



## **ECUACIONES LINEALES SIMULTANEAS**

Resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales por métodos aproximados.

Análisis Numérico. Burden & Faires. 7ma. Edición. Editorial Edamsa. 2009.

Métodos Numéricos – Pace Guido. - Editorial EUDENE – 1997

Métodos numéricos para ingenieros. Chapra S. y Canale R. 5ta. Edición. Editorial Mc Graw Hill. 2007



## **ECUACIONES LINEALES SIMULTANEAS**

Los sistemas de ecuaciones lineales se utilizan en muchos problemas de ingeniería y de las ciencias.  
En aplicaciones matemáticas a las ciencias sociales y al estudio cuantitativo de problemas de administración y economía.

[illegible]

➤ Si todos los  $C_i$  valen 0 el sistema es **Homogéneo**, y solo existen soluciones no triviales si todas las ecuaciones no son LI.



➤ Sean  $r$  y  $r'$  las características (rango) de la matriz del sistema  $A$  y la matriz orlada  $A'$ , respectivamente.



## ECUACIONES LINEALES SIMULTANEAS (4)

*Llamando:*

$r$  : característica de la matriz del sistema,

$r'$  : característica de la matriz orlada,

$m$  : número de variables del sistema, y

$n$  : número de ecuaciones del sistema

Todo lo referente al comportamiento algebraico de los sistemas de ecuaciones se encuentra sintetizado por:



## ECUACIONES LINEALES SIMULTANEAS (5)

### TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS

“La condición necesaria y suficiente para que un sistema de  $n$  ecuaciones y  $m$  incógnitas sea COMPATIBLE, es que la matriz  $A$  y la orlada  $A'$  tengan la misma característica”

$r \neq r' \rightarrow$  Incompatible  $\rightarrow$  El sistema no tiene solución

$r = r' \rightarrow$  Compatible  $\left\{ \begin{array}{l} r = m \rightarrow \text{Determinado} \rightarrow 1 \text{ solución} \\ r < m \rightarrow \text{Indeterminado} \rightarrow \infty \text{ soluciones} \end{array} \right.$   
 $m - r$ : Grado de Indeterminación



## ECUACIONES LINEALES SIMULTANEAS (6)

- Si  $r > m$  ( caso no contemplado en el teorema de Rouché-Frobenius)  
-> sistema es **SOBREDETERMINADO**.



## ECUACIONES LINEALES SIMULTANEAS

Los principales métodos algebraicos para resolver ecuaciones lineales simultáneas son:

- A) El método de eliminación de las incógnitas mediante combinaciones lineales (Gauss)
- B) Y la utilización de los determinantes (regla de Cramer)
- La regla de CRAMER, calculando los determinantes por medio de menores, requiere  $(n-1) \cdot (n+1)!$  productos
- Este último resulta poco práctico para resolver simultáneamente grandes números de ecuaciones.



## ECUACIONES LINEALES SIMULTANEAS (7)

Supondremos a continuación  $A$  es matriz de  $n \times m$ , formado por ec. Linealmente independientes.

Para resolver numéricamente, este tipo de sistemas se utilizan:

- MÉTODOS DIRECTOS:
- Son provistos por la matemática pura, y llevan a una solución exacta del problema, luego de un número finito de pasos. Este número depende exclusivamente de la cantidad de ecuaciones que componen el sistema.
- El error de los resultados se debe, si no hubiese errores inherentes en los parámetros, únicamente a los redondeos realizados durante los cálculos.



## ECUACIONES LINEALES SIMULTANEAS (8)

- MÉTODOS ITERATIVOS.

- Los métodos iterativos, son estrictamente numéricos y dan una solución aproximada del sistema de ecuaciones lineales, obtenido como límite de una sucesión de vectores construida mediante un proceso de aproximaciones sucesivas.



Dado un conjunto de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas; linealmente Independientes.

La técnica se basa en dos fases: la eliminación de las incógnitas y su solución mediante Substitución hacia atrás.

[illegible]


$$(6.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = C'_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2,n-1}x_{n-1} + a'_{2n}x_n = C'_2 \\ \vdots \\ a^{(n-2)}_{n-1;n-1}x_{n-1} + a^{(n-2)}_{n-1;n}x_n = C'^{(n-2)}_{n-1} \\ a^{(n-1)}_{n;n}x_n = C'^{(n-1)}_n \end{array} \right.$$

## METODO DE ELIMINACION DE GAUSS (2)

El paso inicial será eliminar la primera incógnita,  $x_1$  desde la segunda hasta la  $n$ -ésima ecuación. Para ello, se multiplica la ecuación inicial por  $a_{21}/a_{11}$  para obtener:

$$a_{21}x_1 + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}x_2 + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13}x_3 + \dots + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}x_n = \frac{a_{21}}{a_{11}}c_1$$

➤ El proceso de multiplicación del primer renglón por  $a_{21}/a_{11}$  es equivalente a dividirla entre  $a_{11}$  y multiplicarla por  $a_{21}$ .



## METODO DE ELIMINACION DE GAUSS (3)

Ahora, esta ecuación se resta de la segunda fila de la matriz

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = C_2$$

Para dar:

$$\left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13}\right)x_3 + \dots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}\right)x_n = c_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}C_1$$

o

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = C'_2$$

Donde el superíndice prima indica que los elementos han cambiado sus valores originales.



## METODO DE ELIMINACION DE GAUSS (4)

El procedimiento continua con las ecuaciones restantes, por ejemplo la primer ecuación se puede multiplicar por  $a_{31}/a_{11}$  y el resultado se resta de la tercera ecuación.

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = C_3$$

$$\left(a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \left(a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13}\right)x_3 + \dots + \left(a_{3n} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{1n}\right)x_n = c_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}C_1$$

o

$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \dots + a'_{3n}x_n = C'_3$$



[illegible]

- La ecuación utilizada para eliminar las incógnitas se denomina ECUACIÓN PIVOTE.
- El coeficiente de la incógnita que se va a eliminar de las ecuaciones que la siguen se denomina COEFICIENTE PIVOTE O ELEMENTO PIVOTE.
- Se repite el procedimiento para eliminar la segunda incógnita.
- Se realiza la eliminación en forma similar en las ecuaciones restantes para obtener:



**2.-** Aplicando un procedimiento similar a todas las ecuaciones con coeficientes de la forma  $\mathbf{a}'_{ij}$ , se elimina  $\mathbf{x}_2$  desde la tercera en adelante. Este procedimiento utilizando diferentes ecuaciones pivotes, se continúa hasta que el conjunto original de ecuaciones haya sido reducido a uno de forma triangular.



➤ El valor obtenido se sustituye en la penúltima ecuación para obtener el valor de  $x_{n-l}$ ; y así sucesivamente.

10



## METODO DE ELIMINACION DE GAUSS (8)

- Este procedimiento es el denominado de **SUSTITUCIÓN INVERSA**.
- El nro de ec. que se pueden resolver satisfactoriamente es de 20 a 25 ecuaciones, por efecto de la propagación de errores.



## Costo computacional

- El número total de operaciones aritméticas en el Algoritmo se puede calcular mediante las siguientes formulas:
- Multiplicaciones/divisiones

$$\frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{6} + \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}$$

•Adiciones/sustracciones

$$\frac{n^3 - n}{3} + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}$$



## Costo computacional

- El tiempo necesario para determinar los cálculos, así como el subsecuente error de redondeo depende de la cdad. de operaciones de aritmética de pto. flotante que deben realizarse.
- El tiempo que se tarde en realizar divisiones y/o multiplicaciones en una computadora es mas o menos igual.
- Resulta mucho mas largo del que toman las sumas y/o restas,->
- Las diferencias reales del tiempo de ejecución depende del sistema de computo utilizado.



## Costo computacional

- Para valores grandes de  $n$ , el nro. total de multiplicaciones y divisiones es de aproximadamente  $n^3/3$
- De modo similar es el nro. total de adiciones y sustracciones.
- La cantidad de cálculos y el tiempo requerido se incrementa con  $n$  en proporción a  $n^3$ :

n	Multipl./Divisiones	Adiciones/sustracciones
3	17	11
10	430	375
50	44150	42875
100	343 300	338 250



## Método de Eliminación de Gauss

Ejemplo: 
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 13 & (a) \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 20 & (b) \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 & (c) \end{cases}$$

Resolver utilizando las formulas

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11} & a'_{12} &= a_{12} & a'_{13} &= a_{13} & a'_{14} &= a_{14} \\ a'_{21} &= 0 & a'_{22} &= a_{22} - \left( \frac{a_{21} * a_{12}}{a_{11}} \right) & a'_{23} &= a_{23} - \left( \frac{a_{21} * a_{13}}{a_{11}} \right) & a'_{24} &= a_{24} - \left( \frac{a_{21} * a_{14}}{a_{11}} \right) \\ a'_{31} &= 0 & a'_{32} &= a_{32} - \left( \frac{a_{31} * a_{12}}{a_{11}} \right) & a'_{33} &= a_{33} - \left( \frac{a_{31} * a_{13}}{a_{11}} \right) & a'_{34} &= a_{34} - \left( \frac{a_{31} * a_{14}}{a_{11}} \right) \end{aligned}$$



## Método de Eliminación de Gauss

Solución:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 & 13 \\ 2 & 3 & 4 & 20 \\ 3 & -1 & 3 & 10 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 & 13 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -4,5 & -9,5 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 & 13 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 4,1 & -12,3 \end{bmatrix}$$

Entonces:  $-4,1 * x_3 = -12,3 \Rightarrow x_3 = \frac{-12,3}{-4,1} \Rightarrow x_3 = 3$

$$5 * x_2 - 1 * 3 = 7 \Rightarrow x_2 = \frac{7+3}{5} \Rightarrow x_2 = 2$$

$$2 * x_1 - 2 * 2 + 5 * 3 = 13 \Rightarrow x_1 = \frac{13-15+4}{2} \Rightarrow x_1 = 1$$



## Eliminación de Gauss.

Resolución del sistema lineal nxn.

$$E_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1}$$

$$E_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1}$$

.

.

$$E_n : a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1} :$$

**INPUT** número de incógnitas y de ecuaciones n; matriz ampliada  $A = (a_{ij})$ , donde  $1 \leq i \leq n$  y  $1 \leq j \leq n+1$

**OUTPUT** soluciones  $x_1, x_2, \dots, x_n$  o mensaje "no tiene solución única".

**Paso 1** Para  $i = 1, \dots, n-1$  realizar Pasos 2-4. (Proceso de eliminación.)

**Paso 2** Sea p el entero más pequeño con  $i \leq p \leq n$  y  $a_{pi} \neq 0$ .

Si no puede encontrarse un entero p  
entonces OUTPUT ('no existe solución única');  
STOP.

**Paso 3** Si  $p \neq i$  entonces realizar  $(E_p) \leftrightarrow (E_i)$

**Paso 4** Para  $j = i+1, \dots, n$  realizar Pasos 5 y 6.

**Paso 5** Sea  $m_{ji} = a_{ji} / a_{ii}$

**Paso 6** Realizar  $(E_j - m_{ji}E_i) \rightarrow (E_j)$

**Paso 7** Si  $a_{nn} = 0$  entonces OUTPUT ('no existe solución única');  
STOP.

**Paso 8** Sea  $x_n = a_{n,n+1} / a_{nn}$  (Comienza la sustitución hacia atrás.)

**Paso 9** Para  $i = n-1, \dots, 1$  sea  $x_i = [a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j] / a_{ii}$

**Paso 10** OUTPUT  $(x_1, \dots, x_n)$ ; (Procedimiento terminado exitosamente.)  
STOP.



## Estrategias de Pivoteo

- Al obtener el Algoritmo anterior, encontramos que era necesario un intercambio de renglones cuando uno de los elementos pivote  $a_{k,k}^{(k)} = 0$  es cero.

- El intercambio de renglones tiene la forma  $(E_k) \leftrightarrow (E_p)$

- donde  $p$  es el entero más pequeño mayor que  $k$  tal que

$$a_{p,k}^{(k)} \neq 0$$

- Para reducir el error de redondeo, frecuentemente es necesario realizar intercambio de renglones aún cuando los elementos pivote no sean nulos.



## IMPLEMENTACION EN LA COMPUTADORA(1)

Se requiere utilizar matrices al programar. El dato es, la matriz orlada donde, para conservar la homogeneidad, se debe hacer  $C_i = a_{i,n+1}$ . Se utiliza la siguiente fórmula:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik} a_{kj}}{a_{kk}} \text{ para } \begin{cases} k \leq j \leq m \\ k+1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (6.7)$$

en la que:

$a$  = elemento de la matriz orlada,  $a'$  = elemento de  $A'$ ,  
 $i$  = número de la fila de las matrices,  $j$  = nro de la columna,  
 $k$  = identificación de la fila pivote,  $n$  = cdad de filas  
 $m$  = cantidad de columnas de la matriz orlada  $(n+1)$ .



## IMPLEMENTACION EN LA COMPUTADORA (2)

Aplicando reiteradamente el proceso, mediante la ecuación:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{ik}^{(k-1)} \text{ para } \begin{cases} k+1 \leq j \leq m \\ k+1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (6.8)$$

se llega a obtener un sistema triangular de la forma (6.4).

El proceso de sustitución inversa se puede generalizar, de la siguiente manera:

$$x_n = \frac{a_{nm}}{a_{nn}}, x_i = \frac{a_{im} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j}{a_{ii}} \text{ para } i = n-1, n-2, \dots, 1 \quad (6.9)$$



## CONSIDERACIONES

- Se ha supuesto que, cada elemento pivote ha sido no nulo. Si no fuera el caso, el procedimiento discutido deberá ser modificado de modo que permita el intercambio de filas
- Para obtener mayor precisión se debe realizar cada reducción utilizando como fila pivote, la fila que tenga el mayor elemento pivote.





## METODO DE GAUSS-JORDAN (1)

- Constituye una variación del método de eliminación de Gauss. Permite resolver hasta 20 ó 25 ecuaciones simultaneas
- Se distingue del método de Gauss en el hecho de que cuando se elimina una incógnita, esta es eliminada de todas las ecuaciones restantes.
- La incógnita es eliminada tanto de las que preceden a la ecuación pivote, así como de las que siguen.
- Consultar esta dirección:  
➤ [http://www.geocities.com/halen\\_shezar/matrices/gaussjordan.html](http://www.geocities.com/halen_shezar/matrices/gaussjordan.html)



## METODO DE GAUSS-JORDAN (2)

Pasos a seguir:

1. Dividir la primera ecuación del sistema por el coeficiente de la primera incógnita de esa misma ecuación.
2. Formar otro sistema con la ecuación así obtenida y esa misma multiplicada por los coeficientes de la primera incógnita de las otras ecuaciones,
3. Nuevo sistema: restando la segunda y tercera ecuaciones del segundo sistema de sus homólogas del primer sistema, y la primera sin modificaciones.



## METODO DE GAUSS-JORDAN (3)

Los pasos descriptos se pueden realizar utilizando las fórmulas siguientes:

Para determinar todos los elementos de la nueva matriz:

$$b_{i-1;j-1} = a_{ij} - \frac{a_{1j}a_{i1}}{a_{11}} \begin{cases} 1 < i \leq n \\ 1 < j \leq m \end{cases} \quad (6.10)$$

Y los de la última fila, que se calculan mediante:

$$b_{n;j-1} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \begin{cases} 1 < j \leq m \\ a_{11} \neq 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

**$a$**  = elementos de la matriz procesada,  **$b$**  = elemento de la matriz resultante.  
 **$i$**  = nro. de la fila de la matriz original,  **$j$**  = nro de la columna de la matriz original,  
 **$m$**  = nro. máximo de columnas ( $n+1$ ) .     **$n$**  = nro. máximo de filas



## PRECAUCIONES (1)

- Si el elemento pivote  $a_{11} = 0$ , entonces
- El programa debería incluir la lógica necesaria para verificar que  $a_{11}$  en cada una de las matrices sea diferente de cero y efectuar, y consecuentemente, el intercambio de filas si fuere necesario.
- El intercambio de renglones no alterará el orden de las incógnitas en la matriz columna final.



## PRECAUCIONES (2)

*Cuando  $a_{11}$  sea muy pequeño en comparación con el orden de magnitud general de los otros elementos de la columna, su utilización podría disminuir la precisión.*

Es conveniente, agregar al programa la codificación que permita comparar los valores absolutos de los coeficientes de la primera columna y poner como ecuación pivote la que tenga el mayor coeficiente en la primera incógnita, en valor absoluto.



## Comparación de los métodos

- Método Eliminación de Gauss:
- Ventajas: Algoritmo de solución mas básico
- Desventaja: Solución de un único conjunto de ecuaciones lineales a la vez.
- Método de Gauss-Jordán:
- Ventajas: La base para calcular la inversa; puede resolver conjuntos múltiples de ecuaciones.
- Desventaja: Menos eficiente para un único conjunto de ecuaciones.



### Gauss-Jordan Ejemplo (1)

Resolver mediante el método de *GAUSS-JORDAN* el sgte sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 13 & (a) \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 20 & (b) \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 & (c) \end{cases} \quad 6.12$$

Dividir la 1era. ecuación por el coeficiente de la 1era. incógnita en esa misma ec., de lo que resulta (6.13) (a); se multiplica la ecuación así obtenida, por el coeficiente de la 1era. incógnita en cada una de las ecuaciones restantes, obteniéndose:



### Gauss-Jordan Ejemplo (2)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + \frac{5}{2}x_3 = \frac{13}{2} & (a) \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 13 & (b) \\ 3x_1 - 3x_2 + \frac{15}{2}x_3 = \frac{39}{2} & (c) \end{cases} \quad 6.13$$

A continuación se resta (6.13) (b) de la (6.12) (b) y (6.13) (c) de (6.12) (c) convirtiendo a la (6.13) (a) directamente en la (6.14) (c), obteniéndose:



### Gauss-Jordán.- Ejemplo (3)

$$\begin{cases} 5x_2 - x_3 = 7 & (a) \\ 2x_2 - \frac{9}{2}x_3 = -\frac{19}{2} & (b) \\ x_1 - x_2 + \frac{5}{2}x_3 = \frac{13}{2} & (c) \end{cases} \quad 6.14$$

Repitiendo el proceso, se divide la ecuación (6.14) (a) por el coef. de la 1era. incógnita en esa ecuación para obtener (6.15) (a). Luego se multiplica la (6.15) (a) obtenida, respectivamente, por el coeficiente del término  $x_2$  en cada una de las ecuaciones (6.14) (b) y (6.14) (c). Esto produce el siguiente sistema:



### Gauss-Jordan Ejemplo (4)

$$\begin{cases} x_2 - \frac{1}{5}x_3 = \frac{7}{15} & (a) \\ 2x_2 - \frac{2}{5}x_3 = \frac{14}{5} & (b) \\ -x_2 + \frac{1}{5}x_3 = -\frac{7}{5} & (c) \end{cases} \quad 6.15$$

Seguidamente se resta la (6.15) (b) y la (6.15) (c) de la (6.14) (b) y la (6.14) (c), respectivamente, y se hace que la ecuación (6.15) (a) se convierta en la (6.16) (c), obteniéndose:



### Gauss-Jordan Ejemplo (5)

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{41}{10}x_3 = -\frac{123}{10} & (a) \\ x_1 + \frac{23}{10}x_3 = \frac{79}{10} & (b) \\ x_2 - \frac{1}{5}x_3 = \frac{7}{5} & (c) \end{array} \right. \quad 6.16$$

La repetición del proceso lleva al siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_3 = 3 & (a) \\ \frac{23}{10}x_3 = \frac{69}{10} & (b) \\ -\frac{1}{5}x_3 = -\frac{3}{5} & (c) \end{array} \right. \quad \text{Sol. } x = 1 ; x = 2 ; x = 3,$$



### ECUACIONES DE ERROR (1)

- El método de las **ECUACIONES DE ERROR**, no está destinado específicamente a resolver sistemas lineales de ecuaciones
- Se utiliza para mejorar la aproximación con que se pueden determinar las raíces.
- Se trata de un **método iterativo y general**, que conviene ser aplicado como culminación de aquellos métodos que pudieran sufrir una pérdida considerable de precisión en los resultados finales.



## ECUACIONES DE ERROR (2)

Sea el sistema, expresado en notación matricial:

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{C} \quad (6.18)$$

y se han obtenido las raíces  $x'_1; x'_2; \dots; x'_n$  por algún otro método.

Sustituyendo estos valores en la ecuación (6.18), los valores de los términos independientes que son obtenidos  $c'_1; c'_2; \dots; c'_n$  varían respecto de los coeficientes dados porque las raíces no son exactas.

La sustitución explicada en el párrafo anterior puede ser expresada por:

$$\mathbf{A} \mathbf{X}' = \mathbf{C}' \quad (6.19)$$

donde  $\mathbf{C}'$  es el vector columna de componentes  $c'_i$ .



## ECUACIONES DE ERROR (3)

Si se denomina  $\mathbf{H}$  al vector columna de componentes  $h_1; h_2; \dots; h_n$  que son las correcciones que deben ser agregadas a los valores de las raíces para obtener el valor exacto de las mismas, se deduce que:

$$x_i = x'_i + h_i \quad ; \quad i = 1; 2; \dots; n \quad (6.20)$$

Si se sustituyen estas expresiones para las raíces exactas en la ecuación:  $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{C}$ , se obtiene:

$$\mathbf{A} (\mathbf{X}' + \mathbf{H}) = \mathbf{C} \quad (6.21)$$



## ECUACIONES DE ERROR (4)

Si las ecuaciones  $\mathbf{A} \mathbf{X}' = \mathbf{C}'$  son restadas de las  $\mathbf{A} (\mathbf{X}' + \mathbf{H}) = \mathbf{C}$ , resulta el sistema que encierra las correcciones de las raíces:

$$(6.22) \quad \mathbf{A} \mathbf{H} = \mathbf{C} - \mathbf{C}' = \mathbf{E}$$

donde, los términos independientes  $e_i = c_i - c'_i$  de este sistema, denotan el error y las ecuaciones reciben el nombre de **ECUACIONES DE ERROR**.



## ECUACIONES DE ERROR (5)

Si se deseara todavía más precisión, se pueden hacer correcciones a los valores obtenidos para las correcciones.

Designando las correcciones de las correcciones mediante  $h'$ , entonces, las raíces más precisas  $x_i$  estarían dadas por:

$$(6.23) \quad x_i = x'_i + h_i + h'_i + \dots$$

Este proceso puede ser iterado tanto como sea necesario hasta obtener las raíces con la aproximación deseada.





## METODO LA MATRIZ INVERSA (1)

- Adecuado para resolver un gran número de sistemas que difieren únicamente en los valores de los términos independientes,->
- Se utilizan con ventaja las capacidades de éste método para reducir substancialmente el número de las operaciones aritméticas requeridas en su resolución.



## METODO LA MATRIZ INVERSA (2)

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales simultáneas:

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{C} \quad (6.24)$$

para el cual, si el conjunto dado de ecuaciones posee solución única, la matriz  $\mathbf{A}$  de los coeficientes es no singular, y como tal, admite inversa  $\mathbf{A}^{-1}$ , tal que:

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz unitaria o identidad.



### **METODO LA MATRIZ INVERSA (3)**

Premultiplicando ambos miembros de  $\mathbf{A X} = \mathbf{C}$  por  $\mathbf{A}^{-1}$ , se obtiene:

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}$$

de donde:

$$\mathbf{I X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}$$

y, finalmente:

$$(6.25) \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}$$



### **METODO LA MATRIZ INVERSA (4)**

Dado el valor de la matriz inversa de coeficientes

del sistema  $\mathbf{A}^{-1}$ ,  $\rightarrow$  es posible determinar fácilmente los elementos de  $\mathbf{X}$  para cualquier número de sistemas con idéntica matriz  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}$$



## METODO DE GAUSS-SEIDEL (1)

Es un método clasificado como iterativo.

- Desventaja: **No siempre** converge a una solución, o ,

en ocasiones lo hace **muy lentamente**.

- Ventajas: Adecuado para resolver sistemas con centenares de ecuaciones e incógnitas, ya que reduce el nro de operaciones aritméticas y los efectos de la propagación de errores en las mismas.

- En sistemas con altos porcentajes de 0, son eficientes tanto en almacenamiento de computadora como en el tiempo de cálculo.



## METODO DE GAUSS-SEIDEL (2)

**Definición:** “Una matriz cuadrada **A**, recibe la denominación de

**DIAGONALMENTE DOMINANTE** si:

$$(6.26) \quad |a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|; \forall i$$

con desigualdad estricta, para por lo menos una de las  $i$ . “



### METODO DE GAUSS-SEIDEL (3)

La condición A para que el método de Gauss-Seidel, aplicado a un sistema de ecuaciones lineales simultáneas, sea convergente es que la matriz **A**, de coeficientes del sistema debe ser **DIAGONALMENTE DOMINANTE**,

Un sistema *DIAGONALMENTE DOMINANTE* es condición **SUFICIENTE** para asegurar la convergencia, pero, no es condición **NECESARIA**.



### METODO DE GAUSS-SEIDEL (4)

Pasos, para la aplicación del método de Gauss-Seidel:

- 1.- Asignar un valor inicial a cada incógnita. Si es posible hacer una hipótesis razonable, se mejorará substancialmente la rapidez de convergencia, si no, fijar arbitrariamente estos valores.
- 2.- Partiendo de la primera ecuación, determinar un nuevo valor para la incógnita dominante, utilizando para las otras incógnitas los valores supuestos según lo descrito en 1.



## METODO DE GAUSS-SEIDEL (5)

3.- Pasar a la segunda ecuación y calcular el valor de la incógnita dominante, utilizando para ello, el ya calculado en el paso anterior y los valores supuestos en las otras incógnitas.

4.- Reiterar el procedimiento descrito, con todas las demás ecuaciones, siempre para la incógnita dominante, utilizando los últimos valores calculados. Completado este paso se dice que se ha concluido una **ITERACIÓN**.

5.- Iterar los pasos 2; 3 y 4 hasta que el valor de cada incógnita difiera del valor respectivo obtenido en la iteración previa, en una cantidad menor que un E positivo y arbitrario previamente fijado.



## Algoritmo DE GAUSS-SEIDEL (I)

Para resolver  $Ax = b$  dada una aproximación inicial  $x^{(0)}$

INPUT número de ecuaciones e incógnitas  $n$ ; los elementos  $a_{ij}$ ,

$1 \leq i, j \leq n$  de la matriz  $A$ ; los elementos  $b_i$   $1 \leq i \leq n$  de  $b$ ;

los elementos  $x_i^{(0)}$   $1 \leq i \leq n$  de  $x^{(0)}$ ; tolerancia TOL; máximo número de iteraciones  $N$ .

OUTPUT la solución aproximada  $x_1, x_2, \dots, x_n$  o un mensaje de que el número de iteraciones fue excedido.

Paso 1 Sea  $k = 1$ .

Paso 2 Mientras sea ( $k \leq N$ ) realizar Pasos 3-6.

Paso 3 Para  $i = 1, \dots, n$

$$\text{Sea } x_i = \frac{- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(0)} + b_i}{a_{ii}}$$



## Algoritmo DE GAUSS-SEIDEL (II)

Paso 4 Si  $||x-XO|| < \text{TOL}$  entonces OUTPUT  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$   
(Procedimiento terminado con éxito.)  
STOP

Paso 5 Sea  $k = k + 1$ .

Paso 6 Para  $i = 1, \dots, n$  sea  $XO_i = x_i$

Paso 7 OUTPUT ('Número máximo de iteraciones excedido');  
(Procedimiento terminado sin éxito.)  
STOP.

**Consideraciones Paso 3:** se requiere  $a_{ii} \neq 0$  para cada  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Si uno de los elementos  $a_{ii}$  es cero y el sistema es no singular, se puede reordenar las ecuaciones de modo que ningún  $a_{ii}$  sea cero. Para acelerar la convergencia como deberían ser los  $a_{ii}$  ??



## METODO DE GAUSS-SEIDEL- Ejemplo (1)

- Ejemplo.- Sea el problema de tener que resolver haciendo uso del método de Gauss-Seidel, con una cota de error estimada de  $E \leq 0,02$

$$\begin{cases} 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 51 \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 61 \\ 10x_1 + x_2 + 2x_3 = 44 \end{cases}$$

- comprobar que el sistema propuesto cumple con la condición suficiente de convergencia;



### **METODO DE GAUSS-SEIDEL Ejemplo (2)**

- se supondrán para las incógnitas valores idénticamente nulos

$$2 \cdot 0 + 10 \cdot x_2 + 0 = 51 \quad \text{entonces } x_2 = 5,1$$

$$0 + 2 \cdot 5,1 + 10 \cdot x_3 = 61 \quad " \quad x_3 = 5,08$$

$$10 \cdot x_1 + 5,1 + 2 \cdot 5,08 = 44 \quad " \quad x_1 = 2,874$$



### **METODO DE GAUSS-SEIDEL - Ejemplo (3)**

- Una segunda iteración produce:

$$2 \cdot 2,874 + x_2 + 5,08 = 51 \quad \text{entonces } x_2 = 4,0172$$

$$2,874 + 2 \cdot 4,0172 + 10 \cdot x_3 = 61 \quad " \quad x_3 = 5,00916$$

$$10 \cdot x_1 + 4,0172 + 2 \cdot 5,00916 = 44 \quad " \quad x_1 = 2,996448$$

- las diferencias no son todas menores que E



## METODO DE GAUSS-SEIDEL - Ejemplo (4)

- Otra iteración produce los siguientes valores para las incógnitas:

$$x_1 = 2,999941296$$

$$x_2 = 3,999794400$$

$$x_3 = 5,000396320$$

- Se realiza la comparación de estos valores con los respectivos de la iteración anterior,
- $x_1 = 2,996448 - 2,999941296 < E$
- $x_2 = 4,0172 - 3,999794400 < E$
- $x_3 = 5,00916 - 5,000396320 < E$



## CONCLUSION

La precisión no depende exclusivamente del valor de  $E$ , si no también, de la velocidad de convergencia; es decir, que las diferencias de los resultados obtenidos en dos iteraciones consecutivas pueden diferir en menos de un  $E$ , aún cuando estos resultados se encuentren lejos de los verdaderos valores de las incógnitas.

Para obtener mayor seguridad y precisión **se recomienda** utilizar las ecuaciones de error para concluir la aproximación de las incógnitas.





## INTRODUCCIÓN-Factorización LU

- Eliminación de Gauss: resuelve de forma satisfactoria sistemas de la forma

$$A.x=b$$

Resulta ineficiente cuando deben resolverse ecuaciones con los mismos coeficientes  $A$ , pero con diferentes constantes del lado derecho (las  $b$ )



## INTRODUCCIÓN-Factorización LU

- Los métodos de descomposición LU separan el tiempo usado en las eliminaciones para la matriz  $A$  de las manipulaciones en el lado derecho  $b$ .
- Una vez que  $A$  se ha “descompuesto”, los múltiples vectores del lado derecho  $b$  se pueden evaluar de manera eficiente.



## FACTORIZACIÓN LU

- Suponga que la matriz  $A$  es una matriz  $m \times n$  se puede escribir como el producto de dos matrices:

$$A = L U$$

donde  $L$  es una matriz diagonal inferior con números 1 en la diagonal y  $U$  es una matriz triangular superior. Entonces para resolver el sistema:

$$A x = b,$$

Escribimos

$$A x = (L U) x = L (U x)$$



## FACTORIZACIÓN LU

- Una posible estrategia de solución consiste en tomar

$$y = U x$$

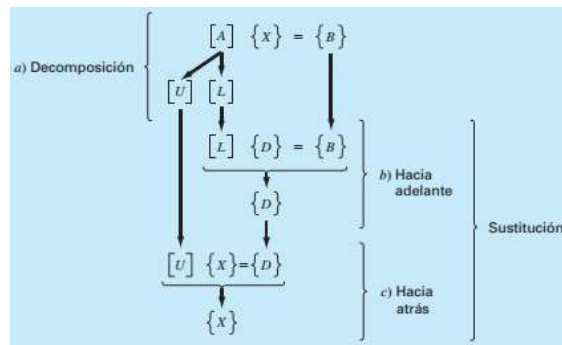
y resolver para  $y$ :

$$L y = b$$

Como la matriz  $L$  es triangular superior este sistema puede resolverse mediante sustitución hacia abajo, lo cual se hace fácilmente en  $m^2$  FLOPS. Una vez con los valores encontrados de  $y$ , las incógnitas al sistema inicial se resuelve despejando  $x$  de  $U x = y$

## **FACTORIZACIÓN LU**

- Pasos en la descomposición LU



## **Factorización LU**

- Versión de la eliminación de Gauss, usando la descomposición LU

- $$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix}$$

- Se observa fácilmente para  $U$ , que el es resultado directo de la eliminación hacia adelante.



## Factorización LU

- Aunque quizá no sea muy clara, la matriz L se produce durante este paso. Lo anterior se ilustra fácilmente con un sistema de tres ecuaciones,

- $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$



## Factorización LU

- El primer paso en la eliminación de Gauss consiste en multiplicar el renglón 1 por el factor:  $f_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$  y restar el resultado al segundo renglón para eliminar  $a_{21}$ .

De forma similar, el renglón 1 se multiplica por  $f_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$  y el resultado se resta al tercer renglón para eliminar  $a_{31}$ .

El paso final es multiplicar el segundo renglón modificado por  $f_{32} = \frac{a'_{32}}{a'_{22}}$  y restar el resultado al tercer renglón para eliminar  $a'_{32}$



## Factorización LU

- De lo que resulta:

- $$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 \end{bmatrix}$$



## Factorización LU

- Una estrategia de dos pasos para obtener soluciones se basa en las ecuaciones:

$$Ux=y$$

$$LU=A$$

$$Ly=b$$

- 1. Paso de descomposición LU.  
A se factoriza o “descompone” en las matrices triangulares inferior L y superior U.



## Factorización LU

- 2. Paso de la sustitución.

L y U se usan para determinar una solución  $\{X\}$  para un lado derecho  $b$ .

Este paso, a su vez, se divide en dos.

Primero, la ecuación  $Ly=b$  se usa para generar un vector intermedio  $y$  mediante sustitución hacia adelante.

Después, el resultado se sustituye en la ecuación  $Ux=y$ , la que se resuelve por sustitución hacia atrás para  $x$ .



## Factorización LU

- Ej. Resolver el siguiente sistemas de ecuaciones utilizando la Descomposición LU.

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \\ 20x_1 - 7x_2 + 12x_3 = 70 \\ -8x_1 + 13x_2 + 17x_3 = 17 \end{cases}$$

- De forma matricial:  $Ax=B$



## Factorización LU

- Aplicando eliminación de Gauss obtenemos U

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 11 \\ 20 & -7 & 12 & 70 \\ -8 & 13 & 17 & -6 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & 7 & 15 \\ 0 & 9 & 19 & -6 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right] = U$$

- Luego para L:  $f_{21} = 20/4$  y  $f_{31} = -8/4$
- $f_{32} = 9/3$

- Resulta: 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$



## Factorización LU

- Con  $L \cdot y = b$

- $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 70 \\ 17 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 11 \\ y_2 = 15 \\ y_3 = -6 \end{array}$$

- Luego  $Ux = y$

- $$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 15 \\ -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_1 = -1 \end{array}$$