Thm 3.3 $L \leq gl(V)$ $0 < \dim V < +\infty$

$(\forall x \in L \;\; x^n = 0) \Rightarrow (\exists v \in V \;\; v \neq 0 \text{ s.t } x(v) = 0 \text{ for } \forall x \in L)$

$\Downarrow$

Notice $\leq$ $\trianglelefteq$ $\overset{\max}{\leq}$ $K \trianglelefteq L$ $\xrightarrow{\sim}$

$L.v \triangleq L(v) = \{x(v) \mid x \in L, \cancel{v \in V}\}$ $\quad \cancel{K \trianglelefteq L}$: $v \in V$

$L.x \triangleq \cancel{(ad L)(x)} = \{[yx] \mid y \in L\}$ $\quad x \in L$
$[Lx]$

$\dim V < +\infty$

Proof (i) 取 $K \overset{\max}{\trianglelefteq} L$ s.t $\dim L/K = 1$ $\quad \overset{\max}{K \trianglelefteq L}$ $\cancel{K \trianglelefteq}$

$\exists z \in L - K \quad L = K + \mathbb{F}z$

(ii) $K = 0$ 时 ✓ $\quad K \neq 0$ 时 $\dim K < \dim L$

$\Rightarrow W \triangleq \{v \in V \mid x(v) = 0, \text{ for } \forall x \in K\} \neq 0$

(iii) ~~验证~~ Verify $\quad W$ 为 L 的不变子空间

(iv) z nilpotent $\Rightarrow$ $\cancel{z(v) = 0 \; \exists v}$ $\exists v \in W \;\; z(v) = 0$

$\Rightarrow L(v) = 0$ $\square$

Q 矩阵上三角化 $\rightarrow$ 特征向量
矩阵严格上三角化 $\rightarrow$ 特征值为0的特征向量

同时上三角化

Cor (Engel)

$(\forall x \in L, (ad\, x)^n = 0) \Leftrightarrow L^{n'} = 0$

"$\Leftarrow$" $(ad\,x)^n(y) = [x[x[x \cdots [xy]]] \in L^n = 0$

$\Rightarrow (ad\,x)^n = 0$

"$\Rightarrow$" We find

L nilpotent $\Leftrightarrow L' \triangleq L/Z(L)$ nil $\Leftrightarrow L'' \triangleq L'/Z(L')$

$\cdots \overset{?}{\Leftrightarrow} 0$

Q: ① $\forall x \in L', (ad\,x)^n = 0$ $\quad$ Obvious

② $Z(L)$ 非平凡

Consider $ad\,L \triangleq \{ad\,x : L \to L \mid x \in L\} \leq gl(L)$

$\xRightarrow{\text{Thm 3.3}} (\exists x \neq 0 \;\; \cancel{L(x)} = 0) \Rightarrow Z(L) \neq 0$ $\quad [Lx]$ $\cancel{(ad\,L)(x)}$

Details (i) $L/K \longleftrightarrow L$

$\{I' \mid I' \leq L/K\} \leftrightarrow \{I \mid K \leq I \leq L\}$

~~$\Rightarrow \dim L/K = 1$~~ ~~$\Rightarrow \exists z \in L - K \leq L$~~

$0 \leftrightarrow K$

$L/K \leftrightarrow L$ $\quad \Rightarrow \dim L/K = 1$

$l + K \in \mathbb{F}(z+K) = \mathbb{F}(z) + K \Rightarrow L \subset \mathbb{F}z + K$

(iii) ~~$x(y(w))$~~

$k(xw) = [kx](w) - x\,k(w) = 0$ $\quad \Rightarrow xw \in W$

~~$\in k(w\,W)$~~

③ **Def** $N_L(K) \triangleq \{x \in L \mid [xK] \subseteq K\}$

$K \trianglelefteq L \Leftrightarrow L \subseteq N_L(K)$

取 $K \overset{\max}{\leq} L \xRightarrow{?} K \trianglelefteq L$, i.e $L \subseteq N_L(K)$

$\xrightarrow{\text{lemma 3.2}}$ nilpotent $ad\,k : L \to L$

$\varphi_k : L/K \to L/K$ well-defined

$\Rightarrow \exists z + K \neq K \quad \varphi_k(z+K) = K$

$\Rightarrow [kz] \in K$ for $\forall k \in K \Rightarrow [zK] \subseteq K$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \cancel{[zK]}\; z \in N_L(K) \\ K \subseteq N_L(K) \end{array}\right\} \Rightarrow L \subseteq N_L(K)$ $\square$

Thm 4.1 $L \le gl(V)$ $0<\dim V<+\infty$

(L solvable) $\Rightarrow$ ($\exists\, v\in V$ $v\neq 0$ ~~s.t $x(v)=\lambda(x)v$ for $\forall x\in L$~~ $\lambda: L \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}$ ~~$\lambda: L \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}$~~ ~~for~~

s.t $x(v)=\lambda(x)v$ for $\forall x\in L$)

Proof 4.1 (i) 取K ~~满足~~ $K \overset{max}{\lhd} L$ ~~max~~ s.t $\dim L/K=1$

$\exists z\in L-K$ $L=K+\mathbb{F}z$ ($[LL]\subseteq K$)

(ii) $K=0$时 ✓ $K\neq 0$时 $\dim K<\dim L$

$\Rightarrow W \triangleq \{v\in V \mid x(v)=\lambda(x)(v) \text{ for } \forall x\in K\}\neq 0$

(iii) Verify W为L的不变子空间

(iv) $z|_W: W\to W \Rightarrow z(v)=av$ $\exists v\in W$

$\lambda': L \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}$

$x=k+rz \mapsto \lambda(k)+ra$ well-defined

$xv=(k+rz)v=k(v)+rz(v)$

$=\lambda(k)v+rav=(\lambda(k)+ra)v=\lambda'(x)v$ □

~~Details~~

Notice $\mathbb{F}$-Lie代数 L char $\mathbb{F}=0$ $\mathbb{F}$代数闭

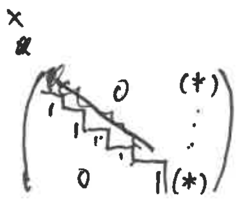
Details (i) Abelian $L/[LL] \leftrightarrow L$

$K' \overset{max}{\lhd} L/[LL] \longrightarrow K \overset{max}{\lhd} L$

(iii) $\lambda(k)x(w) \overset{?}{=} k(x(w)) = xk(w)+[kx](w)$

$= \lambda(k)x(w)+\lambda([kx])(w)$ $\equiv 0$?

$$\begin{array}{c|c} & w \quad x(w) \quad \cdots \quad x^{n-1}(w) \\ \hline \begin{matrix} w \\ \vdots \\ x^{n-1}(w)\end{matrix} & \begin{pmatrix} \lambda(k) & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda(k)\end{pmatrix}\end{array}$$



神来之笔! $\langle w, x(w), \cdots, x^{n-1}(w)\rangle$ w生成

$0=W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq W_2 \cdots W_i \cdots \subsetneq W_n = W_{n+1}\cdots$

$kW_i\subseteq W_i$

~~$y(x^i(w)) = yx(x^{i-1}(w)) = xy(x^{i-1}(w))-[xy](x^{i-1}(w))$~~

$k(x^i(w)) = kx(x^{i-1}(w)) = xk(x^{i-1}(w))+[kx](x^{i-1}(w))$

$\in x[\lambda(k)(x^{i-1}(w))+W_{i-1}]+W_{i-1}$

$\subseteq \lambda(k)x^i(w)+W_i$

Lemma $kW_i\subseteq\lambda(k)+W_{i-1}$

Notice $[kx]\in K \Rightarrow 0=tr([xy])=n\lambda([xy])$ □

$$\begin{pmatrix} 0 & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} (*) & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & (*)\end{pmatrix}$$

nilpotent solvable

Cor 3.3 & Thm (Lie) $L\in gl(V)$

① L nilpotent $\Rightarrow \exists$ flag(V_i) $L(V_i)\subseteq V_{i-1}$

② $\boxed{L \text{ solvable}} \Rightarrow \exists$ flag(V_i) $L(V_i)\subseteq V_i$

~~L solvable~~ Cor B $\exists\, 0=I_0\subsetneq I_1\subsetneq\cdots I_n=L$ $I_i\lhd L$ dim

Proof consider $ad: L\to gl(L)$ □

Cor C ~~Cor C~~ $x\in[LL]\Rightarrow(ad_L x)^n=0 \Rightarrow (ad_{[LL]}x)^n=0$

$\xRightarrow{\text{Engle's}}$ $[LL]$ nilpotent

Proof $ad_L[LL]=[ad_L L, ad_L L]$

$\subseteq[t(n,F),t(n,F)]=n(n,F)$ □

Lie代数第4节习题1-4题答案

周潇翔

2017年10月6日

其实书上已经写得相当清楚了……我不过是练练LaTeX罢了。

lemma of Ex 4.1 $Rad\ L \subseteq B \quad for \quad \forall B$，其中$B$为$L$的极大可解子Lie代数。

Notice. 极大可解理想可以是平凡的，比它大的理想都不可解。

Proof. 由条件，$Rad\ L+B$为不可解Lie代数。设$B^{(n)}=0, (Rad\ L)^{(m)}=0$
则

$$(Rad\ L+B)^{(1)}=[Rad\ L+B, Rad\ L+B] \subseteq Rad\ L+B^{(1)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(Rad\ L+B)^{(i+1)}=[(Rad\ L+B)^{(i)}, (Rad\ L+B)^{(i)}] \subseteq Rad\ L+B^{(i+1)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(Rad\ L+B)^{(n)} \subseteq Rad\ L+B^{(n)} = Rad\ L$$

$$(Rad\ L+B)^{(m+n)} \subseteq (Rad\ L)^{(m)}=0$$

与$Rad\ L+B$不可解矛盾！

Ex 4.1 复习下：

$$Rad\ L_: = L\text{的最大可解理想} = \bigcup_{\substack{I \lhd L \\ I \text{ solvable}}} I$$

$$Z(L)_: = \{x \in L \mid [xy]=0\ for\ \forall\ x \in L\} \lhd L$$

注意到$Z(L)$可解 $\Rightarrow\ \ Z(L)\subseteq Rad\ L$。
由Lie定理，极大子Lie代数B在适当的基下每个元素均为上三角矩阵。

$$B\subseteq L\cap t(n,\mathbb{F})\quad \text{在这组基下}$$

$L\cap t(n,\mathbb{F})$也为子Lie代数，由极大性，$B=L\cap t(n,\mathbb{F})$。

$$B^t_{\vdots}=\{x^t\ \big|\ x\in B,\text{此时视B为在原基下的矩阵}\}$$

同样为子Lie代数，同样也是极大的。
由lemma，

$$\left.\begin{aligned} Rad\ L\subseteq B\\ Rad\ L\subseteq B^t\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ Rad\ L\subseteq L\cap\delta(n,\mathbb{F}) \tag{1}$$

若$\exists A\in Rad\ L,\ i\neq j\ s.t.\ a_{ii}=a_{jj}$，则$[E_{ij},A]\nsubseteq\delta(n,\mathbb{F})$，与$Rad\ L\lhd L$矛盾！此时$Z(L)=Rad\ L$。
$char\ \mathbb{F}=0\ \Rightarrow\ Rad\ L=0$，即$L$半单。

Ex 4.2 $char\ \mathbb{F}=0$ 只在 $n\lambda([x,y])=0$ 时被用到，而这在 $1\leqslant n<p$ 时仍然成立（注：仍需代数闭域的条件）。

Ex 4.3 $[x,y]=x$可自然验证（用左乘行变换，右乘列变换偷懒）。
$y(\alpha)=\lambda\alpha\ \Rightarrow\ \lambda=0\ \Rightarrow\ \alpha=(a,0,\dots,0)^t$ while $x(\alpha)=(0,0,\dots,a)^t$
即y的唯一特征向量不为x的特征向量，$i.e$ x与y无共同的特征向量。

Ex 4.4 设$L\in gl(V)$，$char\ \mathbb{F}=p$，则L的导代数不一定是幂零的。
Proof. 承接第三题，令$L'=<x,y>$，构造$L=L'\times\mathbb{F}^p$，L自然构成线性空间。
下面定义L的括号运算，使之自然成为Lie代数：

$$\begin{array}{cccc}[\ ,\ ]: & L\times L & \to & L\\ & \big((\mathscr{A},a),(\mathscr{B},b)\big) & \mapsto & \big([\mathscr{A}\mathscr{B}],\mathscr{A}(b)-\mathscr{B}(a)\big)\end{array}$$

以下验证“L的导代数不一定是幂零的。”

由$[L'L']\subseteq\mathbb{F}x\ \Rightarrow\ [LL]\subseteq\mathbb{F}x\times\mathbb{F}^p$
$\forall(rx,c)\in\mathbb{F}x\times\mathbb{F}^p$，$(rx,c)=[(x,0),(ry,x^{-1}(c))]\ \Rightarrow\ \mathbb{F}x\times\mathbb{F}^p\subseteq[LL]$
综上，$L^1=L^{(1)}=[LL]=\mathbb{F}x\times\mathbb{F}^p$

类似地，可以证明：
$L^2=[L^1L^1]=0\times\mathbb{F}^p$，
$L^3=[L^2L^2]=0\times 0=0$，即L可解；

但$(L^1)^{(1)}=[L^1L^1]=0\times\mathbb{F}^p$，
$(L^1)^{(2)}=[(L^1)^{(1)}L^1]=0\times\mathbb{F}^p=(L^1)^{(1)}$，
…………
$(L^1)^{(n)}=(L^1)^{(1)}\quad for\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$，即$[LL]$非幂零。