GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS: TEMA 3 Y 4

RA2: Resuelve ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales para solucionar problemas matemáticos aplicados a la economía, ciencias sociales, administración e ingenieriles utilizando métodos directos e iterativos.

CGT-1: Competencia para identificar, formular y resolver problemas de informática.
CGT-4: Competencia para utilizar técnicas y herramientas de aplicación en la informática
CGS-2: Competencia para comunicarse con efectividad.
CGS-5: Competencia para aprender en forma continua y autónoma.
CGS-1: Competencia para desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo

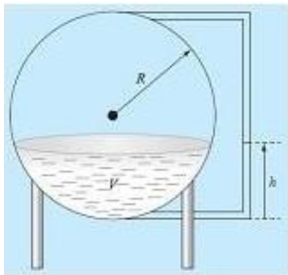
TEMA 3: Raíces de ecuaciones

Competencias específicas disciplinares

- Desarrolla modelos matemáticos para problemas de la realidad, como la modelización de un silo o el análisis de utilidades de una empresa.
- Analiza las diferencias entre los métodos numéricos empleados (Método de tanteos, Método de Newton-Raphson, Interpolación Lineal, etc.) para resolver problemas específicos.
- Analiza las condiciones de convergencia de los métodos numéricos en diferentes intervalos.
- Justifica la elección de un método numérico en función de los resultados obtenidos y las características del problema analizado.
- Compara los resultados obtenidos con diferentes métodos numéricos, elaborando conclusiones sobre su eficiencia.

1. Supóngase que se ha diseñado un tanque esférico en un pequeño pueblo. El volumen del líquido que puede contener se calcula como:

$$V = \pi h^2 \left(\frac{3R-h}{3}\right)$$



donde V es el volumen en m^3, h es la profundidad del agua en el tanque en metros y R el radio del tanque también en metros. Considerando R=3 m y V=30 m^3

a. Evalúe cuántas y qué tipo de raíces puede tener esta ecuación.
b. Separe todas las raíces aplicando el **Método de tanteos**.
c. Aproxime a qué profundidad debe llenarse el tanque de modo que contenga 30 m^3 utilizando el **Método de intervalo medio** con E<0,001.
d. Ídem anterior, utilizando el **Método de interpolación lineal.**
e. Obtenga conclusiones de la aplicación de ambos métodos de aproximación.

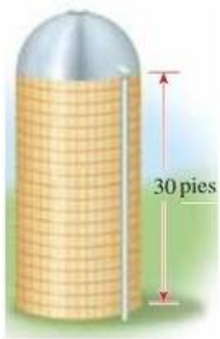
2. Un analista de mercado, que trabaja para un fabricante de dispositivos informáticos, encuentra que, si la compañía produce y vende ***x*** impresoras al mes, su utilidad total (en pesos) es:

$$P(x) = 8x + 0{,}3x^2 - 0{,}0013x^3 - 372$$

¿Cuántas impresoras debe producir la compañía para alcanzar el punto de equilibrio (no pierde ni gana)? Existen dos puntos.

a. Analice las condiciones de convergencia del Método de Newton Raphson en los intervalos iniciales [24 ; 26] y [250 ; 252]
b. Aproxime los dos puntos con el **Método de Newton Raphson** con $E<10^{-3}$

3. Un silo para granos está formado por una sección principal cilíndrica y un techo semiesférico. Si el volumen total del silo incluyendo la parte dentro de la sección del techo es de 15000 pies^3 y la parte cilíndrica es de 30 pies de altura, ¿cuál es el radio del silo?



a. Modelice la situación problemática.
b. Aproximar el radio del silo, aplicando el **Método de Interpolación Lineal** considerando el intervalo inicial [10; 15].
c. Aproximar el radio del silo, aplicando el **Método de Newton Raphson** considerando el intervalo inicial [10; 15].
d. Comparando la aplicación de ambos métodos, elaborar conclusiones respecto a la velocidad de convergencia.

4. Para vender x unidades de su producto semanalmente, una compañía debe gastar **A** pesos semanales en publicidad, donde

$$A = 200 \ln\left(\frac{400}{500 - x}\right)$$

Los objetos se venden a $5 cada uno. La utilidad neta es entonces R(x) =5x-A. Calcular el número de unidades **x** que debe de vender para tener una utilidad neta de R(x)= $1000 pesos.

En un entorno de x=200:

a. Aplique el Método de iteración con E<10-4
b. Aplique el Método de iteración, con la Aceleración de Aitken con $E < 10^{-4}$.

5. Generalmente hay muchas maneras de pasar de f(x)=0 a x=g(x) e incluso se pueden obtener distintas formas de g(x) al "despejar" x de un mismo término de f(x).
Por ejemplo, en la ecuación polinomial: $x^3 - 2x - 2 = 0$ al "despejar" x del primer término se puede llegar a:

a) $x = \sqrt[3]{2x + 2}$ b) $x = \sqrt{2 + 2/x}$ c) $x = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}$

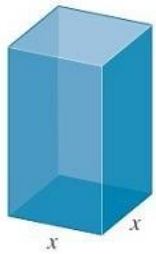
¿Cuál g(x) sería más ventajosa para encontrar la raíz que está en el intervalo (1;2)?

Calcule con un mismo valor inicial dicha raíz empleando las tres g(x) y compare resultados.

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1. La velocidad de un paracaidista está dada por: $v = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\left(\frac{c}{m}\right)t}\right)$
donde g = 9.8 m/s^2. Para un paracaidista con coeficiente de arrastre de c = 15 kg/s, calcule la masa **m** de modo que la velocidad sea v = 35 m/s en t = 9s. Utilice el método de interpolación lineal para determinar *m* a un error de E = 0.1%.

2. Una caja de cartón tiene base cuadrada, con cada arista de la caja con longitud de x pulgadas, como se ve en la figura. La longitud total de las 12 aristas de la caja es de 144 pulgadas. El volumen de la caja está dado por la función $V(x) = 2x^2(18 - x)$. Encuentre el valor de la longitud x si se tiene un volumen total de 600 $pulgadas^3$.



TEMA 4: Solución de Sistemas de Ecuaciones

Competencias específicas disciplinares

- Modela problemas reales planteando correctamente los sistemas de ecuaciones y seleccionando los métodos de resolución adecuados.
- Aplica los métodos numéricos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, utilizando técnicas como la eliminación de Gauss y Gauss-Seidel, y evalúa la convergencia de estas soluciones.
- Identifica los conceptos fundamentales de autovalores y autovectores, así como la relación de estos con sistemas de ecuaciones homogéneos.
- Reconoce los métodos numéricos específicos, como el método de Fadeev-Leverrier y el método de las potencias, utilizados para resolver sistemas homogéneos.
- Justifica la elección de un método sobre otro en función de la estructura del sistema y de los resultados obtenidos.

Sistemas no homogéneos

1. Un ingeniero agrónomo desea preparar una fórmula alimenticia para engordar ganado. Dispone de maíz, desperdicios, alfalfa y cebada, cada uno con ciertas unidades de ingredientes nutritivos, de acuerdo con la tabla siguiente.

UNIDADES DE INGREDIENTES NUTRITIVOS POR KG DE CADA ALIMENTO DISPONIBLE					
Ingrediente nutritivo	ALIMENTO				
	Maíz	Desperdicio	Alfalfa	Cebada	Requerimiento diario Unidades/kg
Carbohidrato	80	15	35	60	230
Proteína	28	72	57	25	180
Vitamina	20	20	12	20	80
Celulosa	50	10	20	60	160
Costo $	18	5	7	20	-

a) Plantear el sistema de ecuaciones que modela el problema para:
- Determinar los kilogramos necesarios de cada material para satisfacer el requerimiento diario (presentado en la última columna).
- Determinar el costo de la mezcla.

Nota: La fórmula alimenticia debe contener los cuatro alimentos.

b) Resolver aplicando el **Método de Eliminación de Gauss**. (Utilice aritmética de tres dígitos.)

2. Resolver aplicando el **Método de Gauss-Seidel**, previamente analice la convergencia del método. Considere la solución inicial (1;1;1).

$$\begin{cases} 0{,}1x_1 + 7{,}0x_2 - 0{,}3x_3 = -19{,}30 \\ 3{,}0x_1 - 0{,}1x_2 - 0{,}2x_3 = 7{,}85 \\ 0{,}3x_1 - 0{,}2x_2 - 10{,}3x_3 = -19.30 \end{cases}$$

3. Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 16 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

a) Encuentre la **factorización LU** de la matriz de coeficientes.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones utilizando la descomposición anterior.

4. Una compañía electrónica produce transistores, resistores y chips de computadoras. Cada transistor requiere 4,3 unidades de cobre, una de zinc y dos de vidrio. Cada resistor requiere tres, tres y una unidad de dichos materiales, respectivamente, y cada chip de computadora requiere dos, una y tres unidades de los materiales, respectivamente. En forma de tabla, esta información queda así:

Componente	**Cobre**	**Zinc**	**Vidrio**
Transistores	4,3	1	2
Resistores	3	3	1
Chips de computadora	2	1	3

Los suministros de estos materiales varían de una semana a la otra, de modo que la compañía necesita determinar una corrida de producción diferente cada semana. Por ejemplo, cierta semana las cantidades disponibles de los materiales son 960 unidades de cobre, 510 unidades de zinc y 610 unidades de vidrio.

a) Plantee el sistema de ecuaciones lineales que modela la situación.
b) Aplique los diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y analice los resultados obtenidos.

Sistemas homogéneos

1. Resolver el siguiente sistema utilizando el **método de Fadeev-Leverrier**. Hallar los autovalores y los eigenvectores asociados.

$$\begin{cases} (3-\lambda)x + 2y - z = 0 \\ x + (-2-\lambda)y + 3z = 0 \\ 2x + (4-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

2. En el estudio de las vibraciones de un sistema consistente en 3 masas insertadas en una varilla, la ecuación del movimiento tiene que ver con la formulación de valores propios:

$$\begin{pmatrix} 2k - mw^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - 2mw^2 & -k \\ 0 & -k & 2k - 3mw^2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{donde} \quad \lambda = \frac{mw^2}{k}$$

x= vector desplazamiento
m=masa=cte
k=cte. (Considere k=0.5)

a) Muestre el sistema a resolver: Ax= λ x.
b) Obtener todos los valores propios y el vector propio correspondiente al valor propio intermedio.
c) Aplique el **método de las potencias** para obtener el máximo autovalor y su vector propio correspondiente. Realice 04 iteraciones partiendo de $(1,1,-0.5)^T$ y muestre el error de λ y x, comparado con los exactos obtenidos en b).