$$
\begin{tikzcd}
 & & \text{辛内积} & \\
\text{多重线性函数} \arrow[r] & \text{双线性函数} \arrow[ur, "+反对称"] \arrow[r, "+对称"] \arrow[d] & \text{对称双线性函数} \arrow[r, "+正定"] \arrow[d, equal] & \text{实内积} \arrow[dd, "保正定"] \\
 & \text{共轭双线性函数} \arrow[rrd] & \text{二次型} & \\
 & & & \text{酉内积}
\end{tikzcd}
$$

算法　对称阵的相合　Thm8.2.1

Gram-Schmidt正交化　Thm9.2.2

等价条件

A为n阶实对称方阵

① A正定 $A>0$

② $\forall X\neq 0\in\mathbb{R}^n$ $X^TAX>0$

③ X^TAX规范型为 $y_1^2+\cdots y_n^2$

④ A 相合 $I^{(n)}$

⑤ ∃可逆阵P 使 $A=P^TP$

⑥ A的特征值均为正

~~⑦ A的顺序主子式为正~~

⑦ $\exists B>0$ s.t $A=B^2$ (!)

⑧ A的所有主子式为正

⑨ A的顺序主子式为正

A为n阶实对称方阵

① A半正定 $A\geq 0$

② $\forall X\in\mathbb{R}^n$ $X^TAX\geq 0$

③ X^TAX的规范型为 $y_1^2+\cdots y_r^2$ $r=r(A)$

④ A 相合 $\begin{pmatrix} I^{(r)} & \\ & 0 \end{pmatrix}$

⑤ ∃方阵P 使 $A=P^TP$

⑥ A的特征值均非负

⑦ ∃半正定方阵 $B\geq 0$ s.t $A=B^2$

⑧ A的所有主子式均非负

~~⑨ A>~~

$\mathcal{A}: V\to V$ 为酉空间的linear transformation

① $\mathcal{A}$规范　①' $\mathcal{A}$在B下的方阵A规范

② $\|\mathcal{A}(\alpha_i)\| = \|\mathcal{A}^*(\alpha_i)\|$ $(\forall \alpha_i\in V)$

③ ∃标正基B $\mathcal{A}$在B下为对角阵 (谱分解定理)

④ $\exists f(x)\in\mathbb{C}[x]$ $\mathcal{A}^*=f(\mathcal{A})$ (auto. $f(\lambda)=\bar{\lambda}$)

⑤ 设 W为$\mathcal{A}$的不变子空间,则$W^\perp$为$\mathcal{A}$的不变子空间

⑥ ∃ 酉变换 U 与Hermite变换 H s.t $\mathcal{A}=HU=UH$ $H\geq 0$

⑦ (Schur) $tr(A^*A)\geq\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$ 取等号

来源	方阵类型	等价方式	标准型
P551 例6	$\mathbb{R}^{m\times n}$	正交相抵	$\Lambda = diag(\mu_1, \cdots \mu_r, O)$ $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_r > 0$, $\mu_i \in \mathbb{R}$ SVD
~~P550 例5~~ (奇异值分解)	$\mathbb{C}^{m\times n}$	酉相抵	$diag(\mu_1, \cdots \mu_r, O)$ μ_i 奇异值 ~~(奇异值分解)~~
Thm 9.3.7	$\mathbb{R}^{n\times n}$	正交相似	准上三角阵
Thm 9.7.3	$\mathbb{C}^{n\times n}$	酉相似	上三角阵
Thm 9.5.5	$\mathbb{R}$上规范阵	正交相似	$D = diag\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_s & b_s \\ -b_s & a_s \end{pmatrix}, \lambda_{2s+1}, \cdots \lambda_n\right)$
⇒ Cor 9.5.4	正交阵		$diag\left(\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} \cos\alpha_s & \sin\alpha_s \\ -\sin\alpha_s & \cos\alpha_s \end{pmatrix}, I_{(t)}, -I_{(n-2s-t)}\right)$
Cor 9.5.5	对称阵		$diag(\lambda_1, \cdots \lambda_n)$
Cor 9.5.6	反对称阵		$diag\left(\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} 0 & b_s \\ -b_s & 0 \end{pmatrix}, O_{(n-2s)}\right)$
Thm 9.7.3	$\mathbb{C}$上规范阵	酉相似	$D = diag(\lambda_1, \cdots \lambda_n)$
⇒	酉方阵		$\lvert\lambda_i\rvert = 1$
Thm 9.7.8	Hermite阵		$Im\lambda_i = 0$
P529 例2	反Hermite阵		$Re\lambda_i = 0$
Thm 9.8.9	$\mathbb{F}$上 对称阵	相合	$A = diag(a_1, \cdots, a_r, 0, \cdots, 0)$ (Cor. $\mathbb{R}$上 $\mathbb{C}$上 惯性指数)
	反对称阵		$D = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 0 \cdots 0\right)$
P546	$\mathbb{C}$上 (二次扩域) Hermite阵		$diag(I_{(p)}, -I_{(r-p)}, O_{(n-r)})$
	反Hermite阵		$diag(iI_{(p)}, -iI_{(r-p)}, O_{(n-r)})$

来源	方阵类型	分解方式	符号含义
Prop 9.23	$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$可逆	$A = QR$	Q 正交阵, R为上三角阵,对角元为正 (QR分解)
P552 例7	$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$	$A = SO$	$S \geq 0$ O正交阵 $S=\sqrt{AA^T}$ (极分解)
	$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$	$A = HU$	$H \geq 0$ U 酉方阵 $H = \sqrt{AA^*}$
P462 例3	S正定阵	$S = T^T T$	T 为可逆上三角阵
	$\mathbb{R}$上 A半正定阵	$A = B^2$	B为半正定阵
	半正定Hermite阵	$A = B^2$	B为半正定Hermite阵