微分流形模拟题

周潇翔

摘要

微分流形考前准备的一些模拟题, 和老师的考题还是有很大区别的.

1 判断题

1. (F) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为光滑单射, 则 f 为微分同胚.
2. (F) $(-1,1) \times (-1,1)$ 与 $B(0,1)$ 不微分同胚.
3. (F) X_1, X_2 为完备向量场, 则 $X_1 + X_2$ 为完备向量场.
4. (T) S^5 上存在处处非零的向量场.
5. (F) 若 $f: M \to N, \Gamma_f$ 为 $M \times N$ 的光滑子流形, 则 f 为光滑映射.
6. (F) 存在 $S^1 \times S^1$ 的等距嵌入.
7. (F) 若 G_1, G_2 为 Lie 群, 且有微分同胚 $\tau: G_1 \to G_2$, 则 τ 为 Lie 群同态.
8. (F) S^1, S^2, S^3 均为 Lie 群.(事实上, 在 S^n 中, 只有 S^1, S^3, S^7)
9. (F) 设 $\mathfrak{g}$ 为 G 的 Lie 代数, 则 $\mathfrak{g}$ 的 Lie 子代数同 G 的 Lie 子群一一对应.
10. (F) 若连通 Lie 群同态 $\varphi: G \to H$ 满足 $d\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 为同构, 则 φ 为 Lie 群同构.
11. (F) 若 G, H 均为连通 Lie 群, $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ 为其对应的 Lie 代数, 且 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ 为同构的 Lie 代数, 则 G, H 为群同构.
12. (T) exp 是 $su(n), so(n), u(n), gl(n)$ 分别到其 Lie 群上的满射.

13. (F) 若 $\mathcal{V}$ 为 involutive, 则对任意 $X, Y \in \mathcal{V}, [X, Y] = 0$.
14. (F) 若 $X_1, \ldots, X_k$ 为 U 上的向量场, 且于每一点处线性无关, 且 $\mathcal{V}$ 为 involutive, 则对任意 $p \in U$, 存在 p 的附近的一个局部坐标卡 (φ_p, U_p, V_p), 使得 $X_i = \partial_i$ on U_p.
15. (T) 微分同胚 $\rho : M \to M$ 保定向 $\Leftrightarrow \deg \rho > 0$.
16. (T) 若 $\rho : M \to N$ 有正则值 $q \in N$, 则 $\rho^{-1}(q)$ 为可定向子流形。
17. (F) M 为连通的 n 维流形，则 M 可定向 $\Leftrightarrow H^n_{dR}(M) \simeq \mathbb{R}$.(需加条件 M 紧或将 $H^n_{dR}(M)$ 替换成 $H^n_c(M)$)
18. (F) 设 M 为带边流形，则 ∂M 为可定向流形。
19. (F) Möbius 带不为带边流形的边界。
20. (F) 若 M 与 N 同伦等价且维数相同，则 $for \forall k, H^k_c(M) = H^k_c(N)$.
21. (?) 设 M 为无边光滑流形，$\Omega \subseteq M$ 为 domain, $\bar{\Omega}$ 紧，X 为 M 上的完备向量场，生成的流为 $\phi(t)$, 且 $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$ 始终为光滑带边流形，则 $\partial\Omega_t$ 与 $\partial\Omega_0$ 微分同胚。
22. (T) 设 M 为紧的可定向流形，维数为 n, $4 \nmid n$, 则 $\chi(M)$ 为偶数。
23. (T) 对任意流形 M, TM 与 T^*M 均可定向。(E 可定向 $\Rightarrow E*$ 可定向)
24. (T) S^k 存在处处非 0 的向量场 $\Leftrightarrow k$ 为奇数。
25. (F) 设 M 为紧致无边流形，$X \in \Gamma^\infty(TM)$, 则对 $\forall f, g \in C^\infty$, 有

$$\int_M X(f) g \mu = -\int_M f X(g) \mu$$