

\mathbb{R}^n 中的拓扑

周潇翔

摘要. 介绍一个我大一时为了理解 \mathbb{R}^n 中的拓扑概念而使用的一套方法, 这种方法也可以推广至一般的度量空间的情况, 不过还是在 \mathbb{R}^n 中, 尤其是 \mathbb{R} 中显得最清楚. 这种方法对我开始时厘清概念起到相当大的帮助, 但之后便不会再用到, 所以可以将其视为“拓扑初级阶段”.

在拓扑学中, 我们往往会对一个集合的子集感兴趣. 自然地, 在 \mathbb{R}^n 中, 我们会对 \mathbb{R}^n 的子集感兴趣. 我们会如何来利用这个给定的集合, 分析它的性质呢?

Example 0.1. 观察集合 $E : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$ 可以直观地感觉到 \mathbb{R}^2 被这个集合分成了 3 个部分:

- E 的内部 $E^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$
- E 的边界 $\partial E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$
- E 的外部 $(E^c)^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x^2\}$

当然, 我们自然留下了许多无法解决的问题. 什么是 E 的内部、边界和外部? 为何我们就能将其恰好分成这三个部分? 为此, 我们需要剖析我们自己的直觉: 我们是如何通过自己的直觉来辨别出这些元素的不同? 如何将我们的这一点直观转换成严谨的数学语言?

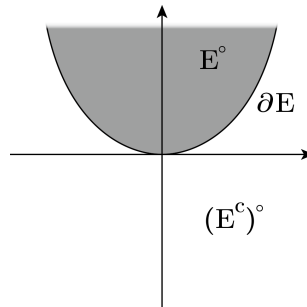


图 1. E

1. E 对 \mathbb{R}^n 的分类

在这里, 我们想用集合 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 来将 \mathbb{R}^n 分成几块. 有一个标准是既简单又直接的: 按照点是否在集合 E 中, 先将 \mathbb{R}^n 分成两大块: $\mathbb{R}^n = E \sqcup E^c$ ¹

Exercise 1.1. 试从网上查阅 Cantor 集 C 的定义, 将集合

$$A = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, 0 < p \leq q \leq 5 \right\}$$

按照是否落在 C 中分为两类.

但这难以完全满足我们的需求. 我们看到我们对 \mathbb{R}^n 中点的分类, 不止关注这个点的情况, 还在这个点附近的情况. 故我们引入点的空心球 (去心邻域)²的概念:

¹这里 \sqcup 表示无交并的意思, 有两层意义: 1.(表并) $\mathbb{R}^n = E \cup E^c$; 2.(无交) $E \cap E^c = \emptyset$.

²实际的去心邻域的概念更广, 不过我们也不涉及.



图 2. 生成 Cantor 集的最初几步

Definition 1.1 (空心球). 我们称

$$B_r(\check{a}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|x - a\| < r\}$$

为以 a 为球心, 以 $r > 0$ 为半径的**空心球** (*open ball of radius r around a*).

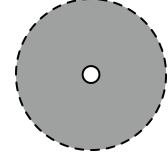


图 3. 空心球

事实上, 一个足够小的空心球能够充分地体现一个点附近的情况.³下面的定义是为了叙述方便使用, 用过后可以直接忘却即可.

Definition 1.2 (被 E 包围). 我们称点 a 被 E 包围, 是指存在 $r > 0$, 使得 $B_r(\check{a}) \subseteq E$ ⁴.

Corollary 1.3. 点 a 被 E^c 包围, 当且仅当存在 $r > 0$, 使得 $B_r(\check{a}) \subseteq E^c$

容易看出对于一个给定的点 a , 这两种情况不会同时发生 (作为练习). 我们将其余的情况划为第三类, 这样我们就成功地从另一种角度 (点附近的情况) 来将 \mathbb{R}^n 中的点集分类.

Exercise 1.2. 按照被 E 包围、被 E^c 包围和其他情况将 **Example 0.1** 中的 \mathbb{R}^2 分为三类.

在介绍开集闭集这些概念之前, 我们先来深入探讨下“被 E 包围”相关的等价叙述.

Definition 1.4 (聚点⁵). 我们称 a 为 E 的**聚点** (*accumulated point*)(凝聚点, 极限点), 如果对任意 $r > 0$, 总存在 $x \in E$, 使得 $x \in B_r(\check{a})$.

聚点有许多等价的定义, 兹列举如下:

$$\begin{aligned} a \text{ 为 } E \text{ 的聚点} &\Leftrightarrow \text{对任意 } r > 0, \text{ 总存在 } x \in E, \text{ 使得 } x \in B_r(\check{a}) \\ &\Leftrightarrow \text{对任意 } r > 0, B_r(\check{a}) \cap E \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \text{存在不取值于 } a \text{ 的数列 } \{a_n\} \subseteq E \text{ 收敛于 } a \\ &\Leftrightarrow \text{存在数列 } \{a_n\} \subseteq E \text{ 收敛于 } a, \text{ 且对任意 } n \neq m, \text{ 有 } a_n \neq a_m \end{aligned}$$

下面的性质和推论是自然的, 留作习题.

³我们之所以用空心球而不用球 $B_r(a)$, 是由于点 a 过于特殊.

⁴注意这里我们没有要求 $a \in E$ 或 $a \notin E$.

⁵见 [1, p325, 定义 8.3.3].

Proposition 1.5.

- 点 a 不被 E 包围 \iff 点 a 为 E^c 的聚点
- 点 a 不被 E^c 包围 \iff 点 a 为 E 的聚点

Corollary 1.6. 点 a 为第三类情况 \iff 点 a 同时为 E 与 E^c 的聚点, i.e. 在 $E \setminus \{a\}$ 中存在收敛于 a 的数列, 且在 $E^c \setminus \{a\}$ 中存在收敛于 a 的数列.

这时候我们可以说是相当清晰地描述了一个点附近的三种情况. 将点与点附近的情况组合起来考虑, 我们得到了一个对全集 \mathbb{R}^n 的分划:

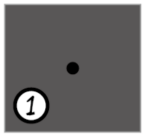

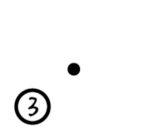


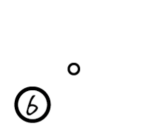
	被 E 包围	其它	被 E^c 包围
$a \in E$			
$a \notin E$			

表 1. 对 \mathbb{R}^n 彻底的分类

Exercise 1.3. 指出在 **Example 0.1** 中的①~⑥. 哪几部分为空集?

当 $n = 1, E = C$ 时, 指出①~⑥. 哪几部分为空集? 在 **Exercise 1.1** 中, 集合 A 中的元素在哪个位置?

2. 开集与闭集

我们来利用我们的分类来研究开集和闭集.

Definition 2.1 (内点, 内部⁶). 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$. 如果点 $a \in E$, 并且存在 $r > 0$, 使得 $B_r(a) \subseteq E$, 那么称 a 为 E 的一个内点 (*interior point*). 点集 E 的全体内点所构成的集合记作 E° , 称之为 E 的内部 (*interior*).⁷

来观察我们的分划. E 的内点按照定义, 首先落在 E 中, 然后又被 E 包围, 故一定落在①中. 反过来, 落在①中的元素一定为 E 的内点.⁸ 故集合 E 的内部恰好即为①.

Definition 2.2 (开集与闭集). 我们称 E 为 \mathbb{R}^n 的开集 (*open set*), 若 $E = E^\circ$. 如果 E^c 为开集, 则称 E 为闭集.

⁶见 [1, p322, 定义 8.3.1].

⁷注意元素与集合的区别. 内点是 E 的元素, 而内部为 E 的子集.

⁸不过是同义反复.

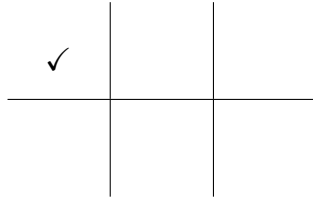


表 2. 内点与内部

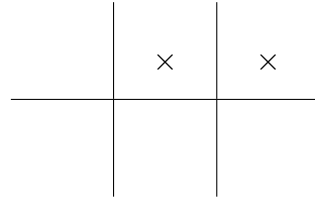


表 3. 开集

观察到 $E = ① \sqcup ② \sqcup ③$ 而 $E^\circ = ①$, 故 E 为开集 $\iff ② = ③ = \emptyset$. 为了更好地了解闭集的信息, 我们想知道 E 与 E^c 将集合分成的六类中有没有什么相关性. 很明显是有的: 故 E 为闭集 $\iff E^c$ 为开集 $\iff ④ = ⑤ = \emptyset$.

	被 E^c 包围	其它	被 $(E^c)^c$ 包围
$a \in E^c$	⑥	⑤	④
$a \notin E^c$	③	②	①

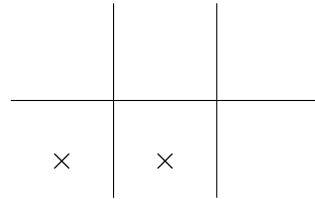
表 4. E^c 分成的 6 类

表 5. 闭集

Exercise 2.1. 由 **Exercise 1.3**, 直接说明 **Example 0.1** 中的 E 与 *Cantor* 集分别为 \mathbb{R}^2 与 \mathbb{R} 中的闭集.

[1, p325, 推论 8.3.1] 是关于闭集的等价定义, 这个定义对于理解 “ \mathbb{R}^n 中, 列紧集 \iff 有界闭集” 非常有帮助, 且这个定义在泛函分析中被多次使用 (其对一般的度量空间也是成立的).

我们来开始肝这一节中最难的几个定义. 在这之前, 我们回顾下聚点这个概念:
 点 a 为 E 的聚点 \iff 点 a 不被 E^c 包围 $\iff a \notin ③ \sqcup ⑥ \iff a \in ① \sqcup ② \sqcup ④ \sqcup ⑤$.
 我们称 E 的全体凝聚点 E' 为 E 的**导集 (derived set)**, 故 $E' = ① \sqcup ② \sqcup ④ \sqcup ⑤$

Definition 2.3 (孤立点). 我们称 $a \in E$ 为 E 的**孤立点 (isolated point)**, 若 a 不为聚点.

Exercise 2.2. 验证 a 为孤立点 $\iff a \in ③$.

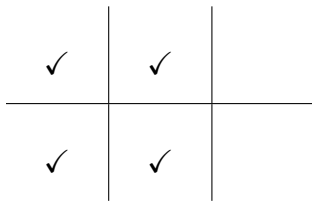


表 6. 导集

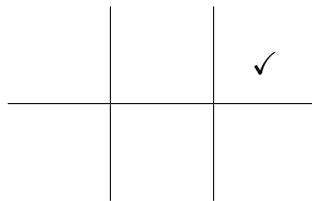


表 7. 孤立点

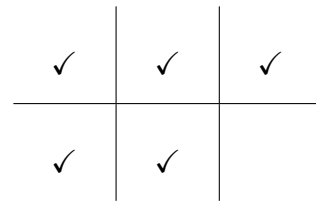


表 8. 闭包

Exercise 2.3. 定义 E 的闭包 (closure) $\overline{E} = E \cup E'$. 验证 $\overline{E} = \textcircled{1} \sqcup \textcircled{2} \sqcup \textcircled{3} \sqcup \textcircled{4} \sqcup \textcircled{5} = \mathbb{R}^n \setminus \textcircled{6}$, 故而有推论 $\overline{E} = ((E^c)^\circ)^c$.

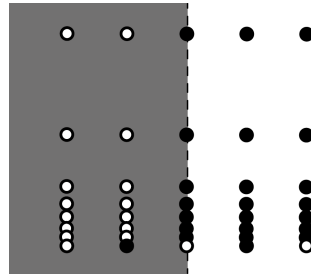
接下来我就偷个懒, 毕竟还是要留下自己思考的余地呀.

Exercise 2.4. 自行阅读 [1, p326, 定义 8.3.5], 利用分类的方法理解概念: 外点与外部 (exterior); 边界点与边界 (boundary). 画出表格 (可参考表 2) 并顺手证明

$$E^\circ \sqcup (E^c)^\circ \sqcup \partial E = \mathbb{R}^n.$$

Exercise 2.5. 利用分类的方法刷完 [1, p327-328, 练习题 8.3] 的 1-3, 5, 6, 13.

Exercise 2.6.⁹ 考虑 \mathbb{R}^2 中的两个集合: $C \times C$ 与



$$((-\infty, 0) \times \mathbb{R}) \triangle \left(\{-2, -1, 0, 1, 2\} \times \{0\} \cup \{-1, 1\} \times \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+ \right\} \right)$$

它们是开集、闭集、有界集吗? 它们的导集、闭包、内部、外部、边界分别是什么? 有无孤立点?

Exercise 2.7. 定义

$$A_n = \{(0.j_1j_2 \cdots j_n)_3 \mid j_i = 0, 2 \text{ for } i \in \{1, 2, \dots, n\}\} \quad A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

说明 $C \neq A$ 而 $C = \overline{A}$. (许多人问 Cantor 集是不是就是边界点集的并, 这个练习可以说明这一点是错误的, 但是“很接近”: Cantor 集是边界点集的并的闭包.)

3. 后记

这份材料与其说是介绍 \mathbb{R}^n 中的拓扑, 不如说是对教材 [1, 8.3] 中内容的一个导读. 我希望这份材料能使同学克服阅读 [1, 8.3] 的一些障碍, 并获得阅读材料 [2, Appendix A] 的能力.

还有许多的内容我没有提到, 索性在这里一并提一提.

- 定理 8.3.6 是很有意思的一个定理, 它说明了内部与闭包的特殊性.(你也可以说这两个概念是对偶的).
- 定理 8.3.3 以后会推广到抽象的拓扑空间中作为开集的定义.

⁹定义对称差 (symmetric difference): $A \triangle B = (A \cap B^c) \sqcup (A^c \cap B)$.

- [1, 8.4] 主要就是定义 (列紧集和紧集 (紧致集)) 与一个结论 \mathbb{R}^n 中有界闭集 \Leftrightarrow 紧集 \Leftrightarrow 列紧集, 证明是很漂亮的, 结论也很重要 (例如, 你就可以说明有界闭集上的连续函数一定取到最值了).
- [1, 8.5] 主要和连通性有关, 看之前可以想想如果是自己的话, 会怎样定义一个集合的连通性. 亦有一些非平凡的有趣的结论. 比如, 为什么 \mathbb{R}^n 中又开又闭的集合只有 \mathbb{R}^n 和 \emptyset ?

另外, 这里术语的英文翻译主要参照 [2, Appendix A]. 还有借了下 wiki 的图片.

REFERENCES

- [1] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程 (第 3 版). 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2012.8.
- [2] Lee J M. *Introduction to smooth manifolds*[M]. 2008.
- [3] Armstrong M A. *Basic topology*[J]. Undergraduate Texts in Mathematics, 1997:137-155.
- [4] James Munkres. *Topology*. 2nd. Prentice-Hall, Inc., Jan. 2000. ISBN: 9788120320468
- [5] 尤承业, 《基础拓扑学讲义》, 北京大学出版社, 1997
- [6] 熊金城, 《点集拓扑讲义》, 人民教育出版社, 1981
- [7] 伏·巴尔佳斯基, 伏·叶弗来莫维契, 裘光明. 拓扑学奇趣 [J]. 湖南教育出版社, 1999.8.
- [8] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge, New York: Cambridge University Press, 2003. isbn: 0-521-79160-X
- [9] Evan Chen. *An Infinitely Large Napkin*. draft. 2018. URL: <http://web.evanchen.cc/napkin.html>

SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA,
HEFEI, 230026, P.R. CHINA,

Email address: xx352229@mail.ustc.edu.cn