

«به نام حق»



دانشکده مهندسی برق

ترم پاییز ۴۰۲۲

درس : سیستمهای تصویربرداری کارکردی مغز

استاد: دکتر علی خادم

تهیه کننده : رامین توکلی

شماره دانشجویی : ۹۹۲۵۰۶۳

تمرین سری اول کامپیوتری

موضوع: حل مسئله مستقیم MEG,EEG

موعد تحویل:



## الف) مسأله مستقیم MEG

- فرض کنید سر را با سه کره هم مرکز و همگن مدل می کنیم (مغز، جمجمه، پوست سر) که شعاع  $r_1 = 8cm$ ،  $r_2 = 8.5cm$  و  $r_3 = 9cm$  و رسانایی الکتریکی  $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma$  و  $\sigma_2 = \sigma/80$  دارند.

در این بخش ما باید پارامترهای مرد نظر خودمان را که گفته شده در قابل متغیرهای ثابتی تعریف کنیم. که در ادامه در فایل های مختلف ممکن است از آنها استفاده بکنیم. همچنین کتابخانه هایی که در این تمرین مورد استفاده قرار گرفته است را نشان می دهیم.

```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import numpy as np
import math
```

```
# ----- Constants -----
```

```
m = 33 # Number of MEG Sensor
n = 105 # Number of Diople
R0 = 0.07
R1 = 0.08
R2 = 0.085
R3 = 0.09
```

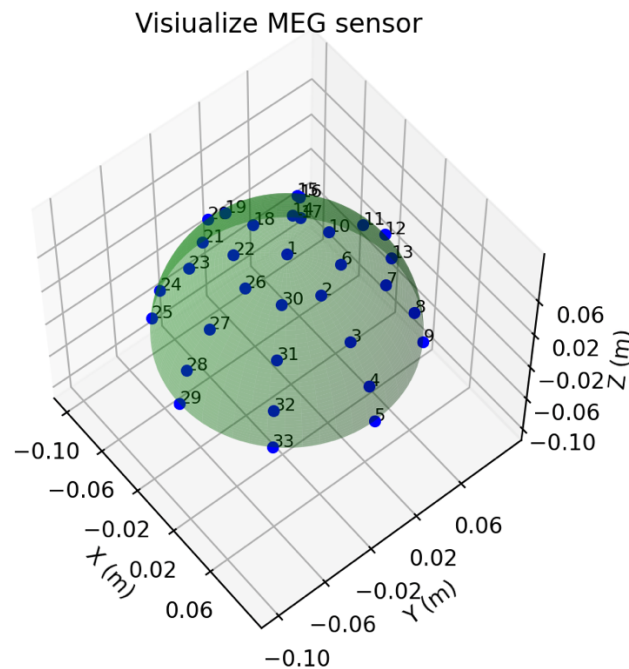
```
sigma = 0.3
sg1 = sigma
sg2 = sigma/80
sg3 = sigma
```

```
ep = 8.85 * pow(10, -7)
mu = 4 * math.pi * pow(10, -7)
```



- فرض کنید 33 سنسور MEG روی سطح نیم کره بالایی پوست سر (کره به شعاع  $r_3$ ) قرار دارند به نحوی که **اولین** سنسور روی محور  $Z$  قرار گرفته است و روی هر کدام از نوارهای  $\varphi_i = (45^\circ).i$  ( $i = 0, 1, 2, 3, \dots, 7$ ) چهار سنسور در زوایای  $\theta_j = (22.5^\circ).j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) قرار گرفته اند. (شماره هر سنسور واقع در نقطه  $(r_3, \theta_j, \varphi_i)$  را  $4i + j + 1$  در نظر بگیرید).

در این بخش ما باید سنسورهای MEG را روی سطح نیم کره مغز قرار دهیم بدین معنی که باید کدی را پیاده کنیم که محل الکترودهای خواسته شده را برای ما تولید کند. مختصات هر کدام از سنسورها را با شرایطی که گفته شده است بدست آوریم و به ترتیبی که گفته است شماره گذاری کردیم و سپس آن را مصورسازی کردیم. در تصویر ۱-۱ مشاهده میشود که در نیم کره بالایی مغز و در روی پوست سر یعنی خارجی ترین شعاع سنسورها قرار گرفته اند و با شماره مخصوص خود نشان داده شده اند. کد مربوط به این بخش در فایل MEG\_Sens قرار گرفته است.



تصویر ۱-۱) مصور سازی تمامی سنسور های قرار داده شده روی پوست سر



- فرض کنید 105 منبع (dipole) احتمالی جریان الکتریکی مغزی روی سطح یک کره به شعاع  $r_0 = 7 \text{ cm}$  به صورت تصادفی قرار گرفته‌اند و مبنای شماره گذاری آن‌ها بر اساس فاصله از محوری عمودی Z می‌باشد بدینسان که دایپل شماره ۱ دایپلی است که کمترین فاصله را با محور Z دارد و دورترین دایپل نسبت به محور Z نیز دایپل شماره ۱۰۵ می‌باشد. (توجه فرمایید هیچ یک از نقاط روی سطح این کره نباید شامل بیش از یک دایپل شود).

در این بخش ما به تعداد ۱۰۵ منبع داریم که بصورت رندوم روی نقاط سطح کره تولید شده‌اند و هیچ کدام از نقاط روی سطح این کره تکرار نشده‌اند. این کار به وسیله کد زیر انجام شده است:

```
num_points = 105

# Using default_rng for random number generation
rng = np.random.default_rng()

# Generate random theta values
theta = rng.choice(np.linspace(0, np.pi, num_points),
                   size=num_points, replace=False)

# Generate random phi values
phi = rng.choice(np.linspace(0, 2 * np.pi, num_points),
                 size=num_points, replace=False)
```

سپس ما نیاز داریم تا ترتیب نقاط را بگونه‌ای قرار دهیم که نقاط نسبت به محور Z مرتب شده باشند و برای این کار از تابع زیر استفاده می‌کنیم:

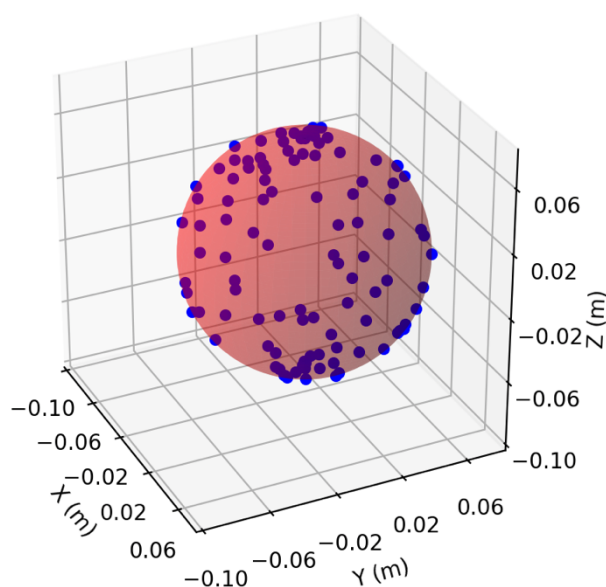
```
# ----- Sort points based on distance from z-axis -----

def sorted(x, y, z):
    sorted_indices = np.argsort(distances)
    x_sorted = x[sorted_indices]
    y_sorted = y[sorted_indices]
    z_sorted = z[sorted_indices]
    return x_sorted, y_sorted, z_sorted
```



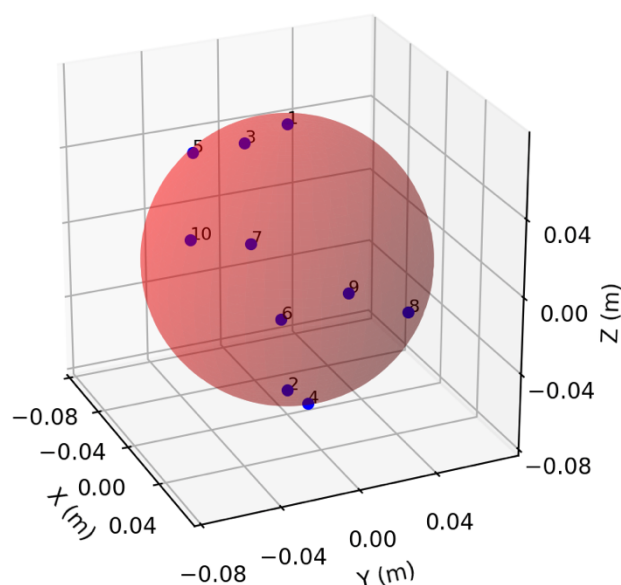
همانطور که مشاهده می‌شود در تصویر ۱-۲ تمام منابع جریان که روی سطح کره‌ای به شعاع ۷ سانتی‌متر قرار دارند را مصورسازی کردیم. همچنین برای اطمینان از عملکرد مرتب سازی منابع جریان نسبت به محور Z کد را با تعداد ده منبع جریان اجرا می‌کنیم و نمودار سه بعدی رسم شده خود را در تصویر ۱-۳ مشاهده می‌کنیم.

Random Not Reapeted Diapole



تصویر ۱-۲) مصور سازی تمامی منابع‌های جریان قرار گرفته روی پوست مغز

Random Not Reapeted Diapole



تصویر ۱-۳) مصور سازی پنج منبع جریان قرار گرفته روی پوست مغز

همچنین در فرمول مسئله مستقیم MEG نیاز به بردارهای یک‌ه سنسورها می‌باشیم یعنی در محل هر سنسور ما نیاز به بردار یک‌ه ای داریم که در جهت خارج کره قراردارند. برای بدست آوردن آنها در ابتدا فایل `sensor_coordinates.npz` که حاوی مختصات سنسورها هست را می‌خوانیم و سپس با استفاده از کد زیر بردار یک‌ه شعاعی سنسورها را بدست می‌آوریم و در بردار `e` ذخیره می‌کنیم:

```
# ----- Calculate Coordinates of Unit Vector -----
data = np.load("sensor_coordinates.npz")
x = data['x']
y = data['y']
z = data['z']

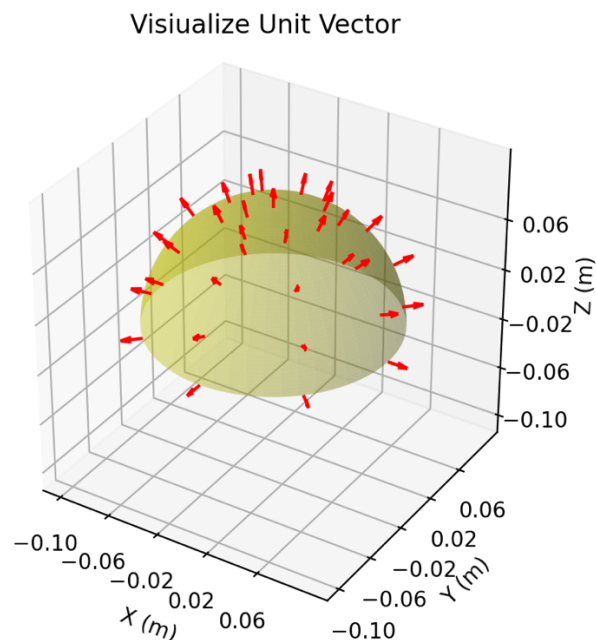
radius = 0.09 # radius of the hemisphere
```



```
# Initialize arrays for unit vectors
ex = np.zeros(33)
ey = np.zeros(33)
ez = np.zeros(33)

print(ex.shape)
# Calculate unit vectors
for i in range(33):
    magnitude = np.linalg.norm([x[i], y[i], z[i]])
    ex[i] = x[i] / magnitude
    ey[i] = y[i] / magnitude
    ez[i] = z[i] / magnitude
np.savez("Unit_Vect_coordinates.npz", ex=ex, ey=ey, ez=ez)
```

در تصویر ۴-۱ تمامی بردارهای یکه شعاعی سنسورها نمایش داده شده است.



تصویر ۴-۱) مصور سازی بردارهای شعاعی سنسورهای قرار گرفته روی پوست مغز



۱. ماتریس MEG lead-field ( $G$ ) را محاسبه کنید و ستون 75 آن را که 33 مؤلفه دارد به صورت یک منحنی در گزارش خود plot کنید. توضیح دهید که سطر  $i$  ام و ستون  $j$  ام ماتریس  $G$  هر یک بیانگر چیست؟

مطابق فرمول ارائه شده در مسئله‌ی مستقیم MEG ماتریس Leadfield را به صورت زیر ساخته و ستون ۷۵ آنرا رسم می‌کنیم که به صورت شکل ۱-۵ می‌باشد. در کد زیر الگوریتم بدست آوردن مقادیر این ماتریس پیاده سازی شده است:

```
# ----- Create MEG Laed_Field -----
G = np.zeros((m, 3 * n))

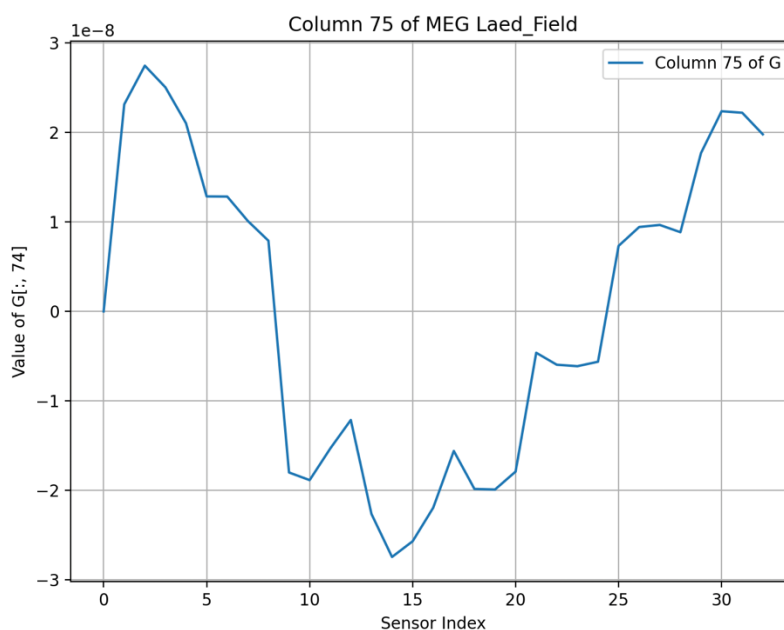
def Calc_G(er, r, rq):
    a_ij = (mu / (4 * np.pi)) * (np.cross(er, rq)) / (np.linalg.norm(r - rq))

    return a_ij

for i in range(m):
    k = 0
    for j in range(n):
        a_ij = Calc_G(er[i], r[i], rq[j])

        G[i, k] = a_ij[0]
        G[i, k+1] = a_ij[1]
        G[i, k+2] = a_ij[2]

        k = k + 3
```



تصویر ۵-۱) محور سازی ستون ۷۵ ماتریس Lead Field G

ماتریس  $G$  حاوی  $m$  (تعداد سنسورها) سطر و  $n$  ستون می باشد که  $n$  تعداد منابع جریان می باشد. سطر  $i$  ام این ماتریس حاوی ضرایبی است که مولفه‌ی شعاعی میدان مغناطیسی در محل سنسور  $i$  ام ناشی از همه منابع جریان را می سازد. همچنین ستون  $j$  ام این ماتریس حاوی ضرایبی است که در واقع اثر منبع جریان  $j$  ام در یک جهت خاص را روی تمام سنسورها مشخص می کند. با توجه به توضیحات داده شده نمودار بالا اثر منبع جریان ۷۵ ام در جهت  $Z$  را به ما می دهد.

$$G = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$





۲. فرض کنید تنها یک منبع جریان الکتریکی مغزی داشته باشیم که در نقطه  $(r_0, \theta_0, \varphi_0) = (7\text{cm}, 45^\circ, 45^\circ)$  واقع شده باشد و با بردار  $\vec{q}_0 = [q_x, q_y, q_z] = [0, 0, 1]$  مشخص شود. کمیت اندازه‌گیری شده در هر سنسور MEG (مؤلفه شعاعی چگالی شار مغناطیسی  $(B_r)$ ) را محاسبه کرده و به صورت یک تصویر (یا رویه) با محورهای  $\theta$  و  $\varphi$  رسم کنید.

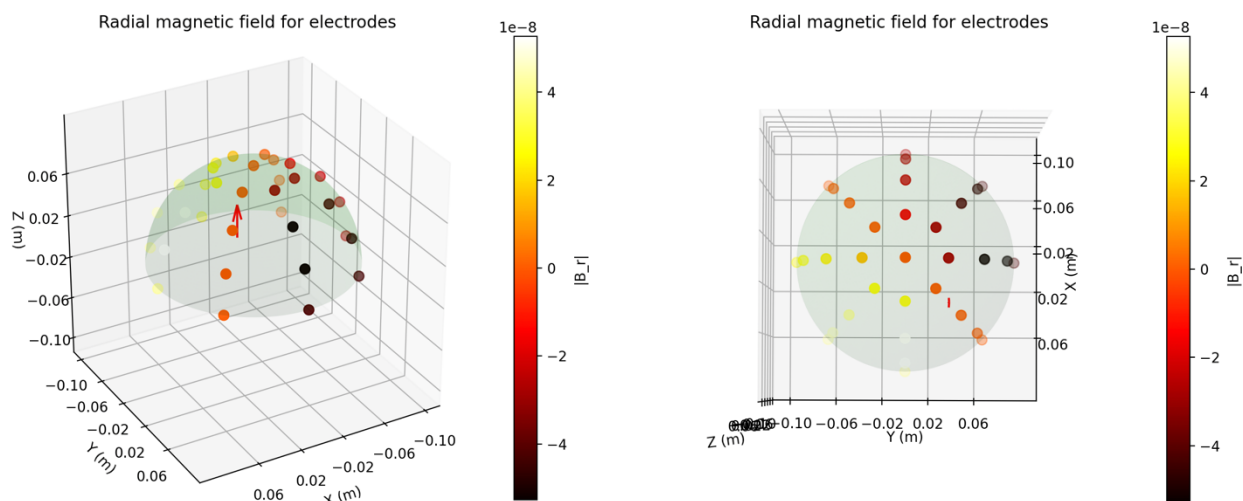
منبع جریان مطابق دستورکار به شکل زیر تعریف شده است:

```
theta = np.radians(45)
phi = np.radians(45)
radius = 0.07

x, y, z = Conv_coordinates(phi, theta, radius)

rq = np.array([x, y, z])
q = np.array([0, 0, 1])
```

با در نظر گرفتن یک تک منبع باید اندازه میدان مغناطیسی شعاعی برای هر الکتروود را به دست بیاوریم و نمودار آن را رسم کنیم. تصویر ۶-۱ دو نمای مختلف از محل الکتروودها و منبع مورد نظر را به روی سر نشان می‌دهد. الکتروودها با دایره‌های رنگی مشخص شده‌اند که رنگ‌ها میزان میدان مغناطیسی ثبت شده در هر الکتروود را نشان می‌دهد و منبع هم با یک بردار قرمز رنگ مشخص شده است.



تصویر ۶-۱ میدان‌های مغناطیسی شعاعی ثبت شده در الکتروودها که با رنگ مشخص شده‌اند. بردار قرمز رنگ منبع است



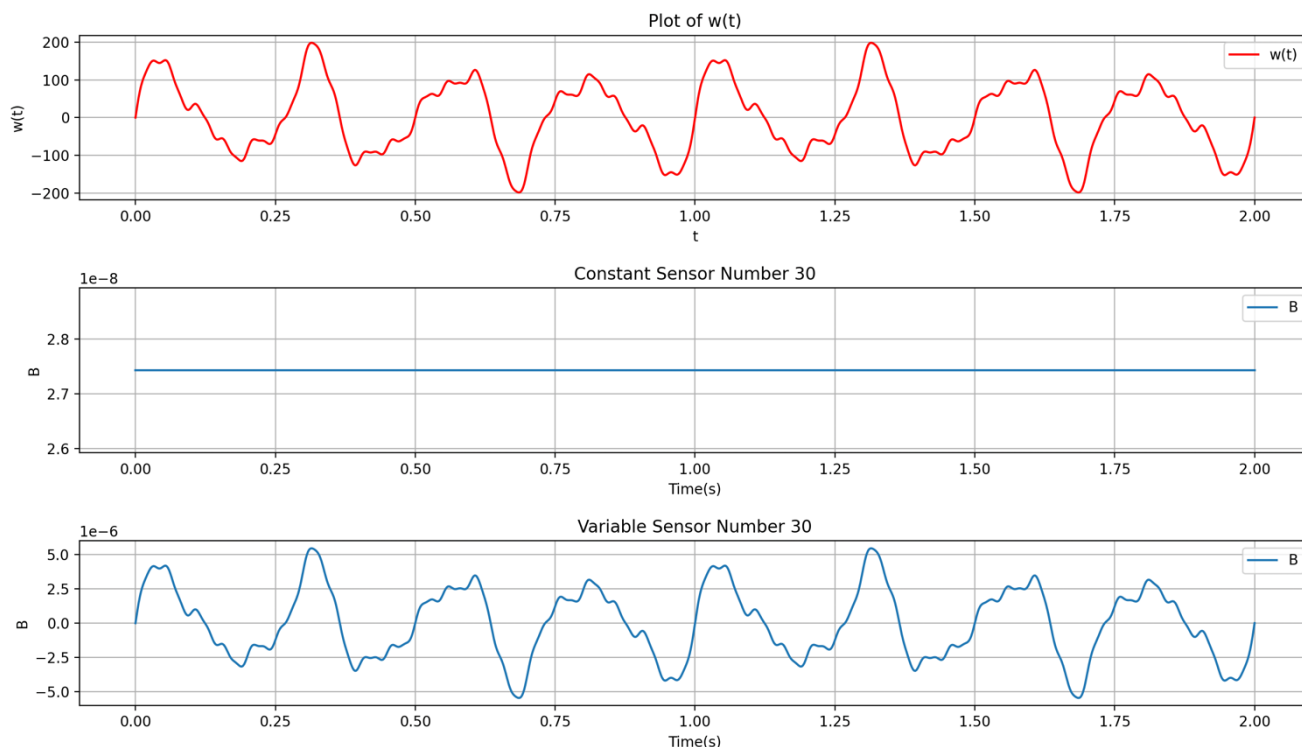
۳. برای در نظر گرفتن عنصر زمان در شبیه سازی قسمت قبل، فرض کنید بردار منبع جریان الکتریکی در همان جهت باشد ولی اندازه آن با زمان به صورت یک موج با معادله زیر به صورت متناوب تغییر کند. اگر فرکانس نمونه برداری از سیگنال MEG را 1KHz در نظر بگیریم، سیگنال MEG ثبت شده در سنسور شماره 30 را محاسبه کرده و بر حسب زمان plot کنید.

$$w(t) = 120 \sin(8\pi t) + 45 \sin(14\pi t) + 30 \sin(20\pi t) + 15 \sin(40\pi t) + 5 \sin(80\pi t)$$

در این بخش از ما خواسته شده تا یک سیگنال سینوسی بکه حاوی فرکانسهای متفاوت است را تولید بکنیم که نرخ نمونه برداری آن ۱۰۰۰ است. سپس این سیگنال را به عنوان تحریک منبع در سؤال قبل در نظر بگیریم و میزان میدان مغناطیسی شعاعی ثبت شده در محل سنسور ۳۰ ام را رسم کنیم.

```
def w(t):  
    return 120 * np.sin(8 * np.pi * t) + 45 * np.sin(14 * np.pi * t) +  
    30 * np.sin(20 * np.pi * t) + 15 * np.sin(40 * np.pi * t) +  
    5 * np.sin(80 * np.pi * t)  
# Set Frequency to 1000  
t = np.linspace(0, 2, 1000)  
  
# Calculate w(t) for each t  
w_values = w(t)
```

کد این سؤال در بالا نشان داده شده است و تصویر ۱-۷ هم خروجی بدست آمده برای این تسک هست که در این میزان میدان مغناطیسی شعاعی در محل سنسور ۳۰ ام و سیگنال سینوسی تولید شده مصور سازی شده است. همانطور که در این تصویر مشخص است ما میدان مغناطیسی شعاعی ضبط شده در سنسور سی ام را قبل و پس از اعمال سیگنال سینوسی به متغیر در زمان به منبع جریان را مصور کردیم و تاثیر این سیگنال به خوبی در این تصویر مشخص است.



تصویر (۷-۱) میدان‌های مغناطیسی شعاعی ثبت شده در محل سنسور ۳۰ ام

## ب) مسأله مستقیم EEG

۴. فرمول محاسبه پتانسیل سطح سر در مدل کروی سه لایه را که در کلاس گفته شد در نظر بگیرید. برای یک منبع جریان الکتریکی  $\vec{m} = [m_x, m_y, m_z]$  که در نقطه  $[0,0,z]$  قرار دارد، رابطه بین پتانسیل الکتریکی در محل یک سنسور EEG را بر حسب  $\vec{m}$  به فرم ماتریسی- برداری بنویسید.

برای به‌دست‌آوردن فرم ماتریسی رابطه پتانسیل الکتریکی در محل یک سنسور از روشی که در جزوه برای MEG استفاده شده است کمک می‌گیریم. باید از روی فرمول‌هایی که داریم  $a_{ij}$  ها را محاسبه کنیم که المان‌های ماتریس Lead Field هستند. بنابراین داریم:

$$V_i(\vec{s}(\theta, \varphi)) = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j} b^{j-1} \left[ \frac{\xi(2j+1)}{d_j(j+1)} \right] [jm_z P_n(\cos(\theta)) + (m_x \cos(\varphi) + m_y \sin(\varphi)) P_n^1(\cos(\theta))] \quad (1)$$



$$V_i(\vec{S}(\theta, \varphi)) = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j} b^{j-1} \left[ \frac{\xi(2j+1)}{d_j(j+1)} \right] \begin{bmatrix} P_j^1(\cos(\theta))\cos(\varphi) & P_j^1(\cos(\theta))\sin(\varphi) & jP_j(\cos(\theta)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

معادله (۱) مقدار پتانسیل الکتریکی در محل سنسور  $\vec{i}$  ام را نشان می‌دهد که توسط تمامی منابع ایجاد می‌شوند. معادله (۲) همان معادله است با این تفاوت که منابع به شکل برداری در آن اعمال شده‌اند. حال کاری که باید بکنیم این است که میزان پتانسیل ایجاد شده در سنسور  $\vec{i}$  ام را که توسط منبع  $\vec{j}$  ام ایجاد می‌شود به دست آوریم. زیرا نوشتن این معادله به فرم برداری به سادگی می‌توانیم که مولفه‌های ماتریس  $\text{lead field}$  را به دست آوریم؛ بنابراین داریم:

$$V_i(\vec{S}(\theta, \varphi)) = \sum_{j=1}^{\infty} V_{ij}(\vec{S}(\theta, \varphi)) \quad (3)$$

$$V_{ij}(\vec{S}(\theta, \varphi)) = \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{2j+1}{j} b^{j-1} \left[ \frac{\xi(2j+1)}{d_{nj}(j+1)} \right] \begin{bmatrix} P_j^1(\cos(\theta))\cos(\varphi) & P_j^1(\cos(\theta))\sin(\varphi) & jP_j(\cos(\theta)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (4)$$

معادله (۴) پتانسیل الکتریکی ناشی از منبع  $\vec{j}$  ام را در محل الکتروود  $\vec{i}$  ام نشان می‌دهد.

$$V_{ij}(\vec{S}(\theta, \varphi)) = \vec{a}_{ij} \times \vec{m}_j$$

$$a_{ij} = \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{2j+1}{j} b^{j-1} \left[ \frac{\xi(2j+1)}{d_{nj}(j+1)} \right] \begin{bmatrix} P_j^1(\cos(\theta))\cos(\varphi) & P_j^1(\cos(\theta))\sin(\varphi) & jP_j(\cos(\theta)) \end{bmatrix} = [a_{ij_x} \quad a_{ij_y} \quad a_{ij_z}]$$

$$\rightarrow V_i(\vec{S}(\theta, \varphi)) = \sum_{j=1}^{\infty} \vec{a}_{ij} \times \vec{m}_j = \begin{bmatrix} a_{i1_x} & a_{i1_y} & a_{i1_z} & \dots & a_{in_x} & a_{in_y} & a_{in_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{1_x} \\ m_{1_y} \\ m_{1_z} \\ \vdots \\ m_{n_x} \\ m_{n_y} \\ m_{n_z} \end{bmatrix}$$

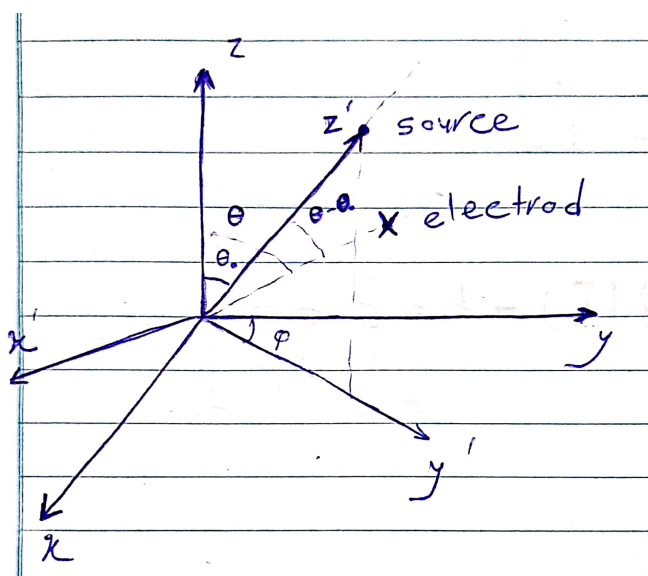
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11_x} & a_{11_y} & a_{11_z} & \dots & a_{1n_x} & a_{1n_y} & a_{1n_z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1_x} & a_{m1_y} & a_{m1_z} & \dots & a_{mn_x} & a_{mn_y} & a_{mn_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{1_x} \\ m_{1_y} \\ m_{1_z} \\ \vdots \\ m_{n_x} \\ m_{n_y} \\ m_{n_z} \end{bmatrix}$$

در این معادلات  $n$  تعداد سنسورها و  $m$  تعداد منابع است.



۵. برای بند قبل، اگر مکان منبع جریان الکتریکی در نقطه دلخواه  $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  باشد رابطه را اصلاح کنید. استدلال کنید یا ثابت کنید که کافیسیت در رابطه مذکور  $\varphi$  را با  $(\varphi - \varphi_0)$  و  $\theta$  را با  $(\theta - \theta_0)$  جایگزین کنیم.

رابطه‌ای که در سؤال قبل برای محاسبه پتانسیل الکتریکی ناشی از منابع در یک سنسور حساب کردیم برای زمانی است که منابع روی محور  $Z$  قرار داشته باشند. حال فرض کنید بخواهیم پتانسیل ناشی از منبعی را که روی محور  $Z$  قرار ندارد؛ بلکه در نقطه‌ای از فضا با مختصات  $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  قرار داشته باشد را روی الکترودی در نقطه  $(r, \theta, \varphi)$  بیابیم. تنها کاری که لازم است انجام دهیم این است که محور مختصات را به نحوی بچرخانیم که منبع روی محور  $Z$  بیافتد و بتوانیم از فرمول‌هایی که داریم استفاده کنیم. این شرایط در تصویر ۱-۲ نشان داده شده است و مشخص است که وقتی محور مختصات می‌چرخد تا منابع روی محور  $Z$  قرار بگیرند وضعیت محور ها نسبت به الکتروود چه تغییری میکند. پس میتوانیم نتیجه بگیریم در صورتی که در معادلات بدست آمده در سوال قبل به جای  $\theta$  مقدار  $\theta - \theta_0$  را جایگزاری کنیم و همچنین به جای  $\varphi$  مقدار  $\varphi - \varphi_0$  را بگذاریم میتوانیم مسعله را حل کنیم.



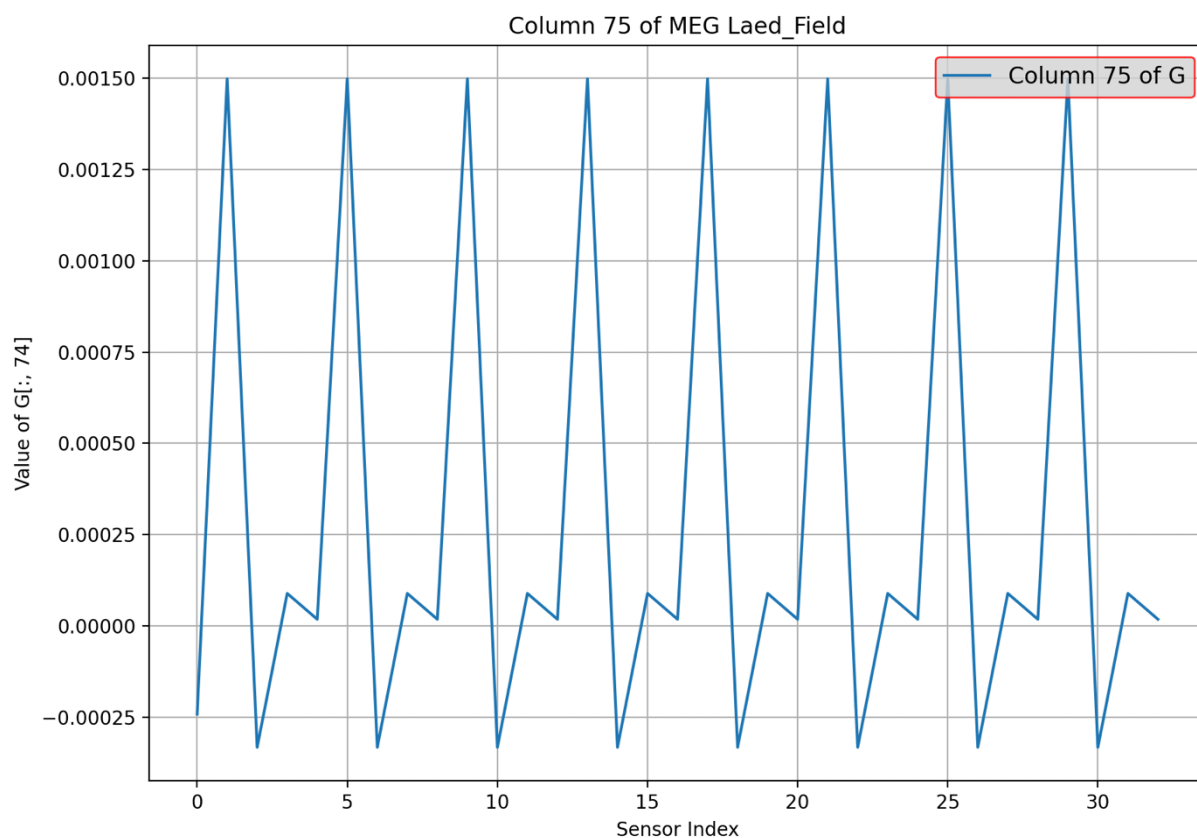
تصویر ۱-۲) چرخش محورهای مختصات برای اینکه منبع روی محور  $Z$  قرار بگیرد

در ادامه به حل سؤالاتی درباره EEG می‌پردازیم که مشابه آنها را برای MEG پاسخ داده بودیم؛ بنابراین نتایج را مختصرتر بیان می‌کنیم.



۶. قسمت ۱ را تکرار کنید و ماتریس EEG lead-field ( $L$ ) را محاسبه کنید.

ماتریس Lead Field را با فرمولی‌هایی که در سؤال ۴ و ۵ به دست آوردیم محاسبه می‌کنیم و ستون ۷۵ آن را رسم می‌کنیم که این نمودار در تصویر ۲-۲ نشان داده شده است.



تصویر ۲-۲) ستون ۷۵ ماتریس Lead Field  $L$

مطابق فرمول ارائه شده در مسئله‌ی مستقیم EEG ماتریس Leadfield را به صورت زیر ساخته و ستون ۷۵ آنرا رسم می‌کنیم که به صورت شکل ۲-۲ می‌باشد. در کد زیر الگوریتم بدست آوردن مقادیر این ماتریس پیاده سازی شده است:



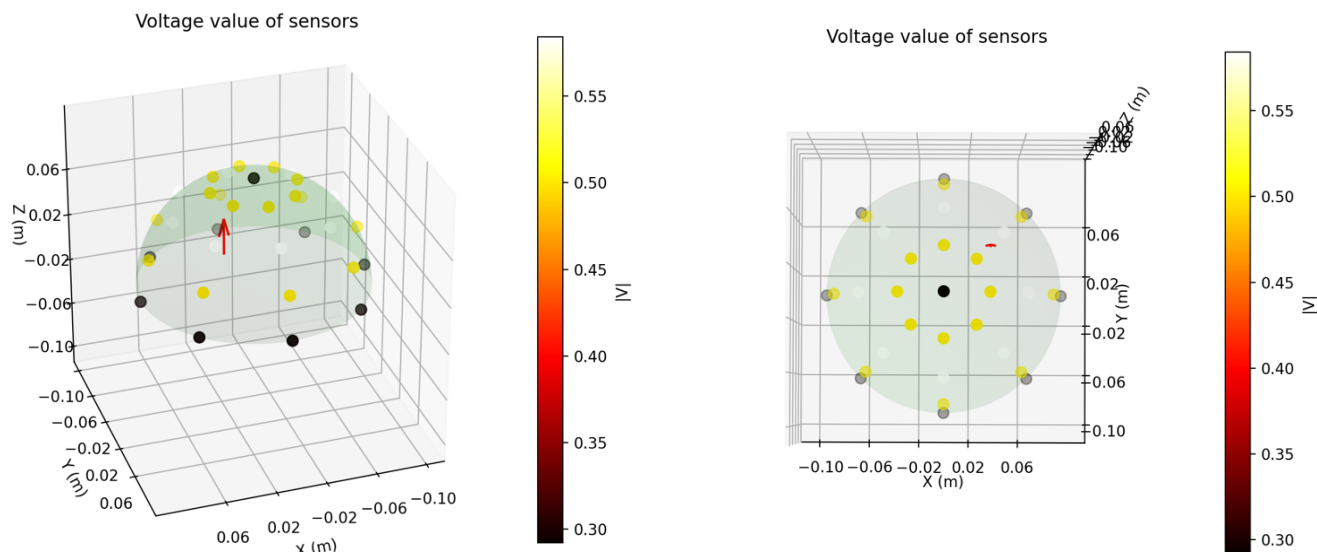
```
# ----- Create EEG Laed_Field -----  
  
L = np.zeros((m, 3 * n))  
xi = sg2/sigma  
b = R0/R3  
  
# m = Number of EEG Sensor      n = Number of Dipole  
  
for i in range(m):  
    k = 0  
    for j in range(n):  
  
        dn = d_n(j+1, xi, R1, R2, R3)  
        a_ij = Calc_L(theta[i], phi[i], theta_0[j], phi_0[j], j+1,  
                      dn, b, xi, sigma)  
  
        L[i, k] = a_ij[0]  
        L[i, k+1] = a_ij[1]  
        L[i, k+2] = a_ij[2]  
        k = k + 3
```

ماتریس  $L$  نیز حاوی  $m$  (تعداد سنسورها) سطر و  $3n$  ستون می‌باشد که  $n$  تعداد منابع جریان می‌باشد. سطر  $i$  ام این ماتریس حاوی ضرایبی است که ولتاژ در محل سنسور  $i$  ام ناشی از همه منابع جریان را می‌سازد. همچنین ستون  $j$  ام این ماتریس حاوی ضرایبی است که در واقع اثر منبع جریان  $j$  ام در یک جهت خاص را روی تمام سنسورها مشخص می‌کند. با توجه به توضیحات داده شده نمودار بالا اثر منبع جریان ۷۵ ام را به ما می‌دهد.



## ۷. قسمت ۲ را تکرار کنید.

یک تک منبع را همان طور که در سؤال ۲ در نظر گرفتیم در نظر می گیریم و مطابق همان سال ۲ نمودارها را رسم می کنیم. تصویر ۳-۲ همان دو نمای مختلف از الکترودها را به همراه منبع نشان می دهد.

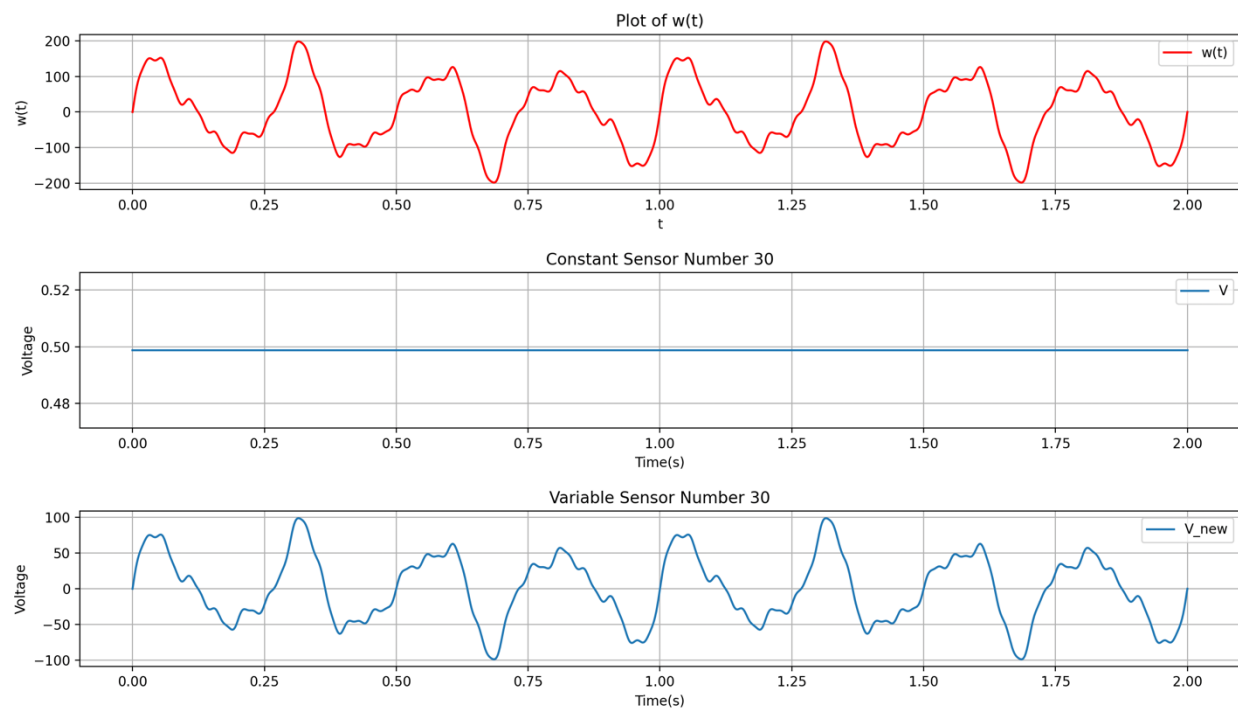


تصویر ۳-۲) پتانسیل های الکتریکی ثبت شده در الکترودها که با رنگ مشخص شده اند. بردار قرمز رنگ منبع است

## ۸. قسمت ۳ را تکرار کنید.

تصویر ۴-۲ هم خروجی بدست آمده برای این تسک هست که در این تصویر میزان میدان مغناطیسی شعاعی در محل سنسور ۳۰ ام و سیگنال سینوسی تولید شده مصور سازی شده است. همانطور که در این تصویر مشخص است ما میدان مغناطیسی شعاعی ضبط شده در سنسور سی ام را قبل و پس از اعمال سیگنال سینوسی به متغیر در زمان به منبع جریان را مصور کردیم و تاثیر این سیگنال به خوبی در این تصویر مشخص است.





تصویر ۲-۳) پتانسیل الکتریکی که در محل سنسور ۳۰ ام به دست می‌آید