂：

- **局部**：从未见过的定义和定理
- **整体**：无法理解全课逻辑，离散的知识点
- **前置**课程缺失：逻辑语言、代数语言
- 在**后继**课程中不断被使用和推广

数分在基础课程中的地位



解决方案

- 抠**细节**，“新生需要学会的第一件事就是用严格的数学语言去刻画证明中的任何结论”
- 观**大略**，画流程框图等
- 选好合适的习题集，如谢惠民
- 多**交流**，不要把同学当成纯粹的竞争对手
- 保持好**心态**，“无论遇到什么困难都不要怕，加油，奥利给！”
- 有自己的理解 (不求与众不同)，并在学习过程中不断改进自己的理解。

如何问助教

- **不会就问**，不要自卑 (又不会扣你平时分，怕什么怕)
- 主动找助教约答疑/在答疑课上**当面**问，线上回答非常耗时
- 问的时候顺便讲讲自己对这个问题理解到了什么程度 (做到哪一步)，让助教清楚了解到你的**需求** (节省大家的时间)
- 助教做不出来/不能当面做出来都很正常，不要因此瞧不起助教
- 若是助教讲完了自己还不懂，就直接说，让助教**再讲一遍**/给别的建议 (掌握知识才是最重要的)

问什么样的问题?

助教答出的概率：问题类型

- 90%: 作业题 (助教不愿意回答的话就让他讲一个思路相同的变形)
- 85%: 史济怀上的题
- 60%: 其他数分书上的题
- 30%: 高级课程题, 道听途说的题，自己瞎编的题 (不属于助教的答疑范围，所以问的时候要讲究策略，不要期待能得到答案)

目录

定义与定理

定义：框架 + 限定性条件 (+ 目的)

例

一个实数列 $\{x_n\}$ 称为 **Cauchy 列**，如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得对任意的 $m, n > N$, 有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$

- 框架: 实数列 $\{x_n\}$
- 限定性条件: 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得对任意的 $m, n > N$, 有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$
- 目的：尝试内蕴地定义数列的收敛

定理：对象 +(本质) 条件 +(技术性) 条件 + 结论
(+ **应用** + 证明 + 背景)

例

设函数 f 在有限区间 $[a,b]$ 上有界，则 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积当且仅当 $D(f)$ 是零测集。

- 对象:$[a,b]$ 上函数 f
- (技术性) 条件：f 有界
- (本质) 条件 + 结论：f Riemann 可积、$D(f)$ 是零测集
- 应用：对具体的函数计算 $D(f)$ 得到 (不) 可积性
- 理解：对 Riemann 可积的性质有了清晰的刻画
- 证明思路：连续部分的振幅小 + 震荡部分的测度小 $\to$ 收敛

" 大定理"

- Taylor 展开
- Lebesgue 可积性定理
- 隐函数/逆映射定理
- Fourier 分析的结论

这是我觉得的最重要，也是最难证的几个定理吧。别的定理请大部分做到能自己手推

作业题

- 直接硬肝
- (有思路) 自己的尝试中漏了什么条件?
  没有这个条件有什么后果? (找反例)
- (完全没思路) 画个图,对某个具体的函数思考
  返回本节课本,看下该节讲了什么内容
- (完成) 这个结论漂亮吗? 漂亮在何处?
  简洁性、应用广、内涵深刻...

例

用实数完备性的六个等价命题证明有界闭区间上连续函数的性质 (有界、介值、最值)

- 有界闭区间改成无界？开区间？ $\longrightarrow$ (不对) 找反例
- 直观上为什么找不到反例？(画图) 你的图被什么束缚住了？
- 你的思路有哪些？ $\longrightarrow$ 区间套点、Lebesgue 膨胀胀点 (上确界/单调收敛)、反证对每一点找开邻域 (构成开覆盖)、找一列点取子列 $\longrightarrow$ 这些思路为何只对有界闭区间成立？
- 连续函数的性质有什么推广？(有界闭区间 $\rightarrow$ 紧 $+$ 连通)

  实数完备性的六个等价命题有什么推广？

A1 经典例子

常见的例子：

- Riemann 函数、Dirichlet 函数
- $x^{\alpha}\sin\frac{1}{x^{\beta}}$
- e^{-1/x^2}
- $\sqrt{x}, (1+\frac{1}{x})^x$
- 单调函数，凸函数

如何掌握例子?

- **直观**：这些例子是什么函数，图像如何
- **性质**：这个例子具有... 性质

  例如，$[A, B]$ 上的单调函数至多只有可数个间断点，且每一个间断点处都是跳跃间断点。
- **作用**：例子满足 A 条件，但不满足 B 条件，说明 A 不能推 B

  例子不满足定理中的结论 B. 这是因为例子不满足定理中的 A 条件，故不能应用该定理推出结论 B.
- **再造**：构造正确的几何直观，用以替代之前有偏差的直观

  例如，如何在图像上理解函数在某一点处极限存在、连续、可导?

目录

自我评估

- 2.0: 及时完成作业，及时交作业 (态度)
- 3.3: 史济怀课后习题
- 3.6: 史济怀课后问题
- 4.0: 谢惠民、应试技能
- 4.3: 运气和应试技能

没有必要强求 4.3 的结果，但一定要有学习的态度!

小测反思

上一次的数分考试，自己考得如何？在哪个环节出了问题，是否可以在之后改进？“缺啥补啥”

- 基本概念不熟
- 计算粗心
- 定理不记得
- 没有及时交作业，考前补作业/作业题忘记如何做了
- 时间来不及/没有细心检查
- 心态爆炸

期末考前，考中，考后

- 考前 1-2 周：作业交齐后领回，开始复习，把平时成绩问清楚
- 考前 3 天：做个整体的总结 (抓大放小)，有问题问助教和老师
- 考前 1 天：把之前做过的题看看，包括书上例题、作业、小测题、习题课的题
- 考试时：心态放平，允许自己失分，认真即可
- 考后：及时查卷，总结失误 (不要在自己确实不对的地方去缠助教给分)

Q & A

Thank you!
Questions & Answers?