中 国 科 学 技 术 大 学 数 学 科 学 学 院

丘赛代数试题选讲，陈小伍

I. 线性代数

1. 设V为有限维复线性空间，A, B为V上的线性变换，满足$AB - BA = B$。证明：A, B有公共的特征向量。

2. 完成以下思考：

(1) 设$\dim V = 2$。能否给出满足题1的线性变换A, B，使得$B \neq 0$。

(2) 若题1中改为实线性空间，命题成立么？

(3) 若题1中改为$AB + BA = B$对么？(hint: 若B可逆？)

3. 设V为有限维复线性空间，A, B为V上的线性变换，满足$A^2 = B^2 = \mathrm{Id}_V$(恒等变换)。证明：存在线性子空间$W$ 使得$\dim W \leq 2$, 且$A(W) = W = B(W)$。(hint: 考虑AB与BA？)

4. 设V为n维欧式空间，内积为$(-, -)$，设$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$为其基。

(1) 试证明:唯一存在V的基$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$满足$(u_i, v_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$;

(2) 设上述基满足$(u_i, u_j) \leq 0$, $i \neq j$。证明：$(v_i, v_j) \geq 0$, $i \neq j$。（hint: 这两组基的Gram方阵什么关系？）

(3) 断言(2)的逆成立么？(hint：$n = 2$?)

5. 设A, B为n阶对称实方阵。记其正惯性系数为p_A和p_B。证明：

$$p_{A+B} \leq p_A + p_B.$$

6. 考虑标准欧式空间$\mathbb{R}^n$，其向量v的长度记为$|v|$。设映射$\mathcal{A}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$满足$\mathcal{A}(0) = 0$以及如下性质: 任意两向量$v_1, v_2$均有$|\mathcal{A}(v_1) - \mathcal{A}(v_2)| = |v_1 - v_2|$。试证明: $\mathcal{A}$为线性变换。

7. 考虑n阶对称矩阵A，其元素由整数组成。设A满足$zAz^t > 0$, 其中$z = (z_1, z_2, ..., z_n)$为任意由n 元非负整数组成的非零行向量，z^t表示其转置。

试证明：不等式$zAz^t > 0$恒成立，其中z为任意的由n元非负实数组成的非零行向量。

II. 群论

1. 设G为有限群，$x_1, x_2, \cdots, x_h$为其所有共轭类的完全代表元。记$Z_G(x_i)$为其中心化子。

(1) 试证明$1 = \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{|Z_G(x_i)|}$;

(2) 对于任给的$h \geq 1$，在同构的意义下，仅存在有限多个有限群G，其恰有h个共轭类。(这样的群G一定存在么？)

(3) 分类群G，使得$h = 3$。

2. 设G为非Abel的有限群，记$h(G)$为其共轭类的个数。

(1) 设$Z(G)$为中心。证明: 商群$G/Z(G)$不为循环群。

(2) 证明$h(G) \leq \frac{5}{8}|G|$。等号能取到么?

(3) 设p为素数，$g \in G$满足p整除$|C_g|$，其中, C_g为其共轭类。此时，我们能估计$\frac{h(G)}{|G|}$么?

3. 设有限群G满足$|G| = 2^n m$，其中$n \geq 1$, m为奇数。设G的Sylow 2-子群为循环群。证明：G有唯一的子群H 使得$|H| = m$，且H 是正规子群。

4. 设G由x_1, x_2生成，满足生成关系$x_1^2 = 1 = x_2^2$。证明：G同构于矩阵乘法群$\{\begin{pmatrix} \pm 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z}\}$。
若生成关系改为$x_1^2 = 1 = x_2^2 = (x_1 x_2)^m$，则$G$同构于怎样的矩阵乘法群?

5. 设$d \geq 1, n \geq 1$。证明：仅存在有限个子群$G \subseteq \mathbb{Z}^d$，满足指数为n。记$f_d(n)$为这样子群的个数。能给出$f_d(n)$的计算公式么?

6. 设L为秩1的有限生成Abel群。设有群的满同态$f\colon L \to \mathbb{Z}$。证明：Ker f 等于$t(L)$，L的扭子群。

7. 设L为Abel群，生成元为x_1, x_2, x_3，生成关系$2x_1 = 4x_2 = 4x_3$（这里，运算用加号）。试确定扭子群$t(L)$ 的阶和结构。该结果可以推广么?

8. 设$\mathbb{F}_3$为三元域，$G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$为其$2 \times 2$可逆矩阵的乘法群。证明：商群$G/Z(G)$同构于$S_4$。

III. Galois 理论

1. 设L为有理系数多项式$x^8 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$的分裂域。试求：$\dim_{\mathbb{Q}} L$以及Galois群$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$。

2. 设L为有理系数多项式$x^4 - x^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$的分裂域。试求：Galois 群$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$以及$L$的所有子域（以及它们之间的包含关系）。

3. 设$\mathbb{F}_2$为二元域。设$n \geq 1$, $f(n)$为$\mathbb{F}_2[x]$中n次首一不可约多项式的个数。

(1) 证明$f(n) \geq 1$。计算$f(6) =$? $f(n)$是递增函数么？

(2) 列出次数不超过5的所有首一不可约多项式。

(3) 记L为$\mathbb{F}_2$的代数闭包。试问L有无限子域么？Galois 群$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{F}_2)$是什么？

4. 考虑参数列$t = (t_0, t_1, \cdots, t_5) \in (\mathbb{F}_5)^6$ with $t_0 \neq 0$, $\{t_i, i > 0\}$为$\mathbb{F}_5$ 上的排列。定义多项式

$$P_t(x) = (x - t_1)(x - t_2)(x - t_3) + t_0(x - t_4)(x - t_5) \in \mathbb{F}_5[x].$$

(1) 证明：$P_t(x)$不可约。

(2) 对于不同的参数列t, t'，何时有$P_t(x) = P_{t'}(x)$?

(3) 证明：多项式$P_t(x)$给出了所有的3次首一不可约多项式。(提示：个数！)

5. 考虑$\mathbb{Q}$上3次不可约多项式$f(x) = x^3 + qx + r$，其复根分别为α, β, γ，设其分裂域为E以及Galois群$G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$。记判别式$D = \Delta^2$，其中$\Delta = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)$。

(1) 证明: $D = -4q^3 - 27r^2 \neq 0$。

(2) $D < 0$当且仅当f仅有一个实根；此时$G = S_3$。

(3) $D > 0$当且仅当f有三实根。此时，若$\sqrt{D} \in \mathbb{Q}$, 则$G = \mathbb{Z}_3$；若$\sqrt{D} \notin \mathbb{Q}$, 则$G = S_3$。

6. (Dedekind) 设G为任意群，L为域。则$\mathrm{Map}(G, L)$自然成为L-线性空间，考虑$\widehat{G} = \{f \colon G \to L\backslash\{0\} \mid f \text{ is a group homomorphism}\} \subseteq \mathrm{Map}(G, L)$。试证明：$\widehat{G} \subseteq \mathrm{Map}(G, L)$线性无关。

7. 考虑域扩张L/k以及$G = \mathrm{Gal}(L/k)$。$\mathrm{Hom}_k(L, L)$成为L-线性空间: $(\lambda.f)(x) = \lambda f(x)$, 任意$\lambda \in L$, $f \in \mathrm{Hom}_k(L, L)$。证明：$G \subseteq \mathrm{Hom}_k(L, L)$ 是L-线性无关的。

定义L-线性空间$LG = \bigoplus_{g\in G} Lg$。考虑映射

$$\Theta\colon LG \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(L, L), \lambda g \mapsto (x \in L \mapsto \lambda g(x)).$$

试证明：Θ为L-线性单射。证明或否定：Θ同构当且仅当L/k为有限Galois扩张。

思考：能否定义LG上自然的k-代数结构，使得Θ为代数同态？是否有L-LG-双模结构${}_L LG_{LG}$？ 以及$\mathrm{Hom}_k(L, L)$上的L-LG-双模结构？$\mathrm{Hom}_k(L, L)$ 有其他的L-线性空间结构么？

8. (Normal basis theorem) 考虑有限维Galois 扩张L/k以及$G = \mathrm{Gal}(L/k)$。证明：存在元素$x \in L$使得$\{\sigma(x) \mid \sigma \in G\}$为$L$的$k$-基。

IV. 环论与群表示论

1. 设ξ为单位根, 满足$\xi = 1 + N\eta$，其中$N \geq 3$为自然数，η是代数整数。试证明: $\eta = 0$。

2. 判断并论证，下列环是否为UFD？

(1) $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$;

(2) $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$;

(3) $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-11}}{2}]$;

(4) $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$;

(5) $\mathbb{C}[x,y]/(x^3+y^3-1)$;

(6) $\mathbb{C}[x]$中由$\mathbb{C} \cup \{x^2, x^3\}$生成的子环。

3. 考虑$\mathbb{Q}[x]$中多项式$f(x) = x^3 + x + 1$，其分裂域为L。设其根分别为α, β, γ，设$F = \mathbb{Q}(\alpha), K = \mathbb{Q}(\Delta)$，其中$\Delta = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$。分别记$O_F$, O_K以及O_L为其中的代数整数环。

(1) 计算$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, $\mathrm{Gal}(L/F)$, $\mathrm{Gal}(L/K)$;

(2) 判断域扩张$F/\mathbb{Q}$, $K/\mathbb{Q}$是否为Galois扩张；

(3) 设p为素数，使得$x^3+x+1=0$在$\mathbb{F}_p$中无解。则证明：$pO_F \subseteq O_F$为素理想；$pO_L \subseteq O_L$为两素理想之积；$pO_K \subseteq O_K$为两素理想之积；$x^2+31=0$在$\mathbb{F}_p$中有解。

4. 证明$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\}$中没有子群，其同构于$S_4$。

5. 设$G \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$为有限子群。证明：存在可逆阵$A$使得$AGA^{-1} \subseteq U(2)$。

6. 设G为有限群, (V,π)为G的有限维复表示。$\mathbb{C}[V]_n$为V上次数为n的多项式函数全体，其自然成为G的表示($\mathbb{C}[V]_0 = \mathbb{C}$为平凡表示)。设$\rho$为$G$的单表示, 其特征标为$\chi$，$a_n(\rho)$为$\rho$ 在$\mathbb{C}[V]_n$ 中的重数。试证明：

$$\sum_{n\geq 0} a_n(\rho)t^n = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{\overline{\chi(g)}}{\det(\mathrm{Id}_V - \pi(g)t)}.$$

7. 自然视$\mathbb{C}$以及$M_2(\mathbb{R})$为$\mathbb{R}$上线性空间。完成以下：

(1) 构造映射$\phi\colon \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$，使其既为$\mathbb{R}$-线性映射又为环同态。

(2) 对于如上的两个映射ϕ_1, ϕ_2，证明总存在可逆实矩阵g，使得$\phi_1(z) = g\phi_2(z)g^{-1}$，任意$z \in \mathbb{C}$。

(3) 设$x \in M_2(\mathbb{R})$，记$\mathbb{R}[x]$为包含x以及纯量矩阵的最小子环。试证明：作为环，$\mathbb{R}[x]$ 同构于$\mathbb{C}$当且仅当x的特征多项式在$\mathbb{R}$上不可约。

8. 设G为有限群，V为G的不可约实表示。称双线性型$\langle -, - \rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$为$G$-不变，若$\langle g.v, g.w \rangle = \langle v, w \rangle$，$g \in G$。

设V上有非退化的G-不变双线性型。试证明：V上一定存在对称的，或反对称的，非退化G-不变双线性型。

9. 设$V = \mathbb{R}^n$为n维欧式空间，具体标准的内积结构$(-, -)$。对于V中非零向量a，定义反射$s_a\colon V \to V$使得$s_a(x) = x - a\frac{(x,a)}{(a,a)}a$。设$g \in \mathcal{O}(V)$为$V$上的正交变换。

(1) 设$a = (\mathrm{Id}_V - g)(b) \neq 0$。则$\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_V - s_a g) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_V - g) \oplus \mathbb{R}b$。

(2) 设$r = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_V - g)$。则$g$能写成$r$个反射之积。