微分几何复习

周潇翔

2019 年 1 月 31 日

1 期中

1.
$$(\log\det(A))' = Tr(A^{-1}\frac{dA}{dt})$$

2.
$$\frac{A(\Sigma\cap B_x(r))}{\pi r^2} = c_1 + c_2 r + c_3 r^2 + o(r^2)$$

3. 曲率为常数的平面曲线
   (1)$k(s)\equiv 0 \Leftrightarrow \vec{r}(s)$ 是直线
   (2)$k(s)\equiv a\neq 0 \Leftrightarrow \vec{r}(s)$ 是半径为 $|\frac{1}{a}|$ 的圆

4. $\vec{r}(s)(k>0)$ 落在某平面上的充要条件为 $\tau = 0$

5. 必考：利用 Frenet 公式导出某些简单的几何命题

   例：法平面过定点 $\to$ 球面曲线

   例：一般螺线：切向量与某固定方向成定角的非直线螺线 $(k>0)$.

   证明：非直线曲线为一般螺线 $\Leftrightarrow \frac{\tau}{k} = c$

6. 考虑 $\vec{r}(s):[a,b]\to E^4$(Minkowski 空间), 有

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1(s) & & 0 \\ -k_1(s) & & \ddots & \\ & \ddots & & k_{n-1}(s) \\ 0 & & -k_{n-1}(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

7. 等温参数网直纹面推可展曲面：$k=0; (a',b,b')=0$; 切平面重合

8. 全脐点曲面的分类. 例：E^3 中全为平点的曲面只能是平面.

9. 渐进方向与渐近曲线：$L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2 = 0$

10. 曲率线与曲率线网：($F = M = 0$)

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\lambda(s)\frac{d\vec{r}}{ds}$$

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0$$

曲面 Σ 的参数曲线网为曲率线网的充要条件：$F = M = 0$

11. 命题：I、II、III 不是独立的，有 $III - 2HII + KI$

12. 可展曲面：直纹面 +

    - 直母线上各点的切平面重合（即法向量平行）
    - Gauss 曲率为 0
    - 与平面等距

    Gauss 曲率为 0 且无脐点，则 Σ 必为可展曲面
    可展曲面的分类：柱面、锥面、切线面
    例：曲面 Σ, $\vec{r}(u, v)$ 上的曲线 C 为曲率线 $\Leftrightarrow C$ 上每点曲面法线所生成的直纹面 $\tilde{\Sigma}$ 为可展曲面

2 期末

- 曲率、挠率
- 第一、二基本形式、Christoffel 符号
- Weingarden 变换
- Gauss 映射的像集
- Gauss 曲率、平均曲率、法曲率、主曲率、测地曲率
- 椭圆点、抛物点、平点、脐点
- 渐近线、曲率线、测地线
- 旋转面、直纹面、可展曲面、全脐点曲面、极小曲面
- 等温参数系、曲率线网、测地法坐标系、测地极坐标系、测地平行坐标系
- 协变导数、协变微分、平行移动、向量平移产生的角差
- 曲面上的 Laplace 算子及其局部坐标表示
- Gauss-Bonnet 公式
- 弧长泛函、能量泛函、面积泛函
  将上述的概念在正交活动标架下再算一遍。

关于整体曲线：

- 旋转指数 $\frac{1}{2\pi}\int_0^l k(s)ds = \pm 1$
- 等周不等式 $\left(\frac{L^2}{4\pi} - A\right) \geqslant 0$
- 凸曲线
- 支撑函数，Minkowski 问题

关于整体曲面：

- Gauss-Bonnet $\int_D KdA + \int_{\partial D} k_g ds + \sum \alpha_i = 2\pi\chi(D)$

  应用：指数定理 $I(\nu) = \chi(\Sigma) = 2(1-g)$

  Jacobi 定理 $\int_D dA = \int_{\partial D} d(\arctan\frac{\tau}{k}) = \int_{\partial D} k_g d\rho = 2\pi$
- 紧致曲面的 Gauss 映射
  - $\int_\Sigma KdA = 4\pi(1-g)$
  - $\int_{\Sigma_+} KdA \geqslant 4\pi \quad \Rightarrow \quad \int_C kds \geqslant 2\pi$
  - $\int_\Sigma |K|dA \geqslant 4\pi(1+g)$
  - $\int_\Sigma H^2 dA \geqslant 4\pi$
  - $\int_{T^2} H^2 dA \geqslant 2\pi^2$
- 凸曲面 (卵形面)
  - Gauss 映射与卵形面
    - 紧致曲面存在点 $p, K(p) > 0$
    - 凸 $\Rightarrow K \geqslant 0$ 恒
    - $K > 0$ 恒 $\Rightarrow$ 凸，且 Gauss 映射为一一映射
  - 积分公式
    - $\int_\Sigma HdA = \int_\Sigma K\varphi dA \qquad \int_\Sigma dA = \int_\Sigma H\varphi dA$
    - 此外，$\int_\Sigma ndA = \int_\Sigma HndA = \int_\Sigma KndA = 0$
    - $H \equiv C \Rightarrow \int_\Sigma (H^2 - K)\varphi dA = 0 \qquad \frac{H}{K} \equiv C \Rightarrow \int_\Sigma \frac{H^2 - K}{K} dA = 0$
  - 刚性

$$\det(h_{\alpha\beta} - \bar{h}_{\alpha\beta}) = 2K - (\bar{h}_{11}h_{22} + h_{11}\bar{h}_{22} - 2h_{12}\bar{h}_{12})$$

$$0 \leqslant \int \varphi \det(h_{\alpha\beta} - \bar{h}_{\alpha\beta})dA = 2\int (H - \bar{H})dA$$

$$
\begin{aligned}
& r(u,v) \\
\Rightarrow & r_u, r_v, E, F, G \\
\Rightarrow & r_u \wedge r_v, n \\
\Rightarrow & r_{uu}, r_{uv}, r_{vv}, L, M, N \\
\Rightarrow & b_1^1, b_1^2, b_2^1, b_2^2 \\
\Rightarrow & K, H, k_1, k_2, W(e_i) = k_i e_i \\
\Rightarrow & \text{渐近线：} L(du)^2 + 2M du dv + N(dv)^2 = 0 \\
& \text{曲率线：} \begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1 du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}
$$

$$de_1 = w_1^2 e_2 + w_1^3 e_3$$

$$\vec{k} = \frac{de_1}{ds} = \frac{w_1^2}{ds} e_2 + \frac{w_1^3}{ds} e_3 = k_g e_2 + k_n e_3$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \left(\frac{d^2 u^\gamma}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} \right) r_\gamma + b_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} n$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u^\gamma}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} = 0$$

$$
\begin{aligned}
k_g &= \frac{d\theta}{ds} + \frac{w_1^2}{ds} \\
&= \frac{d\theta}{ds} + (k_g)_u \cos\theta + (k_g)_v \sin\theta \\
&= \frac{d\theta}{ds} - \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} \cos\theta + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} \sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& I = w^1 w^1 + w^2 w^2 \\
\Rightarrow & w^1, w^2, w^1 \wedge w^2 (\Rightarrow dA) \\
\Rightarrow & dw^1, dw^2 \\
\Rightarrow & w_1^2 = \frac{dw^1}{w^1 \wedge w^2} w^1 + \frac{dw^2}{w^1 \wedge w^2} w^2 \\
\Rightarrow & K = -\frac{dw_1^2}{w^1 \wedge w^2} \\
\Rightarrow & K dA = -dw_1^2 \\
\Rightarrow & \iint_D K dA = -\oint_{\partial D} w_1^2 = \oint_{\partial D} d\theta - \oint_{\partial D} k_g ds
\end{aligned}
$$

$$\text{角差}: \beta(l) - \beta(0) = \oint_{\partial D} d\beta = -\oint_{\partial D} w_1^2 = \iint_D K dA$$

$$\text{一般}: \iint_D K dA + \oint_{\partial D} k_g ds + \sum \alpha_i = 2\pi\chi(D)$$

$$\iint_\Sigma K dA = 2\pi\chi(\Sigma) \qquad \chi = 2(1-g)$$

$$\text{自然标架运动方程} \begin{cases} \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^\alpha} = \vec{r}_\alpha \\ \dfrac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial u^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{r}_\gamma + b_{\alpha\beta} \vec{n} \\ \dfrac{\partial \vec{n}}{\partial u^\alpha} = -b_\alpha{}^\beta \vec{r}_\beta \end{cases}$$

$$\text{外微分法} \begin{cases} d\vec{r} = \vec{r}_\alpha du^\alpha \\ d\vec{r}_\alpha = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma du^\beta \vec{r}_\gamma + b_{\alpha\beta} du^\beta \vec{n} \\ d\vec{n} = -b_\alpha{}^\beta du^\alpha \vec{r}_\beta \end{cases}$$

$$\text{运动方程：} \begin{cases} dr = w^\alpha e_\alpha \\ de_i = w_i^j e_j \end{cases}$$

$$\text{结构方程：} \begin{cases} dw^\alpha = w^\beta \wedge w_\beta^\alpha \\ dw_i^j = w_i^k \wedge w_k^j \end{cases}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \left\{ \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial u_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u_\delta} \right\}$$

$$D\vec{r}_\alpha = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma du^\beta \vec{r}_\gamma$$

$$D_{\vec{r}_\beta} \vec{r}_\alpha = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{r}_\gamma$$

$$\begin{cases} \nabla f = \sum_\alpha f_\alpha e_\alpha \\ df = f_\alpha w^\alpha \\ D\nabla f := Df_1 e_1 + Df_2 e_2 \\ \qquad = (df_1 - f_2 w_1^2) e_1 + (df_2 + f_1 w_1^2) e_2 \\ ?? = Df_\alpha w^\alpha \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} Df_1 \\ Df_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta f &= f_{11} + f_{22} \\
\Delta_\Sigma f &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\sqrt{\det g} \frac{\partial f}{\partial u^\beta} g^{\alpha\beta} \right) \\
div_\mu X &= \sum \frac{1}{f} \partial_i (f X^i) \\
\mu &= \sqrt{\det g}\, du^1 \wedge du^2 \\
\Delta_\Sigma f &= div_\Sigma \nabla f
\end{aligned}
$$