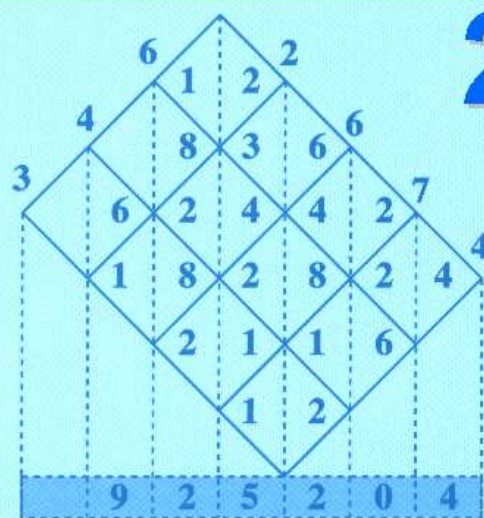


RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Volumen

2



MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CULTURA
CENTRO DE PROFESORES Y RECURSOS
SALAMANCA



Coordinador: Jesús Escudero Martín

JESÚS ESCUDERO MARTÍN
(Profesor coordinador)

CARLOS GONZÁLEZ RODRIGO, ÁNGEL OREJA MARTÍN,
GUILLERMO CASTÁN BREZNES, JUAN JESÚS IGLESIAS RUÍZ
(Alumnos de 4º de ESO)

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS (VOL 2)

CENTRO DE PROFESORES Y RECURSOS
Salamanca 1999

La serie **Documentos curriculares** del Centro de Profesores y Recursos e Salamanca pretende difundir las experiencias de los profesores con una finalidad práctica y divulgará temas de innovación educativa, investigación, desarrollo curricular y materiales didácticos.

© C.P.R. Salamanca y los autores

Diseño de cubiertas: Jesús Luengo & M^a Ángeles Innella Nerón

I.S.B.N.: [REDACTED]

Depósito Legal: [REDACTED]

Imprime: EUROPA ARTES GRÁFICAS, S.A. *(No llegó a publicarse)*

ÍNDICE

Introducción	7
Ideas, tendencias, creencias, etc. sobre la resolución de problemas.	8
Rasgos que caracterizan a los buenos problemas.	11
Pautas a seguir en la resolución de problemas.	13
Desarrollo de algunas estrategias de resolución de problemas.	17
Problemas.	29
Soluciones.	103
Bibliografía.	137

INTRODUCCIÓN.

"Quien quiere hacer algo encuentra un medio; quien no quiere hacer nada encuentra una excusa". (Proverbio chino)

"La matemática ha constituido, tradicionalmente, la tortura de los escolares del mundo entero, y la humanidad ha tolerado esta tortura para sus hijos como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario; pero la enseñanza no debe ser una tortura, y no seríamos buenos profesores si no procuráramos, por todos los medios, transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo, sino, por el contrario, alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces". (Puig Adam, 1958)

Matemáticas es la única asignatura que se estudia en todos los países del mundo y en todos los niveles educativos. Supone un pilar básico de la enseñanza en todos ellos. La causa fundamental de esa universal presencia hay que buscarla en que las matemáticas constituyen un idioma *"poderoso, conciso y sin ambigüedades"* (según la formulación del Informe Cockroft, 1985). Ese idioma se pretende que sea aprendido por nuestros alumnos, hasta conseguir que lo "hablen". En general por medio de la contemplación de cómo los hacen otros (sus profesores), y por su aplicación a situaciones muy sencillas y ajenas a sus vivencias (los ejercicios).

La utilización de un idioma requiere de unos conocimientos mínimos para poder desarrollarse, por supuesto. Pero sobre todo se necesitan situaciones que inviten a comunicarse por medio de ese idioma, a esforzarse en lograrlo, y, desde luego, de unas técnicas para hacerlo. En el caso del idioma matemático, una de las técnicas fundamentales de comunicación son los métodos de *Resolución de Problemas*.

IDEAS, TENDENCIAS, CREENCIAS, ETC. SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

La resolución de problemas es considerada en la actualidad la parte más esencial de la educación matemática. Mediante la resolución de problemas, los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de las Matemáticas en el mundo que les rodea.

- El párrafo 243 del **Informe Cockcroft** señala en su punto quinto que la enseñanza de las Matemáticas debe considerar la *"resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las mismas situaciones de la vida diaria"*.
- El **N.C.T.M.** de Estados Unidos, declaraba hace más de diez años que *"el objetivo fundamental de la enseñanza de las Matemáticas no debería ser otro que el de la resolución de problemas"*.
- En el libro de Hofstadter, **Gödel, Escher y Bach**, se dice que *"las capacidades básicas de la inteligencia se favorecen desde las Matemáticas a partir de la resolución de problemas, siempre y cuando éstos no sean vistos como situaciones que requieran una respuesta única (conocida previamente por el profesor que encamina hacia ella), sino como un proceso en el que el alumno estima, hace conjeturas y sugiere explicaciones"*.
- **M. de Guzmán** (1984) comenta que *"lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha atraído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas"*.
- **Santaló** (1985), gran matemático español y además muy interesado en su didáctica, señala que *"enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar"*

a resolver problemas. Estudiar matemáticas no debe ser otra cosa que pensar en la solución de problemas".

- En una conferencia pronunciada en 1968 **George Polya** decía: *"Está bien justificado que todos los textos de matemáticas, contengan problemas. Los problemas pueden incluso considerarse como la parte más esencial de la educación matemática"*.
- En España, el **currículo** del Área de Matemáticas en Primaria y Secundaria concede extraordinaria importancia al tema dedicándole mucha atención, especialmente desde los contenidos de procedimientos y actitudes.

Aunque no es sencillo, y quizás parezca superfluo, para entendernos es interesante delimitar, siquiera sea en grandes rasgos, qué es lo que entendemos por problema. Pero, como la palabra "problema" se usa en contextos diferentes y con matices diversos, haremos un esfuerzo por clarificar a qué nos referimos.

No aportan mucha claridad las definiciones de los diccionarios generales. Nos acerca más al sentido de qué es un problema la expresión de "**problema de letra**" que los alumnos emplean con frecuencia: son aquellos que hacen referencia a contextos ajenos a las matemáticas propiamente dichas, los que llevan dentro una cierta "historia", que se pueden contar. Los que abren las ventanas del aula y hacen un puente (aunque sea frágil) entre las matemáticas y la vida.

Pero no es el único aspecto a destacar. También hay que caracterizar los "problemas" por oposición a los ejercicios (algo bien conocido por los alumnos porque constituye el núcleo fundamental de su quehacer matemático).

En los ejercicios se puede decidir con rapidez si se saben resolver o no; se trata de aplicar un algoritmo, que pueden conocer o ignorar. Pero, una vez localizado, se aplica y basta. Justamente, la proliferación de ejercicios en clase de matemáticas ha desarrollado y arraigado en los alumnos un síndrome generalizado; en cuanto se les plantea una tarea a realizar, tras una somera reflexión, contestan: "lo sé" o "no lo sé", según hayan localizado o no el algoritmo apropiado. Ahí acaban, en general, sus elucubraciones.

En los problemas no es evidente el camino a seguir; incluso puede haber varios; y desde luego no está codificado y enseñado previamente. Hay que apelar a conocimientos dispersos, y no siempre de matemáticas; hay que relacionar saberes procedentes de campos diferentes, hay que poner a punto relaciones nuevas.

Por tanto, un "problema" sería una cuestión a la que no es posible contestar por aplicación directa de ningún resultado conocido con anterioridad, sino que para resolverla es preciso poner en juego conocimientos diversos, matemáticos o no, y buscar relaciones nuevas entre ellos. Pero además tiene que ser una cuestión que nos interese, que nos provoque las ganas de resolverla, una tarea a la que estemos dispuestos a dedicarle tiempo y esfuerzos. Como consecuencia de todo ello, una vez resuelta nos proporciona una sensación considerable de placer. E incluso, sin haber acabado el proceso, sin haber logrado la solución, también en el proceso de búsqueda, en los avances que vamos realizando, encontraremos una componente placentera.

Aunque los rasgos fundamentales de lo que entendemos por problema están descritos en el párrafo anterior, todavía creemos conveniente añadir algunos comentarios adicionales sobre los mismos:

- Los algoritmos que se suelen explicar en clase, o que aparecen en los libros de texto, resuelven grupos enteros de problemas. Lo que pasa es que si no situamos previamente los problemas a los que responden, estamos dando la respuesta antes de que exista la pregunta. Y en ese contexto no es difícil de adivinar el poco interés con que se recibe la misma.
- Las situaciones existen en la realidad. Los problemas los alumbramos nosotros. Pasan a ese estatus cuando los asumimos como un reto personal y decidimos en consecuencia dedicarle tiempo y esfuerzos a procurar resolverlos.
- La resolución de un problema añade algo a lo que ya conocíamos; nos proporciona relaciones nuevas entre lo que ya sabíamos o nos aporta otros puntos de vista de situaciones ya conocidas. Suponen el aporte de la chispa de la creatividad, aquella que aparece de cuando en cuando, y que logra, por utilizar la expresión de Koestler (1983), que dos y dos son cinco.

Resaltemos una vez más la fuerte componente de compromiso personal en los problemas, y la importancia que tiene la manera en que se nos presentan para que lo asumamos como tales. Todo ello es de particular interés en la enseñanza, porque de cómo se plantea la cuestión, el contexto en que se sitúe y de la "tecnología" expositiva utilizada depende, en un porcentaje muy importante, el que un problema pase a ser considerado como tal por nuestros alumnos.

RASGOS QUE CARACTERIZAN A LOS BUENOS PROBLEMAS.

Una vez que tenemos un problema, los hay mejores y peores, vamos a referirnos a los rasgos que caracterizan a los buenos problemas. Reseñamos y comentamos los más importantes (Grupo Cero, 1984):

1. *No son cuestiones con trampas ni acertijos.* Es importante hacer esta distinción en la enseñanza porque los alumnos, cuando se les plantean problemas, tienden a pensar que si no hay (o al menos ellos no lo recuerdan directamente) un algoritmo para abordarlos ni se les ocurre ningún procedimiento, seguro que lo que sucede es que tiene que haber algún tipo de truco o de "magia". La práctica sistemática resolviendo problemas hace que esa percepción habitual vaya cambiando.
2. *Pueden o no tener aplicaciones, pero el interés es por ellos mismos.* Así como hay otras cuestiones cuya importancia proviene de que tienen un campo de aplicaciones (y sin descartar que los problemas las tengan), el interés de los problemas es por el propio proceso. Pero a pesar de ello, los buenos problemas suelen llevar a desarrollar procesos que, más tarde, se pueden aplicar a muchos otros campos.
3. *Representan un desafío a las cualidades deseables en un matemático.* Parece obvio para todo el mundo que existen unas cualidades que distinguen a las personas que resuelven problemas con facilidad, aunque si se tienen que señalar cuáles son, es bien dificultoso hacerlo. Y se tiende a pensar que coinciden en líneas generales con las cualidades propias de los matemáticos.
4. *Una vez resueltos apetece proponerlos a otras personas para que a su vez intenten resolverlos.* Pasa como con los chistes que nos gustan, que los contamos enseguida a otros, y así se van formando cadenas que explican su rápida difusión. Lo mismo sucede con los buenos problemas.

5. *Parecen a primera vista algo abordable, no dejan bloqueado, sin capacidad de reacción.* Y puede pasar que alguna solución parcial sea sencilla o incluso inmediata. Desde un punto de vista psicológico, sólo nos planteamos aquello que somos capaces (o al menos eso creemos) de resolver. Por eso, si un problema sólo lo es para nosotros cuando lo aceptamos como tal, difícil es que nos "embarquemos" en una aventura que nos parezca superior a nuestras fuerzas.

6. *Proporcionan al resolverlos un tipo de placer difícil de explicar pero agradable de experimentar.* La componente de placer es fundamental en todo desafío intelectual, si se quiere que sea asumido con gusto y de manera duradera. Incluso, en la enseñanza, la incorporación de esos factores a la práctica diaria pueden prefigurar la inclinación de los estudios futuros. Y no hay que olvidar que las matemáticas son de las materias que no dejan indiferente, se las quiere o se las odia (como aparece en múltiples estudios). Por ello más vale que introduzcamos refuerzos positivos para hacer que aumenten los que las aprecian.

PAUTAS A SEGUIR EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Una vez señaladas las características de los buenos problemas, hay que referirse a la importancia que tiene resolver problemas en clase. Pensemos, que, como dice Polya (1945) *"sólo los grandes descubrimientos permiten resolver los grandes problemas, hay, en la solución de todo problema, un poco de descubrimiento"*; pero que, si se resuelve un problema y llega a excitar nuestra curiosidad, *"este género de experiencia, a una determinada edad, puede determinar el gusto del trabajo intelectual y dejar, tanto en el espíritu como en el carácter, una huella que durará toda una vida"*.

Para resolver problemas no existen fórmulas mágicas; no hay un conjunto de procedimientos o métodos que aplicándolos lleven necesariamente a la resolución del problema (aún en el caso de que tenga solución). Pero de ahí no hay que sacar en consecuencia una apreciación ampliamente difundida en la sociedad: la única manera de resolver un problema sea por "ideas luminosas", que se tienen o no se tienen.

Es evidente que hay personas que tienen más capacidad para resolver problemas que otras de su misma edad y formación parecida. Que suelen ser las que aplican (generalmente de una manera inconsciente) toda una serie de métodos y mecanismos que suelen resultar especialmente indicados para abordar los problemas. Son los, procesos que se llaman "heurísticos": operaciones mentales que se manifiestan típicamente útiles para resolver problemas. El conocimiento y la práctica de los mismos es justamente el objeto de la resolución de problemas, y hace que sea una facultad entrenable, un apartado en el que se puede mejorar con la práctica. Pero para ello hay que conocer los procesos y aplicarlos de una forma planificada, con método.

Es ya clásica, y bien conocida, la formulación que hizo Polya (1945) de las cuatro etapas esenciales para la resolución de un problema, que constituyen el punto de arranque de todos los estudios posteriores:

1. **Comprender el problema.** Parece, a veces, innecesaria, sobre todo en contextos escolares; pero es de una importancia capital, sobre todo cuando los problemas a resolver no son de formulación estrictamente matemática. Es más, es la tarea más difícil, por ejemplo, cuando se ha de hacer un tratamiento informático: entender cuál es el problema que tenemos que abordar, dados los diferentes lenguajes que hablan el demandante y el informático.

- Se debe leer el enunciado despacio.
- ¿Cuáles son los datos? (lo que conocemos)
- ¿Cuáles son las incógnitas? (lo que buscamos)
- Hay que tratar de encontrar la relación entre los datos y las incógnitas.
- Si se puede, se debe hacer un esquema o dibujo de la situación.

2. **Trazar un plan para resolverlo.** Hay que plantearla de una manera flexible y recursiva, alejada del mecanicismo.

- ¿Este problema es parecido a otros que ya conocemos?
- ¿Se puede plantear el problema de otra forma? *[Plantear el problema de otra forma supone una mayor comprensión del enunciado y puede facilitar su resolución porque después se puede ver más sencillo.]*
- Imaginar un problema parecido pero más sencillo.
- Suponer que el problema ya está resuelto; ¿cómo se relaciona la situación de llegada con la de partida?
- ¿Se utilizan todos los datos cuando se hace el plan?

3. **Poner en práctica el plan.** También hay que plantearla de una manera flexible y recursiva, alejada del mecanicismo. Y tener en cuenta que el pensamiento no es lineal, que hay saltos continuos entre el diseño del plan y su puesta en práctica.

- Al ejecutar el plan se debe comprobar cada uno de los pasos.
- ¿Se puede ver claramente que cada paso es correcto?
- Antes de hacer algo se debe pensar: ¿qué se consigue con esto? *[No se trata de hacer cálculos por hacer algo, hay que hacer cálculos que lleven a la solución]*
- Se debe acompañar cada operación matemática de una explicación contando lo que se hace y para qué se hace. *[El expresar el proceso de resolución: a) Aumenta la comprensión del problema. b) Permite repasar o recorrer el camino desde el principio al fin. c) Ayuda a controlar la resolución del problema porque todo está delante de quien lo resuelve. d) Facilita la valoración del profesor puesto que es posible analizar los procesos y no sólo los resultados.]*
- Cuando se tropieza con alguna dificultad que nos deja bloqueados, se debe volver al principio, reordenar las ideas y probar de nuevo.

4. **Comprobar los resultados.** Es la más importante en la vida diaria, porque supone la confrontación con contexto del resultado obtenido por el modelo del problema que hemos realizado, y su contraste con la realidad que queríamos resolver.
- Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado.
 - Debemos fijarnos en la solución. ¿Parece lógicamente posible?
 - ¿Se puede comprobar la solución?

- ¿Hay algún otro modo de resolver el problema?
- ¿Se puede hallar alguna otra solución?
- Se debe acompañar la solución de una explicación que indique claramente lo que se ha hallado.
- Se debe utilizar el resultado obtenido y el proceso seguido para formular y plantear nuevos problemas.

Hay que pensar que no basta con conocer técnicas de resolución de problemas: se pueden conocer muchos métodos pero no cuál aplicar en un caso concreto. Por lo tanto hay que enseñar también a los alumnos a utilizar los instrumentos que conozca, con lo que nos encontramos en un nivel metacognitivo, que es donde parece que se sitúa la diferencia entre quienes resuelven bien problemas y los demás.

Dentro de las líneas de desarrollo de las ideas de Polya, Schoenfeld da una lista de técnicas heurísticas de uso frecuente, que agrupa en tres fases, y que extractamos:

Análisis.

1. Trazar un diagrama.
2. Examinar casos particulares.
3. Probar a simplificar el problema.

Exploración.

1. Examinar problemas esencialmente equivalentes.
2. Examinar problemas ligeramente modificados.
3. Examinar problemas ampliamente modificados.

Comprobación de la solución obtenida.

1. ¿Verifica la solución los criterios específicos siguientes?:
 - ¿Utiliza todos los datos pertinentes?
 - ¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables?
 - ¿Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala?
2. ¿Verifica la solución los criterios generales siguientes?:
 - ¿Es posible obtener la misma solución por otro método?
 - ¿Puede quedar concretada en caso particulares?

- ¿Es posible reducirla a resultados conocidos?
- ¿Es posible utilizarla para generar algo ya conocido?

Finalmente, hacemos una recopilación de las estrategias más frecuentes que se suelen utilizar en la resolución de problemas. Según S. Fernández (1992) serían:

- Ensayo-error.
- Empezar por lo fácil, resolver un problema semejante más sencillo.
- Manipular y experimentar manualmente.
- Descomponer el problema en pequeños problemas (simplificar).
- Experimentar y extraer pautas (inducir).
- Resolver problemas análogos (analogía).
- Seguir un método (organización).
- Hacer esquemas, tablas, dibujos (representación).
- Hacer recuento (conteo).
- Utilizar un método de expresión adecuado: verbal, algebraico, gráfico, numérico (codificar, expresión, comunicación).
- Cambio de estados.
- Sacar partido de la simetría.
- Deducir y sacar conclusiones.
- Conjeturar.
- Principio del palomar.
- Analizar los casos límite.
- Reformular el problema.
- Suponer que no (reducción al absurdo).
- Empezar por el final (dar el problema por resuelto).

Para terminar sólo queremos hacer dos consideraciones. La primera hace referencia a que el contexto en el que se sitúen los problemas, que por parte de los profesores se tienden a considerar como irrelevante o, al menos como poco significativo, tiene una gran importancia, tanto para determinar el éxito o fracaso en la resolución de los mismos, como para incidir en el futuro de la relación entre las matemáticas y los alumnos. La segunda, que parece una perogrullada, es que la única manera de aprender a resolver problemas es resolviendo problemas; es muy bueno conocer técnicas y procedimientos, pero vistos en acción, no sólo a nivel teórico, porque si no, es un conocimiento vacío. Luego, hay que hacer cuantos esfuerzos sean precisos para que la resolución de problemas sea el núcleo central de la enseñanza matemática.

DESARROLLO DE ALGUNAS ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Si consideramos un problema como una situación que se presenta en la que se sabe más o menos, o con toda claridad, a dónde se quiere ir, pero no se sabe cómo; entonces resolver un problema es precisamente aclarar dicha situación y encontrar algún camino adecuado que lleve a la meta. [*“Resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no se consigue de forma inmediata, utilizando los medios adecuados”.* (G. Polya)]

A veces no sabremos si la herramienta adecuada para la situación está entre la colección de técnicas que dominamos o ni siquiera si se ha creado una técnica que pueda ser suficientemente potente para resolver el problema. Esta es precisamente la circunstancia del investigador, en matemáticas y en cualquier otro campo, y, por otra parte, ésta es la situación en la que nos encontramos a veces en nuestra vida normal.

La destreza para resolver genuinos problemas es un verdadero arte que se aprende con paciencia y considerable esfuerzo, enfrentándose con tranquilidad, sin angustias, a multitud de problemas diversos, tratando de sacar el mejor partido posible de los muchos seguros fracasos iniciales, observando los modos de proceder, comparándolos con los de los expertos y procurando ajustar adecuadamente los procesos de pensamiento a los de ellos. Es la misma forma de transmisión que la de cualquier otro arte, como el de la pintura, la música, etc.

Las estrategias que tendremos ocasión de aprender y ejercitar son:

- A. Comenzar resolviendo un problema semejante más fácil.
- B. Hacer experimentos, observar, busca pautas, regularidades... Hacer conjeturas. Tratar de demostrarlas.
- C. Dibujar una figura, un esquema, un diagrama.
- D. Escoger un lenguaje adecuado, una notación apropiada.
- E. Inducción.
- F. Supongamos que no es así.
- G. Supongamos el problema resuelto.
- H. Si tenemos una receta y estamos seguros de que se ajusta al problema, apliquémosla.

A. COMENZAR RESOLVIENDO UN PROBLEMA SEMEJANTE MÁS FÁCIL.

Esta estrategia se practica en multitud de circunstancias. El niño que aprende a andar en bicicleta no intenta lanzarse cuesta abajo por su cuenta a gran velocidad. Empieza con un triciclo para atender primero el problema de los pedales y del volante. Luego vendrá el problema del equilibrio y se ensayará con dos ruedas. Si se aprende a conducir un coche, lo mejor es circular primero despacio, sin necesidad de cambiar marchas, y en descampado, para poder jugar con el volante. Ya vendrán luego los problemas conduciendo en la calle.

En matemáticas sucede lo mismo. Si estudiamos derivadas, primero, las haremos sencillas, la de un monomio como x^2 , ... , luego pasamos a un polinomio y cuando sentimos cierta familiaridad con el proceso, nos lanzamos más lejos.

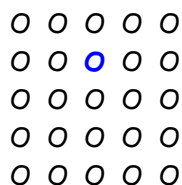
Un problema puede resultar difícil por su tamaño, por tener demasiados elementos que lo hacen enrevesado y oscuro. Para empezar, debemos resolver un problema semejante lo más sencillo posible. Luego lo complicaremos hasta llegar al propuesto inicialmente.

Procediendo así, obtenemos varios provechos:

- a. **De orden psicológico.** Empezamos animándonos con el probable éxito.
- b. **De orden racional.** En el problema sencillo suelen aparecer, más transparentes, principios de solución que estaban confusos y opacos en medio de la complejidad del problema inicial.
- c. **Manipulación más fácil.** La manipulación efectiva en un problema de pocas piezas es más fácil que en uno de muchas.

La simplificación de un problema se puede lograr no sólo reduciendo su tamaño, sino también imponiendo alguna condición adicional que no está en el problema propuesto. Incluso, aunque parezca al principio que tu simplificación es demasiado drástica, se comprueba con frecuencia cómo la ayuda del problema simplificado es muy efectiva.

UNA MOSCA ANTOJADIZA. Colocamos sobre la mesa 25 monedas iguales en la siguiente posición:



Una mosca viene volando y se posa sobre una de ellas (la indicada). Se le ocurre hacer un paseo andando por las 25 monedas, pero, pasando de una moneda a otra horizontalmente y verticalmente y sin repetir moneda. ¿Lo podrá hacer? ¿Qué itinerario sería el adecuado para cada moneda en la que se pueda posar?

Solución. Son muchas 25 monedas. Vamos a probar con menos, por ejemplo, con $2 \times 2 = 4$ monedas. Así:



Es obvio que se pose donde se pose, la mosca tiene el camino bien fácil.

Probemos con $3 \times 3 = 9$ monedas. Así:



Si la mosca se posa en una esquina también lo tiene fácil. Si se posa en el centro, también. Pero si se posa en cualquier otra moneda, como fácilmente se observa, lo tiene imposible.

Así, en el caso de $3 \times 3 = 9$ monedas, a veces se puede hacer el paseo, y otras no. Podemos sospechar que en el de $5 \times 5 = 25$ monedas suceda algo parecido.

¿Por qué no se puede hacer el paseo en algunos casos cuando hay 9 monedas?

Señalemos los centros de las monedas con coordenadas:

$(-1,1)$ $(0,1)$ $(1,1)$
 $(-1,0)$ $(0,0)$ $(1,0)$
 $(-1,-1)$ $(0,-1)$ $(1,-1)$

Es curioso: los puntos desde los que el paseo no se puede hacer son $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$! En ellos, la suma de las coordenadas es impar. En los restantes, la suma de las coordenadas es par. Llamaremos pares a estos vértices y, a los otros, impares.

Hay cuatro vértices impares y cinco pares. El paseo de la mosca, empezando por un vértice impar, sería:

Impar \Rightarrow Par \Rightarrow Impar \Rightarrow Par \Rightarrow ...

Si terminase en impar, habría más vértices impares que pares. Si terminase en par, habría igual número de las dos clases. Ambas cosas son falsas. ¡La mosca no puede hacer el paseo saliendo de un vértice impar!

Esto da luz más que suficiente para tratar el caso de 5×5 monedas. El camino en los casos en los que se puede hacer se encuentra fácilmente.

B. HACER EXPERIMENTOS, OBSERVAR, BUSCAR PAUTAS, REGULIDADES, ..., HACER CONJETURAS. TRATAR DE DEMOSTRARLAS.

En matemáticas las buenas ideas surgen muy a menudo a través de experimentos, al igual que en el resto de las ciencias. Pero los experimentos matemáticos son mucho más fáciles de realizar y menos costosos. Los hay de muy diversos tipos:

- Ensayos en casos particulares la aparición de una cierta propiedad.
- Mirar ciertas figuras, imágenes, dibujos, cambiándolas, introduciendo elementos auxiliares, a fin de enlazar diversas situaciones y de establecer conexiones que sospechamos que existen entre los objetos que manipulamos.

Con el experimento y la observación surge la conjetura. Se sigue experimentando con nuevos casos, tratando de contrastar, de poner a prueba la conjetura. Si también en ellos sucede lo que se barrunta, la conjetura va adquiriendo más fuerza. Si en algún caso no sucede lo que se espera, hay que modificar la conjetura inicial hasta dar con una que cubra todos los casos observados. Luego vendrá la tarea de dar con la razón por la cual la conjetura se verifica siempre, con la demostración de la conjetura. Entonces se sabrá que la conjetura tiene que verificarse en todos los casos posibles.

Los siguientes ejemplos dan una idea de la variedad de experimentos que se pueden llevar a cabo.

NOGALEROS Y NUECES ROTAS. Los 18 socios de la Cofradía de Nogaleros Unidos reciben en su local de Villafría de la Sierra a los 11 miembros de la Hermandad de la Buena Nuez, del pueblo vecino, para hablar de sus problemas comunes. Cuando van a saludarse a Isidro se le ocurrió una feliz idea: Aprovechemos cada apretón de manos para partir una nuez. Así lo hicieron. ¿Cuántas nueces pudieron partir con sus saludos?

Solución. Imagina que la cofradía tiene 4 socios y sus visitantes son 3. Haz el diagrama de saludos. Ve aumentando el número de socios ... Saludos = $18 \times 11 = 198$.

UN NÚMERO MÁGICO. Se elige un número cualquiera de 3 cifras, no todas iguales, por ejemplo 373. Se construye otro ordenando sus cifras de mayor a

menor: 733. Ahora se las ordena de menor a mayor: 337. Al restar estos dos números se obtiene: $733 - 337 = 396$.

Se repite la operación unas cuantas veces con el resultado 396 y los sucesivos. ¿Qué se observa? ¿Cuál es la razón? ¿Qué pasa con un número de dos o de cuatro cifras al hacer un proceso semejante?

DÍGITOS FINALES DE LAS POTENCIAS. ¿Cuáles son los dígitos finales de las potencias de exponente 23 de los números 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38 y 39?

Solución. En su resolución, la experimentación juega un papel decisivo. Podría uno pensar en calcular tales potencias, pero no hay ordenador que nos proporcione números tan enormes.

Enseguida surge la idea de que 37^{23} , por ejemplo, termina en lo mismo que 7^{23} y así nuestro problema se reduce a ver en qué dígito terminan:

$$1^{23}, 2^{23}, 3^{23}, \dots, 9^{23}$$

Experimentando un poco, vemos que 1^{23} termina en 1; 5^{23} termina en 5; 6^{23} termina en 6. La cosa es muy sencilla en estos casos.

Experimentamos un poco más haciéndonos una tabla de la cifra final de las potencias sucesivas para los primeros números.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2 termina en	1	4	9	6	5	6	9	4	1
n^3 termina en	1	8	7	4	5	6	3	2	9
n^4 termina en	1	6	1	6	5	6	1	6	1
n^5 termina en	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^6 termina en	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Y así sucesivamente.

Sin necesidad de seguir con la tabla, ahora está claro que, al aumentar exponente en 4 unidades, resultan los mismos dígitos finales. Así:

$$n^9, n^{13}, n^{17}, n^{21}$$

terminan en n y n^{23} termina en lo mismo que n^3 . Es decir:

$$1^{23}, 2^{23}, 3^{23}, 4^{23}, 5^{23}, 6^{23}, 7^{23}, 8^{23}, 9^{23}$$

terminan, respectivamente, en:

$$1, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, 9$$

Además, de esta experimentación que hemos hecho resulta que, si:

$$k = 4i + s, s=1,2,3,4$$

entonces n^k termina en lo mismo que n^s . Así, por ejemplo, 7^{86} termina en lo mismo que 7^2 , pues $86=21 \times 4 + 2$. Es decir, 7^{86} termina en 9.

CONTANDO DIAGONALES. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono convexo de 85 lados?

C. DIBUJAR UNA FIGURA, UN ESQUEMA, UN DIAGRAMA.

Las matemáticas se comprenden a través de los sentidos, pues *"no hay nada en el intelecto que no haya estado primero en los sentidos"*. (Aristóteles)

Hay muchos problemas que se hacen muy transparentes cuando se logra encontrar una representación visual adecuada de los elementos que en él intervienen. Pensamos mucho mejor con el apoyo de las imágenes que con el de palabras, números, símbolos solamente.

Por eso es muy aconsejable, a fin de dar con ideas buenas que sirvan para resolver el problema, esquematizar y dibujar, incluso pintar de colores, para mayor claridad, los elementos que aparecen en la situación estudiada. La imagen o diagrama que fabriquemos de un problema, debe, de alguna forma sencilla, incorporar los datos relevantes y suprimir los superfluos que pueden conducir a confusión. De esta forma pueden quedar resaltadas visualmente las relaciones entre los aspectos importantes del problema y de ahí muy a menudo, se desprenden luces que clarifican sustancialmente la situación.

JUGANDO A LAS CARTAS. Las señoras X, Y, Z, una argentina, una española y una brasileña, aunque no por este orden, están jugando a las cartas, sentadas alrededor de una mesa camilla. Cada una ha pasado una carta a la que se sienta a su derecha. La señora Y ha pasado a la argentina. La señora X ha pasado una carta a la señora que ha pasado una carta a la brasileña. ¿Cuál es la nacionalidad de X, Y y Z?

Solución. Dibujamos las dos posibilidades de la situación.

Posibilidad A		Posibilidad B	
X		X	
Y	Z	Z	Y

Introduzcamos el dato: "La señora Y ha pasado a la argentina".

Posibilidad A		Posibilidad B	
X		X=Arg	
Y	Z=Arg	Z	Y

Introduzcamos el dato: "La señora X ha pasado una carta a la señora que ha pasado una carta a la brasileña".

Posibilidad A		Posibilidad B	
X		X=Arg	
Y	Z=Arg=Bra	Z	Y=Bra
Descartada		Aceptada	

Luego: X=Argentina; Y=Brasileña; Z=Española.

D. ESCOGER UN LENGUAJE ADECUADO, UNA NOTACIÓN APROPIADA.

Usar una buena notación es muy útil en álgebra.

Sucede muchas veces que el ser o no capaz de resolver un problema depende fundamentalmente de que el estilo de pensamiento aplicado sea o no el adecuado al problema. Por eso hay que pensar bien antes de empezar a trabajar. ¿Será bueno utilizar un lenguaje geométrico, o bien un simple diagrama, o tal vez vendrá bien aquí un lenguaje algebraico, o analítico? ¿Tal vez lo que venga bien sea una modelización con papel, cartón...?

La adopción de un modo apropiado de encarar un problema tiene su importancia. Lo que es un lenguaje adecuado o un lenguaje inadecuado, se puede entender en los siguientes ejemplos.

EL MONJE EN LA MONTAÑA. Un monje decide subir desde su ermita a la montaña para pasar allí la noche orando. Sale de la ermita a las 9 de la mañana y después de caminar todo el día llega a la cumbre. Allí pasa la noche y a la mañana siguiente, a las 9 de la mañana, emprende el camino a su ermita por el mismo sendero, y a mayor velocidad. Al ir bajando, se pregunta: ¿Habrá algún punto del camino en el que hoy esté a la misma hora que estuve ayer?

Solución. Una mente inclinada matemáticamente comienza, tal vez, por hacerse una gráfica de la caminata del monje en cada uno de los días. Tiene pocos datos para ello. Se los inventa. Con un poco de trabajo verá, seguramente, la luz...

Una mente menos inclinada matemáticamente puede tener la idea de hacer descender a un monje ficticio, en el mismo día que el monje real sube, replicando exactamente el camino de bajada que el monje real hace al día siguiente. Como salen a la misma hora, es claro que a alguna hora se encuentran en el camino. Las matemáticas están de sobra.

EL PROBLEMA DE JOSEPHUS. En su libro De Bello Judaico, Hegesipo cuenta que cuando los romanos capturaron la ciudad de Jotapat, Josephus y otros cuarenta judíos se refugiaron en una cueva. Allí decidieron los 41 judíos suicidarse antes que entregarse. A Josephus y otro amigo la idea no les gustaba. Propusieron hacerlo, pero con orden. Se colocarían en círculo y se irían suicidando contando tres a partir de un entusiasta que a toda costa quería ser el primero. ¿En qué lugares se colocaron Josephus y su amigo para ser los dos últimos y, una vez en mayoría absoluta, decidir que no estaban de acuerdo con la automasacre?

Solución. El problema tiene sabor matemático y se pueden ensayar herramientas matemáticas. Pero resulta más sencillo colocar en círculo 41 papelillos con un número 1,2,3,...,40,41 cada uno y luego ir simulando los suicidios para ver qué dos papelillos quedan los últimos. Se colocaron en los lugares 16 y 31.

Naturalmente, que si se quiere obtener un resultado general con m judíos que se suicidan contando de n en n , hay que acudir a consideraciones más matemáticas.

Una vez decidido el modo de pensamiento, hay que dedicar un rato a pensar en la forma concreta de aplicarlo. Normalmente hay que buscar la simplicidad, la simetría, los elementos que, de una forma más sencilla, ponen bien en claro lo más relevante del problema. Si se utiliza un diagrama o un esquema, hay que procurar que éste incorpore lo esencial del problema, sin detalles superfluos que pueden perturbar la comprensión y oscurecer lo verdaderamente importante.

Si el enfoque es algebraico, hay que prestar atención a la notación empleada. En lo posible, ésta debe representar, de la forma más cómoda y manejable, los datos del problema y su posible vinculación con lo que se busca.

Los siguientes ejemplos ponen de manifiesto la importancia de una elección adecuada del lenguaje y de la notación.

PRODUCTO DE CUATRO ENTEROS CONSECUTIVOS. Observemos las igualdades:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 = 5^2 - 1$$

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 = 11^2 - 1$$

$$3 \times 4 \times 5 \times 6 = 360 = 19^2 - 1$$

¿Será verdad que el producto de cuatro enteros consecutivos es siempre un cuadrado perfecto menos 1?

Solución. El producto de cuatro números enteros consecutivos se puede expresar así: $a(a+1)(a+2)(a+3)$ con a entero. Probar que esto es p^2-1 , con p entero, parece engorroso.

Si M es el centro de los cuatro enteros, su producto es:

$$(M-3/2)(M-1/2)(M+1/2)(M+3/2) = (M^2-9/4)(M^2-1/4) = (M^2-5/4)^2-1 \text{ y es fácil ver que } M^2-5/4 \text{ es un entero.}$$

$$\text{Por ejemplo así: } M^2-5/4 = (x+1/2)^2-5/4 = x^2+1/4+x-5/4 = x^2+x-1.$$

E. INDUCCIÓN.

La inducción matemática es uno de los métodos de demostración utilizados con mayor frecuencia en algunos campos de la matemática.

La idea se entiende con facilidad: Imaginemos delante de nosotros las 28 fichas del dominó colocadas de pie, en fila india, y de forma que si cae una, cae seguro la siguiente. Un gracioso tira la primera hacia la segunda. ¿Qué pasará? ¡Se caerán todas! Esto viene a ser la inducción.

Podemos considerar los números 1, 2, 3, 4, ... como las fichas del dominó. Suponemos seguro, demostrar, que si uno cualquiera de estos números tiene una cierta propiedad P, entonces también el siguiente la tiene. A continuación nos aseguramos de que el primero, el 1, tiene la propiedad P. ¿Conclusión? Claramente todos los números naturales tienen la propiedad P. A veces se puede probar que el número 25 tiene la propiedad P, pero no el 1. Entonces, claro está, se concluye que todos, a partir del 25, tienen la propiedad.

Resumiendo, hay dos cosas importantes de las que cerciorarse:

- Si h tiene la propiedad P, entonces también $h+1$ tiene la propiedad P.
- El número 1 (o tal vez el 25), tiene la propiedad P.

El siguiente ejemplo indica la forma de proceder y es útil para practicar.

SUMA DE IMPARES. Demuestre que la suma de los n primeros números naturales impares es igual a n^2 . Es decir: $1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$.

Solución. El número 1 tiene la propiedad, pues $1 = 1^2$.

Supongamos que k tiene la propiedad, o sea:

$$1+3+5+\dots+(2k-1) = k^2 \text{ (hipótesis inductiva).}$$

La suma de los primeros $k+1$ impares es: $1+3+5+\dots+(2k-1)+[2(k+1)-1]$.

Si usamos la hipótesis inductiva, $1+3+5+\dots+(2k-1)+[2(k+1)-1] =$

$$k^2+[2(k+1)-1] = k^2+2k+1 = (k+1)^2 \text{ y por lo tanto } k+1 \text{ tiene esa propiedad.}$$

Repasemos el esquema de la demostración precedente:

Primero comprobamos que la propiedad P era válida para $k=1$. Luego demostramos que si la propiedad P era cierta para k (hipótesis inductiva) entonces era también cierta para $k+1$. De estas dos cosas concluimos que la propiedad P es verdadera para todos los números naturales.

F. SUPONGAMOS QUE NO ES ASÍ.

Probablemente las matemáticas nos han habituado ya a la siguiente forma de razonar para demostrar que una cierta situación A es verdadera. Suponemos que no lo es, es decir, que se verifica $\text{NO } A$. Vamos deduciendo correctamente consecuencias de $\text{NO } A$ y nos encontramos, por fin, con una que dice algo absurdo; por ejemplo, que $2=3$. Entonces está claro que nuestro punto de partida $\text{NO } A$ es falso. Es decir, que A es verdadero. Este es un proceso de pensamiento muy usual en la resolución de problemas. Tal vez a través de una serie de experimentos hemos llegado a la conjetura de que se verifica una cierta situación P .

¿Cómo demostrar que la conjetura P es cierta? Se parte de $\text{NO } P$ y se analiza qué se deduce de ahí, tratando de llegar a una contradicción con algún hecho, principio, teorema o hipótesis que se da por cierto. Si se consigue, se ha terminado.

$\sqrt{2}$ NO ES UN NÚMERO RACIONAL. (*)

Solución. En efecto: Supongamos que (*) es falsa. Tenemos que $\sqrt{2}$ es un número racional. Es decir: $\sqrt{2} = a/b$ con a y b enteros. Podemos suponer, además, que $\text{MCD}(a,b) = 1$ (es decir que la fracción a/b fue simplificada todo lo posible). Se tiene, elevando al cuadrado que $2b^2 = a^2$.

Entonces a^2 es un número par. Entonces a es un número par. Entonces $a = 2k$. Entonces $a^2 = 4k^2$, entonces $b^2 = 2k^2$. Entonces b^2 es par, luego b es par. Pero si a y b son pares, $\text{MCD}(a,b)$ es distinto de 1. Contradicción. Luego, (*) es verdadera.

NÚMEROS PRIMOS. Demuestre que hay infinitos números primos.

Solución. Supuesta formada una tabla de números primos, sea P el mayor primo obtenido. Demostremos que hay un número primo mayor que P .

El número $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot P) + 1$ es mayor que P . Si este número es primo ya está demostrado. Si es compuesto, admitirá un divisor primo, y este divisor primo será mayor que P , pues el número en cuestión no es divisible por ninguno de los números primos inferiores a P , ya que en todas las divisiones se obtiene resto igual a 1. Por tanto, no puede haber un número finito de números primos.

6. SUPONGAMOS EL PROBLEMA RESUELTO.

Se aplica muchísimo en construcciones geométricas.

Un buen modo de descubrir el mejor camino para escalar una montaña, aunque un poco caro, consiste en colocarse arriba con un helicóptero y desde allí estudiar los caminos posibles. En la resolución de problemas, este procedimiento es barato y de uso corriente.

SUMAR SU CUADRADO. Buscar un número tal que si le sumamos su cuadrado resulte 30.

Solución. No sabemos cuál es, pero procedemos como si lo supiéramos. Lo llamamos x y sabemos que tiene que pasar que $x + x^2 = 30$ y ahora nos las ingeniamos para hallar x .

MÍNIMO RELATIVO. Buscar un valor donde la función $f(x)=x^3-3x+1$ tenga un mínimo relativo.

Solución. No sabemos cuál es, ni siquiera sabemos si lo habrá, pero procedemos como si lo supiéramos. Lo llamamos a y sabemos que si en él hay un mínimo, entonces la derivada f' en ese punto es 0. $f'(a)=3a^2-3=0$. Así sólo tenemos que mirar si en $a=1$ ó en $a=-1$ hay un mínimo relativo.

H. SI TENEMOS UNA RECETA Y ESTAMOS SEGUROS DE QUE SE AJUSTA AL PROBLEMA, APLÍQUEMOSLA.

¿Para qué gastar materia gris sin necesidad? Está claro que la matemática está muy lejos de ser una colección de recetas. La matemática es un ejercicio de la imaginación y del pensamiento.

Pero si estamos seguros de que un problema cae dentro de un tipo de cuestiones que ya has visto antes y para las que tenemos el camino abierto, no hay que dudar, aplicamos el método, la rutina, la rutina que se ha aprendido. Gracias a las rutinas, el pensamiento queda libre para ir más adelante.

Esta estrategia sólo tiene sentido, dentro de la actividad matemática, si va acompañada de las demás. Después de mucho indagar, se llega a una ley, una fórmula, una receta. Usémosla.

PROBLEMAS

MENTALES

Problemas para resolver mentalmente, sin lápiz ni papel y en un tiempo prefijado, generalmente unos cuantos segundos.

1. **DOBLE Y MITAD.** ¿Cuál es el doble de la mitad del doble de 2?
2. **SUMA DE CINCO CONSECUTIVOS.** La suma de 5 números naturales consecutivos es 2.000. ¿Cuánto vale el mayor de ellos?
3. **EL GRAN TORNEO.** En un torneo de ajedrez por el sistema de liguilla, se celebraron un total de 300 partidas. Cada jugador juega con cada uno de los demás una vez solamente. ¿Cuántos jugadores tenía el torneo? ¿Cuántas partidas jugó cada jugador?
4. **HABLAR BIEN.** ¿Cómo debe decirse: siete y cinco son trece o siete más cinco son trece?
5. **EL CUENTAKILÓMETROS.** El cuentakilómetros de mi coche muestra 72927 km que es un número palíndromo. ¿Cuántos km debo recorrer, como mínimo para poder ver otro palíndromo en el cuentakilómetros?
6. **BOLI Y LÁPIZ.** Un bolígrafo cuesta 30 ptas. más que un lapicero. Las dos cosas juntas cuestan 100 ptas. ¿Cuánto cuesta cada una?
7. **OTRA VEZ EL ORIGINAL.** El precio de un cierto artículo estaba rebajado un 20% para su venta. ¿Qué tanto por ciento debe aumentarse el precio del artículo para que de nuevo tenga el precio original?
8. **¿SABE DIVIDIR?** Si divide once millares, once cientos y once entre tres. ¿Qué resto le queda?
9. **PARES CONSECUTIVOS.** La suma de dos números pares consecutivos es 66. ¿Cuáles son esos números?
10. **ESCRIBIENDO A MÁQUINA.** Carmen pulsa 50 caracteres cada 10 segundos mientras Rosa no pulsa más que 40 en el mismo tiempo. ¿Cuánto tiempo emplearán entre las dos para pulsar 360 caracteres en total?

11. DE DESCUENTOS. Un descuento del 10% y otro del 20%, aplicados sucesivamente a un artículo, son equivalentes a un descuento, ¿de cuánto?

12. FAMILIA COMIENDO. Una familia se reúne para comer. Si cada miembro de la familia come 6 trozos de chorizo, sobran 5, pero si cada uno come 7 faltan 8. ¿Cuántos miembros componen la familia?

13. EN UN MILENIO. ¿Cuántos siglos hay en un milenio?

14. LAS CAJAS. Tenemos tres cajas, individuales y separadas del mismo tamaño. Dentro de cada caja hay otras dos más pequeñas y en cada una de éstas otras cuatro aún menores. ¿Cuántas cajas hay en total?

15. AÑOS BISIESTOS. ¿Cuántos años bisiestos hay entre el año 1000 y el año 2000 ambos inclusive?

16. DECEPCIÓN TRIANGULAR. ¿Cuál es el área del triángulo de lados 94, 177 y 83?

17. PIENSE DESPACIO. ¿Qué número multiplicado por 3 es los $\frac{3}{4}$ de 120?

18. DIVIDIENDO Y SUMANDO. Si Vd. divide 30 por un medio y le suma al resultado 10, ¿cuánto le da?

19. EL GANADERO Y EL PIENSO. Un ganadero tiene pienso para alimentar una vaca durante 27 días y si fuera una oveja para 54 días. ¿Para cuántos días tendría si tuviese que alimentar a la vaca y a la oveja?

20. LOS GRIFOS. Un grifo llena un depósito de agua en una hora. Otro grifo llena el mismo depósito en dos horas. ¿En cuánto tiempo lo llenarán los dos juntos?

21. BUSCANDO, BUSCANDO. Busque un número que multiplicado por el doble de 3 nos dé 5.

22. MULTIPLICANDO. ¿Qué dos números naturales hay que multiplicar entre sí para que su producto sea 47?

23. DOCENAS DE SELLOS. Si en una docena hay doce sellos de seis céntimos, ¿cuántos sellos de dos céntimos hay en una docena?

24. MÚLTIPLOS PRIMOS. De todos los múltiplos de un número primo, ¿cuántos son primos?

25. EN ROMANOS. Operando en números romanos, ¿cuánto vale $C - LXXIX$?

26. LA HORA. ¿Qué hora es cuando faltan 90 minutos para la una?

27. SUPERTRUCO DE MAGIA. Piense un número del 2 al 9. Multiplíquelo por 9. Sume los dos dígitos del resultado. Réstele 5. ¿Qué resultado obtendrá?

28. PRODUCTO TOTAL. Si $A \times B = 24$; $B \times C = 24$; $C \times D = 32$ y $B \times D = 48$, ¿cuánto vale $A \times B \times C \times D$?

29. EL PALO Y LA VARA. ¿Qué altura tiene un palo que es cinco metros más corto que una vara de doble altura que el palo?

30. PROBABLE COLISIÓN. Dos lentos trenes van por la misma vía en sentido contrario, uno al encuentro del otro. Les separa una distancia de 87 km. Un tren va a 25 km/h y el otro a 35 km/h. ¿A qué distancia estarán un minuto antes de colisionar?

31. PAR O IMPAR. El cuadrado de un n° natural impar, ¿es par o impar?

32. MEDIO METRO. ¿Qué es mayor medio metro cuadrado o la mitad de un metro cuadrado?

33. CON CUATRO NUEVES. ¿Cómo se deberían colocar 4 nueves para que sumen 100?

34. CON CUATRO UNOS. ¿Cuál es el mayor número que puede escribirse con cuatro unos?

35. LAS 3 PASTILLAS. Un médico le receta a Vd. 3 pastillas y le dice que se tome una cada media hora. ¿Cuántos minutos le duran a Vd. las pastillas?

36. GASTANDO. Tenía 57 ptas. y me he gastado todas menos 12. ¿Cuántas me quedan?

37. CONTESTE MUY RÁPIDO. Imagínese participando en una carrera ciclista. Si en un momento determinado adelanta Vd. al segundo, ¿en qué lugar se colocaría?

38. CONTESTE EN 2 SEGUNDOS. Imagínese participando en una carrera ciclista. Si en un momento determinado adelanta Vd. al último, ¿en qué lugar se colocaría?

39. BEBIENDO. Seis hombres beben cerveza en un bar. En total bebieron 21 vasos. Si cada uno de ellos ha bebido distinto número de vasos, ¿cuántos ha bebido cada uno?

40. HOYOS Y CANICAS. El otro día jugando a las canicas me sucedió lo siguiente: si ponía una canica en cada hoyo me sobraba una canica y si ponía dos canicas en cada hoyo me faltaban dos canicas. Ya no recuerdo cuántas canicas tenía ni cuántos hoyos había en el suelo, ¿me podría ayudar Vd.?

41. 120 CON 4 OCHOS. ¿Sabría Vd. escribir 120 con cuatro ochos?

42. EL FRUTERO. El frutero vendió en el mercado, la mitad de los melones que llevaba más medio melón. Después se comió el melón que le quedó. ¿Cuántos melones llevó al mercado?

43. CON SEIS UNOS. Escriba 24 con seis unos y las operaciones elementales.

44. BORRANDO CIFRAS. Borre 10 cifras del número adjunto de manera que el número que quede sea lo más grande posible.

12345123451234512345

45. LOS TORNILLOS. En un saco hay 24 kg de tornillos. ¿Cómo podemos pesar 9 kg usando una balanza?

46. LAGARTOS Y GORRIÓN. Cien lagartos y un gorrión, ¿cuántos picos y patas son?

47. CUATRO LUNES, CUATRO VIERNES. En un mes de enero de cierto año hay exactamente cuatro viernes y cuatro lunes. ¿En qué día de la semana cae el 20 de enero?

48. ¿CUÁNTOS GATOS? Una habitación tiene cuatro rincones. En cada rincón hay sentado un gato. Frente a cada gato hay sentados tres gatos. En cada rabo hay sentado un gato. ¿Cuántos gatos hay en total en la habitación?

49. SIN PAPEL NI BOLI. ¿Cuál es el valor de $19 \times 13 + 13$?

50. LAS FLORES. ¿Cuántas docenas salen con 180 flores?

51. EDAD DE LUIS. El cuadrado de la edad de Luis es la cuarta parte del cuadrado de la de Juan que es la mitad de 20. ¿Cuál es la edad de Luis?

52. EL CUADRADO. Un cuadrado tiene 144 m^2 de área. ¿Cuál es su perímetro?

53. MINUTOS. ¿Cuántos minutos son 6 horas y media, 25 minutos y 120 segundos?

54. PRODUCTO DE DEDOS. Tome el número de sus dedos de las manos, multiplíquelo por el número de dedos de sus pies, divida el resultado por $1/2$ y sume el número de meses del año. ¿Qué número obtiene?

55. LA FAMILIA. Una madre y un padre tienen 6 hijos y cada hijo tiene una hermana. ¿Cuántas personas componen la familia?



56. PLÁTANOS. Juan compró un kilo de plátanos el lunes y se comió la tercera parte de ellos. El martes se comió la mitad de los que le quedaban. El miércoles se comió los dos que le quedaban. ¿Cuántos plátanos compró el lunes?

57. EL ESTABLO. En un establo hay gallos y caballos. Entre todos hay 22 cabezas y 72 patas. ¿Cuántos gallos y cuántos caballos hay en el establo?

58. GRANDE, GRANDE. ¿Cuál es el mayor número que se puede escribir solamente con dos dígitos?

59. LAS NUECES. Alicia, Benito, Carlos, David y Enrique conjeturaban sobre el número de nueces que había en un tarro. Alicia decía que 30, Benito pensaba que 28, Carlos conjeturaba que 29, David conjeturaba que 25 y Enrique decía que 26. Dos se equivocaron en una nuez, uno se equivocó en 4, otro en 3 y uno acertó. ¿Cuántas nueces había en el tarro?

60. BUÑUELOS. A Carlos le encantan los buñuelos. Puede comerse 32 en una hora. Su hermano se comería los 32 en 3 horas. ¿En cuánto tiempo se comerían 32 buñuelos entre Carlos y su hermano?

61. EDADES. Las edades del padre y del hijo suman 66. La edad del padre es la edad del hijo invertida. ¿Qué edades tienen? *(3 soluciones posibles)*

62. NÚMERO DE 4 CIFRAS. Halle el número de cuatro cifras tal que: La 2ª cifra es menor que la 4ª. La 4ª es $\frac{2}{3}$ de la 1ª. La 1ª es $\frac{2}{3}$ de la 3ª. La 3ª es triple que la 2ª.

63. ANIMALES DOMÉSTICOS. Todos los animales domésticos de mi vecina son perros menos uno y todos son gatos menos uno. ¿Cuántos perros y gatos tiene mi vecina?

64. CUMPLEAÑOS. ¿Cuántos "cumpleaños" puede celebrar una persona que viva 50 años?

65. LOS PASEOS DEL PERRO. Mi hermano saca a pasear a su perro tres veces al día. Cada paseo dura 13 minutos. ¿Cuántas veces saca a pasear al perro en un año?

66. EL TONEL. Un tonel lleno de vino tiene un peso de 35 kg. Cuando está lleno hasta la mitad pesa 19 Kg. ¿Cuánto pesa el tonel vacío?

67. LOS GATOS. En una habitación cuadrada hay 2 gatos en cada rincón. Enfrente de cada gato hay 2 gatos y al lado de cada gato hay un gato. ¿Cuántos gatos hay en la habitación?

68. OTRO NÚMERO DE 4 CIFRAS. Halle el número de cuatro cifras tal que: La 1ª cifra es $\frac{1}{3}$ de la 2ª. La 3ª es la suma de la 1ª y la 2ª. La 4ª es tres veces la 2ª.

69. SUMA DE CONSECUTIVAS. ¿Qué tres números consecutivos suman 9.000?

70. QUEBRADOS. ¿Qué número es $\frac{2}{3}$ de la mitad de $\frac{1}{4}$ de 240?

71. MÁS QUEBRADOS. ¿Qué número es $\frac{2}{3}$ del doble del triple de 5?

72. LOS CAZADORES. Cinco personas cazan 5 animales en 5 días. ¿Cuántas personas cazarán un animal en un día?



73. LOS CERDOS. Juan y Benito tienen cerdos. Juan: *Si me das 2 cerdos tuyos tendremos el mismo número de cerdos.* Benito: *Si me los das tú a mí, yo tendré el doble.* ¿Cuántos cerdos tiene cada uno?

74. LOS TRESES. Escribo todos los números comprendidos entre 300 y 400. ¿Cuántas veces aparece el dígito 3?

75. LOS SALUDOS. Cuatro personas se saludan con un apretón de manos. ¿Cuántos apretones de manos hubo?

76. LOS PINTORES. Un pintor puede pintar una habitación en 4 horas. Otro pintor puede pintarla en 2 horas. ¿Cuánto tardarían si la pintasen trabajando juntos?

77. LARGO PRODUCTO. ¿Cuál es el producto de todos los números enteros no negativos menores que 10?

78. UN EURO. ¿Cómo se puede conseguir exactamente un euro con 50 monedas? Sin utilizar monedas de 2 céntimos.

79. LA TELA COLOREADA. Un trozo de tela se colorea como sigue: $\frac{3}{4}$ partes de negro y los 80 cm. restantes de rojo. ¿Cuánto mide el trozo de tela?

80. OTRO NÚMERO. Halle el número que es la mitad de $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{10}$ de 400.

81. CUADRADOS PERFECTOS. ¿Cuántos números que sean cuadrados perfectos hay entre 1 y 1.000.000, ambos incluidos? *Ejemplos:* $16=4 \times 4$, $121=11 \times 11$

82. MENUDA ESCAVADORA. Un hombre tarda una hora en cavar un agujero de 2 metros de largo por 2 de ancho por 2 de profundo. ¿Cuánto tiempo tardaría el mismo hombre en cavar un agujero de 4 metros de largo por 4 de ancho por 4 de profundo? Se asume que cava a la misma velocidad.



83. LOS NEUMÁTICOS. Antonio recorrió con su bicicleta 300 km. Tres neumáticos fueron utilizados por igual para recorrer dicha distancia. ¿Cuántos kilómetros fue utilizado cada neumático?



84. MI ANTIGUO RELOJ. Tengo un reloj de bolsillo que se adelanta 8 minutos al día. ¿Cuánto tiempo se adelantará en media hora?

85. MADERERO CORTADOR. El maderero cobra 5 euros por cortar un tronco de madera en dos pedazos. ¿Cuánto cobrará por cortarlo en cuatro pedazos?

86. LA RUEDA DE LA BICI. Una rueda de mi bicicleta tiene 21 radios. ¿Cuántos espacios hay entre los radios?

87. CERDOS Y PALOMAS. En una jaula hay 30 ojos y 44 patas. ¿Cuántos cerdos y palomas hay en la jaula?

88. PROBLEMAS DE MATES. Para estimular a su hijo en el estudio de las matemáticas, un padre acuerda pagar a su hijo 8 céntimos de euro por cada problema solucionado correctamente. También, le quitará 5 céntimos por cada incorrecto. Al final de los 26 problemas quedaron en paz. ¿Cuántos problemas solucionó el hijo correctamente?

89. EL PADRE DE LOS HIJOS. ¿Qué será de Vd. el padre de los hijos del hermano de su padre?

90. SI LA MIRAS. Una casita con dos ventanicos. Si la miras, te pones bizco.

91. POR LOS PIES. ¿Quién es el que bebe por los pies?

92. SUMANDO IMPARES. Encuentre cuatro números impares consecutivos cuya suma sea 80.



93. EL MAZO. Un mazo de cartas (52 cartas) tiene un grosor de 13 mm. ¿Cuánto medirá si se le quitan los reyes? ¿Cuánto medirá si se le añaden 4 comodines? ¿Cuánto medirá si se le quitan todas las cartas cuyo número es primo?

94. DE FECHAS. Si del calendario del mes de marzo tachas todas las fechas en las que aparezcan cifras pares, ¿cuántas fechas quedan?

95. LOS DADOS. Tres dados idénticos están colocados formando una torre encima de una mesa. La cara inferior de cada dado marca los mismos puntos que la superior del dado que está debajo. ¿Cuántos puntos marca la cara que está en contacto con la mesa? Los puntos de la cara de arriba son 6.



96. DOSES Y CINCOS. El número 2000 se obtiene multiplicando sólo doses y cincos. ¿Cuántos de cada uno?

97. RECORTANDO. Si recortamos un vértice de un cuadrado de papel, ¿cuántos vértices tendrá el polígono resultante?

98. LA SUEGRA DE LA ESPOSA. ¿Qué será de Vd. la suegra de la esposa de su hermano?

99. HERMANA, ESPOSO E HIJO. ¿Qué será de Vd. el hijo del marido de su hermana?

100. EL RESTO. ¿Cuál es el resto de dividir entre 5 el cociente de dividir 55 entre 8?

ÁLGEBRA

Álgebra. Parte de las Matemáticas que se dedica en sus aspectos más elementales, a resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Los algoritmos de resolución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones han ocupado a muchos matemáticos a lo largo de la historia. Así, se conoce la existencia de problemas resueltos por procedimientos algebraicos, que datan del año 1900 a. C.. El lenguaje simbólico utilizado en estos procesos se atribuye a los árabes.

El arte de plantear ecuaciones

El idioma del álgebra es la ecuación.

*Isaac Newton en su manual de álgebra titulado **Aritmética Universal** escribió: "Para resolver un problema referente a números o relaciones abstractas de cantidades basta con traducir dicho problema, del inglés u otra lengua al idioma algebraico"*

También mostró con ejemplos como debía efectuarse dicha traducción. He aquí alguno de ellos:

EL COMERCIANTE. Escribimos el enunciado directamente en la tabla:

En lengua vernácula	Usando álgebra
Un comerciante tenía una cierta suma de dinero	x
El primer año se gastó 100 libras	$x-100$
Aumentó el resto con un tercio de éste	$(x-100) + (x-100)/3 = (4x-400)/3$
Al año siguiente volvió a gastar 100 libras	$(4x-400)/3 - 100 = (4x-700)/3$
y aumentó la suma restante en un tercio de ella	$(4x-700)/3 + (4x-700)/9 = (16x-2800)/9$
El tercer año gastó de nuevo 100 libras	$(16x-2800)/9 - 100 = (16x-3700)/9$
Después de que hubo agregado su tercera parte	$(16x-3700)/9 + (16x-3700)/27 = (64x-14800)/27$
El capital llegó al doble del inicial	$(64x-14800)/27 = 2x$

Para determinar cuál es el capital inicial del comerciante no queda más que resolver la última ecuación: $64x-14800=54x \Rightarrow 10x=14800 \Rightarrow x=1480$.

La solución de una ecuación es, con frecuencia, tarea fácil; en cambio, plantear la ecuación a base de los datos de un problema suele ser más difícil.

Hemos visto que el arte de plantear ecuaciones consiste, efectivamente, en traducir "la lengua vernácula a la algebraica". Pero el idioma del álgebra es lacónico en extremo, por eso no todos los giros del idioma materno son de fácil traducción. Las traducciones pueden ser muy distintas por el grado de su dificultad, como se verá.

Los problemas que aparecerán a continuación serán más o menos originales, por su enunciado, por el procedimiento de resolución, por la solución, etc. etc.

No siempre se darán las soluciones de forma algebraica.

101. ENCUESTA SOBRE EL VINO. Se hace una encuesta para saber si es rentable comercializar vino en polvo y vino en cubitos con los siguientes resultados: El 72,727272...% de las personas encuestadas no compraría vino en polvo y, el 74,594594...% de las personas encuestadas, no compraría vino en cubitos. ¿Cuál es el número mínimo de personas a las que se pasó la encuesta?

102. EL MERCADER DE DIAMANTES. Un mercader tiene 56 diamantes, de los cuales unos son gruesos y otros menudos. Este mercader repartió los diamantes entre dos vendedores, dándole 40 diamantes a uno y 16 al otro, repartiéndolos de tal forma que, al mismo precio, el que llevó 16 diamantes los vendió por 40 doblones, y el que llevó 40 diamantes los vendió por 16 doblones. ¿Cómo se ordenó esta venta?

103. LOS 8 PANES Y LAS 8 MONEDAS. Un pastor tiene 5 panes y otro 3 panes. Se encuentran con un cazador que no lleva comida. Juntan los 8 panes y los tres comen partes iguales. Al despedirse, el cazador les deja 8 monedas. ¿Cómo deben repartirse las monedas los pastores?

104. LOS 5 PANES Y LAS 5 MONEDAS. Un pastor tiene 3 panes y otro 2 panes. Se encuentran con un cazador que no lleva comida. Juntan los 5 panes y los tres comen partes iguales. Al despedirse, el cazador les deja 5 monedas. ¿Cómo deben repartirse las monedas los pastores?

105. EN EL HIPÓDROMO. Una tarde en el hipódromo de la Zarzuela me ocurrió algo curioso. En la 1ª carrera aposté por un caballo y la cantidad que tenía se ve doblada. Animado por ello, aposté en la 2ª carrera 600 ptas. por un ca-

ballo y las pierdo. En la 3ª carrera vuelvo a doblar mi haber. En la 4ª vuelvo a perder 600 ptas. La 5ª me permite doblar la cantidad que me quedaba. En la 6ª pierdo las 600 ptas. que me quedaban. ¿Sabe Vd. con cuánto dinero comencé?

106. VACACIONES CON LLUVIA. Durante mis vacaciones llovió 9 días, y hubo 10 mañanas y 9 tardes soleadas. Cuando llovió por la mañana, la tarde fue soleada. ¿Cuántos días duraron mis vacaciones?

107. COMO ANILLO AL DEDO. Mi primo Margarito tiene una cantidad fija de anillos y muchas ganas de usarlos todos. Poniéndose tres anillos por dedo, quedarían cuatro dedos desnudos. Pero poniéndose un anillo por dedo le sobrarían ocho anillos. ¿Cuántos anillos y cuántos dedos tiene mi primo Margarito?

108. LOS HUEVOS DE GALLINA Y DE PATO. Un vendedor de huevos tiene delante de él seis cestas con 29, 23, 14, 12, 6 y 5 huevos respectivamente. "Si vendo esta cesta me quedará el doble de huevos de gallina que de pato". ¿A qué cesta se refiere el vendedor?

109. 7 LLENAS, 7 MEDIO LLENAS Y 7 VACÍAS. Tres hermanos recibieron 21 botellas iguales de una partida de vino, de las cuales 7 estaban llenas, otras 7 medio llenas y las restantes 7 vacías. ¿Cómo repartirse las 21 botellas de modo que cada uno reciba el mismo número de botellas y la misma cantidad de vino sin destapar las botellas?

110. REPARTO EN LA BODEGA. En una bodega hay dos tipos de botellas, grandes y pequeñas. Las grandes contienen doble cantidad vino que las pequeñas. Disponemos de 12 botellas grandes, 7 llenas y 5 vacías, así como de 12 botellas pequeñas, 7 llenas y 5 vacías. Se desean repartir las 24 botellas entre 3 personas, de modo que cada una reciba el mismo número de botellas de cada tipo y la misma cantidad de vino. ¿Cómo se podrá hacer el reparto?

111. NEGOCIO PARA LOS TRES. Antonio tiene 18 millones de pesetas, Benito 12 millones y Carlos 6 millones. Reúnen su dinero para invertirlo en un negocio. Con el negocio al final del año, ganan 12 millones de pesetas. ¿Cómo se los repartirán?

112. LOS BUEYES DEL GRANJERO. Una pradera de 10 Ha. puede alimentar a 12 bueyes durante 16 semanas, o a 18 bueyes durante 8 semanas. ¿Cuántos

bueyes se podrán alimentar en una pradera de 40 Ha. durante 6 semanas, considerando que el pasto crece en forma regular todo el tiempo?

113. LA ESCALERA MECÁNICA (1). Al entrar en el metro, Antonio descendió por la escalera mecánica, andando al tiempo que la escalera se desplazaba, y alcanzó al andén tras 50 pasos. Se le ocurrió entonces, subir por la misma escalera; es decir, caminando en sentido contrario al desplazamiento de los peldaños, y alcanzó así la parte superior en 125 pasos. Suponiendo que Antonio hizo este segundo recorrido con una andadura cinco veces más rápido que la de descenso, esto es, que el número de pasos por unidad de tiempo en un caso y otro fue de cinco a uno, ¿cuántos escalones serán visibles si la escalera mecánica parase de funcionar?

114. LA ESCALERA MECÁNICA (2). Tengo la costumbre de subir andando por la escalera mecánica del Metro mientras funciona: subo 20 escalones con mi paso y tardo así 60 segundos exactamente; mientras que mi mujer sube solamente 16 escalones y tarda 72 segundos. Si mañana esa escalera no funciona, ¿cuántos escalones tendría que subir?

115. EL TERREMOTO LEJANO. Hacia el año 1915, una familia japonesa residente en Madrid, alarmada por los rumores sobre un terremoto ocurrido en Tokio, pone un radiograma a esta ciudad a las 8h 30m hora de Madrid, el cual llega a Tokio a las 19h 34m hora de Tokio; pero los parientes de este punto, previendo la intranquilidad, pusieron otro radiograma tranquilizador a las 17h 19m de Tokio, que llegó a Madrid $\frac{3}{4}$ de hora después de haber puesto el primero. Se desea saber la diferencia de hora entre Madrid y Tokio y la duración de transmisión del radiograma. *(Los datos numéricos son irreales).*

116. LAS PERPLEJIDADES DE LA SEÑORA PACA. La señora Paca solía coger el autobús en una parada de la calle Mayor para ir al mercado. No se preocupaba por los horarios, porque le servía un autobús de la línea P que uno de la línea Q. Sabía que de cada uno pasaban seis autobuses por hora y nunca había tenido que esperar mucho.

Sin embargo, le sorprendía que muy pocas veces cogía un Q. Decidió, pues, llevar la cuenta del tipo de autobús en que montaba y descubrió que viajaba en un autobús Q aproximadamente sólo una vez de cada diez.

La señora Paca estaba completamente perpleja. ¿Podría Vd. ayudarla a entender lo que pasaba?

117. EL PERRO Y EL GATO. Juntos perro y gato pesan 15 kilos. Si el peso del can es un número impar, y si el macho pesa el doble que la hembra, ¿cuánto pesa cada uno?

118. LOS MARINEROS, EL MONO Y LOS COCOS. Tres marineros y un mono arriban, tras un naufragio, a una isla desierta. Durante todo el día se dedican a recolectar cocos, con los que forman un montón común. Al llegar la noche, cansados por el trabajo realizado, se van a dormir dejando para el día siguiente el reparto de los cocos.

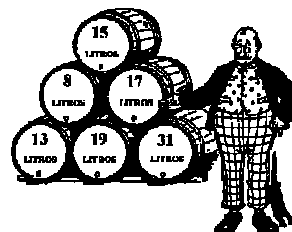
Durante la noche, uno de los marineros, desconfiando de los otros, decide hacerse con su parte, procediendo a formar tres montones iguales y guardándose uno de ellos. Como al hacerlo le sobra un coco, se lo da al mono.

El segundo marinero, teniendo la misma idea, procede en igual forma con los cocos que ha dejado el primero. Al hacer los tres montones le sobra un coco, que se lo da al mono.

Lo mismo ocurre con el tercer marinero, y al sobrarle un coco se lo da al mono.

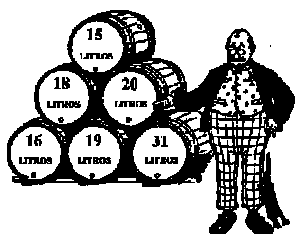
A la mañana siguiente, aunque el montón de cocos se encuentra reducido, los tres marineros se sienten igualmente culpables y no dicen nada, procediendo al reparto de los cocos. Al hacerlo les sobra uno, que se lo dan al mono. ¿Cuántas cocos había? a) Suponiendo que había menos de 100. b) Suponiendo que había entre 200 y 300.

119. ACEITE Y VINAGRE. En un almacén hay 6 barriles que contienen respectivamente 8, 13, 15, 17, 19 y 31 litros de aceite o de vinagre. El litro de aceite cuesta el doble que el de vinagre. Un cliente compra 1.400 ptas. de aceite y 1.400 ptas. de vinagre, dejando un solo barril. ¿Qué barril quedó?



120. LOS HERMANOS Y LOS MELONES. Los hermanos Pablo y Agustín van al mercado con 30 melones cada uno. Pablo vende 3 melones por un dólar (10 lotes) y obtiene 10 dólares. Agustín vende 2 melones por un dólar (15 lotes) y obtiene 15 dólares. Entre los dos llevan a casa 25 dólares (10+15=25).

Al día siguiente volvieron al mercado cada uno con otros 30 melones. Como no querían tener dos precios diferentes optaron por vender 5 melones por 2 dólares. Hecha la venta, 12 lotes (60/5=12), obtuvieron 24 dólares (12x2=24). ¿Dónde está el dólar que falta de 24 a 25?



121. BARRILES DE VINO Y CERVEZA. Un hombre adquirió cinco barriles de vino y un barril de cerveza. El contenido de los barriles era 15, 16, 18, 19, 20 y 31 litros. Vendió luego una cantidad de vino a un cliente y el doble de esta cantidad a otro, y ya sin que le quedara más vino, se guardó para sí el barril de cerveza. ¿Cuál es el barril de cerveza? Por supuesto, el hombre vendió los barriles tal como los

había comprado, sin trasegar ni cambiar para nada sus contenidos.

122. LA DIVISIÓN EN LA TASCA. El dueño de una tasca quiere dividir en dos partes iguales el líquido que lleva un recipiente de 16 litros. Para hacerlo no tiene a su disposición más que el recipiente original y dos recipientes vacíos con capacidades de 11 y 6 litros. ¿Cuántas operaciones de trasvase son necesarias para efectuar la partición sin perder ni una gota de líquido?

123. FACUNDO EL LECHERO. Facundo vende la leche que tiene en un recipiente grande. Para vender tiene 2 medidas, una de 7 litros y otra de 4 litros, dice que con estas le basta para vender cualquier cantidad de litros de leche a sus clientes. Puede usar ambas medidas y, ocasionalmente volver a volcar leche en el recipiente original. ¿Como hace para vender 1, 2, 3, 5 y 6 litros?

124. LOS VAGABUNDOS Y LAS GALLETAS. Cuatro vagabundos encontraron una gran cantidad de galletas, que acordaron dividir equitativamente entre ellos en el desayuno de la mañana siguiente. Durante la noche, mientras los otros dormían, uno de los hombres fue hasta la caja, devoró exactamente $\frac{1}{4}$ del total de las galletas, excepto una suelta que sobró, y que arrojó al perro a modo de soborno. Más tarde, un segundo hombre se despertó y se le ocurrió la misma idea, tomando $\frac{1}{4}$ de lo que quedaba, y dando la sobrante al perro. El tercero y el cuarto, a su vez, exactamente lo mismo, tomando $\frac{1}{4}$ de lo que encontraron, y arrojando la sobrante al perro. En el desayuno dividieron equitativamente lo que quedaba, y otra vez dieron la galleta sobrante al perro. Cada hombre notó la reducción en el contenido de la caja, pero creyéndose el único responsable, ninguno dijo nada. ¿Cuál es el menor número posible de galletas que podía haber habido en la caja en un principio?

125. LECHERO INGENIOSO. Un lechero dispone únicamente de dos jarras de 3 y 5 litros de capacidad para medir la leche que vende a sus clientes. ¿Cómo podrá medir un litro sin desperdiciar leche?

126. EL VENDEDOR DE VINO. Un vendedor de vino sólo tiene garrafas de 8 litros. Dos amigos quieren comprar una de estas garrafas a medias y repartírsela. El vendedor busca por la tienda y encuentra dos garrafas vacías, una de 3 litros y la otra de 5 litros. ¿Cómo se las podría arreglar para repartir la garrafa de 8 litros entre los dos amigos?

127. LA ALABARDA. Durante la guerra 1914-1918 fue descubierta la tumba de un soldado francés muerto el último día de un mes durante otra guerra, en Italia. La alabarda del soldado se encontraba a su lado.

El producto del día del mes inscrito en la lápida por la longitud en pies de la alabarda, por la mitad de los años transcurridos entre la muerte del soldado y el descubrimiento de su tumba, y finalmente por la mitad de la edad del comandante francés de la expedición en que murió el soldado, es igual a 451.066. ¿Quién era el comandante francés?

128. MANZANAS ENTERAS. Un hombre entró a un comercio y compró 2 manzanas más la mitad de las que quedaban. Otro hombre entró luego y compró 3 manzanas más un tercio de las que quedaban, etc. ¿Por cuántos compradores como máximo puede seguir este sistema de compras, si ninguna manzana es cortada?

129. EXIGENCIA CUMPLIDA. Un propietario agricultor repartió a tres criados suyos 120 limones, dándole a uno 60, a otro 40 y a otro 20. Luego, los envió a tres mercados distintos, dándoles orden de que los vendiesen en los tres a un mismo precio. Pero asimismo les exigió que trajesen los tres el mismo dinero por la venta. Como esto les pareció imposible a los criados, le dio a cada uno un ejemplar de un mismo cartel anunciador de los precios, para que se cumpliese la primera condición, y este cartel era tal que también se cumplía la segunda. ¿Qué cree Vd. que ponía en el cartel?

130. UN PRECIO ABSURDO. Un propietario tiene 60 melones, da 50 de ellos a un mozo y 10 a otro. Ordenó que vendiese primero el que llevaba 50 melones, y luego al mismo precio y modo vendiese el que llevaba 10 melones, y trajese doble dinero el segundo que el primero. ¿Cómo lo consiguieron?

NÚMEROS

Problemas sobre números, curiosidades numéricas, etc.

131. NINGÚN N° PRIMO. En la decena: **531, 532, ..., 540**, no hay ningún número primo. ¿Podría Vd. encontrar una decena menor en la que tampoco haya ningún número primo?

132. FRACCIONES EXTRAÑAS. ¿Qué tienen de extraño las siguientes fracciones? **19/95, 26/65, 16/64**

133. LA CIFRA BORROSA. Al hacer el siguiente producto:

$$15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$$

y tomar nota del resultado: 1 3 0 7 X 7 4 3 6 8 0 0 0 una de las cifras (la 5ª) quedó borrosa y no sabemos exactamente cuál es. ¿Podría Vd. averiguarla, sin necesidad de repetir la operación?

134. ACERCA DE LOS PRIMOS. Encuentre Vd. 10 números consecutivos que no sean primos.

135. EL GRAN DESFILE. Treinta soldados pueden desfilar de 1 en 1, de 2 en 2, de 3 en 3, de 5 en 5, de 6 en 6, de 10 en 10, de 15 en 15 y los 30 enfilados; es decir; de 8 formas diferentes sin que existan números desiguales de soldados en las líneas. ¿Cuál es el menor número de soldados que debe tener una compañía para poder desfilar de 64 formas diferentes?

136. EL MAYOR PRODUCTO. Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6 escriba dos números de tres cifras cada uno cuyo producto sea lo mayor posible. Hay que usarlas todas.

137. SUMA POR PRODUCTO. Encontrar dos números tales que el producto de la suma por el producto sea igual a 29.400.

138. BUSCANDO UN DIVISOR. Buscar un divisor distinto de él mismo y de la unidad del número 11.111.111.111.111.111. (*hay 17 unos*)

139. MAYOR Y MENOR MÚLTIPLOS DE 11. ¿Cuál es el mayor múltiplo de 11 formado por las nueve cifras significativas sin que se repita ninguna? ¿Y el menor?

140. EL NÚMERO 1089. Tomamos un número de tres cifras, de modo que no sean las tres iguales; por ejemplo 637. A continuación formamos otro número, ordenando las cifras de mayor a menor. Resulta 763. Formamos otro, ordenándolas de menor a mayor. Resulta 367. Restamos $763 - 367 = 396$. A este último número le damos la vuelta, 693, y sumamos los dos últimos: $693 + 396 = 1089$. Repetimos con 475: $754 - 457 = 297$, $297 + 792 = 1089$. ¿Qué misterio es éste? ¿Será verdad que partiendo de cualquier número resulta siempre 1089? ¿Por qué?

141. EL MÁGICO NÚMERO 68. Consiga una hoja de papel, recorte de ella un cuadrado de aproximadamente 20 centímetros de lado. Doble el papel al medio cuatro veces, de modo que al desdoblarlo los pliegues formen una cuadrícula de 16 cuadrados pequeños. Ahora marque bien cada pliegue hacia adelante y hacia atrás, para que el papel se doble fácilmente en cualquier dirección. Numere los cuadrados de 1 a 16 como se muestra en la ilustración:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Doble el papel a lo largo de los pliegues hasta que quede del tamaño de uno de los cuadrados pequeños. Su modo de doblarlo puede ser tan complicado como quiera; puede incluso meter pliegues dentro de pliegues.

Teme unas tijeras y corte los cuatro bordes del paquete final para que le queden 16 cuadrados separados. Algunos de los cuadrados tendrán un número arriba, otros un número abajo. Sin dar la vuelta a ninguno de los cuadrados, despa-rrámelos sobre la mesa. Sume todos los números que hayan quedado boca arriba y escriba el resultado. El número que Vd. ha escrito, ¿será el 68? ¡Qué extraña coincidencia! ¿Verdad?

142. SIMPLIFICACIONES ESCANDALOSAS. Ocurrió el 18 de noviembre de 1994 en una clase de Matemáticas de 1º de BUP de un instituto de Salamanca.

Profesor de matemáticas: Simplifica la fracción $26666/66665$.

Alumno: Quito un 6 del numerador y otro del denominador y queda $2666/6665$.

Profesor: Está bien. Pero puedes hacer algo mejor.

Alumno: Es cierto; todavía puedo simplificar tres veces el 6 y quedará: $26666/66665 = 2666/6665 = 266/665 = 26/65 = 2/5$.

Profesor: ¡Bravo! ¡Te pongo un diez! ¡Puedes sentarte!

Profesor: (Dirigiéndose a toda la clase) El método de simplificación empleado por vuestro compañero es poco ortodoxo y sin embargo los resultados son exactos. Encontrar una fracción de la misma forma que pueda simplificarse de la misma manera y que sea equivalente a $1/2$. Otra equivalente a $1/4$. Otra equivalente a $1/5$. ¿Qué relación cumplen a, b y c en las fracciones que pueden simplificarse de la forma indicada?

143. CURIOSA PROPIEDAD (2). $12^2=144$, $21^2=441$. $13^2=169$, $31^2=961$. Encuentre Vd. otro número de dos cifras que cumpla la misma propiedad.

144. DELANTE Y DETRÁS. En el resultado del producto $41096 \times 83 = 3410968$ se ha colocado el 3 delante y el 8 detrás y el producto es correcto. Encontrar otros productos que produzcan el mismo efecto, con el multiplicador de dos dígitos y el multiplicando con las cifras que se quiera.

145. CURIOSA PERSISTENCIA DEL 5.

$$\begin{aligned}
 8 - 3 &= 5 \\
 78 - 23 &= 55 \\
 778 - 223 &= 555 \\
 7778 - 2223 &= 5555 \\
 &\dots\dots\dots \\
 8^2 - 3^2 &= 55 \\
 78^2 - 23^2 &= 55\ 55 \\
 778^2 - 223^2 &= 555\ 555 \\
 7778^2 - 2223^2 &= 55\ 555\ 555 \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

146. NOTABLE SUCESIÓN DE CUADRADOS.

$$\begin{aligned}
 1^2 &= 1 \\
 11^2 &= 121 \\
 111^2 &= 12321 \\
 1111^2 &= 1234321 \\
 11111^2 &= 123454321 \\
 111111^2 &= 12345654321 \\
 1111111^2 &= 1234567654321 \\
 11111111^2 &= 123456787654321 \\
 111111111^2 &= 12345678987654321
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9^2 &= 81 \\
 99^2 &= 9801 \\
 999^2 &= 998001 \\
 9999^2 &= 99980001 \\
 99999^2 &= 9999800001 \\
 999999^2 &= 999998000001 \\
 9999999^2 &= 99999980000001 \\
 99999999^2 &= 9999999800000001 \\
 999999999^2 &= 999999998000000001
 \end{aligned}$$

147. MÚLTIPLO DE 9. ¿Qué condición ha de cumplir un número para que al restarle la suma de sus cifras el resultado sea múltiplo de 9?

148. FECHAS INDETERMINADAS. En España, fechas como 6 de diciembre de 1977 suelen abreviarse 6-12-77; pero en otros países, como EEUU., se da primero el mes y luego el día, escribiéndose 12-6-77. Si desconociésemos cuál de ambos sistemas se ha utilizado, ¿cuántas fechas quedarían indeterminadas en la notación abreviada?

149. OBREROS DE SIEMPRE. Dos albañiles se reparten en dos partes, no exactamente iguales, pero semejantes, a ojo de buen cubero, un montón de 100 ladrillos. El primero los va disponiendo en hileras de 5 ladrillos, y el segundo los coloca en columnas de 7 ladrillos. Cuando terminan su montón al primero le quedan dos ladrillos sin colocar, y al segundo le han sobrado 4. ¿Cuántos ladrillos había tomado cada uno?

150. VENTA DE PELOTAS. Por la venta de una partida de pelotas un señor obtiene 60.377 ptas. El precio de cada pelota fue inferior a 200 ptas. ¿Cuántas pelotas vendió?

151. EL NÚMERO MÁGICO 481. Escoja un número cualquiera de dos cifras, por ejemplo, 26. Construya el número siguiente: $26 + 26 \times 20 = 546$. Ahora, el número 546 le multiplicamos por el dicho 481: $546 \times 481 = \dots$ ¿Qué se obtiene?
Otro ejemplo: $47 + 47 \times 20 = 987$. Ahora: $987 \times 481 = \dots$ ¿Qué se obtiene?

152. CUADRADO PERFECTO. Halle una base de numeración distinta de 10 en la que 121 sea cuadrado perfecto.

153. EL MENOR TRIPLETE. Halle el menor triplete de números enteros tales que el mayor sea múltiplo del menor y que sus tres cuadrados estén en progresión aritmética.

154. QUINTA POTENCIA DE UN N°. Halla el número n sabiendo que n^5 es un número de 7 cifras acabado en 7.

155. A BUEN FIN, MEJOR PRINCIPIO. ¿En qué cifra termina 7^{83578} ?

156. TRES AGUJAS EN UN PAJAR. El número primo 37 es un divisor de 999. ¿Puede Vd. encontrar tres números más que tengan todas sus cifras iguales y sean múltiplos de 37?

157. CABRAS Y OVEJAS. Un campesino tenía un rebaño de animales formado por cabras y ovejas. El número de ovejas multiplicado por el número de cabras da un producto que reflejado en el espejo, muestra el número de animales del rebaño. ¿Cuántos animales de cada clase hay en el rebaño?

158. $A^2+2=B^3$. Halle un cuadrado que se convierta en un cubo al sumarle 2.

159. EL CORRAL DE PALOMO. El carpintero que construyó el corral para las ovejas de Palomo descubrió que podía ahorrarse dos postes si el campo a cercar fuera cuadrado en lugar de rectangular.

De cualquiera de las dos maneras servirá para el mismo número de ovejas, pero si es cuadrado habrá un poste donde atar a cada oveja.

¿Cuántas ovejas había en el famoso rebaño?

Se supone que en ambas forman los postes estaban separados por iguales distancias, que las áreas del corral cuadrado y del rectangular eran iguales, y que el rebaño estaba formado por menos de tres docenas de ovejas.

160. EL REBAÑO MÁS PEQUEÑO. Un granjero que tiene un rebaño de ovejas muy numeroso descubre una gran singularidad con respecto a su número. Si las cuenta de dos en dos, le sobra 1. Lo mismo ocurre cuando las cuenta de 3 en 3, de 4 en 4... hasta de 10 en 10. ¿Cuál es el rebaño más pequeño que se ajusta a estas condiciones?

161. EL NÚMERO MÁGICO 153. En el evangelio, según San Juan, (cap. 21, versículo 11), se lee que: *"Los discípulos no habiendo pescado nada durante la*

noche se disponían a abandonar la tarea, cuando siguiendo el consejo de Jesús, echaron de nuevo la red, la cual cuando Simón Pedro, la levantó y la trajo a tierra estaba llena de grandes peces en número 153 y siendo tantos la red no se rompió". Por esto el número 153 se consideró en la antigüedad como número mágico, buscándose distintas propiedades del mismo. Por ejemplo:

Es un número triangular: $1 + 2 + 3 + \dots + 17 = 153$.

$1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 153$.

$1^3 + 3^3 + 5^3 = 153$.

Si se parte de un número natural cualquiera que sea múltiplo de 3 y se suman los cubos de sus cifras. Al resultado, que será también un múltiplo de 3, se aplica la misma operación. Continuando de esta manera se llegará al número 153. Ejemplos:

$252 - 141 - 66 - 432 - 99 - 1458 - 702 - 351 - 153$.

$1998 - 1971 - 1074 - 408 - 576 - 684 - 792 - 108 - 513 - 153$.

Por eso se dice que el número 153 es un agujero negro (respecto de la suma de los cubos de sus cifras) en el sentido de que al llegar a él ya no se puede salir más.

162. MAYOR CUADRADO. ¿Cuál es el mayor cuadrado que se puede escribir con las diez cifras tomadas una vez cada una?

163. ¿SERÁ CUADRADO? ¿Puede ser cuadrado un número formado con las nueve cifras significativas en un orden cualquiera?

164. LA CIFRA PERDIDA. El producto de 53.928.719.937 por 376.648 es 20312144*06831176. ¿Puede hallar Vd. la cifra que falta sin efectuar la multiplicación?

165. LOS REPOLLOS DE LA SEÑORA GARCÍA. La señora García tiene ahora una plantación cuadrada de repollos más grande que la que tenía el año pasado, y que por lo tanto tendrá 211 repollos más. ¿Cuántos matemáticos y agricultores lograrán determinar el número de repollos que tendrá este año la señora García?

166. REGALO MILLONARIO. Imaginemos que un millonario se ofrece a regalarle a Vd. las monedas de una peseta que sea capaz de llevarse, a condición de contarlas una por una y sin detenerse. Podrá Vd. llevarse todas las que haya

contado hasta que se pare. Supongamos que cuenta una moneda por segundo. ¿Cuántas cree Vd. que podrá llevarse en realidad?

167. MONETARIO. En la República de Bizarria existe un curioso sistema monetario. Tienen allí solamente dos valores de monedas, de 7 centavos y de 10 centavos. La pregunta que hacemos también es extraña pero admite una solución simple. ¿Cuál es la mayor suma de centavos que no se puede abonar exactamente con tales monedas?

168. SE LLEGA SIEMPRE AL 1. Toma un número natural cualquiera. Si es impar multiplícalo por 3 y añádele 1. Si es par, toma la mitad. Repitiendo la operación sucesivamente se llega siempre al número 1. Así:

12 - 6 - 3 - 10 - 5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1.

100 - 50 - 25 - 76 - 38 - 19 - 58 - 29 - 88 - 44 - 22 - 11 - 34 - 17 - 52 - 26 - 13 - 40 - 20 - 10 - 5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1.

Esto ha sido comprobado con calculadoras hasta números muy grandes, pero no se tiene una demostración de que el hecho sea general.

169. SOBRE NÚMEROS DE DOS CIFRAS. ¿Qué número de dos cifras es el cuadrado de la cifra de sus unidades?

160. SIEMPRE EXACTO. Encontrar los menores 9 números consecutivos (mayores que 10), el primero terminado en 1 y el mayor terminado en 9, de manera que al dividirse por su última cifra el resultado de siempre exacto. Ejemplo: 31/1 sí, 32/2 sí, 33/3 sí, 34/4 no, 35/5 sí, 36/6 sí, 37/7 no, 38/8 no, y 39/9 no.

171. FECHAS CAPICÚAS. El día 18 de septiembre de 1981, en una emisora de radio, el presentador cayó en la cuenta de que tal fecha (18-9-81) era capicúa. Esto le dio lugar a lanzar en antena la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las dos fechas capicúas más cercanas entre sí del siglo XX? ¿Podrá Vd. adivinarlas?

172. VAYA BOLETO. El otro día compré un boleto de lotería capicúa. Si sumaba sus cinco cifras daba el mismo resultado que si las multiplicaba. La primera cifra de la izquierda era la edad de mi hermana pequeña, las dos siguientes la edad de la mediana, y las dos últimas la edad de la mayor, que le lleva más de un año a la mediana. ¿Cuál era la numeración del boleto?

173. TRES ENTEROS CONSECUTIVOS. ¿Qué tres números enteros consecutivos y positivos, multiplicados entre sí, dan un total igual a quince veces el segundo de ellos?

174. MCD y mcm. Halle dos números enteros positivos, x e y , tales que el producto de su MCD y su mcm sea el producto xy .

175. EL TELÉFONO DE MI COLEGA. Le pedí a mi colega Saturnino su número de teléfono. Como es profesor de matemáticas me contestó diciendo: "El número que forman las cifras de las posiciones 4 y 5 es un cuadrado perfecto, al igual que el de las posiciones 5 y 6 y el de las posiciones 6 y 7. La tres primeras cifras forman un cubo perfecto, igual al producto de los otros cuatro dígitos". ¿Podría Vd. llamar por teléfono a mi colega Saturnino?

176. FACILEMA. ¿Cuál es el número de dos cifras que es igual al doble del producto de sus cifras?

177. PAR = DIEZ. Si el par es diez, ¿cuál es la decena?

178. CURIOSA RAÍZ CUADRADA. Calcule la raíz cuadrada del número 123.456.789. Observe el resultado y el resto.

179. NÚMEROS PRIMOS. Demuestre que hay infinitos números primos.

180. PRODUCTOS QUE SE ESCRIBEN CON UNA SOLA CIFRA (1). Una propiedad muy conocida del número 12.345.679 es que al multiplicarlo por 9 da un producto que se escribe con sólo la cifra 1, esto es el número 111.111.111. Por lo tanto al multiplicarlo por 18 (que es 9×2), por 27 (que es 9×3), por 36, etc., se obtienen también productos notables, a saber:

$$\begin{aligned}12.345.679 \times 9 &= 111.111.111 \\12.345.679 \times 18 &= 222.222.222 \\12.345.679 \times 27 &= 333.333.333 \\12.345.679 \times 36 &= 444.444.444 \\12.345.679 \times 45 &= 555.555.555 \\12.345.679 \times 54 &= 666.666.666 \\12.345.679 \times 63 &= 777.777.777 \\12.345.679 \times 72 &= 888.888.888 \\12.345.679 \times 81 &= 999.999.999\end{aligned}$$

181. PRODUCTOS QUE SE ESCRIBEN CON UNA SOLA CIFRA (2). De no conocer el multiplicando, podríamos haber intentado hallarlo sin más que dividir por 9 el número 1111..., bajando después de cada resto un uno, en vez de un cero, hasta que la división fuese exacta.

Investiguemos, de este modo, cuál es el número que multiplicado por 7, da un producto escrito sólo con las cifras 1:

$111.111 : 7 = 15873$. Por consiguiente, resultará:

$$\begin{aligned}15.873 \times 7 &= 111.111 \\15.873 \times 14 &= 222.222 \\15.873 \times 21 &= 333.333 \\15.873 \times 28 &= 444.444 \\15.873 \times 35 &= 555.555 \\15.873 \times 42 &= 666.666 \\15.873 \times 49 &= 777.777 \\15.873 \times 56 &= 888.888 \\15.873 \times 63 &= 999.999\end{aligned}$$

182. PRODUCTOS QUE SE ESCRIBEN CON UNA SOLA CIFRA (3). ¿Cuál es el número que, multiplicado por 49 da un producto que se escribe con sólo las cifras 1?

183. LOS 4 SON PRIMOS. **ADDD, AACA, BCDB y BDAC** son cuatro números primos. ¿Cuáles son?

184. TRES CIFRAS Y EL 30. Es fácil escribir el 30 con tres seises: $(30=6 \times 6-6)$ ¿Se podrá hacer lo mismo con otras tres cifras iguales? Busca todas las soluciones.

185. LA CONJETURA CAPICÚA. Para obtener un número capicúa a partir de otro número se invierte el orden de sus cifras y se suman el número dado y el invertido. Este proceso se continúa las veces que sean necesarias hasta obtener un capicúa. Por ejemplo: Partiendo del 78.

$$\begin{aligned}78 + 87 &= 165. \\165 + 561 &= 726. \\726 + 627 &= 1353. \\1353 + 3531 &= 4884 \text{ CAPICÚA.}\end{aligned}$$

La conjetura capicúa dice que, aplicando el proceso anterior a un número natural cualquiera, se obtiene un número capicúa en un número finito de pasos.

Partiendo del número 89 es necesario dar 24 pasos para conseguir el número 8.813.200.023.188. ¿Existirá algún número que sea excepción de la conjetura? El matemático ruso Boris A. Kordemsky ensayó en computadoras con el número 196, sometiéndolo a miles y miles de pasos, y no ha conseguido todavía ningún número capicúa.

Siguiendo los pasos anteriores halle los capicúas correspondientes a los números: 84, 75 y 86.

186. TIRO CON ARCO (1). ¿Cuántas flechas hacen falta para hacer justo cien puntos en el siguiente blanco? [40-39-24-23-17-16]

187. TIRO CON ARCO (2). ¿Cuántas flechas hacen falta para hacer justo cien puntos en el siguiente blanco? [11-13-31-33-42-44-46]

188. TRES CIFRAS Y EL 24. Es fácil escribir el 24 con tres ochos: ($24=8+8+8$). ¿Se podrá hacer lo mismo con otras tres cifras iguales? Busca todas las soluciones.

189. SOLDADOS COMBATIVOS (1). Cierta número de soldados se dirigían a combatir formando un cuadrado. En el camino se les unió un extraño, y entonces formaron exactamente 13 cuadrados menores iguales. ¿Cuántos soldados fueron a la batalla?

190. SOLDADOS COMBATIVOS (2). Cierta número de soldados se dirigían a combatir formando un cuadrado. En el camino se les unió un extraño, y entonces formaron exactamente 113 cuadrados menores iguales. ¿Cuántos soldados fueron a la batalla?

SERIES - SECUENCIAS

Problemas sobre series, secuencias, sucesiones, ...

191. PRINCIPIO Y FIN. ¿Qué representa la siguiente secuencia?

6, 8, 62, 63, 66, 72, 73, 76, 81, 84, ...

192. SECUENCIA QUE RUEDA. ¿Qué representa la siguiente secuencia?

0, 32, 15, 19, 4, 21, 2, 15, 17, 34, 6, 27, 13, ...

193. SON PARIENTES (2). ¿Qué emparenta a todas estas palabras?

dolor - resta - millar - faz - solar - lago - siglo

194. SON PARIENTES (3). ¿Qué ley se ha seguido para escribir la siguiente serie?

1-2-3-4-5-8-9-10-15-31-1000

195. SERIE A COMPLETAR. ¿Qué letra completa la siguiente serie?

u, e, e, a, o, e, a, a, i, u, i, e, e, e, i, ...

196. NO DERRAPE. ¿Cuáles son las dos letras siguientes en esta serie?

A, E, F, H, I, K, L, M, ...

197. SON PARIENTES (4). Las siguientes letras tienen todas ellas algo en común que ninguna de las demás tiene. ¿Qué es?

G - J - F - K - P - W - X - Ñ

198. QUITANDO, QUITANDO. ¿Qué número sigue en la siguiente serie?

37, 27, 18, 9, ...

199. CONSONANTES Y VOCALES. Averigüe cuál es la siguiente letra en la serie:

A, B, E, F, G, I, J, K, L, O, P, Q, R, ...

200. VAYA HORA. ¿Qué números siguen en la siguiente serie?

12, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 2, ...

JUEGOS DE ESTRATEGIA

No podrían faltar los problemas que surgen a partir de los juegos de estrategia. Suelen ser muy interesantes.

201. LA MESA Y LAS MONEDAS. Tenemos una mesa cuadrada, rectangular, redonda, etc. y monedas iguales en abundancia. Dos jugadores empiezan a colocar alternadamente, sobre la mesa, monedas una a una; esto es, el primer jugador coloca una moneda; acto seguido coloca otra moneda el 2º jugador; de nuevo el primero, y así sucesivamente. Pierde el que se vea forzado a colocar una moneda que sobresalga de la mesa. Y no vale solaparlas.

La solución general es que pierde el jugador que tenga que hacer su movimiento a partir de una posición simétrica, ya que el adversario podrá siempre restablecer la simétrica sin perder.

¿Qué estrategia ha de seguir el primer jugador para estar seguro de ganar?

202. FORMANDO TRIÁNGULOS. Con tres rectas en el plano, el número máximo de triángulos que se pueden formar es uno. Investiga, cuál es el número máximo de triángulos que se pueden formar con 4, 5, 6, ..., n rectas.

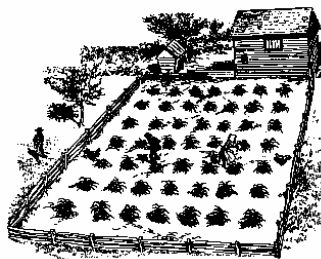
203. QUITAR DEL MONTÓN. Este es un juego para dos jugadores, A y B. Se coloca un montón de 45 piedrecillas sobre la mesa. Juega A y puede quitar entre 1 y 7 piedras. Juega B y puede quitar entre 1 y 7 piedras. Juega A... Gana el que se lleve la última piedra. ¿Hay alguna estrategia para alguno de los jugadores, de modo que esté seguro de ganar? ¿Cómo varía la situación cuando se varía el número de piedras? ¿Y si pierde el que se lleve la última?

204. LOS POLLOS DEL MAIZAL. En una granja de New Jersey había dos pollos que siempre se metían en el jardín, prestos a desafiar a cualquiera que intentara atraparlos.

¿En cuántos movimientos el buen granjero y su esposa pueden apresar a las dos aves?

El campo está dividido en 64 cuadrados, delimitados por las plantas de maíz. Para poder atrapar a los pollos se puede ir de arriba a abajo o de izquierda a derecha.

Primero el granjero y su esposa se desplazan cada uno un cuadrado y luego cada uno de los pollos hace también un movimiento. Se prosigue por turnos hasta



acorrallar y capturar a los pollos. La captura se produce cuando el granjero o su esposa pueden irrumpir en un cuadrado ocupado por una de las aves.



205. UN CALENDARIO CON DOS CUBOS. Para señalar el día se colocan los cubos de manera que sus caras frontales den la fecha. En cada cubo, cada una de las caras porta un número del 0 a 9, distribuidos con tanto acierto que siempre podemos construir las fechas 01, 02, 03, ..., 31 disponiéndolos adecuadamente.

¿Sabe Vd. cuáles son los cuatro dígitos no visibles en el cubo de la izquierda, y los tres ocultos en el de la derecha?

206. SUMAR SIN CONOCER LOS SUMANDOS. Utilizaremos para ello una hoja mensual de calendario. A fin de simplificar, elegimos una hoja de un mes de abril que tiene cinco jueves. Se trata de adivinar la suma de 5 días del mes, elegidos al azar, uno de cada semana y sólo conociendo el día de la semana en el que caen.

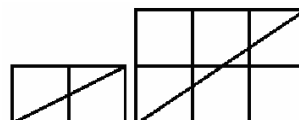
ABRIL						
L	M	X	J	V	S	D
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

En el ejemplo de la figura, hay que adivinar la suma de los cinco marcados con el único dato de que uno cae en lunes, dos en miércoles, uno en jueves y otro en sábado. ¿Sabría Vd. emplear algún procedimiento para poder adivinar dicha suma con las condiciones exigidas?

207. RECTÁNGULOS OBSTINADOS. En una hoja de papel cuadrículado dibujamos un rectángulo formado por dos cuadrados.

Trazamos una diagonal del rectángulo y observamos que corta a los dos cuadrados. Haciendo lo mismo con un rectángulo mayor, de dos por tres cuadrados, la diagonal corta a cuatro cuadrados.

¿Cuántos cuadrados cortará la diagonal de un rectángulo de seis por siete cuadrados? Se debe hacer sin dibujar el rectángulo y sin contar los cuadrados. ¿Se puede encontrar alguna regla?

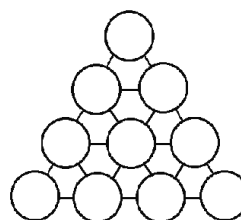


208. EL BIOP. El Biop es un juego para dos personas que juegan alternativamente en un tablero cuadrulado de 5×5 , cada jugada consiste en colocar en una casilla desocupada un número del 0 al 24, teniendo en cuenta que dos casillas adyacentes (al menos un punto en común) no pueden tener dos números consecutivos. No se puede repetir ningún número. Los extremos 0 y 24 se consideran consecutivos.

Pierde el que no pueda efectuar una jugada legal.

¿Existe una estrategia que permite al primer jugador ganar siempre?

209. LAS FICHAS DEL TABLERO. Sobre un tablero en forma de triángulo equilátero, como se indica en la figura, se juega un solitario. Sobre cada casilla se coloca una ficha. Cada ficha es blanca por un lado y negra por el otro. Inicialmente sólo una ficha, que está situada en un vértice, tiene la cara negra hacia arriba; el resto de las fichas tiene la cara blanca hacia arriba. En cada movimiento se retira sólo una ficha negra del tablero y se da la vuelta a cada una de las fichas que ocupan una casilla vecina. Casillas vecinas son las que están unidas por un segmento. Después de varios movimientos, ¿será posible retirar todas las fichas del tablero?



210. MOROS Y CRISTIANOS. Tras la batalla, el sultán Aben-Hazzar, mandó a su Gran Visir reunir a los 15 prisioneros cristianos y a otros 15 moros, con objeto de arrojar al mar a la mitad de ellos.



"Colócalos en círculo y contando de 9 en 9, arroja al agua al que le toque cada vez".

El Gran Visir, que odiaba a los moros, colocó a los 30 prisioneros de tal forma que salvó a los 15 cristianos.

¿Cómo los colocó?

CUADRADOS MÁGICOS

Los **cuadrados mágicos** son ordenaciones de números en celdas formando un cuadrado, de tal modo que la suma de cada una de sus filas, de cada una de sus columnas y de cada una de sus diagonales dé el mismo resultado.

Si la condición no se cumple para las diagonales, entonces se llaman "cuadrados latinos".

El origen de los cuadrados mágicos es muy antiguo. Los chinos y los indios los conocían antes del comienzo de la era cristiana.

Los cuadrados mágicos se clasifican de acuerdo con el número de celdas que tiene cada fila o columna. Así, uno con 5 celdas se dice que es de quinto orden. No existen cuadrados mágicos de orden 2.

Aunque todos los matemáticos han reconocido siempre la falta de aplicaciones de los cuadrados mágicos, algunos se han ocupado de ellos con mucha atención: el mérito y gracia del juego está en su insospechada dificultad.

Si a , b y c son tres números enteros cualesquiera, la siguiente disposición muestra la forma general de un cuadrado mágico de orden 3:

$a+b$	$a-(b+c)$	$a+c$
$a-(b-c)$	a	$a+(b-c)$
$a-c$	$a+(b+c)$	$a-b$

No hay métodos generales para construir cuadrados mágicos, sobre todo para los de orden par.

Veamos un modo de construir fácilmente cuadrados mágicos de orden impar.

1) Tomemos una serie aritmética cualquiera, para mayor comodidad la serie de los números naturales, y coloquemos el número 1 en la celda central de la fila superior.

2) La cifra consecutiva a una cualquiera debe colocarse en la celda que le sigue diagonalmente hacia arriba y hacia la derecha.

3) Si al hacer esto se sale del cuadrado por el límite superior del contorno del mismo, saltaremos a la celda de la columna siguiente hacia la derecha y en su fila inferior, si se sale por la derecha, se sigue por la primera celda, a partir de la izquierda, de la fila superior.

4) Cuando la celda siguiente está ocupada, el número consecutivo de la serie se coloca en la celda inmediatamente inferior a la del número precedente, comenzando así un nuevo camino en la dirección de la diagonal.

Como ejemplo, realicemos un cuadrado mágico de quinto orden:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Finalmente, puesto que las sumas siguen siendo iguales entre si cuando multiplicamos todos los números de las casillas por un mismo factor, o les añadimos un mismo sumando, es claro que podemos alterar fácilmente, en esta forma el llenado de las casillas.

211. OTRA SUMA DE 18. Coloque tres números consecutivos en un cuadrado de 3×3 , de manera que la suma de las filas y la suma de las columnas sea 18.

212. DEL 10 AL 18. Halle el número K, sabiendo que el cuadrado en el cual está inscrito es mágico y se compone de los números de 10 a 18.

	K	

213. SUMA 34. Construya un cuadrado mágico con los números del 1 al 16 de modo que las filas, columnas y diagonales sumen 34.

214. COMPLETANDO 5×5 . Complete los casilleros que faltan para que resulte mágico el siguiente cuadrado:

11		7		3
	12		8	
17		13		9
	18		14	
23		19		15

215. CUADRADO DIABÓLICO. Construya un cuadrado mágico de 4×4 (Suma=34). Los elementos de cada una de las nueve matrices 2×2 que componen el cuadrado también deben sumar 34.

216. ORIGINAL 4X4. ¿Por qué es muy original el siguiente cuadrado mágico?

96	11	89	68
88	69	91	16
61	86	18	99
19	98	66	81

217. RELLENANDO 5x5. Complete los casilleros que faltan para que resulte mágico el siguiente cuadrado:

1	20		23	
24		2		10
17		25	14	
15	4		7	21
	22	11		19

218. CON LOS PARES. Construya un cuadrado mágico con los 9 primeros números pares de modo que las filas, columnas y diagonales sumen 30.

219. CON LOS IMPARES. Construya un cuadrado mágico con los 9 primeros números impares de modo que las filas, columnas y diagonales sumen 27.

220. PROBLEMA REVERSIBLE. a) Coloque en cada cuadrado libre un número menor que 10, de tal manera que en cada fila y en cada columna haya un número que se repita exactamente dos veces, y que la suma (de cada fila y de cada columna), sea 17.

b) Dé la vuelta al cuadrado y resuélvalo nuevamente.

			8
	6		
		6	

PESADAS

Los problemas sobre pesas y pesadas suelen ser muy interesantes. En su resolución se usan razonamientos matemáticos.

221. OLVIDÓ LAS PESAS. Un ciudadano vendedor, se encuentra en el mercado con una balanza de dos brazos para pesar sus ventas, pero infortunadamente se ha dejado las pesas olvidadas en su casa. Sin embargo, entre sus enseres se encuentra con que dispone de los siguientes elementos:

- Una barra de hierro de 80 cm de longitud y 40 kilos de peso.
- Una cinta métrica.
- Una sierra para metales.

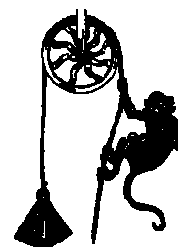
¿Cómo hará con no más de tres cortes un sistema de pesas que le permita pesar, kilo por kilo, todos los pesos desde uno hasta cuarenta kilos?

222. LA BALANZA DESEQUILIBRADA. Una balanza de dos platillos está desequilibrada. Si se coloca una sustancia en el platillo derecho pesa 9 gramos, si se coloca en el platillo izquierdo pesa 5 gramos. ¿Cuál es el peso de la sustancia?

223. LA BALANZA Y LAS FRUTAS. Sabiendo que 3 manzanas y una pera pesan lo mismo que 10 melocotones, y 6 melocotones y una manzana pesan lo mismo que una pera. ¿Cuántos melocotones serán necesarios para equilibrar una pera?

224. LOS CUATRO CUBOS. De un mismo material se han hecho cuatro cubos macizos de alturas distintas, a saber: 6 cm., 8 cm., 10 cm. y 12 cm. Hay que colocarlos en los platillos de una balanza de modo que los cubos queden en equilibrio. ¿Que cubos pondrá Vd. en un platillo y cuáles en el otro?

225. EL MONO, LA PESA LA SOGA Y LA POLEA. Si de una sogá que pasa por una polea sin fricción alguna se suspende una pesa que equilibra exactamente a un mono colgado del otro extremo, ¿qué le pasa a la pesa si el mono intenta trepar por la sogá? *(Para tornar más preciso el problema, suponemos que tanto la sogá como la polea no tienen peso ni sufren fricción)*



MÓVILES

La mayor parte de la gente se hace con facilidad un lío en los problemas relativos a velocidades medias. Hay que tener mucho cuidado al calcularlas.

La velocidad media de cualquier viaje se calcula siempre dividiendo la distancia total por el tiempo total.

226. DOS CICLISTAS Y UNA MOSCA. Dos ciclistas situados a 60 km de distancia entre sí corren en línea recta al encuentro mutuo, ambos a una velocidad de 30 km/h. Ambos parten a la vez y en el momento de partir, una mosca sale de la frente del primer ciclista a una velocidad de 45 km/h. Al llegar a la frente del segundo ciclista, vuelve a la misma velocidad hasta que al tocar la frente del primer ciclista vuelve al encuentro del segundo y así sucesivamente hasta que ambos ciclistas la aplastan al chocar sus frentes. ¿Cuál será la distancia recorrida por el infortunado insecto?

227. ¿COGIÓ EL TREN? Un hombre tenía que ir en bicicleta a la estación, que estaba a 12 kilómetros, a coger el tren. Pensó lo siguiente: *"Tengo una hora y media para coger el tren. Cuatro kilómetros son cuesta arriba, y tendré que hacerlos a pie, a cuatro kilómetros por hora; hay cuatro kilómetros cuesta abajo, que haré a doce kilómetros por hora; cuatro kilómetros son de carretera llana, que podré hacer a ocho kilómetros por hora. La media es de ocho kilómetros por hora, así que llegaré justo a tiempo"*. ¿Razonaba como es debido?

228. ¿LOGRO COGER EL TREN? Un tren salió de una estación con once minutos de retraso, y fue a diez km/h hasta la siguiente estación que estaba a un kilómetro y medio, y donde hacía una parada de catorce minutos y medio. Un hombre llegó a la primera estación doce minutos después de la hora normal de salida del tren, y se dirigió andando a la siguiente estación, a cuatro kilómetros por hora, con la esperanza de poder coger el tren allí. ¿Lo logró?

229. ADELANTAMIENTO Y CRUCE DE TRENES. Un tren de pasajeros lleva una velocidad de 90 km/h, tarda doble tiempo en pasar a un tren de carga cuando lo alcanza que cuando se cruza con él. ¿Cuál es la velocidad del tren de carga?

230. VIAJE DE IDA Y VUELTA. Un automovilista ha ido a una ciudad que está a 300 km de distancia. Al volver, su velocidad media ha sido 10 km supe-

rior a la velocidad de ida y ha tardado una hora menos. Calcule las velocidades y los tiempos invertidos en la ida y en la vuelta.

231. LOS ANUNCIOS DE CERVEZA DE LA AUTOPISTA. Carlos conducía su automóvil a velocidad prácticamente constante. Iba acompañado de su esposa. ¿Te has dado cuenta -le dijo a su mujer- de que los anuncios de la cerveza parecen estar regularmente espaciados a lo largo de la carretera? Me pregunto a cuánta distancia estarán unos de otros. La señora echó un vistazo a su reloj de pulsera y contó el número de anuncios que rebasaban en un minuto.

¡Qué raro! -exclamó Carlos-. Si se multiplica ese número por diez se obtiene exactamente nuestra velocidad en kilómetros por hora.

Admitiendo que la velocidad del coche sea constante, que los anuncios estén igualmente espaciados entre sí, y que al empezar y terminar de contar el minuto el coche se encontraba entre dos anuncios, ¿qué distancia los separa?

232. ¿A QUE DISTANCIA ESTA EL COLEGIO? Una mañana un niño tenía que ir al colegio. El padre dijo al niño: *"Si no te das prisa llegarás tarde al colegio"*. El chico contestó: *"Sé perfectamente lo que voy a hacer, si ando a una media de cuatro kilómetros por hora, llegaré con cinco minutos de retraso, pero si ando a cinco kilómetros por hora llegaré diez minutos antes de la hora de entrada"*. ¿A qué distancia está el colegio?

233. EL PASEO DE MI AMIGO ANDRÉS. Una tarde mi amigo Andrés remó en barca desde su pueblo hasta el pueblo más cercano y después regresó otra vez hasta su pueblo. El río estaba en calma como si de un lago se tratase. Al día siguiente repitió el mismo recorrido, pero esta vez el río bajaba con cierta velocidad, así que primero tuvo que remar contra corriente pero durante el regreso remaba a favor. ¿Empleó más, menos o el mismo tiempo que el día anterior en dar su acostumbrado paseo en barca?

234. EL ENCONTRONAZO. Un camión circula a 65 km/h. Tres kilómetros por detrás le sigue un coche a 80 km/h. Manteniendo las respectivas velocidades, si el coche no adelanta al camión es seguro que chocará contra él. ¿A qué distancia estará el coche del camión un minuto antes del choque?

235. LAS NAVES ESPACIALES. Dos naves espaciales siguen trayectorias de colisión frontal. Una de ellas viaja a 8 kilómetros por minuto y la otra a 12. Supongamos que en este instante estén separadas exactamente 5000 kilómetros. ¿Cuánto distará una de la otra un minuto antes del choque?

236. EL TREN Y EL HELICÓPTERO. Un tren sale de Oviedo a las 8 horas con destino a Burgos. Su velocidad media durante el recorrido es de 80 kilómetros por hora. Un helicóptero parte a la misma hora de Burgos, sobrevolando la vía férrea, al encuentro del tren. Su velocidad media es de 400 kilómetros por hora. En el instante en que se encuentran, el helicóptero vuelve a Burgos. Al llegar a esta ciudad cambia el rumbo y se dirige otra vez hacia el tren. Cuando lo encuentra, regresa de nuevo a Burgos.

Estos viajes de ida y vuelta los repite el helicóptero sucesivamente hasta que el tren llega a Burgos.

Sabiendo que la distancia Oviedo-Burgos es de 320 km y suponiendo que el helicóptero no pierde velocidad en los cambios de dirección, ¿cuántos kilómetros recorre el helicóptero?

237. DEVORANDO KILÓMETROS. Entre las ciudades A y B se estableció, desde el 1 de enero de 1981, un servicio regular de autobuses.

Los cuatro vehículos que diariamente partían de A tenían, respectivamente, los siguientes horarios de salida: 8h, 10h, 16h y 20h. A las mismas horas, salían de B otros tantos autobuses con destino a la ciudad A.

En cubrir la distancia entre A y B, cada autobús empleaba 3 días. El 4 de marzo de 1981, Carlos subió al autobús de las 8h, que en ese instante partía de la ciudad A. ¿Con cuántos autobuses se habrá cruzado durante el trayecto hasta llegar a la ciudad B?

238. GANANDO TIEMPO. Los participantes en una carrera ciclista estaban preparados en la línea de salida.

Al darse la señal, el corredor con el dorsal 25 advirtió una avería en la máquina, empleando sus técnicos 4 minutos en subsanarla.

A pesar del retraso, este ciclista ganó la carrera, llegando a la meta 1 hora y 4 minutos después de iniciar su salida en solitario.

Si el tiempo del que llegó en último lugar fue de 1 hora y 12 minutos, ¿cuántos minutos tardó el ganador en dar alcance al "farolillo rojo"? Debe suponerse que las velocidades de cada ciclista son uniformes.

239. ENTRE CIUDADES. Navegando a favor de la corriente, un vapor desarrolla 20 km/h navegando en contra, sólo 15 km/h. En ir desde el embarcadero de la ciudad de Anca hasta el embarcadero de la ciudad de Bora, tarda 5 horas menos que en el viaje de regreso. ¿Qué distancia hay entre Anca y Bora?

240. LA CARRERA DEL PERRO Y EL GATO. Un gato y un perro entrenados corren una carrera de 100 metros y luego regresan. El perro avanza 3 metros a

cada salto y el gato sólo 2, pero el gato da 3 saltos por cada 2 del perro. ¿Cuál es el resultado de la carrera?

241. LA VELOCIDAD DEL TREN. Una joven sube al último vagón de un tren. Como no encuentra asientos libres, deja las maletas en la plataforma y empieza a buscar sitio. En ese momento está pasando frente a la fábrica de "Calzados Pisaplano". La chica va recorriendo el tren a velocidad constante; cinco minutos más tarde ha llegado al vagón de cabeza y, no encontrando asiento, decide dar la vuelta, regresando al mismo paso hasta su equipaje. En ese momento se encuentra frente a un almacén de pelucas, "Cocoliso, S. L.", que dista exactamente 5 kilómetros de los "Calzados Pisaplano". ¿A qué velocidad viaja el tren?

242. VIENTO EN CONTRA. Un ciclista recorre 1 Km en 3 minutos a favor de viento, y regresa en 4 minutos con viento en contra. Suponiendo que siempre aplica la misma fuerza en los pedales, ¿cuánto tiempo le llevaría recorrer una distancia de 1 km si no hubiera viento?

243. INFATIGABLES CORREOS. Dos correos salen simultáneamente, uno de Madrid a Zaragoza el otro de Zaragoza a Madrid. Cada uno lleva una velocidad uniforme. Desde el momento en que se cruzan el primero tarda 9 horas en llegar a Zaragoza y el segundo tarda 16 horas en llegar a Madrid. ¿Cuál es la duración del viaje de cada correo?

244. LOS DOS CICLISTAS. Dos ciclistas, Juan y Alberto se dirigen al mismo punto. Juan corre a 10 km/h y Alberto a 12 km/h. Si Juan sale dos horas antes que Alberto y, sin embargo, éste le alcanza al llegar ambos a su destino, ¿cuánto tiempo ha corrido Alberto y qué distancia en total?

245. SIGUIENDO SU CAMINO. El presidente de una sociedad que vivía fuera de la ciudad en que se encontraba su despacho, tenía por costumbre tomar el tren de cercanías y que el chófer le recogiese en la estación terminal, trasladándose al despacho en automóvil. Un día cogió un tren anterior al habitual y llegó a la estación con una hora de adelanto. Como, lógicamente, el chófer no estaba, decidió ir andando por el camino habitual hasta encontrarse con su coche cuando fuese a buscarle. Así lo hizo, y de esta forma llegó al despacho con 20 minutos de adelanto. Suponiendo que el chofer llegaba cada día a la estación en el preciso momento de la llegada del tren, se trata de saber cuánto tiempo estuvo andando.

246. LOS DOS VAPORES Y EL RÍO. Dos vapores parten a la vez de las orillas opuestas de un río, en dirección normal a dichas orillas que, por supuesto son paralelas. Al cabo de un cierto tiempo se cruzan a 200 metros de la orilla derecha. Continúan viaje y al llegar a la orilla opuesta cada vapor permanece parado 10 minutos, tras lo cual vuelve a salir en dirección opuesta, cruzándose esta vez a 100 metros de la orilla izquierda. ¿Qué anchura tiene el río?

247. VIAJE BIEN PLANEADO. Un padre y un hijo han de recorrer una distancia de 50 km. Para ello cuentan con un caballo que puede viajar a 10 km/h, pero no puede llevar más que una persona. El padre camina a razón de 5 km/h y el hijo a 8 km/h. Alternadamente caminan y cabalgan. Cada uno ata el caballo a un árbol, tras cabalgar, para que lo recoja el otro, y continúa a pie. De esta forma llegan a la mitad del camino al mismo tiempo, donde reposan media hora y repiten después la misma combinación para llegar simultáneamente al final del trayecto. ¿A qué hora llegarán a su destino si salieron a las 6 de la mañana?

248. RETRASO EN LA ENTREGA. El encargado de transportes de la sociedad estaba de mal humor. *"No voy a poder enviar a tiempo el cargamento. Tengo dos camiones averiados, y como se me han llevado todos los demás, excepto uno, con éste solamente me retrasaré mucho. Si no me hubiesen retirado el resto de la flota de camiones hubiese tardado 8 días, uno más de lo previsto inicialmente, con la totalidad de los camiones, esto es, incluidos los dos averiados. Pero, insisto, con un solo camión me retrasaré... muchas semanas".* ¿Cuántas semanas se retrasará?

249. CUESTA ABAJO EN MI RODADA. Dos pueblos se hallan a una distancia de 10 km y la carretera que los une es llana, por lo que un automóvil se traslada de uno a otro con velocidad uniforme de 80 km/h, tardando una hora y cuarto en hacer el recorrido.

Otros dos pueblos se encuentran, asimismo, a 100 km de distancia, pero 50 son de subida y 50 de bajada, por lo que el mismo automóvil recorre los primeros a 40 km/h y los segundos a 120 km/h. ¿Tardará más o menos en hacer este recorrido que en el primer caso? ¿O tardará igual?

250. UNA CIUDAD CON TRANVÍAS. Un hombre camina a una velocidad de 6 km/h a lo largo de una calle, por la que circula una cierta línea de tranvías, y cuenta que mientras 4 tranvías le adelantan, 6 se cruzan con él. Suponiendo que el espaciado entre tranvías, así como su velocidad, son uniformes, calcule la velocidad de los tranvías.

GEOMETRÍA

El origen de la geometría

Creer que una ciencia existe a partir de determinado momento o de tal acontecimiento parece una ingenuidad. Sin embargo, en sus Historias, Herodoto, que vivió en Grecia en el siglo V antes de Cristo, relata el origen de la geometría (palabra que en griego significa medición de la tierra).

"Se cuenta también que el rey Sesostris dividió la tierra entre todos los egipcios, otorgando a cada uno un rectángulo de igual tamaño, con la intención de cobrar la renta por medio de un impuesto que sería recaudado anualmente. Pero cuando el paso del Nilo redujese una porción, el súbdito correspondiente debía acudir al rey para notificarlo. Entonces éste mandaba a sus inspectores, que controlasen la reducción del terreno, de manera que el propietario pagase la parte proporcional del impuesto. De esta forma, me parece, se originó la geometría, que se difundió más tarde por la Hélade".

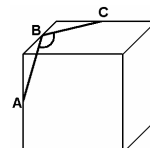
Problemas geométricos

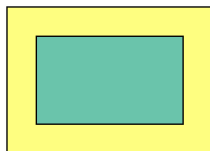
Cuando un matemático se tropieza por primera vez con teoremas como algunos de los que veremos a continuación, casi siempre manifiesta admiración, seguida invariablemente, de la exclamación: "¡Precioso!".

No podemos decir exactamente qué entienden por "precioso" los matemáticos. Quizá tenga que ver con la sorpresa de lo inesperadamente sencillo. Pero todos los matemáticos perciben la belleza de un teorema, o de la demostración de un teorema, con la misma claridad con que se aprecia la belleza de las personas.

Por la riqueza de sus aspectos visuales, la geometría guarda un tesoro de hermosos teoremas y preciosas demostraciones. Es frecuente que la resolución de problemas geométricos resulte prácticamente trivial atinando a usar uno de los teoremas fundamentales de la geometría euclídea.

251. EL ÁNGULO OBTUSO. ¿Cuánto mide el ángulo obtuso ABC? A, B y C son los puntos medios de los lados.

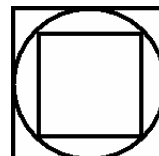




252. SEMEJANZA DE RECTÁNGULOS. El ancho de un marco, casi siempre, suele ser el mismo horizontal y verticalmente. El rectángulo constituido por el cuadro completo y el rectángulo de la tela pintada, ¿serán semejantes?

253. PAQUETE POSTAL. Un hombre quiere enviar por correo un fluorescente que mide 92 cm. de largo, pero las normas de Correos prohíben los paquetes postales superiores a 55 cm. ¿Cómo podría enviar el objeto por correo sin romperlo, ni doblarlo ni faltar a las ordenanzas de Correos?

254. LOS DOS CUADRADOS. A una circunferencia pueden inscribirse y circunscribirse cuadrados como muestra la figura adjunta. Sabiendo que el área del cuadrado inscrito es de cuatro unidades de superficie, ¿qué área tiene el cuadrado mayor?



EDUCANDO LA INTUICIÓN

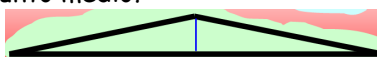
Algunas situaciones parecen ir contra la intuición. Y no se trata de salir del paso diciendo aquello de que «si la realidad se opone a mis ideas, peor para la realidad». La intuición, como la capacidad deductiva, puede ser afinada, educada. Intentamos hacerlo a través de los siguientes problemas.

255. EL CINTURÓN DE LA TIERRA. Imaginemos un cordel que envuelve como un cinturón ajustado la Tierra a lo largo de la línea del Ecuador. Añadámosle un metro al cordel. ¿Cuán flojo queda ahora? La intuición indicaría que la holgura que se obtiene es pequeñísima, ya que el metro agregado representa muy poco respecto a la circunferencia de la Tierra.



Más inquietante es pensar que si ajustamos un cordel alrededor de una naranja, y le agregamos luego un metro, la holgura que se consigue para la naranja es exactamente la misma que para la Tierra. ¿Será cierto?

256. EL RIEL DILATADO. Imaginemos un tramo recto de riel, AB, de 500 metros de largo, aplanado sobre el suelo y fijado en sus dos extremos. Bajo el calor del verano, el riel se expande 2 metros, provocándole una joroba. Suponiendo que el riel se arquea en forma simétrica, ¿a qué altura cree usted que se levanta la joroba en el punto medio?



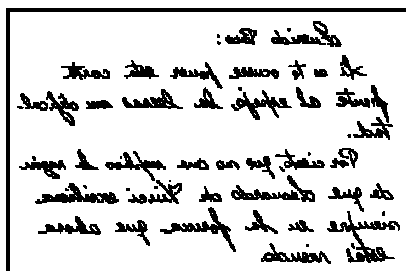
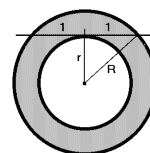
¿Diez centímetros? ¿Un metro? ¿Diez metros?

257. EL PUENTE SIN DISPOSITIVO DE DILATACIÓN. Un puente metálico tiene 1 km de longitud. Debido al calor se dilata 20 cm.



Si no se hubiese previsto un medio de absorber esta dilatación, el puente se levantaría formando un triángulo isósceles de altura h . La base sería el puente antes de la dilatación. ¿Cuánto vale h ?

258. ÁREA DE LA CORONA CIRCULAR. Supongamos dos circunferencias concéntricas. Trazamos una tangente a la interior que, naturalmente cortará a la exterior en dos puntos. La distancia entre cualquiera de estos puntos y el punto de tangencia es 1 m. Halla el área de la corona circular que determinan las dos circunferencias.



259. SIMETRÍA Y REFLEXIÓN. La imagen en un espejo plano y el objeto reflejado no son iguales, sino simétricos. El producto de dos reflexiones es la igualdad. Estas dos sencillas propiedades nos permitirán gastar una pequeña broma, cuando escribamos a un amigo utilizando un papel carbón y dos cuartillas.

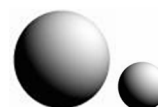
La siguiente carta se la mandé a un amigo mío. ¿Sabe Vd. lo que le pone?

260. LA ESFERA HUECA Y EL GEÓMETRA SAGAZ. Una esfera pesa 40 kg. Se la coloca suavemente dentro de un cilindro lleno de agua

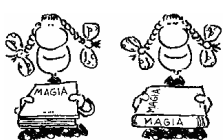


en el cual entra exactamente. Después de esta operación, el cilindro y su contenido pesan 20 kg más. ¿Cuál es el volumen del cilindro? ¿Cuál es la densidad de la esfera?

261. LAS ESFERAS PINTADAS. Un vendedor de billares tiene como insignia de su negocio dos esferas desiguales, sólidas y hechas de la misma madera. La mayor pesa 27 kg y la pequeña 8 kg. El comerciante se propone volver a pintar las insignias. Con 900 gramos de pintura pinta la esfera mayor. ¿Cuántos gramos necesitará

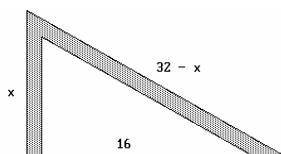


para pintar la pequeña? (La cantidad de pintura necesaria es proporcional a la superficie que hay que pintar)



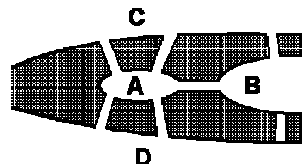
262. GIROS, ¿POSIBLES O IMPOSIBLES? Catalina ha desafiado a sus amigos a hacer algo que parece totalmente imposible: "Coger un libro, girarlo un ángulo de 180° , volverlo a girar otros 180° y que el libro quede formando un ángulo de 90° con su posición inicial". ¿Será posible realizar lo que dice Catalina?

263. EL EMBALSE Y EL PEZ. El borde de un embalse es una circunferencia perfecta. Un pez empieza en un punto del borde y nada en dirección norte 600 metros, lo que le devuelve al borde. Nada entonces en dirección este, llegando al borde después de recorrer 800 metros. ¿Cuál es el diámetro del embalse?



264. EL POSTE ROTO. Un poste mide 32 palmos de altura. Un día lo parte un rayo. El trozo roto queda apoyado en el suelo formando un triángulo de 16 palmos de base. ¿A qué altura se partió el poste?

265. LOS 7 PUENTES DE KONIGSBERG. Un ciudadano de Königsberg (Prusia) se propuso dar un paseo cruzando cada uno de los siete puentes que existen sobre el río Pregel una sola vez. Los dos brazos del río rodean a una isla llamada Kneiphof. ¿Cómo debe cruzar los puentes para realizar el paseo?

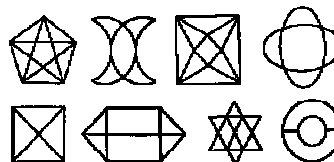


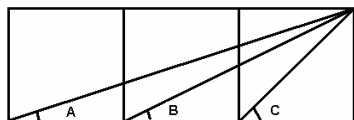
266. EN GENERAL: DE UN SOLO TRAZO, ¿POSIBLE O IMPOSIBLE? Un vértice es impar si de él parten un número impar de caminos. Un vértice es par si de él parten un número par de caminos.

El problema es imposible si en la red hay más de dos vértices impares.

Es posible: a) Cuando todos los vértices son pares, y entonces el punto de partida puede ser cualquiera. b) Cuando no hay más de dos vértices impares, y entonces el recorrido comienza por uno de ellos y termina en el otro.

De los 8 dibujos de la figura, ¿cuáles pueden dibujarse de un sólo trazo y cuáles no?





267. LOS TRES CUADRADOS. Tenemos tres cuadrados iguales dispuestos como se muestra en la figura. Usando solamente geometría elemental (no trigonometría) demuestre que el ángulo C es igual a la suma de los ángulos A y B .

268. VENTANA DIVIDIDA EN DOS. Una ventana cuadrada mide 1 metro de lado. Como estaba orientada al sur y entraba demasiada luz se disminuyó su tamaño a la mitad, tapando parte de ella. Tras ello la ventana seguía teniendo forma cuadrada y tanto su anchura como su altura seguían siendo de 1 metro. ¿Puede Vd. dar una explicación de tan extraño fenómeno?



269. MONEDAS IGUALES DANDO VUELTAS. Dos monedas idénticas A y B parten de la posición que indica la figura. La moneda B permanece en reposo, mientras que la A rueda alrededor de B , sin deslizar, hasta que vuelve a su posición inicial. ¿Cuántas vueltas habrá dado la moneda A ?

270. MONEDAS DISTINTAS DANDO VUELTAS. Dos monedas distintas A y B parten de la posición que indica la figura anterior. La moneda B permanece en reposo, mientras que la A rueda alrededor de B , sin deslizar, hasta que vuelve a su posición inicial. ¿Cuántas vueltas habrá dado la moneda A ? La moneda A móvil tiene un diámetro cuatro veces más pequeño que el diámetro de la moneda fija B .



CONSTRUCCIONES

Construcciones, divisiones, trasposiciones, ... con palillos, cerillas, monedas, triángulos, cuadrados, trapecios, polígonos, etc.



271. LAS DOCE MONEDAS. Con 12 monedas formamos un cuadrado, de tal modo que en cada lado haya 4 monedas. Se trata de disponerlas igualmente formando un cuadrado, pero con 5 monedas en cada lado del cuadrado.

272. ALTERACIÓN DEL ORDEN. En una hilera hay 6 vasos. Los 3 primeros están llenos de vino y los 3 siguientes, vacíos. Se trata de conseguir, moviendo un solo vaso, que los vasos vacíos se alternen en la fila con los llenos.

273. ALTERNANDO VASOS CON VINO Y VACÍOS. En una hilera hay diez vasos. Los cinco primeros están llenos de vino y los cinco siguientes, vacíos. Para formar con ellos una hilera donde los vasos llenos y los vacíos se vayan alternando, sin mover más de cuatro vasos, basta con permutar entre sí los vasos segundo y séptimo, y después, el cuarto con el noveno. ¿Y por qué mover cuatro vasos? ¿Sabría Vd. hacerlo moviendo sólo dos vasos?

274. LAS 55 PESETAS. Se hace una hilera con tres monedas, dos de 25 ptas. y una de 5 ptas. en medio de las anteriores. ¿Cómo quitar la de 5 ptas. del medio sin moverla?

275. TRES MONEDAS Y UNA LÍNEA. Dibuje una línea recta en una hoja de papel y tratar de colocar tres monedas de manera que las superficies de dos caras estén por completo a la derecha de la línea y las de dos cruces totalmente a su izquierda.

276. MONTONES CON LOS MELONES. Ponga Vd. veinte melones en cinco montones que sean todos nones.

277. DIVISIÓN DE LA TARTA. Divida la clásica tarta cilíndrica en 8 trozos iguales, mediante 3 cortes.

278. CON TRES RAYAS. ¿Será Vd. capaz de dibujar un cuadrado con tres rayas iguales?

279. ¡CUIDADO! NO SE QUEME. Haga un cubo con 5 fósforos sin doblarlos ni quebrarlos.

280. CONVERTIR TRES EN CUATRO. Sin romperse mucho la cabeza, y sin romper ninguna cerilla convierta tres cerillas en cuatro.

281. DIFICULTADES PARA EL JARDINERO. ¿Cómo se plantarán 10 árboles en 5 filas de 4 árboles cada una?

282. LOS CUATRO ÁRBOLES. ¿Podría Vd. plantar cuatro árboles de manera que hubiese la misma distancia entre todos ellos? ¿Cómo lo haría?

283. 10 SOLDADOS EN 5 FILAS DE 4. ¿Cómo distribuir 10 soldados en cinco filas de 4 soldados cada una?

284. MEJOREMOS EL SIX DE FIXX. En su libro "[Más juegos para los superinteligentes](#)", J. F. Fixx propone este problema: Mediante una sola línea, convertir la siguiente cifra (escrita en números romanos) en un número par, IX. La solución que da es SIX, lo que no nos vale en nuestro caso, ya que como españoles SIX no nos dice nada. Sin embargo existe una solución absolutamente correcta, utilizando un trazo recto y, por tanto válida para todos. ¿Cuál es?

285. MÁS CUADRADOS. ¿Cuántos cuadrados hay en el tablero de ajedrez de 8x8 casillas? ¿Y, en un tablero de 6x6 casillas?

286. ELIMINANDO DOS X. Carlos y su amigo Eduardo se han apostado una cena, y la ganará el que consiga dejar cuatro cuadrados perfectos eliminando sólo dos X. ¿Se atreve Vd. a apostar también?

```

X X X X X
X X X X X
X X X X X

```

287. LAS 6 MONEDAS. Tenemos 6 monedas dispuestas como en la figura. Cambiando la posición de una sola moneda, ¿se pueden formar dos filas que tengan 4 monedas cada una?

```

O O O O
  O
  O

```

288. LOS 4+4 LISTONES. Tenemos 4 pequeños listones de madera que por ser iguales se puede formar con ellos un cuadrado. También tenemos otros 4 listones iguales, pero de doble tamaño que los anteriores; evidentemente, con éstos también se puede formar otro cuadrado más grande que el anterior. Lo que pretendemos ahora es formar con los 8 listones tres cuadrados iguales. ¿Cómo lo conseguiría Vd.?

289. RECTÁNGULO SOMBREADO. Se dibuja un rectángulo en papel cuadriculado y se somborean las casillas del contorno. El número de casillas sombreadas será menor, igual o mayor que el número de casillas blancas del interior. ¿Será posible dibujar un rectángulo de proporciones tales que el borde (de una casilla de anchura) contenga número igual de cuadros que el rectángulo blanco interior? De ser así, halle todas las soluciones.

290. DEL 1 AL 8. Escriba en cada cuadradito los números del 1 al 8, con la condición de que la diferencia entre dos n^{os} vecinos no sea nunca menor que 4.

--	--	--	--	--	--	--	--

291. DEL 0 AL 9. Coloque un dígito en cada casilla de manera que el número de la primera casilla indique la cantidad de ceros del total de casillas, el de la segunda la cantidad de unos, el tercero la cantidad de doses, ..., el décimo la cantidad de nueves.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

292. DEL 1 AL 8 DISTRIBUCIÓN (1). Distribuya los números 1 al 8 en las ocho marcas (X) de la figura, con la condición de que no puede haber dos números consecutivos en huecos adyacentes.

	X	
X	X	X
X	X	X
	X	

Encontrar la solución sin un procedimiento lógico, no es sencillo.

293. CAMBIANDO UN DÍGITO. $53 - 54 = 1$. Cambiando un solo carácter de posición obtenga una igualdad numérica.

294. DEL 1 AL 8 DISTRIBUCIÓN (2). Distribuya los números 1 al 8 en las ocho marcas (X) de la figura, con la condición de que no puede haber dos números consecutivos en huecos adyacentes.

X	X	X	X
X	X	X	X

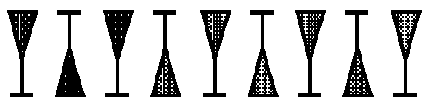
295. DEL 1 AL 8 DISTRIBUCIÓN (3). Distribuya los números 1 al 8 en las ocho marcas (X) de la figura, con la condición de que no puede haber dos números consecutivos en huecos adyacentes.

		X		
X	X	X	X	X
		X		
		X		

296. SUSTITUYENDO. Utilice los dígitos del 1 al 8 y sustituya por ellos las letras A y B. Los que pongas en B deben ser la suma de sus dos "A" vecinas.

A	B	A
B		B
A	B	A

297. CAMBIANDO SÓLO UN DÍGITO. $62 - 63 = 1$. Cambiando un solo dígito de posición obtenga una igualdad numérica.



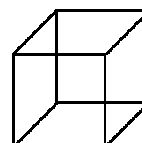
298. BOCA ABAJO Y BOCA ARRIBA.

Tenemos sobre la mesa una hilera de copas. Hay 5 boca arriba alternándose con 4 que están boca abajo. Se trata de ir dando vuelta a las copas, siempre de dos en dos, hasta conseguir que queden 4 boca arriba y 5 boca abajo. ¿Será Vd. capaz de conseguirlo?

299. ACOMODANDO BOLAS. ¿Será Vd. capaz de colocar las 15 bolas numeradas de un billar americano, formando un triángulo equilátero, de forma que mirando desde un vértice, cada bola sea la resta de las dos bolas tangentes inmediatamente posteriores a ella?

(Se puede restar de la bola de la izquierda la bola de la derecha y viceversa)

300. EL CUBO DE PRIMOS (1). En los vértices del cubo adjunto, coloque los números del 0 al 7 para que la suma de los dos de cada arista sea un número primo.



CRIPTOGRAMAS

*La **criptografía** es, como lo indica su etimología, el arte de las escrituras secretas. Su objeto es transformar un mensaje claro en un mensaje secreto que en principio sólo podrá ser leído por su destinatario legítimo (operación de cifrar); a esto sigue la operación inversa llevada a cabo por el destinatario (operación de descifrar). Restablecer el texto claro partiendo del texto cifrado sin que de antemano se conozca el procedimiento de cifras es el **desciframiento**.*

Si dejamos de lado los textos bíblicos en cifra, discutidos y discutibles, el procedimiento criptográfico más antiguo que se conoce es la escitala de los lace-demonios, de la que Plutarco nos dice que fue empleada en la época de Licurgo (siglo IX antes de nuestra era). La escitala era un palo en el cual se enrollaba en espiral una tira de cuero. Sobre esa tira se escribía el mensaje en columnas paralelas al eje del palo. La tira desenrollada mostraba un texto sin relación aparente con el texto inicial, pero que podía leerse volviendo a enrollar la tira sobre un palo del mismo diámetro que el primero.

Los romanos emplearon un procedimiento muy ingenioso indicado por Eneas el Tácito (siglo IV a de C.) en una obra que constituye el primer tratado de criptografía conocido. El procedimiento consistía en enrollar un hilo en un disco que tenía muescas correspondientes a las letras del alfabeto. Para leer el mensaje bastaba con conocer su primera letra. Si el correo era capturado sólo tenía que quitar el hilo del disco y el mensaje desaparecía. Pero posteriormente este procedimiento se perdió. Por Suetonio conocemos la manera en que Julio César cifraba las órdenes que enviaba a sus generales; sus talentos de criptógrafo no igualaban a los del general. Julio César se limitaba a utilizar un alfabeto desplazado en tres puntos: A era reemplazada por D, B por E, etc.

Hoy el arte de cifrar utiliza las técnicas de la electrónica y ya no tiene ninguna relación con los procedimientos que acabamos de describir.

Todos los procedimientos de cifrar antiguos y modernos, a pesar de su diversidad y de su número ilimitado, entran en una de las dos categorías siguientes: transposición o sustitución. La transposición consiste en mezclar, de conformidad con cierta ley, las letras, las cifras, las palabras o las frases del texto claro. La sustitución consiste en reemplazar esos elementos por otras letras, otras cifras, otras palabras u otros signos.

*La criptografía es un arte que desempeñó un importante papel en el desenvolvimiento de la historia. La **criptaritmética** no es más que un juego. No sé en qué época se inventó, pero los aficionados a las variedades comenzaron a interesarse por ellas en el primer congreso internacional de recreaciones matemáticas que se reunió en Bruselas en 1935.*

La criptaritmética consiste en reemplazar las cifras por letras en la transcripción de una operación de aritmética clásica, de una ecuación. El problema consiste en hallar las cifras que están "bajo" las letras. Para complicar las cosas, en ciertos sitios se puede marcar simplemente el lugar de una cifra con un punto o un asterisco. En el caso extremo solo quedan asteriscos.

Es fácil ver que la criptaritmética es un procedimiento de cifrar por sustitución y que la clave es una regla matemática.

Los enunciados criptaritméticos son a veces seductores; sus soluciones no presentan dificultades matemáticas pero en cambio exigen numerosísimas hipótesis y, en consecuencia, cálculos largos y trabajosos que implican grandes riesgos de confusión.

Por eso se aconseja que se dediquen a este género de problemas sólo los lectores pacientes y minuciosos.

301. SUMA FÁCIL (4). Reconstruya la suma: $BCD + EEF = GFG$. Se sabe que: $D-F=B$.

302. SUMA FÁCIL (5). Reconstruya la suma:
 $ABC32D + D2AEBA = F69BC8$

303. SUMA FÁCIL (6). Reconstruya la suma: $ROSA + LILA = NARDO$.

304. DEL ZOOLÓGICO. Resuelva: $(ZOO)^2 = TOPAZ$.

305. CRIPTOGRAMA. Resuelva el siguiente criptograma:
 $CDB06A + D6EBAC = A95AE7$

306. JUGANDO A LAS CARTAS. Resuelva éste: $ASES + REYES = POKER$. El cero no interviene.

307. PRODUCTO FORZADO. Reconstruya el siguiente producto:

$$ABC \times DEF = \dots = 204561$$

Las diez cifras están representadas en él, contando las tres sumas intermedias y sin contar el resultado.

Ayuda: $204561 = 3 \times 3 \times 7 \times 17 \times 191$.

308. LA CAZA DEL TIGRE. Se busca el nombre de un animal. Cada letra de este nombre tiene como valor su número de orden en el alfabeto (A=1, B=2, C=3, etc.) El número de la primera letra es múltiplo de 2. El número de la segunda es un cuadrado perfecto. El número de la tercera es múltiplo de 7. La cifra de las unidades del cuarto número es una potencia de 3. La suma de los números segundo y quinto es igual a 14. La suma de los números de dos de las letras es un número primo menor que 20. ¿Cuál es el animal buscado? *(No considerar CH, LL, Ñ, W)*

309. EL BUFÓN DEL DUQUE. La divisa del Duque de Chevailles, vasallo del rey de Francia, se situaba en forma de tres palabras de tres letras que evocaban la ley férrea impuesta por uno de sus antepasados:

$$LOI + FER = DUC$$

Estas tres palabras presentan la particularidad de formar una suma en la que cada letra corresponde a una de las nueve primeras cifras (de 1 a 9).

Se cuenta que un día, el bufón del Duque, encolerizado, escribió, conservando el valor de las letras:

$$FOL + DUC = IRE$$

El bufón firmó su suma con el número 32.456.347. ¿Firmó con su nombre?

310. EL ABC DE LOS CRIPTOGRAMAS. Resuelva: $ABC = C^4$, $BCA = D^4$.

311. CRIPTOSUMA: A letra distinta, número distinto. Una palabra no puede comenzar con 0. Resuelva el siguiente sabiendo que SEIS es divisible por 6.

$$SEIS + DE + ENERO = REYES$$

312. CRIPTOGRAMA. Resuelva el siguiente criptograma:

$$PAGA + PATIN = MAGICO$$

313. LOS PRODUCTOS DE SANTA BÁRBARA. En cada uno de los siguientes productos están las nueve cifras significativas. Reconstrúyalos.

$$\begin{array}{r} ***** \times * = ***** \\ ***** \times * = ***** \end{array}$$

314. SUMA DE LETRAS. Resuelva el siguiente criptograma sabiendo que ninguna de las cifras es cero. $ASE + ACES + ASCE = SCIE$.

315. CRIPTOGRAMA SENCILLO. Cada ? representa un símbolo que hay que encontrar: $MIL + MIL = ????????$

316. HOLA. Resuelva éste: $HOLA + CHAU = CUCHA$.
(Ayuda: Hay dos soluciones muy parecidas)

317. DE CITA. Resuelva éste: $DIA + HORA = CITAS$.

318. MUY ENTRETENIDO. Resuelva éste:
 $CINE + CENA + BAILE = PASEAR$

319. FACTURA EN CLAVE. Resuelva: $DIEZ + TRES = TRECE$. Se sabe, además, que DIEZ es par y que TRES es impar.

320. AMOR POR AMOR SE ACRECE. Reconstruya el siguiente producto:
 $AMOR \times AMOR = ****AMOR$

Ayuda: Números circulares son aquellos que multiplicados repetidamente por sí mismos reaparecen a la derecha de todos los productos. De una cifra son 1, 5 y 6, de dos cifras 25 y 76, etc.

RELOJES

En la resolución de problemas relativos a relojes se usan razonamientos matemáticos.

321. EL RELOJ DE PARED. Pepe tiene en casa un reloj de pared que toca la campana del siguiente modo: a la hora exacta, tantas campanadas como el número de la hora, (Ej. a las 4 da cuatro campanadas), a los 15, 30 y 45 minutos da una campanada.

Un día Pepe vuelve a casa, al entrar oye una campanada, pasado un rato otra, pasado otro rato, otra, y así desde que entró; oye ocho veces una campanada, ¿Qué hora era cuando entró?

322. APAGÓN DE LUZ. Estando Vd. ausente, por ejemplo, 10 horas de su casa, conoce algún procedimiento rápido para saber si en ese período de tiempo se ha producido algún apagón de luz y en caso afirmativo a qué hora.

323. EL CAFÉ ESTÁ SERVIDO. El café se sirve entre la 1 y las 2, cuando las agujas del reloj forman un ángulo cuya bisectriz pasa por el centro del 12. ¿Qué hora es exactamente entonces?

324. EL RELOJ QUE SE PARABA. Un hombre no tenía reloj de pulsera ni de bolsillo, pero tenía un reloj de pared muy exacto que sólo se paraba cuando se olvidaba de darle cuerda. Cuando esto ocurría, iba a casa de un amigo suyo, pasaba la tarde con él y al volver a casa ponía el reloj en hora. ¿Cómo es posible esto sin saber de antemano el tiempo que tardaba en el camino?

325. LOS RELOJES DE ANTONIO Y JUAN. Antonio y Juan quieren tomar, con el tiempo justo, el tren de las once. El reloj de Antonio se atrasa 10 minutos, pero él cree que se adelanta 5. El reloj de Juan se adelanta 5 minutos, pero él cree que se atrasa 10. ¿Quién llegará antes a la estación?

326. ENTRE LAS 11, LAS 12 Y LA 1. La aguja grande de un reloj está entre las 11 y las 12 y la aguja pequeña entre las 12 y la 1. Las dos agujas forman con la dirección de las 12 el mismo ángulo. ¿Qué hora marca el reloj?

327. EN LA CANTINA. Los entremeses se sirven entre las 7 y las 8, cuando las dos agujas del reloj están equidistantes de la cifra 6. El postre llega cuando

la aguja grande ha cogido a la pequeña. ¿Cuánto tiempo hay, en esta cantina, para comer los entremeses y el plato principal?

328. LAS AGUJAS DE MI RELOJ. Son más de las 3 h. y 20 m., pero no son las 3 h. y 25 m. Observo la situación de las agujas de mi reloj. Después giro las agujas sin romper el mecanismo y llego a poner exactamente la grande en el lugar anterior de la pequeña, mientras que ésta ocupa el lugar que la grande ocupaba anteriormente. ¿Qué hora es exactamente?

329. LAS TRES MANECILLAS DEL RELOJ. En un reloj con segundero, minuterio y horario concéntricos, las tres manecillas coinciden a las 12 en punto. ¿Habrá algún otro momento en que las tres manecillas vuelvan a superponerse exactamente?

330. ¿QUIEN ES MAYOR ANA O CARLOS? Ana o Carlos nació en 1842, pero no os diré quién. El otro nació en 1843 o en 1844. Ella nació en el mes de marzo. Cada uno de ellos tiene un reloj. Ninguno de los dos relojes funciona a la perfección. El de Ana se atrasa diez segundos cada hora, y el de Carlos se adelanta diez segundos cada hora. Un día de enero los dos pusieron sus relojes en hora exactamente a las doce del mediodía. Los relojes no volvieron a marcar la misma hora hasta el día que Ana cumplió 21 años. ¿Quién es mayor de los dos?

EDADES

Los problemas relativos a edades son siempre interesantes y ejercen cierta fascinación sobre los jóvenes con inclinaciones matemáticas. Por lo general son extremadamente simples.

331. ¿CUÁNTOS AÑOS TIENEN? *Abuelo:* Mi hijo tiene tantas semanas como mi nieto días. Mi nieto tiene tantos meses como yo años. Los tres juntos tenemos exactamente 100 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

332. ¿QUÉ EDAD TENGO? Si multiplicamos por 3 los años que yo tenga dentro de 3 años y restamos el triple de los que tenía hace tres años se obtendrán los años que tengo ahora. ¿Qué edad tengo ahora?

333. AÑOS DE SINDICATO. Pedro lleva ahora en el sindicato el doble de años que Joaquín. Hace dos años llevaba el triple de años. ¿Cuántos años lleva cada uno en el sindicato?

334. EN EL AÑO 1.994. Si en 1.974 María tuvo la cuarta parte de la edad de su madre, y en 1.984 la mitad, ¿qué edad tendrá cada una de ellas en 1.994?

335. LA ESTRELLA DE CINE. A una estrella de cine le preguntan qué edad tiene y contesta: *"Si al doble de los años que tengo, le quita el doble de los que tenía hace diez años, el resultado será mi edad actual"*. ¿Cuántos años tiene?

336. LOS TRES HERMANOS. La edad de Juan es mayor que la de su hermano Antonio en 5 años; Francisco tiene tantos años como los dos juntos, y entre los tres suman en total 70 años. ¿Qué edad tiene cada uno de ellos?

337. ¿CUÁNDO SALDRÁ DE LA CÁRCEL? Un hombre fue metido en la cárcel. Para que su castigo fuera más duro no le dijeron cuánto tiempo tendría que estar allí dentro. Pero el carcelero era un tipo muy decente, y el preso le había caído bien.

Preso: Vamos, ¿no puedes darme una pequeña pista sobre el tiempo que tendré que estar en este lugar?

Carcelero: ¿Cuántos años tienes?

Preso: Veinticinco.

Carcelero: Yo tengo cincuenta y cuatro. Dime, ¿qué día naciste?

Preso: Hoy es mi cumpleaños.

Carcelero: Increíble. ¡También es el mío! Bueno, por si te sirve de ayuda te diré (no es que deba, pero lo haré) que el día en que yo sea exactamente el doble de viejo que tú, ese día saldrás. ¿Cuánto tiempo dura la condena del preso?

338. LA EDAD DEL CURA. *El cura:* He encontrado en el pueblo tres personas cuyo producto de edades es 2450. La suma de sus edades es igual al doble de la de usted. ¿Cuáles son esas edades?

El sacristán: Solamente con esos datos no puedo responder a su pregunta.

El cura: Bueno, una de esas tres personas es mayor que yo.
¿Cuál es la edad del cura?

339. DIFERENCIA DE EDAD. Las sumas respectivas de las cifras que forman los años de nacimiento de Juan y Pedro son iguales. Sabiendo que sus edades empiezan por la misma cifra, ¿cuál es su diferencia de edad?

340. AL FINAL DE LA SECUNDARIA. Rita y Carlos se casaron hace 6 años cuando sus edades estaban en la proporción de 13 a 11. Tuvieron su primer hijo hace 4 años cuando sus edades estaban en la proporción de 7 a 6. Si su hijo terminara la enseñanza secundaria a los 15 años, ¿qué edad tendrá entonces su padre?

PARENTESCOS

Estrictamente hablando los problemas de parentescos no forman parte de las Matemáticas, pero el tipo de razonamiento que se necesita para resolverlos es muy parecido al que usan a veces los matemáticos.

341. MENUDOS PARENTESCOS. El hermano del hijo de Juan tiene un amigo tocayo del padre del hermano suyo. Siendo su amigo tocayo hijo de Paco, hermano político de Juan. ¿Cómo se llama el amigo y qué parentesco tiene con Juan?

342. VAYA PARENTESCO. Teresa, hija única, es la madre de Álvaro y la hija política de Luisa. Si Javier es el tío de Álvaro, ¿qué parentesco existirá entre éste y Miguel, marido de Luisa?

343. ¿CUÁNTOS HIJOS? Yo tengo 6 hijos. Cada hijo tiene una hermana. ¿Cuántos hijos tengo?

344. FAMILIA NUMEROSA. María tiene el doble de hermanos que de hermanas, pero si al número total de hermanos le restamos todas las hermanas de la familia, incluida ella, el resultado es tres. ¿Cuántos hermanos y hermanas componen la familia?

345. HERMANA QUE NO ES TÍA. Yo tengo una tía y mi tía una hermana que no es mi tía. ¿Cómo es posible?

346. HERMANA QUE NO ES TÍA. Mi tía Julia es la hermana de mi madre. Luisa es la hermana de mi tía, pero no es mi tía. ¿Quién es?

347. HERMANOS Y HERMANAS. Jorge tiene tantos hermanos como hermanas; sin embargo, su hermana Lucía tiene el doble de hermanos que de hermanas. ¿Cuántos chicos y chicas hay en la familia?

348. ENTRE CARLOS Y JAIME. *Alberto:* Los parentescos son curiosos. Jaime tiene el mismo parentesco contigo que el que yo tengo con tu hijo.
Carlos: Así es, y tú tienes el mismo parentesco conmigo que Jaime contigo. ¿Cuál es el parentesco entre Carlos y Jaime?

349. HIJO DE MIS PADRES Y NO ES MI HERMANO. Al contemplar un retrato, un señor dice: *"Ese es hijo de mis padres y no es hermano mío"*. ¿Quién es?

350. ¿CUANTOS INVITADOS? Un señor invitó a comer al cuñado de su padre, al suegro de su hermano, al hermano de su suegro y al padre de su cuñada. ¿Cuántos invitados tuvieron?

LÓGICA

Los problemas de lógica, a veces, pueden ser verdaderos rompecabezas.

LA LÓGICA. Es la forma correcta de llegar a la respuesta equivocada pero sintiéndote contento contigo mismo.

351. TENIS DE CATEGORÍA. En un partido del prestigioso torneo de tenis de Rolad Agros se enfrentaron Hagáis y Becker. El triunfo correspondió al primero por 6-3 y 7-5. Comenzó sacando Agasy y no perdió nunca su saque. Becker perdió su servicio dos veces. Agasy rompió el servicio de su rival en el segundo juego del primer set y, ¿en qué juego del segundo set?

352. SERPIENTES MARINAS. Un capitán en el Caribe fue rodeado por un grupo de serpientes marinas, muchas de las cuales eran ciegas. Tres no veían con los ojos a estribor, 3 no veían nada a babor, 3 podían ver a estribor, 3 a babor, 3 podían ver tanto a estribor como a babor, en tanto que otras 3 tenían ambos ojos arruinados. ¿Cuál es el mínimo número de serpientes necesarias para que con ellas se den todas esas circunstancias?

353. EL PARO AUMENTA. Con motivo de realizar un estudio estadístico de los componentes de una población, un agente analizó determinadas muestra de familias. El resultado fue el siguiente:

- 1) Había más padres que hijos.
- 2) Cada chico tenía una hermana.
- 3) Había más chicos que chicas.
- 4) No había padres sin hijos.

¿Qué cree Vd. que le ocurrió al agente?

354. PARTIDO DE TENIS. Santana ganó a Orantes un set de tenis por 6-3. Cinco juegos los ganó el jugador que no servía. ¿Quién sirvió primero?

355. CABALLOS. El caballo de Mac es más oscuro que el de Smith, pero más rápido y más viejo que el de Jack, que es aún más lento que el de Willy, que es más joven que el de Mac, que es más viejo que el de Smith, que es más claro que el de Willy, aunque el de Jack es más lento y más oscuro que el de Smith. ¿Cuál es el más viejo, cuál el más lento y cuál el más claro?

En ocasiones, ciertas personas se encuentran en una situación crítica, y sólo por su agudeza e inteligencia pueden salir de ella.

356. EL EXPLORADOR CONDENADO. Un explorador cayó en manos de una tribu de indígenas, se le propuso la elección entre morir en la hoguera o envenenado. Para ello, el condenado debía pronunciar una frase tal que, si era cierta, moriría envenenado, y si era falsa, moriría en la hoguera. ¿Cómo escapó el condenado a su funesta suerte?

357. EL PRISIONERO Y LOS DOS GUARDIANES. Un sultán encierra a un prisionero en una celda con dos guardianes, uno que dice siempre la verdad y otro que siempre miente. La celda tiene dos puertas: la de la libertad y la de la esclavitud. La puerta que elija el prisionero para salir de la celda decidirá su suerte.

El prisionero tiene derecho de hacer una pregunta y sólo una a uno de los guardianes. Por supuesto, el prisionero no sabe cuál es el que dice la verdad y cuál es el que miente. ¿Puede el prisionero obtener la libertad de forma segura?

358. EL PRISIONERO Y LOS TRES GUARDIANES. Imaginemos que hay tres puertas y tres guardias, dos en las condiciones anteriores y el tercero que dice verdad o mentira alternativamente. ¿Cuál es el menor número de preguntas que debe hacer para encontrar la libertad con toda seguridad?

359. LOS 3 PRESOS Y LAS BOINAS (1). El director de una prisión llama a tres de sus presos, les enseña tres boinas blancas y dos boinas negras, y les dice: *"Voy a colocar a cada uno de ustedes una boina en la cabeza, el primero de ustedes que me indique el color de la suya será puesto en libertad"*.

Si los presos están en fila, de manera que el primero no puede ver las boinas de los otros dos, el segundo ve la boina del primero y el tercero ve las boinas de los otros dos. ¿Por qué razonamiento uno de los presos obtiene la libertad?

360. LOS 3 PRESOS Y LAS BOINAS (2). El director de una prisión llama a tres de sus presos, les enseña tres boinas blancas y dos boinas negras, y les dice: *"Voy a colocar a cada uno de ustedes una boina en la cabeza, el primero de ustedes que me indique el color de la suya será puesto en libertad"*.

Si los presos pueden moverse, y por tanto ver las boinas de los otros dos. ¿Por qué razonamiento uno de los presos obtiene la libertad?

361. LOS MARIDOS ENGAÑADOS. Cuarenta cortesanos de la corte de un sultán eran engañados por sus mujeres, cosa que era claramente conocida por

todos los demás personajes de la corte sin excepción. Únicamente cada marido ignoraba su propia situación.

El sultán: Al menos uno de vosotros tiene una mujer infiel. Quiero que el que sea la expulse una mañana de la ciudad, cuando esté seguro de la infidelidad.

Al cabo de 40 días, por la mañana, los cuarenta cortesanos engañados expulsaron a sus mujeres de la ciudad. ¿Por qué?

362. EL CONDENADO A MUERTE. En la antigüedad la gracia o el castigo se dejaban frecuentemente al azar. Así, éste es el caso de un reo al que un sultán decidió que se salvase o muriese sacando al azar una papeleta de entre dos posibles: una con la sentencia "muerte", la otra con la palabra "vida", indicando gracia. Lo malo es que el Gran Visir, que deseaba que el acusado muriese, hizo que en las dos papeletas se escribiese la palabra "muerte". ¿Cómo se las arregló el reo, enterado de la trama del Gran Visir, para estar seguro de salvarse? Al reo no le estaba permitido hablar y descubrir así el enredo del Visir.

363. LAS DEPORTISTAS. Ana, Beatriz y Carmen. Una es tenista, otra gimnasta y otra nadadora. La gimnasta, la más baja de las tres, es soltera. Ana, que es suegra de Beatriz, es más alta que la tenista. ¿Qué deporte practica cada una?

364. SILOGISMOS. Ejemplo de silogismo que está en todos los manuales de lógica elemental, muy conocido e inevitablemente válido.

"Los hombres son mortales,

Sócrates es hombre.

Luego, Sócrates es mortal".

¿Qué ocurre con el siguiente?

"Los chinos son numerosos,

Confucio es chino.

Luego, Confucio es numeroso".

365. EL TORNEO DE AJEDREZ. En un torneo de ajedrez participaron 30 concursantes que fueron divididos, de acuerdo con su categoría, en dos grupos. En cada grupo los participantes jugaron una partida contra todos los demás. En total se jugaron 87 partidas más en el segundo grupo que en el primero. El ganador del primer grupo no perdió ninguna partida y totalizó 7'5 puntos. ¿En cuántas partidas hizo tablas el ganador?

366. LAS TRES CARTAS. Tres naipes, sacados de una baraja francesa, yacen boca arriba en una fila horizontal. A la derecha de un Rey hay una o dos

Damas. A la izquierda de una Dama hay una o dos Damas. A la izquierda de un corazón hay una o dos picas. A la derecha de una pica hay una o dos picas. ¿De qué tres cartas se trata?

367. TRES PAREJAS EN LA DISCOTECA. Tres parejas de jóvenes fueron a una discoteca. Una de las chicas vestía de rojo, otra de verde, y la tercera, de azul. Sus acompañantes vestían también de estos mismos colores. Ya estaban las parejas en la pista cuando el chico de rojo, pasando al bailar junto a la chica de verde, le habló así:

Carlos: ¿Te has dado cuenta Ana? Ninguno de nosotros tiene pareja vestida de su mismo color.

Con esta información, ¿se podrá deducir de qué color viste el compañero de baile de la chica de rojo?

368. BLANCO, RUBIO Y CASTAÑO. Tres personas, de apellidos Blanco, Rubio y Castaño, se conocen en una reunión. Poco después de hacerse las presentaciones, la dama hace notar: *"Es muy curioso que nuestros apellidos sean Blanco Rubio y Castaño, y que nos hayamos reunido aquí tres personas con ese color de cabello"*

"Sí que lo es -dijo la persona que tenía el pelo rubio-, *pero habrás observado que nadie tiene el color de pelo que corresponde a su apellido."* *"¡Es verdad!"* -exclamó quien se apellidaba Blanco.

Si la dama no tiene el pelo castaño, ¿de qué color es el cabello de Rubio?

369. LOS CIEN POLÍTICOS. Cierta convención reunía a cien políticos. Cada político era o bien deshonesto o bien honesto. Se dan los datos:

a) Al menos uno de los políticos era honesto.

b) Dado cualquier par de políticos, al menos uno de los dos era deshonesto. ¿Puede determinarse partiendo de estos dos datos cuántos políticos eran honestos y cuántos deshonestos?

370. COMIENDO EN EL RESTAURANTE. Armando, Basilio, Carlos y Dionisio fueron, con sus mujeres, a comer. En el restaurante, se sentaron en una mesa redonda, de forma que:

- Ninguna mujer se sentaba al lado de su marido.

- Enfrente de Basilio se sentaba Dionisio.

- A la derecha de la mujer de Basilio se sentaba Carlos.

- No había dos mujeres juntas.

¿Quién se sentaba entre Basilio y Armando?

PROBABILIDAD

En muchos problemas de probabilidad la solución no es la que parece a primera vista.

LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD TAMBIÉN FALLA. Si se meten en un saco tres personas generosas y tres personas egoístas, se agita bien el saco y luego se saca al azar, una persona, siempre sale una persona egoísta.

371. LOS INCONVENIENTES DE SER DESPISTADO. La siguiente historia da la casualidad de que es cierta:

Es bien sabido que en cualquier grupo de al menos 23 personas, la probabilidad de que al menos dos de ellas cumplan años el mismo día es mayor del 50%. Bien, en cierta ocasión un profesor estaba dando clase de matemáticas a unos universitarios, y estaba explicando la teoría elemental de probabilidad. Explicó a la clase que con 30 personas en lugar de 23, la probabilidad de que al menos dos de ellos cumpliesen años el mismo día sería muchísimo mayor.

Profesor: "Como en esta clase sólo hay diecinueve estudiantes, la probabilidad de que dos de vosotros cumpláis años el mismo día es mucho menor del 50%". En ese momento uno de los alumnos levantó la mano y dijo:

Alumno: "Le apuesto que al menos dos de los que estamos aquí cumplen años el mismo día".

Profesor: "No estaría bien que aceptase la apuesta, porque las probabilidades estarían claramente a mi favor".

Alumno: "No me importa. ¡Se lo apuesto de todas maneras!"

Profesor: "De acuerdo".

El profesor aceptó la apuesta, pensando en dar al chico una buena lección. Procedió a llamar uno a uno a los estudiantes para que dijeran el día de su cumpleaños hasta que, cuando iban por la mitad, tanto la clase como el profesor estallaron en carcajadas motivadas por el despiste del profesor.

El chico que con tanta seguridad había hecho la apuesta no sabía el día de nacimiento de ninguno de los presentes, excepto el suyo propio. ¿Sabes por qué se mostraba tan seguro?

372. EL MISMO N° DE PELOS. La densidad máxima de cabellos del cuero cabelludo humano es de 5 por mm^2 (generalmente es menor). Teniendo en cuenta que el número de españoles es 40 millones, ¿cuál es la probabilidad de que dos españoles, al menos, tengan el mismo número de pelos en la cabeza?

373. MAZO DE BARAJA COMPLETO. Tengo un mazo de la baraja francesa, completo, de 52 cartas. Las mezclo cuidadosamente y saco 11 cartas al azar. ¿Qué probabilidad tengo de que salga un comodín? ¿Y, si saco 17? ¿Y, si saco 26?

374. SOBRE LA SUPERFICIE DE UNA ESFERA. Sobre la superficie de una esfera marcamos tres puntos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres puntos queden en una misma semiesfera?

375. EL PENTÁGONO. Se toma al azar un punto situado a varios kilómetros del Pentágono. ¿Qué probabilidad hay de que desde él puedan verse tres lados del polígono?

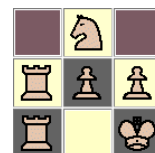
376. LOS 5 JUGADORES. Durante un viaje 5 camaradas jugaron una partida diaria. Suponiendo que era un juego puramente de azar o, lo que es lo mismo, que los 5 jugadores eran igualmente hábiles, ¿cuál es la probabilidad de que Juan no ganase ninguna partida?

377. LA CARTA DE ARRIBA. Una baraja francesa de 52 cartas es mezclada concienzudamente, cortada y vuelta a apilar. Se extrae la carta superior del mazo, y se observa su color. La carta se devuelve a su lugar, el mazo de naipes vuelve a ser cortado, y vuelve a observarse el color de la carta situado en lo alto. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos naipes sean del mismo color?

378. LAS HERMANAS DE LOS AJOS AZULES. Si nos encontráramos con dos de las hermanas Jones (lo que presupone que las dos anteriores sean extracciones al azar del conjunto de las hermanas Jones), hay un caso favorable en cada dos de que ambas chicas tengan los ojos azules. ¿Cuál es la predicción más razonable acerca del número de hermanas Jones que tienen los ojos azules?

AJEDREZ

El ajedrez es un juego cuyos orígenes se remontan a la India hacia el año 500, ampliamente conocido en todo el mundo y que despierta pasiones en millones de practicantes de las más diversas edades, formación cultural, clase social y lugar de residencia.



Existen conexiones muy claras entre el ajedrez y las matemáticas al menos en cuanto a procesos de análisis, métodos de razonamiento y notación del juego. Y que por tanto, su práctica (quizás sin una dedicación muy exhaustiva) puede ser provechosa para el desarrollo de las aptitudes matemáticas. Incluso hasta la leyenda sobre el inventor del ajedrez permite realizar interesantes actividades matemáticas.

El ajedrez es una fuente de problemas muy interesantes. Con todas las fichas y todo el tablero, o sólo con algunas de ellas (colocar un determinado número de reinas; intercambiar caballos; etc.) se pueden plantear situaciones que permiten practicar estrategias de resolución de problemas. También es de interés el conocer las notaciones de las posiciones iniciales de las fichas y de las jugadas, que se pueden utilizar como referencia en el estudio de estrategias ganadoras de juegos de tablero, y en general, en la asignación de coordenadas en un plano.

Es interesante comentar que el ajedrez es un juego con estrategia ganadora. "En 1912, Ernest Zermelo demostró que todo juego de información perfecta, con suma nula y con dos jugadores, se determina de forma estricta. El ajedrez es, pues, un juego de determinación estricta; existe una estrategia ganadora para uno de los jugadores, pero el teorema no proporciona un medio para encontrar esta estrategia" (Bouvier-George, 1984). Por suerte para los múltiples amantes del ajedrez, el método de demostración no es constructivo, porque en cuanto a la competencia, un juego del cual se conozca la estrategia ganadora pierde todo su interés. Las partidas tienen ganador predeterminado y no hay posibilidad de cambiarlo. El ajedrez lo mantiene porque aunque hay la certeza teórica de la existencia de esa estrategia nadie ha sido todavía capaz de explicitarla, con lo cual sigue gozando de excelente salud después de tantos siglos de existencia.

El mejor ajedrecista de la historia ha sido Moisés. Hizo tablas con Dios.

LA VENTAJA. El gran ajedrecista Steinitz, que reinó entre los años 1866 y 1894 (ya veterano fue destronado por Emanuel Lasker), tenía de sí mismo una

muy alta estima. En cierta ocasión se le preguntó si esperaba ganar un torneo de maestros próximo a empezar. Steinitz contestó: *"Tengo una ventaja sobre el resto de los participantes, pues soy el único que no tendrá que enfrentarse a Steinitz"*.

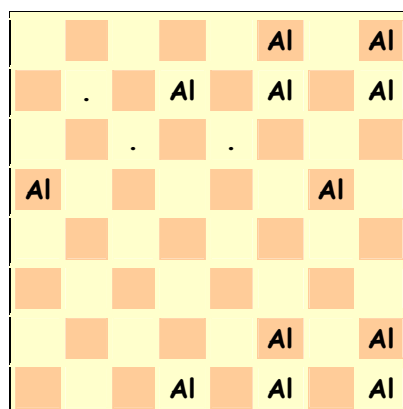
379. FICHAS EN EL TABLERO. Se dispone de un tablero de 64 casillas, cada una de 3 cm. de lado, y de fichas de damas de 3 cm. de diámetro. ¿Cuántas fichas pueden ponerse en el tablero sin colocar una encima de otra y sin sobrepasar sus bordes?

380. REY Y CABALLO. Tenemos nuestro rey en un ángulo del tablero de ajedrez; en el ángulo diagonalmente opuesto, nuestro adversario tiene un caballo. No hay ninguna otra pieza en el tablero. El caballo es el primero en jugar. ¿Durante cuántas jugadas podrá el rey ir eludiendo el jaque?

381. JUGAR ES GRANDE. Vd. tiene un tablero de ajedrez con 4 millones de casillas de lado. ¿Cuántos saltos debe dar un caballo de ajedrez, como mínimo, para ir de un vértice del tablero al vértice diagonalmente opuesto?

382. EL PASEO DE LA TORRE. ¿Es posible que la torre recorra todo el tablero de ajedrez pasando sólo una vez por cada casillero partiendo de A8 y terminando en H1? ¿Y si parte de C5 y termina en H1?

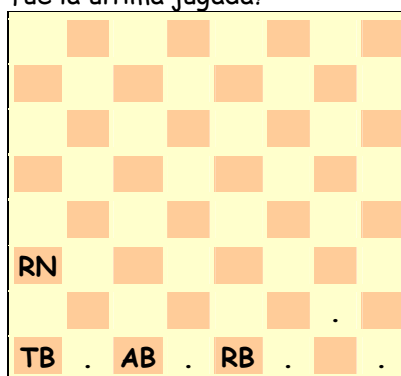
383. LOS 12 Y 14 ALFILES. En este tablero de ajedrez hemos colocado 12 alfiles, de manera que ninguno de ellos ataca a ningún otro. ¿Podrá Vd. hacer lo mismo con 14 alfiles?



384. MATE EN EL CENTRO. ¿Puede Vd. encontrar un método para que un caballo y dos torres den mate a un rey solitario en el centro del tablero?

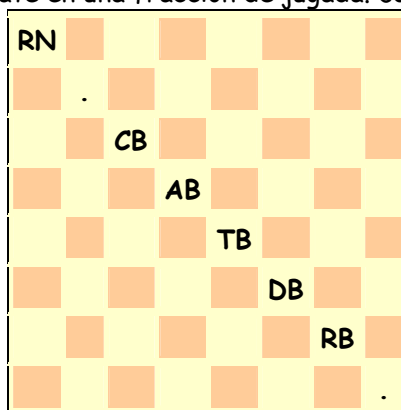
385. EL ENROQUE. El enroque es el movimiento por el cual el rey y una torre cambian de posición para reforzar la defensa. El rey queda más protegido y la torre adopta una posición más favorable, que le concede mayor libertad de movimiento. ¿Qué requisitos han de cumplirse para que el enroque sea válido?

386. ¿CUAL FUE LA ÚLTIMA JUGADA DE LAS BLANCAS? Las blancas acaban de mover. ¿Cuál fue la última jugada?



387. DAMAS DEL MISMO COLOR. ¿Cuántas damas del mismo color pueden colocarse en un tablero de ajedrez sin que se defiendan entre ellas? Por supuesto el tablero es de 8x8.

388. MATE EN UNA FRACCIÓN DE JUGADA. En la siguiente partida, las blancas juegan y dan mate en una fracción de jugada. ¿Cómo?



389. LAS TABLAS. Una partida finaliza en tablas cuando la victoria final no corresponde a ninguno de los dos jugadores. ¿Por qué motivos puede acabar una partida en tablas?

390. ¿CÓMO EVITAR DAR MATE EN UNA? Halle un movimiento de las piezas blancas que no acarree el mate inmediato del rey negro.

AB					RB	TB
	TN					AB
					TB	
		AN		PN		PN
		PB		RN		PB
	PN			PB		PN
	PB			PB		PB
			CB		CB	

DOMINÓ

Los primeros restos arqueológicos relacionados con el actual juego del dominó proceden de Caldea y tienen más de 4.000 años. Aunque el dominó actual parece tener su origen en China y es un descendiente de los juegos con dados de seis caras. Es un juego ampliamente difundido en nuestro país y que todos los alumnos conocen en su versión original o en alguna variante destinada a hacer asociaciones de diversos tipos. Quizás el juego más difundido en nuestro territorio pues aunque otros como las damas, el póker, el mus, el ajedrez, etc se juegan también, no tienen la misma difusión.

Está compuesto por 28 fichas rectangulares formadas por dos cuadrados iguales unidos (y de donde se puede seguir, entre otros, a los pentaminós y hexaminós, etc. En cada uno de ellos hay un número de puntos marcados, iguales (en cuyo caso a las fichas se les llama dobles) o diferentes, desde el cero hasta el seis.

El dominó, con las reglas habituales, además de un juego divertido, requiere reflexión y una cierta estrategia. Pero con las mismas fichas, o en torno a él, se pueden realizar problemas muy interesantes, al igual que variaciones de póker online se pueden encontrar, la más popular hoy día sin duda es el Texas holdem. Que pueden empezar con el número de fichas del juego, si en vez de 0 a 6 puntos hay otras variaciones: por ejemplo sólo hasta 5, o hasta 7. Es interesante encontrar la expresión del número N de fichas en función del número n de posibilidades distintas de puntuación que aparezcan en ellas (en el caso del dominó normal $n = 7$, porque pueden ser desde 0 hasta 6). Será $N = n(n-1)/2 + n$. O en forma recurrente, si conocemos el número N de fichas con n objetos, para pasar al número N' con $(n+1)$ objetos, se obtienen que $N' = N + (n+1)$.

Hay muchos otros problemas posibles sobre disposiciones de las fichas de formas diferentes (cuadrados, cadenas, formando todas ellas rectángulos 4×7 , etc.). Y es fácil además según la manera en que coloquemos las fichas encontrar regularidades interesantes (Carrillo-Hernán, 1989). Con algunas variaciones en las fichas se pueden utilizar para la práctica de otras clases de números, como los fraccionarios.

También pueden hacerse pequeñas o grandes modificaciones que lo hagan más apropiado para estudiar otros tipos de números o expresiones. Algunas vías posibles son las siguientes (Carrillo-Hernan 1989):

Operaciones con números.

Diferentes representaciones de una misma cantidad.

Fichas con otras formas y divisiones.

391. DOMINÓ Y AJEDREZ. De un tablero de ajedrez que, como sabemos, tiene 64 casillas cuadradas, suprimimos las dos del extremo de una diagonal. Tomemos ahora 31 fichas de dominó, cada una de tamaño igual a dos casillas del tablero. Se trata de colocarlas de forma que cubran las 62 casillas que tiene el tablero tras la eliminación de las dos indicadas.

392. COLOCANDO FICHAS DE DOMINÓ. Mi amigo Luis y yo jugamos a menudo al siguiente juego. Sobre un tablero de ajedrez uno coloca una ficha de dominó (no importa la numeración) ocupando dos casillas del tablero. Luego el otro coloca otra; luego el otro... El primero que no puede colocar pierde. Luis que amablemente, me deja siempre colocar el primero, siempre me gana. ¿En qué consiste su plan?

393. CON LAS FICHAS DEL DOMINÓ (1). Un dominó completo habitual consta de 28 fichas, desde la 0-0 hasta el 6-6. Si nos proponemos colocarlas todas según las reglas del juego, el dominó queda cerrado. ¿Es cierto esto?

394. CON LAS FICHAS DEL DOMINÓ (2). Un dominó completo habitual consta de 28 fichas, desde la 0-0 hasta el 6-6. Si del dominó quitamos una ficha no doble (el 2-4 por ejemplo), entonces no se puede cerrar, y los números que quedan en los extremos son un 2 y un 4. ¿Es cierto esto?

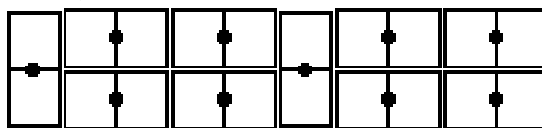
395. CON LAS FICHAS DEL DOMINÓ (3). Un dominó completo habitual consta de 28 fichas, desde la 0-0 hasta el 6-6. Del dominó quitamos todas las fichas en las que aparece un 6, así nos queda otro dominó completo de 21 fichas, desde la 0-0 hasta el 5-5. Si nos proponemos colocar éstas 21 según las reglas del juego, ¿el dominó quedará cerrado?

396. CON LAS FICHAS DEL DOMINÓ (4). Un dominó completo habitual consta de 28 fichas, desde la 0-0 hasta el 6-6. Del dominó quitamos todas las fichas en las que aparece un 6 y un 5, así nos queda otro dominó completo de 15 fichas, desde la 0-0 hasta el 4-4. Si nos proponemos colocar éstas 15 fichas según las reglas del juego, ¿el dominó quedará cerrado?

397. CON LAS FICHAS DEL DOMINÓ (5). Un dominó completo habitual consta de 28 fichas, desde la 0-0 hasta el 6-6. Del dominó quitamos todas las fichas en las que aparece un 6, un 5 y un 4, así nos queda otro dominó completo

de 10 fichas, desde la 0-0 hasta el 3-3. Si nos proponemos colocar éstas 10 fichas según las reglas del juego, ¿el dominó quedará cerrado?

398. LAS DIEZ MÁS PEQUEÑAS. Coloca las diez fichas más pequeñas del dominó (3-3, 3-2, 3-1, 3-0, 2-2, 2-1, 2-0, 1-1, 1-0, 0-0) como en la figura adjunta, de modo que todas las columnas verticales sumen lo mismo. También deben sumar lo mismo las dos filas horizontales.



399. TAPAR EL TABLERO. Un tablero de dos colores como el ajedrez de 6x7 casillas, ¿puede ser tapado con 20 fichas de dominó si se quitan dos cuadros de distinto color? ¿Es norma general?

400. LA PARTIDA. Cuatro amigos, Andrés, Benito, Carlos y Daniel, juegan al dominó. Comenzando por Andrés, cada uno ha puesto dos fichas. Las que ha puesto Andrés suman 23 puntos, las puestas por Benito 20, las de Carlos 18 y las de Daniel 16. La tercera ficha que coloca Andrés es el 6-2. ¿Cuáles son las otras ocho fichas colocadas? ¿En qué orden se colocaron?

SOLUCIONES

1. **DOBLE Y MITAD.** Cuatro.
2. **SUMA DE CINCO CONSECUTIVOS.** 402.
3. **EL GRAN TORNEO.** 25 jugadores. 24 partidas cada uno.
4. **HABLAR BIEN.** Siete y cinco son doce.
5. **EL CUENTAKILÓMETROS.** 110 km para ver el 73037.
6. **BOLI Y LÁPIZ.** El boli 65 y el lápiz 35.
7. **OTRA VEZ EL ORIGINAL.** Un 25%.
8. **¿SABE DIVIDIR?** El resto es cero. No hay que cometer el error de escribir 11.111, lo cual es once millares, ciento once. En este caso el resto es dos. La cifra dada se debía haber escrito: $11.000 + 1.100 + 11 = 12.111$ que es exactamente divisible por tres.
9. **PARES CONSECUTIVOS.** 32 y 34.
10. **ESCRIBIENDO A MÁQUINA.** 40 segundos.
11. **DE DESCUENTOS.** Del 28%.
12. **FAMILIA COMIENDO.** Trece.
13. **EN UN MILENIO.** Diez.
14. **LAS CAJAS.** Hay 33 cajas: 3 grandes, 6 medianas y 24 pequeñas.
15. **AÑOS BISIESTOS.** Hay 243 bisiestos.
Un año es bisiesto si es divisible entre 4, a menos que sea divisible entre 100. Sin embargo, si un año es divisible entre 100 y además es divisible entre 400, también resulta bisiesto. Obviamente, esto elimina los años finiseculares (últimos de cada siglo, que ha de terminar en 00) divisibles sólo entre 4 y entre 100.
Es decir la gran mayoría de los años que sean divisibles entre 4 son bisiestos. No lo son si su divisibilidad es entre 100 (como los años 1000, 1100, 1300, 1400, 1500, 1700, 1800 y 1900), a no ser que además sean divisibles entre 400 (como los años 1200, 1600 y 2000).
16. **DECEPCIÓN TRIANGULAR.** Cero.
17. **PIENSE DESPACIO.** Treinta.
18. **DIVIDIENDO Y SUMANDO.** Setenta.
19. **EL GANADERO Y EL PIENSO.** Para 18 días.
20. **LOS GRIFOS.** Juntos en 120 minutos llenan 3 depósitos. Un depósito lo llenan en $120/3 = 40$ minutos.
21. **BUSCANDO, BUSCANDO.** El 5/6.
22. **MULTIPLICANDO.** El 1 y el 47.
23. **DOCENAS DE SELLOS.** Doce.
24. **MÚLTIPLOS PRIMOS.** Ninguno, salvo él mismo.
25. **EN ROMANOS.** XXI.
26. **LA HORA.** Las once y media.
27. **SUPERTRUCO DE MAGIA.** Un 4.
28. **PRODUCTO TOTAL.** 768.
29. **EL PALO Y LA VARA.** Cinco.

30. **PROBABLE COLISIÓN.** Si se acercan a 25 y 35 km/h respectivamente. La velocidad relativa de acercamiento es de 60 km/h, o sea, 1 km/min. Por tanto, un minuto antes de colisionar estarán a un km de distancia.
31. **PAR O IMPAR.** Impar.
32. **MEDIO METRO.** Es mayor la mitad de un metro cuadrado.
33. **CON CUATRO NUEVES.** $99 + 9/9 = 100$.
34. **CON CUATRO UNOS.** El mayor número es 11 elevado a 11.
35. **LAS 3 PASTILLAS.** Algo más de 60 minutos.
36. **GASTANDO.** Doce.
37. **CONTESTE MUY RÁPIDO.** En el 2º lugar.
38. **CONTESTE EN 2 SEGUNDOS.** Al último nunca se le puede adelantar. Es él el que puede.
39. **BEBIENDO.** $1+2+3+4+5+6=21$.
40. **HOYOS Y CANICAS.** Cuatro canicas y tres hoyos.
41. **120 CON 4 OCHOS.** $(8+8) \times 8 - 8 = 120$.
42. **EL FRUTERO.** Tres.
43. **CON SEIS UNOS.** $24 = 11 + 11 + 1 + 1$.
44. **BORRANDO CIFRAS.** 12345123451234512345.
45. **LOS TORNILLOS.** Separando 12 y 12. Separando 6 y 6. Separando 3 y 3.
46. **LAGARTOS Y GORRIÓN.** Un pico y ninguna pata.
47. **CUATRO LUNES, CUATRO VIERNES.** Domingo o lunes.
48. **¿CUÁNTOS GATOS?** Cuatro gatos. Uno en cada rincón sentado sobre su propio rabo. Delante de cada gato hay otros tres, uno en cada rincón, sentado sobre su propio rabo.
49. **SIN PAPEL NI BOLI.** $19 \times 13 + 13 = (19+1) \times 13 = 20 \times 13 = 260$.
50. **LAS FLORES.** 15 docenas.
51. **EDAD DE LUIS.** 5 años. $5^2 = 25 = 100/4$.
52. **EL CUADRADO.** 48 m.
53. **MINUTOS.** 417 minutos.
54. **PRODUCTO DE DEDOS.** 212. $10 \times 10 : 1/2 = 200 + 12 = 212$.
55. **LA FAMILIA.** Nueve.
56. **PLÁTANOS.** Seis. Cada día se comió dos.
57. **EL ESTABLO.** 14 caballos y 8 gallos.
58. **GRANDE, GRANDE.** $9^9 = 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 387.420.489$.
59. **LAS NUECES.** Había 29 nueces en el tarro.
60. **BUÑUELOS.** Carlos come 3 veces más rápido que su hermano. Comerían 24 y 8. Es decir, tardarían 45 minutos.
61. **EDADES.** 51 y 15; 42 y 24; 60 y 06.
62. **NÚMERO DE 4 CIFRAS.** El 6.394.
63. **ANIMALES DOMÉSTICOS.** Un gato y un perro.
64. **CUMPLEAÑOS.** Cincuenta.
65. **LOS PASEOS DEL PERRO.** $3 \times 365 = 1095$. Los 13 minutos no importan.

66. **EL TONEL.** $35-19=16$ (es la cantidad de vino sacado). Luego $35-(16 \times 2) = 3$ kg.
67. **LOS GATOS.** Ocho gatos.
68. **OTRO NÚMERO DE 4 CIFRAS.** 1349.
70. **QUEBRADOS.** 2.999, 3.000 y 3.001.
71. **MÁS QUEBRADOS.** Veinte.
72. **LOS CAZADORES.** Veinte.
73. **LOS CERDOS.** Cinco.
74. **LOS TRESES.** Juan 10. Benito 14.
75. **LOS SALUDOS.** 120 veces.
75. **LOS SALUDOS.** Seis.
76. **LOS PINTORES.** 80 minutos.
77. **LARGO PRODUCTO.** Cero. Está el cero entre ellos.
78. **UN EURO.** 40 de un céntimo, 2 de 10 y 8 de 5.
79. **LA TELA COLOREADA.** 3 m. 20 cm.
80. **OTRO NÚMERO.** Cinco.
81. **CUADRADOS PERFECTOS.** Hay 1.000.
 $1^2=1$, $2^2=4$, ..., $999^2=998.001$, $1000^2=1.000.000$.
82. **MENUDA ESCAVADORA.** Ocho horas. En el primer agujero: $2m \times 2m \times 2m = 8$ metros cúbicos. En el segundo agujero, $4m \times 4m \times 4m = 64$ metros cúbicos.
83. **LOS NEUMÁTICOS.** 200 km. Entre los tres neumáticos recorrieron 600 km.
84. **MI ANTIGUO RELOJ.** Diez segundos.
85. **MADERERO CORTADOR.** 15 euros (3 cortes). También vale 10 euros (2 cortes).
86. **LA RUEDA DE LA BICI.** 21. La mayoría de la gente contesta que 20.
87. **CERDOS Y PALOMAS.** 7 cerdos y 8 palomas.
88. **PROBLEMAS DE MATES.** Diez.
89. **EL PADRE DE LOS HIJOS.** Tío. (Generalmente)
90. **SI LA MIRAS.** La nariz.
91. **POR LOS PIES.** El árbol.
92. **SUMANDO IMPARES.** $17 + 19 + 21 + 23 = 80$.
93. **EL MAZO.** 12 mm. 14 mm. 8 mm.
94. **DE FECHAS.** Nueve.
95. **LOS DADOS.** 1.
96. **DOSES Y CINCOS.** Cuatro doses y tres cincos.
97. **RECORTANDO.** Cinco.
98. **LA SUEGRA DE LA ESPOSA.** Madre. (Generalmente)
99. **HERMANA, ESPOSO E HIJO.** Sobrino. (Generalmente)
100. **EL RESTO.** 1.
101. **ENCUESTA SOBRE EL VINO.** $72,727272...=8/11$. $74,594594...=138/185$.
Personas encuestadas = mcm (11,185) = 2035.
102. **EL MERCADER DE DIAMANTES.** Se venden los diamantes gruesos a 13 doblones cada uno, y los menudos a 13 diamantes por un doblón. El primer vendedor llevó un diamante grueso y 39 menudos y en los 16 del otro había 3 gruesos y 13 menudos.

103. LOS 8 PANES Y LAS 8 MONEDAS.

	Pastor A	Pastor B	Cazador
Panes que aporta	5	3	0
Parte que come	8/3	8/3	8/3
Parte que regala	7/3	1/3	0
Parte del dinero	7	1	

Pastor A = 7 monedas. Pastor B = 1 monedas.

104. LOS 5 PANES Y LAS 5 MONEDAS.

	Pastor A	Pastor B	Cazador
Panes que aporta	3	2	0
Parte que come	5/3	5/3	5/3
Parte que regala	4/3	1/3	0
Parte del dinero	4	1	

Pastor A = 4 monedas. Pastor B = 1 monedas.

105. EN EL HIPÓDROMO. Tras la 6ª carrera = 0 ptas.

Tras la 5ª carrera = 600 ptas.

Tras la 4ª carrera = 300 ptas.

Tras la 3ª carrera = 900 ptas.

Tras la 2ª carrera = 450 ptas.

Tras la 1ª carrera = 1.050 ptas.

Al llegar al hipódromo = 525 ptas.

106. VACACIONES CON LLUVIA. Puesto que cuando llovió por la mañana, la tarde fue soleada, quiere decirse que ningún día llovió mañana y tarde. Llamando x al número de días que llovió por la mañana, y y al de los que llovió por la tarde, podemos escribir que el número de mañanas es igual al de tardes.

$10+x=9+y$ como $x+y=9$ obtenemos, $10+x=9+(9-x)$, $x=4$. Las vacaciones duraron, por tanto, $10+4=14$ días.

107. COMO ANILLO AL DEDO. 18 anillos, 10 dedos.

108. LOS HUEVOS DE GALLINA Y DE PATO. A la cesta con 29 huevos.

Entonces: $23+12+5 = 40$ huevos de gallina. $14+6 = 20$ huevos de pato.

109. 7 LLENAS, 7 MEDIO LLENAS Y 7 VACÍAS.

Solución 1	Solución 2
1º) 3 llenas, 1 medio llena y 3 vacías.	1º) 1 llena, 5 medio llenas y 1 vacía.
2º) 2 llenas, 3 medio llenas y 2 vacías.	2º) 3 llenas, 1 medio llena y 3 vacías.
3º) 2 llenas, 3 medio llenas y 2 vacías.	3º) 3 llenas, 1 medio llena y 3 vacías.

110. REPARTO EN LA BODEGA. 24 botellas (12G, 12p) y 21 partes de vino (7G, 7p).

1ª persona: 3 G. llenas, 1 p. llena, 1 G. vacía, 3 p. vacías.

2ª persona: 2 G. llenas, 3 p. llenas, 2 G. vacías, 1 p. vacía.

3ª persona: 2 G. llenas, 3 p. llenas, 2 G. vacías, 1 p. vacía.

111. NEGOCIO PARA TRES. Antonio=6 millones, Benito=4 millones, Carlos=2 millones.

	Antonio	Benito	Carlos	Total
Millones que aporta	18	12	6	36
Fracción del total	1/2	1/3	1/6	1
Reparto de ganancias	6	4	2	12

112. LOS BUEYES DEL GRANJERO. Podemos dividir a los bueyes en dos grupos en cada caso; un grupo que coma el crecimiento, y el otro el pasto acumulado. El primero variará directamente con el tamaño del campo, y no dependerá del tiempo; el segundo grupo también variará directamente con el tamaño del campo, y además inversamente con el tiempo. Por los datos, 6 bueyes se comen el crecimiento del pasto de 10 Ha., y 6 bueyes comen el pasto de 10 Ha. en 16 semanas. Por tanto, si 6 bueyes comen el crecimiento de 10 Ha., 24 comerán el crecimiento de 40 Ha.

Nuevamente, encontramos que si 6 bueyes comen el pasto acumulado de 10 Ha. en 16 semanas, entonces:

12 bueyes comen el pasto de 10 Ha. en 8 semanas

48 bueyes comen el pasto de 40 Ha. en 8 semanas

192 bueyes comen el pasto de 40 Ha. en 2 semanas

64 bueyes comen el pasto de 40 Ha. en 6 semanas

Sumando entre sí los dos resultados (24+64), encontramos que 88 bueyes pueden ser alimentados con una pradera de 40 Ha. durante 6 semanas.

113. LA ESCALERA MECÁNICA (1). Este problema no presentaría dificultad si en vez de tratarse de una escalera mecánica y hablar de peldaños, lo hubiéramos planteado en términos de una cinta transportadora horizontal (como la de los aeropuertos) y hubiéramos hablado de metros de cinta desplazable. En tal caso, llamando D a la distancia en metros entre la entrada a la cinta y la salida de ella; x a la velocidad en el sentido del desplazamiento de la cinta y v a la velocidad de ésta, se tendría: $(x+v)t=D$, $(5x-v)t/2=D$. Estas mismas ecuaciones son las de nuestro problema, siendo D la distancia en peldaños, y x y v las velocidades en peldaños por unidad de tiempo. (El hecho de escribir $t/2$ en la 2ª ecuación se comprende si tenemos en cuenta que yendo 5 veces más rápido dio 125 pasos que son la mitad de los que corresponderían a $50 \times 5 = 250$, que hubiese dado en un tiempo t).

Finalmente: $xt + vt = 50 + vt = D$

$5xt/2 - vt/2 = D$, $50 + vt = 125 - vt/2$, $vt = 50$ y $D = 100$ peldaños.

114. LA ESCALERA MECÁNICA (2). Sea x el número de peldaños. Cuando utilizo la escalera, ésta recorre $x-20$ escalones en 60 segundos. Cuando sube mi mujer, recorre $x-16$ escalones en 72 segundos. La escalera tiene pues una velocidad de cuatro escalones en 12 segundos. Recorre pues el equivalente de 20 escalones en 60 segundos; su altura total es la suma de estos 20 escalones y los otros 20 que he subido andando, es decir, 40 escalones.

115. EL TERREMOTO LEJANO. Sea x =diferencia de hora; y =tiempo de transmisión.

$19h\ 34m - 8h\ 30m = x + y$

$17h\ 19m - 9h\ 15m = x - y$

de donde, $x=9h\ 34m$; $y=1h\ 30m$.

116. LAS PERPLEJIDADES DE LA SEÑORA PACA. La aparente paradoja quedó completamente aclarada cuando la señora Paca vio un horario en el que figuraban las horas a las que pasaban los autobuses P y Q por su parada:

Línea P: 10,09 - 10,19 - 10,29 - 10,39 - 10,49 - 10,59.

Línea Q: 10,10 - 10,20 - 10,30 - 10,40 - 10,50 - 11,00.

Desde que pasa un autobús P transcurre sólo un minuto hasta que aparece un Q, y nueve hasta que pasa el siguiente P. Así pues, por cada 10 minutos pueden pasar nueve esperando un P y sólo uno esperando un Q. Tendríamos, pues, que una persona que utilice frecuentemente esta parada vería llegar primero el autobús P nueve veces de cada diez.

117. EL PERRO Y EL GATO. La perra pesa 5 kilos, y el gato 10.

118. LOS MARINEROS, EL MONO Y LOS COCOS. Sea x el número de cocos.

Tras separar su parte el 1^{er} marinero, quedan: $(x-1) \frac{2}{3}$.

Tras separar su parte el 2^o marinero, quedan: $[(x-1) \frac{2}{3}-1] \frac{2}{3}=(x-1) \frac{4}{9}-\frac{2}{3}$.

Tras separar su parte el 3^{er} marinero, quedan: $[(x-1) \frac{4}{9}-\frac{2}{3}-1] \frac{2}{3}=(x-1) \frac{8}{27}-\frac{10}{9}$.

Finalmente, el último reparto nos dice que: $(x-1) \frac{8}{27}-\frac{10}{9}-1=\text{múltiplo de } 3$.

Simplificando se obtiene: $8x=27 \cdot 3n+65=81n+65$. Ecuación diofántica, que tiene como soluciones: a) Menor que 100: $x=79$. b) Entre 200 y 300: $x=241$.

119. ACEITE Y VINAGRE. El cliente compró los barriles de aceite de 13 y 15 litros a 50 ptas. el litro, y los barriles de 8, 17 y 31 litros a 25 ptas. el litro.

$(13+15) \times 50 = 1.400$ ptas. $(8+17+31) \times 25 = 1.400$ ptas.

Esto deja el barril de 19 litros, que puede contener tanto aceite como vinagre.

120. LOS HERMANOS Y LOS MELONES. Representamos por O los melones de Pablo y por X los de Agustín.

O O O X X - 2

O O O X X - 2

O O O X X - 2

O O O X X - 2

O O O X X - 2

O O O X X - 2

O O O X X - 2

O O O X X - 2

O O O X X - 2

O O O X X - 2

X X X X X - 2

X X X X X - 2

El dólar que falta se pierde al hacer los dos últimos lotes.

121. BARRILES DE VINO Y CERVEZA. Como el hombre vendió una cantidad de vino y luego el doble, el total de vino vendido debe ser un número múltiplo de 3. Observamos ahora que los contenidos de los barriles (15, 16, 18, 19, 20 y 31) al ser divididos cada uno por 3, dejan respectivamente restos: 0, 1, 0, 1, 2, 1. De estos seis debemos elegir cinco que sumados den un múltiplo de 3, y esto sólo ocurre si tomamos los restos 0, 1, 0, 1, 1. Queda fuera el resto 2, que corresponde al barril de 20 litros, y la venta fue de 33 litros (15+18) al primer cliente y de 66 (16+19+31) al segundo.

122. LA DIVISIÓN EN LA TASCA. Hacen falta 14 trasvases: Recipientes (16,11,6):

1 - (16,0,0) 2 - (10,0,6) 3 - (10,6,0) 4 - (4,6,6) 5 - (4,11,1)

6 - (15,0,1) 7 - (15,1,0) 8 - (9,1,6) 9 - (9,7,0) 10 - (3,7,6)

11 - (3,11,2) 12 - (14,0,2) 13 - (8,2,6) 14 - (8,8,0)

123. FACUNDO EL LECHERO. Dedúzcalo Vd.

124. LOS VAGABUNDOS Y LAS GALLETAS. El menor número 1.021.

La solución general es que para n hombres, el número debe ser $m(n^{n+1})-(n-1)$, donde m es cualquier entero. Cada hombre recibirá $m(n-1)^n-1$ galletas en la división final, aunque en el caso de dos hombres, donde $m=1$, la distribución final sólo beneficia al perro. Por supuesto, en todos los casos cada uno roba una enésima parte del total de las galletas, luego de dar al perro la sobrante.

125. LECHERO INGENIOSO. Llena la jarra de 3 litros, y la vacía en la de 5. Vuelve a llenarla y vacía todo lo que quede en la de 5, ya parcialmente llena. Lo que sobra en la jarra de 3 litros es exactamente 1 litro.

3 L.	5 L.
0	0
3	0
0	3
3	3

Podría medir así, de uno en uno, cualquier cantidad de litros. Sin embargo, hay maneras más rápidas de medir cantidades exactas de leche sin marearla tanto. Por ejemplo, 3 y 5 litros se pueden medir directamente y $6=3+3$, $8=3+5$, $10=5+5$, etc. pero, ¿Cómo se medirían 4 y 7 litros?

126. EL VENDEDOR DE VINO. Los pasos a modo indicativo pueden ser:

8 L.	5 L.	3 L.
8	0	0
5	0	3
2	3	3
2	5	1
7	0	1
7	1	0
4	1	3

127. LA ALABARDA. $451.066 = 2 \times 7 \times 11 \times 29 \times 101$. El último día del mes ha de ser forzosamente 29, siendo, por tanto, el mes febrero de un año bisiesto. La longitud de la alabarda ha de ser forzosamente 7 pies. Quedan tres factores: 2, 11 y 101.

Son posibles dos soluciones: 101 ó 202 es la mitad del número de años transcurridos entre la muerte del soldado y el descubrimiento de la tumba. Pero entre 1712 y 1716, por una parte la alabarda ya no se utilizaba, y por otra no hubo intervenciones francesas fuera de Francia. Así, 202 es la mitad del número de años transcurridos, siendo entonces la edad del comandante 22 años.

En 1512 tuvo lugar la batalla de Rávena entre españoles y franceses, siendo mandadas las tropas francesas en esa ocasión por Gastón de Foix, nacido en 1498.

128. MANZANAS ENTERAS. Sólo puede prolongarse hasta 4 compradores (por ejemplo, si hubiera habido 80, 140, 200... manzanas al principio). Pero ninguna de estas cantidades permiten llevar 6 manzanas más un sexto de las que quedan sin cortar manzanas.

129. EXIGENCIA CUMPLIDA. *"Se venden lotes de 7 limones al precio de un dólar el lote. Concluidos los lotes, se venderán los limones restantes a 3 dólares cada limón".*

En estas condiciones cada vendedor recaudó 20 dólares.

El mismo efecto se consigue con 60 limones dando a uno 30, al otro 20 y al otro 10. También con 90 limones dando a uno 50, al otro 30 y al otro 10. (Más adelante está)

130. UN PRECIO ABSURDO. *"Véndase primero lotes de 7 melones por un dólar, y acabados éstos, cada melón por 13 dólares".* De este modo el primer vendedor consigue 20 dólares, y el segundo vendedor obtiene 40 dólares.

131. NINGÚN N° PRIMO. 201, 202, ..., 210.

Otras: 321, 322, ..., 330 y 511, 512, ..., 520.

132. FRACCIONES EXTRAÑAS. Quitando en cada caso, el número repetido, el resultado es el mismo: $19/95=1/5$; $26/65=2/5$; $16/64=1/4$.

133. LA CIFRA BORROSA. El resultado es múltiplo de cada uno de los factores. En particular de 11. Si aplicamos el criterio de divisibilidad por 11:

Suma de las cifras pares: $3+7+7+3+8+0 = 28$

Suma de las cifras impares: $1+0+X+4+6+0+0+ = 11+X$

La diferencia de estas cantidades ha de ser 0, 11 o múltiplo de 11.

La única posibilidad es que $X=6$.

Podríamos haber utilizado los criterios de divisibilidad por 3 o por 9; pero con ellos no siempre la solución es única.

134. ACERCA DE LOS PRIMOS. Formando el factorial de 11, tenemos que: $11!+2$ es divisible por 2, $11!+3$ es divisible por 3, ..., $11!+10$ es divisible por 10, $11!+11$ es divisible por 11, ya que el factorial de 11 es divisible por 2,3,...,11, al ser factores suyos. Por lo tanto una solución (hay infinitas), es: 39916802, 39916803, ..., 39916811.

135. EL GRAN DESFILE. Hay que hallar el menor número que tiene exactamente 64 divisores. El menor número es 7560 soldados. $7560 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$. El número de divisores es: $(3+1)(3+1)(1+1)(1+1) = 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 64$.

136. EL MAYOR PRODUCTO. Por ensayo y error se llega a 631×542 .

137. SUMA POR PRODUCTO. $29.400 = 24 \cdot 25 \cdot 49$. Los números buscados son 24 y 25.

138. BUSCANDO UN DIVISOR. Las condiciones son sencillas, pero la tarea es terriblemente complicada. Solamente tiene dos divisores: 2.071.723 y 5.363.222.357, y su descubrimiento es una tarea sumamente ardua.

139. MAYOR Y MENOR MÚLTIPLOS DE 11. Hay que recordar el criterio de divisibilidad por 11. Un número que cumpla el enunciado es, por ejemplo: 415.276.839. Para encontrar el número mayor hay que tratar de que la diferencia entre las cifras del lugar impar sea 0, (que no se puede) u 11. Así sale: 987.652.413. De forma similar el más pequeño es: 123.475.869.

140. EL NÚMERO 1089. Si las cifras del número inicial son a, b y c, con a mayor que c. Dicho número es: $110a+10b+c$. Al invertir las cifras se obtiene: $100c+10b+a$. Restándolos se obtiene: $100a-100c+c-a = 100a-100c-100+90+10+c-a = 100(a-c-1)+90+(10+c-a)$
Invirtiendo sus cifras se obtiene: $100(10+c-a)+90+(a-c-1)$
Sumando los dos últimos sale: $900+180+9 = 1089$.

141. EL MÁGICO NÚMERO 68.**142. SIMPLIFICACIONES ESCANDALOSAS.**

$$49999/99998 = 4999/9998 = 499/998 = 49/98 = 4/8 = 1/2.$$

$$16666/66664 = 1666/6664 = 166/664 = 16/64 = 1/4.$$

$$9999/99995 = 1999/9995 = 199/995 = 19/95 = 1/5.$$

Sea n el número de las cifras b de la fracción.

El numerador de la primera fracción es:

$$a 10^n + b (10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 1) = a 10^n + b (10^{n-1})/9$$

El denominador de la primera fracción es:

$$b (10^n + 10^{n-1} + \dots + 10) + c = b 10 (10^{n-1})/9 + c$$

Transportemos a la fracción e igualemos los productos de los extremos y de los medios:

$$a 10^n c + b (10^{n-1})/9 c = b 10 (10^{n-1})/9 a + c a$$

$$9ac = 10ab - bc \Rightarrow b = 9ac/(10a-c) \text{ es la relación buscada.}$$

Curiosidad que viene a cuento: Simplificando la fracción $(a^2-b^2)/(a-b)$ de la forma que suelen hacer algunos alumnos: " a^2 entre a es a , menos entre menos es $+$ y b^2 entre b es b " se obtiene el resultado correcto $(a+b)$.

143. CURIOSA PROPIEDAD (2). El 11 y el 22.**144. DELANTE Y DETRÁS. $8 \times 86 = 688$.**

$$1639344262295081967213114754098360655737704918032787 \times 71 =$$

$$116393442622950819672131147540983606557377049180327877.$$

Los números 83, 86 y 71 son los únicos multiplicadores de dos dígitos que cumplen la condición, aunque el multiplicando puede aumentarse. Así, si prefijamos a 41096 el número 41095890, repetido cualquier número de veces, el resultado puede siempre multiplicarse por 83 de la forma dicha.

147. MÚLTIPLO DE 9. Ninguna. Es una propiedad general de los números naturales.

Veamos para uno de tres cifras abc : $100a+10b+c-a-b-c=99a+9b=9(11a+b)$.

148. FECHAS INDETERMINADAS. Cada mes tiene 11 fechas ambiguas (pues la fecha 8-8-77 no es ambigua, por lo que en total hay $11 \times 12 = 132$). [La fecha 8-8-77, también podría considerarse "ambigua", porque no se sabe si el primer 8 significa mes o día. En este caso la solución sería $12 \times 12 = 144$]

149. OBREROS DE SIEMPRE. Por lo que hace a los restos, serían posibles estas soluciones: 82-18, 47-53, 12-88.

La desigual distribución impide las soluciones extremas. Así: 47-53 es la buscada.

150. VENTA DE PELOTAS. El número 60.377 ha de ser el producto del número de pelotas vendidas, por el precio de cada una, que será inferior a 200. Por consiguiente, hay que buscar un divisor de 60.377 menor que 200. Ahora bien, la última cifra del importe total siendo un 7 ha de provenir del producto de 1×7 ó de 3×9 . No tenemos más que buscar algún número primo que termine en cualquiera de estas cifras, dividida a 60.377 y sea menor que 200. El único es 173, y, por tanto, el número de pelotas vendidas 349.

El problema hubiera sido indeterminado, si los factores primos del número dado hubiesen sido más numerosos y tales que dos al menos fuesen inferiores a 200.

151. EL NÚMERO MÁGICO 481. Se obtiene el número ababab. Siendo ab el número de dos cifras de partida.

152. CUADRADO PERFECTO. En todo sistema de numeración de base mayor que 2, el número 121 es cuadrado perfecto. En cualquiera de estas bases $11 \times 11 = 121$.

153. EL MENOR TRIPLETE. 1, 5, 7.

154. QUINTA POTENCIA DE UN N°. Para que la cifra final sea un 7 ha de serlo la del número buscado. El único número acabado en 7 que elevado a 5 da un resultado de 7 cifras es 17. *[Hay que hacer notar que todo número elevado a la 5ª potencia da un resultado cuya última cifra es la misma que la de su base]*

155. A BUEN FIN, MEJOR PRINCIPIO. En 9, ya que las potencias de 7 acaban en 7, 9, 3 ó 1, repitiéndose las terminaciones cada 4 factores. Dividiendo 87578 entre 4, como el resto es 2, quiere decirse que la potencia buscada acaba en 9.

156. TRES AGUJAS EN UN PAJAR. No tres, sino un número infinito que cumplan tal condición: 999.999, 999.999.999, 999.999.999.999, etc.

157. CABRAS Y OVEJAS. 9 cabras y 9 ovejas. Su producto 81, se transforma en el espejo en 18, que es el número de animales del rebaño.

158. $A^2 + 2 = B^3$. $5^2 + 2 = 3^3$. Fermat demostró que es la única solución.

159. EL CORRAL DE PALOMO. El señor Palomo debe haber tenido 8 ovejas en su rebaño. Ocho postes dispuestos en un cuadrado tendrán la misma superficie que diez postes dispuestos en un rectángulo con cinco postes en el lado más largo y dos en el lado más corto.

160. EL REBAÑO MÁS PEQUEÑO. $\text{mcm}(2,3,4,5,6,7,8,9,10) + 1 = 2.521$.

162. MAYOR CUADRADO. $9\ 814\ 072\ 356 = 99.066^2$. La raíz 99.066 no se altera si se lee con el libro vuelto al revés.

163. ¿SERÁ CUADRADO? Sí. Por ejemplo: $152\ 843\ 769 = 12363^2$, $157\ 326\ 849 = 12543^2$, $215\ 384\ 976 = 14676^2$.

164. LA CIFRA PERDIDA. Como 53.928.719.937 es múltiplo de 9 el producto también lo será, así que: $2+0+3+1+2+1+4+4+0+6+8+3+1+1+7+6=49+*$ entonces: $*=5$.

165. LOS REPOLLOS DE LA SEÑORA GARCÍA. El año pasado la señora García plantó 11.025 repollos en un cuadrado con 105 plantas por lado. Este año cosechará 11.236 repollos en un cuadrado con 106 plantas por lado.

166. REGALO MILLONARIO. Contar un millón llevaría 11 días, 13 horas, 46 minutos y 39'9 segundos. Pero al no poder dormir, eso sobrepasaría el límite de resistencia de la naturaleza humana. Contando dos días y medio sin parar se llevaría Vd. 216.000 ptas.

167. MONETARIO. La mayor cantidad que no se puede pagar es 53 centavos. Con monedas de 7 centavos se cubren todas las terminaciones (21, 42, 63, 14, 35, 56, 7, 28, 49) desde 63 en adelante. Por lo tanto, el mayor valor que no se puede abonar es 53.

169. SOBRE NÚMEROS DE DOS CIFRAS. $10x+y=y^2$, $10x=y(y-1)$.

Como el número es el cuadrado de la cifra de sus unidades, ésta ha de ser un 5 o un 6, ya que todas las demás dan cuadrados que no acaban en la misma cifra.

Para $y=5$ $x=2$. Para $y=6$ $x=3$. Existen, pues, dos soluciones: 25 y 36.

170. SIEMPRE EXACTO: La serie que va del 2521 al 2529. $2521/1=2521$, $2522/2=1261$, $2523/3=841$, $2524/4=631$, $2525/5=505$, $2526/6=421$, $2527/7=361$, $2528/8=316$ y $2529/9=281$.

171. FECHAS CAPICÚAS. Las fechas pedidas son: 29-8-92 y 2-9-92. Entre ellas hay cuatro días.

172. VAYA BOLETO. El boleto era el 31113.

173. TRES ENTEROS CONSECUTIVOS. 3, 4 y 5.

174. MCD y mcm. Dos números enteros cualesquiera.

175. EL TELÉFONO DE MI COLEGA. El teléfono es el 216-1649

176. FACILEMA. Si xy es el número buscado:

$10x+y=2xy$, $y=(2y-10)x$. Como y ha de ser entero positivo, la expresión anterior nos dice que además será par y mayor que 5. Sólo puede ser 6 u 8. Pero 8, da una imposibilidad, ya que se obtiene: $8=6x$. Para $y=6$, se obtiene la solución correcta: $6=2x$, $x=3$.

El número buscado es el 36.

177. PAR = DIEZ. En el sistema de numeración de base 2, el par vale 10. En este sistema nuestro 10 (2^3+2) se escribe 1010.

178. CURIOSA RAÍZ CUADRADA. 1111 y resto 2468.

179. NÚMEROS PRIMOS. Supuesta formada una tabla de números primos, sea P el mayor primo obtenido.

Demostremos que hay un número primo mayor que P .

El número $(2\ 3\ 5\ 7\ 11\ \dots\ P)+1$ es mayor que P . Si este número es primo ya está demostrado. Si es compuesto, admitirá un divisor primo, y este divisor primo será mayor que P , pues el número en cuestión no es divisible por ninguno de los números primos inferiores a P , ya que en todas las divisiones se obtiene resto igual a 1. Por tanto, no puede haber un número finito de números primos.

182. PRODUCTOS QUE SE ESCRIBEN CON UNA SOLA CIFRA (3).

2.267.573.696.145.124.716.553.287.981.859.410.430.839.

183. LOS 4 SON PRIMOS. A, B, C y D sólo pueden tomar valores 1, 3, 7 y 9. A y C sólo pueden ser 1 ó 7; de lo contrario, $ADDD$ y $AACA$ serían divisibles por 3 por el criterio de divisibilidad de la suma de las cifras. Por tanto, B y D han de ser 3 ó 9. Entonces el número $BCDB$ sólo puede ser:

3193 (no es primo, es divisible por 31)

3793 primo

9139 (no es primo, es divisible por 13)

9739 primo

En los dos caso posibles $C=7$; por tanto $A=1$. El número $BDAC$ habrá de ser, o bien 9317, que es divisible por 7, o bien 3917, que es primo, y, por tanto, la única solución correcta: $A=1$, $B=3$, $C=7$ y $D=9$.

184. TRES CIFRAS Y EL 30.

$30=33-3$. $30=3^3+3$. $30=4!+4+\sqrt{4}$. $30=5\times 5+5$. $30=9\times \sqrt{9}+\sqrt{9}$.

185. LA CONJETURA CAPICÚA.

186. TIRO CON ARCO (1). Seis flechas harán cien puntos dando en 17, 17, 17, 17, 16, 16.

187. TIRO CON ARCO (2). Ocho flechas harán cien puntos si dan en 13, 13, 13, 13, 13, 13, 11, 11.

188. TRES CIFRAS Y EL 24. $24=22+2$. $24=3^3-3$. $24=(4+4)4$. $24=4!+4-4$. $24=4!+4-4$.

189. SOLDADOS COMBATIVOS (1). $324 = 18^2$. $325 = 13 \times 5^2$.

190. SOLDADOS COMBATIVOS (2). $602.176 = 776^2$. $602.177 = 113 \times 73^2$

191. PRINCIPIO Y FIN. Son los números cuyos nombres empiezan y terminan con la misma letra.

192. SECUENCIA QUE RUEDA. Son algunos de los números de la ruleta, tal como se suceden en la rueda.

193. SON PARIENTES (2). Cada palabra empieza con el nombre de una nota musical.

194. SON PARIENTES (3). Cada nombre incorpora por lo menos una nueva letra que no había aparecido hasta entonces.

195. SERIE A COMPLETAR. La letra que completa la serie es la "e".

Las letras son las vocales de la pregunta "¿Qué letra completa la siguiente serie?".

196. NO DERRAPE. N y T. Son letras del abecedario que no contienen curvas.

197. SON PARIENTES (4). Son las letras que no figuran en el nombre de ningún número.

198. QUITANDO, QUITANDO. El cero. Cada número resulta de restar al anterior la suma de sus cifras. Así, por ejemplo: $37-(3+7)=27$.

199. CONSONANTES Y VOCALES. S. Por orden alfabético, una vocal, una consonante, una vocal, dos consonantes, una vocal, tres consonantes, etc.

200. VAYA HORA. 1, 2, 3, 3, ... Es un reloj que da las horas y los cuartos.

201. LA MESA Y LAS MONEDAS. Ponga una moneda en el centro exacto de la mesa.

202. FORMANDO TRIÁNGULOS. Con n rectas: $T(n)=n(n-1)(n-2)/6$.

203. QUITAR DEL MONTÓN. Investíguelo Vd.

204. LOS POLLOS DEL MAIZAL. Se mueva como se mueva, el granjero nunca puede atrapar al gallo, ni su esposa a la gallina. Si el granjero va tras la gallina y su esposa tras el gallo serán fácilmente capturadas. Una de ellas puede atraparse en el octavo movimiento, y la otra en el noveno.

205. UN CALENDARIO CON DOS CUBOS. En el de la izquierda: 0-1-2-6-7-8. En el de la derecha: 3-4-5-0-1-2. El 6 hace las veces de 6 y de 9.

206. SUMAR SIN CONOCER LOS SUMANDOS. Utilizaremos el siguiente esquema:

$$L(+3) * M(+2) * X(+1) * J(0) * V(-1) * S(-2) * D(-3)$$

En el ejemplo concreto: $+3+1+1+0-2 = 3$.

75 (clave) - 3 = 72 (Suma total de las cifras tachadas)

Otro ejemplo. Si hubiéramos tachado: 26, 13, 7, 23, 4.

$$+3+2+1-1-3 = 2.$$

75 (clave) - 2 = 73 (Suma total de las cifras tachadas)

Otro ejemplo. Si hubiéramos tachado: 27, 22, 2, 10, 18.

$$+2+0-1-2-3 = -4.$$

75 (clave) - (-4) = 79 (Suma total de las cifras tachadas)

207. RECTÁNGULOS OBSTINADOS. La diagonal corta a 12 cuadrados.

Regla: base + altura - 1.

208. EL BIOP. El primer jugador ocupa la casilla central con un número K cualquiera. Responde a cada jugada del contrario ocupando la casilla simétrica, respecto del centro, con un número "Y" dado por la fórmula: Y (congruente con) $2K-X$ (módulo 25) donde X es el número del contrario.

209. LAS FICHAS DEL TABLERO. Asignamos a cada casilla un color. Si la casilla tiene ficha, el color asignado es, el de su ficha. Cuando se quita una ficha, ésta ha de ser de color negro, y el color que queda asignado a la casilla es el negro. A partir de ahí el color se cambiará cada vez que retiremos una de las fichas contiguas. De esta forma el color asignado a cada casilla al principio es el de su ficha, y cambiará cada vez que se retire una ficha contigua, haya o no ficha en la casilla.

Llamaremos a las casillas de las esquinas de tipo 1; de tipo 2, a las de los bordes, y de tipo 3 a las interiores al triángulo. Todas ellas están rodeadas por un número par de casillas (2, 4, y 6 respectivamente)

Si es posible retirar todas las fichas, el color de cada casilla habrá cambiado un número par de veces, con lo que todas quedarán como al principio y en consecuencia la casilla de la última ficha retirada quedará blanca, lo que es imposible, porque cada vez que se retira una ficha su color es negro, y el color que deja en la casilla después de ser retirada es el negro.

Es imposible retirar todas las fichas del tablero.

210. MOROS Y CRISTIANOS. Siendo: M=Moro y C=Cristiano. Los colocó así:

C	C	C	C	M	M	M	M	M	C
M									C
C									M
C									C
M									C
M									C
C	M	M	M	C	C	M	M	C	M

De pequeño, mi abuelo me enseñó el truco para aprender de memoria la colocación.

Había que aprenderse la siguiente frase:

"COMPUSE LAS FICHAS, LAS DETENIDAS PEREZCAN"

Las vocales hacen todo: A=1, E=2, I=3, O=4, U=5.

211. OTRA SUMA DE 18.

6	7	5
6	6	6
6	5	7

212. DEL 10 AL 18. Sea N el número mágico del cuadrado.

a	b	c
	K	
d	e	f

$$a + b + c = N$$

$$a + K + f = N$$

$$b + K + e = N$$

$$c + K + d = N$$

$$d + e + f = N$$

Sumando miembro a miembro las tres igualdades centrales:

$$(a+b+c)+3K+(d+e+f)=3N; N+3K+N=3N; 3K=N; K=N/3$$

En este cuadrado mágico, N es la tercera parte de la suma de sus elementos $10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 = 126$; $N=42$. Luego $K=14$.

213. SUMA 34.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

214. COMPLETANDO 5x5.

215. CUADRADO DIABÓLICO. Es el cuadrado mágico de Alberto Durero. (*Cuadrado diabólico*)

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Este cuadrado cumple las condiciones pedidas.

Además, los números de las esquinas también suman 34: $16+13+4+1=34$.

También: $3+2+15+14=34$, $5+9+8+12=34$.

Este cuadrado mágico aparece en el conocidísimo grabado: "La Melancolía". Las dos cantidades del centro de la cuarta fila forman el año 1514 en el que fue grabado.

216. ORIGINAL 4X4. La singularidad del cuadrado es su simetría. Dándole la vuelta al papel sigue siendo un cuadrado mágico.

217. RELLENANDO 5x5.

218. CON LOS PARES.

219. CON LOS IMPARES.

220. PROBLEMA REVERSIBLE.

2	5	2	8
2	6	7	2
8	5	2	2
5	1	6	5

2	9	3	3
5	4	3	5
2	2	9	4
8	2	5	5

221. OLVIDÓ LAS PESAS. Basta dividir la barra en segmentos de longitudes: 2, 6, 18 y 54 cm. El peso de estos trozos será entonces: 1, 3, 9 y 27 kg. Colocándolos convenientemente en los platillos de su balanza puede medir cualquier peso de un número entero de kilos. Por ejemplo: 23 kilos se pesan poniendo 27 en un platillo y 1 con 3 en el otro. Aritméticamente esta cuestión equivale a escribir los números en el sistema de base tres con las cifras 1 y -1.

222. LA BALANZA DESEQUILIBRADA. La situación es la siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} P & \text{-----} & a & \text{-----} & F & \text{-----} & b & \text{-----} & 5 \\ 9 & \text{-----} & a & \text{-----} & F & \text{-----} & b & \text{-----} & P \end{array}$$

Donde F es el fiel de la balanza, P el peso de la sustancia, a y b las medidas de los brazos. A la del brazo corto y b la del brazo largo. $K=a/b < 1$.

$$Pa = 5b \Rightarrow P = 5/k$$

$$Pb = 9a \Rightarrow P = 9k$$

$$9k = 5/k \Rightarrow 9k^2 = 5 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{5}{9}} \Rightarrow P = 9\sqrt{\frac{5}{9}} = 6,71 \text{ gramos.}$$

223. LA BALANZA Y LAS FRUTAS. Como 4 manzanas y 6 melocotones se equilibran con 10 melocotones, entonces una manzana pesa lo mismo que un melocotón. Por tanto una pera se equilibra con 7 melocotones.

224. LOS CUATRO CUBOS. En un platillo los tres pequeños y en el otro el grande. $6 \times 6 \times 6 + 8 \times 8 \times 8 + 10 \times 10 \times 10 = 12 \times 12 \times 12$. $216 + 512 + 1000 = 1728$.

225. EL MONO, LA PESA LA SOGA Y LA POLEA. Independientemente de cómo trepe el mono (rápido, despacio o a saltos) el mono y la pesa siempre quedan enfrentados. El mono no puede llegar por encima o por debajo de la pesa por más que se suelte de la sog, se deje caer y vuelva a asir la cuerda.

226. DOS CICLISTAS Y UNA MOSCA. 45 km. Chocan al cabo de una hora.

227. ¿COGIÓ EL TREN? El ciclista cometió la equivocación de sacar la media de las distancias en lugar de la del tiempo. Si hubiera empleado el mismo período de tiempo yendo a cuatro kilómetros por hora, a ocho y a doce, la media sí que habría sido ocho kilómetros por hora, pero tardó más tiempo en subir la cuesta y menos en bajarla.

Es fácil calcular cuánto tardó en llegar: Tardó una hora en subir la cuesta, media hora (treinta minutos) en ir por carretera llana, y un tercio de hora (veinte minutos) en ir cuesta abajo. Todo esto suma una hora y cincuenta minutos, por lo que llegó con veinte minutos de retraso.

228. ¿LOGRO COGER EL TREN? Cuando el hombre llegó a la primera estación, el tren había salido hacía un minuto. Diez kilómetros por hora es un kilómetro en 6 minutos, o un kilómetro y medio en 9 minutos. Así que el tren llegó a la segunda estación 8 minutos después de que el hombre llegara a la primera estación. El tren para 14 minutos y medio en la segunda estación, así que el hombre tiene 22 minutos y medio para coger el tren en la segunda estación. Cuatro kilómetros por hora es un kilómetro en 15 minutos, o kilómetro y medio en 22 minutos y medio, por lo que el hombre llegó justo a tiempo de coger el tren.

229. ADELANTAMIENTO Y CRUCE DE TRENES. Siendo "v" la velocidad del tren de carga y "d" la longitud de éste: $d/(90-v)=2 \cdot d/(90+v)$; $(90+v)/(90-v)=2$; $90/v=3$.

Luego la velocidad del tren de carga es $v = 30$ km/h

230. VIAJE DE IDA Y VUELTA. $vt=300$; $(v+10)(t-1)=300 \Rightarrow v=50$ km/h, $t=60$ h.

231. LOS ANUNCIOS DE CERVEZA DE LA AUTOPISTA. Lo curioso de este problema es que para calcular la distancia que los separa no es preciso conocer la velocidad del automóvil.

Llamemos x al número de carteles que se dejan atrás en un minuto. En una hora, el automóvil habrá rebasado $60x$ anuncios. Por otra parte, se sabe que la velocidad del coche es de $10x$ km/h. Así pues, en $10x$ km el coche habrá rebasado $60x$ anuncios, y, por tanto, en 1 km habrá pasado frente a $10x/60x$ anuncios, es decir, hay 6 anuncios por kilómetro. Por consiguiente, los anuncios están separados $1/6$ de kilómetro, o sea, unos 167 metros.

232. ¿A QUE DISTANCIA ESTA EL COLEGIO? La diferencia entre llegar con 5 minutos de retraso y llegar 10 minutos antes de la hora es de 15 minutos, así que el chico ganará 15 minutos si anda a una media de 5 kilómetros por hora en lugar de a 4 kilómetros por hora. Cinco kilómetros por hora es un kilómetro en 12 minutos, y 4 kilómetros por hora es un kilómetro en 15 minutos, de modo que al andar más deprisa gana 3 minutos en cada kilómetro, que son 15 minutos en 5 kilómetros. Así que el colegio está a 5 kilómetros.

Comprobémoslo: Si anda a 5 kilómetros por hora, tardará una hora. Si anda a 4 kilómetros por hora, tardará una hora y cuarto (una hora para los primeros 4 kilómetros y un cuarto de hora para el último kilómetro), que hace una hora y 15 minutos. Así que hay una diferencia de 15 minutos.

233. EL PASEO DE MI AMIGO ANDRÉS. Cuanto más deprisa corra el río, más tardará en realizar el recorrido de ida y vuelta. El efecto de retraso al remar contra el río dura más tiempo que el efecto de avance al remar a su favor.

234. EL ENCONTRONAZO. Aunque el problema puede resolverse algebraicamente, por las malas, se termina mucho antes reconstruyendo los hechos a partir del choque. Como el camión rueda a una velocidad constante de 65 km/h, y el coche a 80 km/h, su velocidad con respecto al camión es de 15 km/h, o sea, 1500 metros, por hora, equivalentes a 250 metros por minuto. Por consiguiente, un minuto antes de la colisión, el coche se encontrará a 250 metros detrás del camión. La información de tres kilómetros por detrás es irrelevante para el problema; en la solución no interviene la distancia inicial entre los vehículos.

235. LAS NAVES ESPACIALES. Al igual que antes, la distancia inicial es completamente irrelevante. Mucha gente se despista, creyendo necesario considerar las posiciones iniciales y haciendo transcurrir el tiempo. La solución, casi trivial, consiste en darse cuenta de que si las naves se aproximan a razón de 20 kilómetros por minuto, un minuto antes del encuentro estarán separadas 20 kilómetros.

236. EL TREN Y EL HELICÓPTERO. El helicóptero estará volando durante 4 horas (tiempo que el tren tarda en llegar a Burgos). Por lo tanto, habrá recorrido: $400 \text{ km/h} \times 4 \text{ h} = 1.600 \text{ km}$.

237. DEVORANDO KILÓMETROS. Cuando Carlos inicia el viaje, llega un autobús a la estación A: el que salió el 1 de marzo, a las 8 h, de la ciudad B. En el trayecto se cruza con los 11 autocares que partieron de B los días 1, 2 y 3 de marzo.

Además se deben contar los 12 que salieron de la ciudad B durante los tres días que Carlos invirtió en el recorrido. En total se cruzó con 23 autobuses.

También se podría considerar que se cruzó con 25 autobuses, si a los 23 anteriores se les añade el que llegó a la estación A cuando Carlos partía y el que, en el momento de la llegada, salía de la ciudad B.

238. GANANDO TIEMPO. La diferencia entre los tiempos del primero y el último es de 8 m. Si hubieran salido a la vez, el ganador habría sacado 4 minutos de ventaja al último en la primera mitad del recorrido.

Justamente esos 4 minutos perdió el ganador en la salida, por lo que alcanzó al último a mitad de carrera; o sea, a los 32 minutos.

239. ENTRE CIUDADES. Navegando a favor de la corriente, el vapor recorre 1 km en 3 minutos; cuando navega contra la corriente, 1 km en 4 minutos. En el primer caso, el vapor gana 1 minuto en cada kilómetro, y como en todo el recorrido gana 5 horas, o 300 minutos, se deduce que desde Anca hasta Bora hay 300 km. Efectivamente: $300/15 - 300/20 = 20 - 15 = 5$ horas.

240. LA CARRERA DEL PERRO Y EL GATO. Gana el gato. Tiene que dar exactamente 100 saltos para recorrer esa distancia y regresar. El perro, por el contrario, está obligado a recorrer 102 metros y regresar. Su salto número 33 lo lleva a la marca de los 99 metros, por lo que se hace necesario un salto más, que lo lleva 2 metros más allá de la última marca. En total, el perro debe dar 68 saltos para recorrer el trayecto. Pero como salta con $2/3$ de la velocidad del gato, cuando este último completa los 100 saltos el perro no llega a los 67.

241. LA VELOCIDAD DEL TREN. No hace falta saber la velocidad con que camina la joven, ni tampoco, la distancia que recorre. Si en hacer el recorrido de ida y vuelta por los pasillos ha tardado en total 10 minutos, las maletas habrán recorrido 5 kilómetros durante ese tiempo. Por tanto, el tren lleva una velocidad de medio kilómetro por minuto, o sea, de 30 km/h.

242. VIENTO EN CONTRA. La respuesta popular para problemas de este tipo es dividir en dos partes el tiempo total para obtener la velocidad promedio, suponiendo que el viento ayuda al ciclista en una dirección tanto como lo retarda en dirección opuesta. Es incorrecto, porque el viento ha ayudado al ciclista solamente durante 3 minutos, y lo ha retardado durante 4 minutos. Si puede recorrer 1 km en 3 minutos con viento a favor, puede recorrer 1 km más $1/3$ en cuatro minutos. Regresa con viento en contra en los mismos cuatro minutos, por lo que podría recorrer 2 km más $1/3$ en 8 minutos con el viento a favor la mitad del tiempo y en contra la otra mitad. Por lo tanto, el viento puede ser ignorado y concluimos que sin viento podría recorrer 2 km y $1/3$ en 8 minutos, luego 1 km en 3 minutos y $3/7$.

243. INFATIGABLES CORREOS. Sean H=horas en encontrarse, M=velocidad en km/h del correo que sale de Madrid, Z=velocidad en km/h del correo que sale de Zaragoza.

$Z \times H = 9 \times M$, $M \times H = 16 \times Z$, de donde, multiplicándolas miembro a miembro, $H=12$ horas. El viaje, pues, dura 21 horas para correo de Madrid y 28 horas para el de Zaragoza.

244. LOS DOS CICLISTAS. 10 horas y 120 km.

245. SIGUIENDO SU CAMINO.

ESTACIÓN |-----D-----|-----| DESPACHO

Si llega 20 minutos antes de lo previsto, quiere decirse que encuentra a su automóvil a una distancia D, tal que éste hubiese tardado ese mismo tiempo, es decir, 20 minutos, en hacer el doble recorrido desde el punto de encuentro a la estación y vuelta. O sea que lo encuentra 10 minutos antes de la hora normal de llegada a la estación. Ha caminado, por lo tanto, 50 minutos.

246. LOS DOS VAPORES Y EL RÍO. La anchura es 500 metros.

En efecto, el tiempo de parada no interviene.

Siendo v_1 y v_2 las velocidades de los vapores, t_1 el tiempo que están navegando los vapores hasta el primer encuentro y t_2 el tiempo que están navegando los vapores entre el primer encuentro y el segundo, tendríamos:

$$v_1 t_1 + 200 = d$$

$$v_2 t_1 = 200; v_1/v_2 = (d-200)/200$$

$$v_1 t_2 = 200 + (d-100) = d+100$$

$$v_2 t_2 = (d-200) + 100 = d-100; v_1/v_2 = (d+100)/(d-100) \text{ Finalmente:}$$

$$(d-200)/200 = (d+100)/(d-100); d^2 - 200d - 100d + 20000 = 200d + 20000; d=500.$$

247. VIAJE BIEN PLANEADO. Independientemente de las veces que cambie el jinete si llamamos d a la distancia a pie por el padre, tendremos:

$t = d/5 + (50-d)/10 = d/10 + (50-d)/8$ siendo t, el tiempo empleado en recorrer la mitad del trayecto $d=10$ km, $t=6$ horas.

El tiempo total empleado es: $2 \times 6 + 0'5 = 12'5$ horas.

Y la hora de llegada las 18'5, es decir, las seis y media de la tarde.

248. RETRASO EN LA ENTREGA. Con un camión tardará D días. Con todos los actualmente útiles, a los que llamaremos x, tardará: $D/x=8$ días. Y con todos los útiles más los dos averiados, habría tardado: $D/(x+2)=7$ días. Por consiguiente: $D=7 D/8+14$, así: $D=112$ días = 16 semanas.

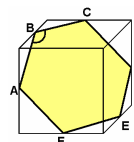
249. CUESTA ABAJO EN MI RODADA. Tardará más, ya que solamente en la primera parte del recorrido tardará la hora y cuarto que empleaba para ir de un pueblo a otro cuando el trayecto era llano. La mayor velocidad de bajada no puede compensar la pérdida de tiempo de la subida.

250. UNA CIUDAD CON TRANVÍAS. Llamando v a la velocidad de los tranvías, la velocidad relativa entre el caminante y los tranvías que circulan en una y otra dirección es proporcional al número de los que le adelantan (en un caso) o al de los que se cruzan con él (en el otro).

Así: $v+6=6k$, $v-6=4k$, $(v+6)/(v-6)=6/4$, $v=30$ km/h.

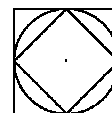
251. EL ÁNGULO OBTUSO. 120° . Sólo hace falta terminar de dibujar el hexágono regular ABCDEF.

252. SEMEJANZA DE RECTÁNGULOS. No lo son, puesto que las fracciones: b/a y $(b+2h)/(a+2h)$ son siempre distintas, salvo en el caso del cuadrado ($a=b$).



253. PAQUETE POSTAL. Puede utilizar para el envío una caja en forma de cubo de 55 cm. de lado, pues una caja de estas características tiene una diagonal de 95 cm.

254. LOS DOS CUADRADOS. En lugar de inscribir el cuadrado como mostraba la figura anterior, hagámoslo girar 45° hasta la posición que muestra la figura adjunta. Se observa que el área del cuadrado mayor es el doble que la del inscrito; es decir, 8 unidades.



255. EL CINTURÓN DE LA TIERRA. Un sencillo cálculo confirma esta situación sorprendente. Siendo R el radio de la esfera (la Tierra o la naranja), el cordel ajustado mide $2\pi R$. Cuando le agregamos un metro, el cordel pasa a medir $2\pi R + 1$. El radio que tiene esta nueva circunferencia, será $(2\pi R + 1)/2\pi$. La diferencia de radios nos da la holgura que es: $1/2\pi = 15'91549\dots$ cm. en los dos casos. ¿Decía esto su intuición?

256. EL RIEL DILATADO. Como la longitud total del riel es ahora 502 metros, cada mitad tendrá 251 metros. Aunque es evidente que la joroba adoptará una forma curva, podemos hacernos una idea de la situación suponiendo que son dos rectas, articuladas en el punto medio. Bajo esta suposición obtenemos una estimación de la altura x aplicando el teorema de Pitágoras: $x^2 = (251^2 - 250^2)$; $x = 22$ m.

Seguro que su intuición volvió a fallar.

257. EL PUENTE SIN DISPOSITIVO DE DILATACIÓN. Diez metros. La solución del problema es elemental, pero lo que sorprende es la magnitud de dicha solución. Se trata de hallar el tercer lado de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $1000'2/2 = 500'1$ m. y 500 m. uno de los catetos. $h^2 = (500'1)^2 - (500)^2$; $h = 10$ m. ¿Falló su intuición?

258. ÁREA DE LA CORONA CIRCULAR. Sean R el radio del círculo mayor y r el radio del círculo menor: $r^2 = R^2 - 1$. Área de la corona = $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi R^2 - \pi(R^2 - 1) = \pi$.

En cualquier viejo formulario de la geometría clásica, que tanto se estudiaba hace 50 años, viene dada directamente la fórmula de la corona circular en función de la cuerda del círculo mayor, tangente al menor:

$A = \pi c/2$. Como en nuestro caso $c/2 = 1$, tenemos que $A = \pi \cdot 1 = \pi$.

259. SIMETRÍA Y REFLEXIÓN. Querido Paco: Si se te ocurre poner esta carta frente al espejo, la leerás sin dificultad. Por cierto, que no me explico la razón de que Leonardo da Vinci escribiera siempre en la forma que ahora estás viendo.

260. LA ESFERA HUECA Y EL GEÓMETRA SAGAZ. El volumen de la esfera es los $2/3$ del volumen del cilindro en el cual aquella puede inscribirse: $4/3\pi R^3 = 2/3(2\pi R^3)$.

Cuando la esfera se hunde en el cilindro desaloja los $2/3$ del agua contenida en ese cilindro. El aumento de peso es, pues, el peso de la esfera (40 kg) menos los dos tercios del peso del agua contenida inicialmente en el cilindro, lo cual, en kilos, es igual a los dos tercios del volumen del cilindro, expresado dicho volumen en decímetros cúbicos.

$$20 = 40 - 2/3V; V = 30 \text{ dm}^3$$

El volumen de la esfera es $V' = 2/3V = 20 \text{ dm}^3$ y su densidad es $40/V' = 2$.

261. LAS ESFERAS PINTADAS. Los volúmenes y, por lo tanto, los pesos son proporcionales a los cubos de los radios. Las superficies y, por lo tanto, las cantidades de pintura son proporcionales a los cuadrados de los radios. Sean R y r los radios de las dos esferas, x el peso en gramos de la pintura necesaria para pintar la esfera pequeña.

$$r^3/R^3 = 8/27 \text{ luego } r/R = 2/3$$

$$r^2/R^2 = x/900 = 4/9, x = 400 \text{ gramos.}$$

262. GIROS, ¿POSIBLES O IMPOSIBLES? Hay que girar primero el libro 180° alrededor del lado vertical opuesto al lomo, y a continuación otros 180° alrededor de una recta que forme 45° con el eje anterior. En general, un giro de 180° alrededor de un cierto eje, seguido por otro giro de 180° alrededor de otro eje que forme un ángulo α con el primero, resulta ser equivalente a una rotación de ángulo 2α alrededor de un eje perpendicular a los dos primeros y que pasa por su punto de intersección.

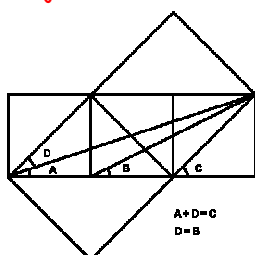
263. EL EMBALSE Y EL PEZ. Mil metros. El pez describe un ángulo recto con su trayectoria. Un ángulo recto, con su vértice en la circunferencia de un círculo, intersecta la circunferencia en los extremos de un diámetro. El diámetro es, por tanto, la hipotenusa de un ángulo recto con lados 600 y 800 metros.

264. EL POSTE ROTO. $x^2 + 16^2 = (32-x)^2$; $x=12$ palmos.

265. LOS 7 PUENTES DE KONIGSBERG. Euler (1707-1783) demostró que el paseo es imposible. Veamos su demostración.

Los siete puentes están tendidos entre cuatro regiones de tierra: A, B, C y D. De A sale 5 puentes; de B, 3; de C, 3, y de D, 3. El paseo sale de una región y podrá terminar en ella misma o en otra. Habrá siempre, al menos, dos regiones que no serán comienzo ni final del paseo. O sea, cada vez que se entra en ellas debe salirse de ellas. De cada una de esas dos regiones debería partir un número par de puentes. Ya se ha dicho que de las regiones parten 5, 3, 3 y 3 puentes, impares todos. Conclusión: El paseo es imposible.

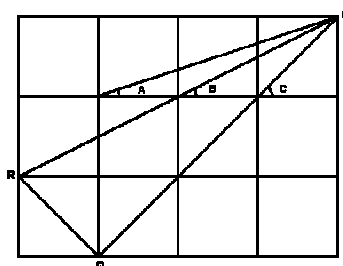
266. EN GENERAL: DE UN SOLO TRAZO, ¿POSIBLE O IMPOSIBLE? Se pueden dibujar de un solo trazo los de la fila superior. Es imposible para los de la fila inferior.



267. LOS TRES CUADRADOS. Solución 1: La siguiente construcción muestra la solución del problema.

Solución 2: Esta otra construcción también muestra la solución del problema.

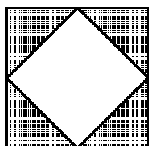
Los triángulos APO y OQR son semejantes, por lo que los ángulos A y O son iguales.



Y como $C=B+O$, $C=B+A$.

Solución 3. Usando trigonometría: $\text{tg}A=1/3$, $\text{tg}B=1/2$, $\text{tg}C=1$. $\text{tg}(A+B) = \dots = 1 = \text{tg}C$. Luego $A+B=C$.

268. VENTANA DIVIDIDA EN DOS. La siguiente figura muestra la solución.



269. MONEDAS IGUALES DANDO VUELTAS. La moneda A da dos vueltas. ¿No se lo cree Ud.? Tome las dos monedas y lo comprobará.

270. MONEDAS DISTINTAS DANDO VUELTAS.

271. LAS DOCE MONEDAS. En los vértices poner dos monedas, una encima de la otra.

272. ALTERACIÓN DEL ORDEN. Cojamos el segundo vaso empezando por la izquierda, vertamos su contenido en el quinto y lo dejamos donde estaba.

273. ALTERNANDO VASOS CON VINO Y VACÍOS. Se coge el segundo vaso y se vierte su contenido en el séptimo. Y después se vacía el cuarto en el noveno.

274. LAS 55 PESETAS. Se traslada una de 25 ptas. de un lado a otro.

275. TRES MONEDAS Y UNA LÍNEA. Una moneda a cada lado de la línea y la tercera moneda de canto encima de la línea y entre las otras dos monedas.

276. MONTONES CON LOS MELONES. Formar un pentágono con los 20 melones. Cada lado del pentágono tendrá 5 melones.

277. DIVISIÓN DE LA TARTA. Los tres cortes son: uno paralelo a las bases a media altura, y los otros dos según diámetros perpendiculares.

278. CON TRES RAYAS.



Otra solución: IV. IV es el cuadrado del 2.

279. ¡CUIDADO! NO SE QUEME. VIII. (8 es igual a 2 elevado al cubo).

280. CONVERTIR TRES EN CUATRO. IV, ó también 4.

281. DIFICULTADES PARA EL JARDINERO. Dibujemos un pentágono y tracemos en él todas las diagonales; los puntos de corte forman los vértices de un segundo pentágono. Plantando los árboles en los vértices de los dos pentágonos, tendremos 5 filas (las 5 diagonales) con 4 árboles en cada una de ellas.

282. LOS CUATRO ÁRBOLES. Plantando tres de los árboles en los vértices de un triángulo equilátero; el cuarto hay que plantarlo en lo alto de un pequeño montículo, situado en el centro del triángulo, de manera que los cuatro árboles queden en los vértices de un tetraedro.

283. 10 SOLDADOS EN 5 FILAS DE 4. Colocarlos en un polígono estrellado de cinco puntas. Este polígono se consigue dibujando un pentágono y trazando sus cinco diagonales. Los soldados se colocarían en los vértices del pentágono y en las intersecciones de las diagonales.

284. MEJOREMOS EL SIX DE FIXX. Un trazo horizontal sobre un número en la notación romana lo multiplica por mil, con lo que queda convertido en un número par; 9.000 en nuestro caso.

285. MÁS CUADRADOS. En total hay 204 cuadrados: 64 de 1 casilla, 49 de 4 casillas, 36 de 9 casillas, 25 de 16 casillas, 16 de 25 casillas, 9 de 36 casillas, 4 de 49 casillas y 1 de 64 casillas.

En total: $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 = 204$.

Para un tablero de 6x6, la solución sería: $1 + 4 + 9 + \dots + 36 = 91$.

286. ELIMINANDO DOS X.

```

X  X  X  X  X
X      X  X  X
X  X  X  X

```

287. LAS 6 MONEDAS. Se recoge la moneda de la derecha y se coloca encima de la central superior.

O O O
O
O

288. LOS 4 + 4 LISTONES. Se forman con los 4 grandes dos cruces perpendiculares y unidas por dos sitios y luego en cada extremo se colocan 2 de los pequeños.

289. RECTÁNGULO SOMBREADO. Sean x e y los lados del rectángulo grande. El número total de casillas que contiene es xy . El margen, de una casilla de ancho, contiene $2x+2y-4$ casillas. Puesto que se nos dice que ha de estar formado por $xy/2$ cuadrículas: $xy/2=2x+2y-4$, $xy-4x-4y=-8$, $xy-4x-4y+16=8$, $(x-4)(y-4)=8$.

$(x-4)$ e $(y-4)$ deben ser divisores de 8. Los únicos pares de tales divisores son 8, 1 y 4, 2. Tenemos así dos soluciones: $x=12$, $y=5$; $x=8$, $y=6$.

290. DEL 1 AL 8.

4	8	3	7	2	6	1	5
---	---	---	---	---	---	---	---

291. DEL 0 AL 9.

6	2	1	0	0	0	1	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

292. DEL 1 AL 8 DISTRIBUCIÓN (1).

	7	
3	1	4
5	8	6
	2	

293. CAMBIANDO UN DÍGITO. $53 = 54 - 1$.

294. DEL 1 AL 8 DISTRIBUCIÓN (2).

7	1	8	2
5	3	6	4

295. DEL 1 AL 8 DISTRIBUCIÓN (3).

		5		
4	2	8	3	7
		6		
		1		

		4		
3	1	8	2	6
		5		
		7		

296. SUSTITUYENDO.

1	4	3
7		5
6	8	2

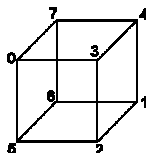
97. CAMBIANDO SÓLO UN DÍGITO. $2^6-63=1$. Dos elevado a la sexta menos 63 = 1.

298. BOCA ABAJO Y BOCA ARRIBA. Es imposible. Al dar la vuelta a dos copas a la vez, las únicas alternativas son: o bien ambas están en la misma posición, o bien una está boca arriba y la otra boca abajo. En el segundo caso, no se modifica nada. En el primero, la cantidad de copas que apuntan en una dirección aumenta en dos, y la cantidad de copas que apunta en la otra disminuye en dos; luego, es imposible aumentar o disminuir ese número en una sola unidad, que es lo que se pide.

299. ACOMODANDO BOLAS.

13 3 15 14 6
10 12 1 8
2 11 7
9 4
5

300. EL CUBO DE PRIMOS (1).



301. SUMA FÁCIL (4). $184 + 553 = 737$. Es cierto que $4-3=1$.

302. SUMA FÁCIL (5). $346325 + 523143 = 869468$.

303. SUMA FÁCIL (6). $9874 + 5054 = 14928$.

304 DEL ZOOLÓGICO. Puesto que el cuadrado de ZOO tiene 5 letras, la Z ha de ser 1, 2 ó 3. Pero no hay ningún cuadrado que acabe en 2 ni en 3; por lo tanto $Z=1$ y, en consecuencia, $O=9$, quedando así el resultado: $(199)^2 = 39601$.

305. CRIPTOGRAMA. $234065 + 361452 = 595517$.

306. JUGANDO A LAS CARTAS. $5.696 + 29.196 = 34.892$.

307. PRODUCTO FORZADO. La única forma de asociar los factores primos del resultado para que den dos factores de tres cifras, es como sigue: $3 \times 191 = 573$, $3 \times 7 \times 17 = 357$. El producto propuesto es, pues, uno de los dos siguientes: $573 \times 375 = 204561$, $375 \times 573 = 204561$.

Si realizamos ambos productos completamente, en el segundo no aparece la cifra 6, salvo en el resultado. Luego, $573 \times 375 = 204561$ es el producto pedido.

308. LA CAZA DEL TIGRE. La letras segunda y quinta han de ser forzosamente I y E. Entre los posibles nombres (TINTE, LINDE, NIEVE, RIFLE, VIAJE, etc.) únicamente LINCE y TIGRE son nombres de animales. TIGRE no va bien, ya que ninguna suma de dos números que correspondan a las letras es un número primo menor que 20. El animal es pues el lince. ¿Y el tigre, entonces? Si el lince está en el zoo, el tigre no estará lejos.

309. EL BUFÓN DEL DUQUE. Las sumas son: $438+219=657$ y $234+657=891$. El bufón firmó con su nombre, CLODULFO, pero invertido.

310. EL ABC DE LOS CRIPTOGRAMAS. Los únicos números que elevados a la cuarta potencia dan un resultado con la misma cifra final, son los acabados en 0, 1, 5 y 6. De estas cifras solamente el 5 da un nº de 3 cifras. Por tanto: $625 = 5^4$, $256 = 4^4$.

311. CRIPTOSUMA: $4104 + 81 + 17129 = 21314$

312. CRIPTOGRAMA. $69656 + 96078 = 165734$.

313. LOS PRODUCTOS DE SANTA BÁRBARA. $1738 \times 4 = 6952$, $483 \times 12 = 5796$. La solución se facilita si se conoce la fecha de la fiesta de Santa Bárbara: 4 de diciembre ó 4 del 12.

314. SUMA DE LETRAS. Pongamos la suma en columna. Partiendo de la derecha se observa lo siguiente:

1ª columna: $S + E = 10$

2ª columna: $I = C + 1$

3ª columna: $A + S = 9$

4ª columna: $C + 2A + 1 = S$

Este sistema diofántico (4 ecuaciones y 5 incógnitas) lleva por sustitución inmediata a la ecuación: $3A + C = 8$, que da las dos soluciones posibles: $A=2$, $C=2$ y $A=1$, $C=5$.

De la primera sale: $S=7$, $E=3$, $I=3$.

De la segunda resulta: $S=8$, $E=2$, $I=6$.

Por consiguiente: $2273 + 2237 + 2723 = 7233$ y $5182 + 1528 + 1852 = 8562$ son las dos sumas que solucionan la propuesta.

315. CRIPTOGRAMA SENCILLO. Los símbolos son: MMXCVIII.

La suma está expresada en numeración romana: MIL + MIL = MMXCVIII.

Es decir: $1049 + 1049 = 2098$.

316. HOLA. $8326 + 1860 = 10186$. $8362 + 1820 = 10182$.

317. DE CITA. $507 + 9.867 = 10.374$.

318. MUY ENTRETENIDO. $7.486 + 7.680 + 90.436 = 105.602$.

319. FACTURA EN CLAVE. $9.672 + 1.075 = 10.747$.

320. AMOR POR AMOR SE ACRECE. $9376 \times 9376 = 87909376$.

321. EL RELOJ DE PARED. Eran las 12, al entrar oyó; la última campanada de las 12.

322. APAGÓN DE LUZ. Cuando se produce un apagón, los relojes radio-despertadores que abundan en las casas se ponen a cero. Solamente habrá que restar de la hora exacta la del reloj para saber a qué hora se produjo el apagón.

323. EL CAFÉ ESTÁ SERVIDO. Sea la 1 h. y x minutos la hora desconocida.

Ángulo de la aguja pequeña con la bisectriz (en grados): $360/12 + x/60 \cdot 360/12 = 30 + x/2$.

Ángulo de la aguja grande con la bisectriz: $360 - x \cdot 360/60 = 360 - 6x$.

De ahí la ecuación: $30 + x/2 = 360 - 6x$. Es decir: $x = 2/13 \cdot 330 = 50$ min. 46 seg.

El café se sirve a la 1 hora, 50 minutos, 46 segundos.

324. EL RELOJ QUE SE PARABA. Al salir de su casa el hombre dio cuerda al reloj y escribió la hora en un papel. Cuando llegó a casa de su amigo apuntó la hora que era en ese momento y cuando se fue volvió a apuntarla. Cuando llegó a su casa miró el reloj y así pudo saber cuánto tiempo había estado fuera de casa. Restando de eso el tiempo que había estado en casa de su amigo pudo calcular lo que había tardado en ir y venir; sumando la mitad de ese tiempo a la hora que era cuando salió de casa de su amigo pudo averiguar la hora que era en cada momento.

325. LOS RELOJES DE ANTONIO Y JUAN. Juan llegará antes y a tiempo. Antonio perderá el tren.

326. ENTRE LAS 11, LAS 12 Y LA 1. Llamando x al número de minutos que indica la aguja grande, tenemos:

$$x/60 = (60-x)/5, x=720/13 \text{ minutos.}$$

La hora indicada es: Las 12 h 55 m. 23,1 s

327. EN LA CANTINA. Sean las 7 horas y x minutos cuando se sirven los entremeses.

El ángulo de la aguja pequeña con el segmento que une el centro del reloj a la cifra 6 es: $360/12 + (x/60 \cdot 360/12) = 30(1+x/60)$.

El ángulo de la aguja grande con el mismo segmento: $180 - 360x/60 = 180-6x$.

Al ser estos ángulos iguales: $x=300/13 = 23\text{m } 5\text{s}$.

Luego, los entremeses se sirven a las 7h, 23m y 5s.

Sean las 7 horas e y minutos cuando se sirve el postre.

El ángulo de la aguja pequeña con el segmento anterior es: $30(1+y/60)$

El ángulo de la aguja grande con el mismo segmento: $6y - 180$.

El ángulo de la aguja grande con el mismo segmento: $180 - 360x/60 = 180-6x$.

Al ser estos ángulos iguales: $y=420/11 = 38\text{m } 11\text{s}$.

Luego, el postre se sirve a las 7h, 38m y 11s.

En esta cantina se tarda pues 15 minutos y 6 segundos para comer los entremeses y el plato principal.

328. LAS AGUJAS DE MI RELOJ. Llamemos p y g a los ángulos que forman la aguja pequeña y la grande son el origen. Se tiene:

$$g=12(p-2\pi h/12) \quad \text{siendo } h \text{ el número que representa la hora.}$$

Si p_0 y g_0 son los valores iniciales se tiene:

$$g_0=12(p_0-\pi/2) \quad (*)$$

Si p_1 y g_1 son los nuevos valores que leemos en el reloj, se tiene:

$$g_1=12(p_1-2\pi/3)$$

$$\text{Como } g_0=p_1 \text{ y } g_1=p_0 \Rightarrow p_0=12(g_0-2\pi/3)$$

$$\text{Así, de (*) se obtiene: } g_0=12[12(g_0-2\pi/3)-\pi/2] \Rightarrow 143 g_0 = 6 \cdot 17\pi.$$

Se trata de la aguja de los minutos, para la que 2π equivale a 60 minutos.

$$\text{Luego: } g_0 = 3 \cdot 17 \cdot 60 / 143 \text{ minutos} = 21\text{m } 23\text{s} \Rightarrow \text{Al partir eran las 3h, 21m } 23\text{s}.$$

329. LAS TRES MANECILLAS DEL RELOJ. Averigüemos en cuántos lugares de la esfera del reloj se superponen horario y minuterio. Podrá pensarse que coinciden en 12 puntos, pero como ya sabemos, solamente sucede así en diez ocasiones comprendidas entre las 12 del mediodía y las 12 de la noche. Añadida la coincidencia de las 12, tendremos un total de 11 diferentes lugares de coincidencia. Por un razonamiento análogo, el minuterio y el segundero coincidirán en 59 puntos. Así pues, las coincidencias del minuterio están separadas por 11 períodos iguales de tiempo, y las coincidencias de segundero y horario, por 59.

Llamaremos A al número de arcos de circunferencia definidos por las coincidencias del primer tipo y B al número de arcos por vuelta correspondientes a las del segundo. Para que ambos tipos de coincidencia se presenten simultáneamente, A y B han de admitir algún divisor común mayor que 1. Ahora bien, 11 y 59 no pueden tener divisores comunes, pues son números primos. Por consiguiente, no puede haber ningún momento, entre las

12 del mediodía y las 12 de la noche en que ambos tipos de coincidencias sean simultáneas. Con otras palabras, las tres manecillas sólo están exactamente superpuestas a las 12 en punto.

330. ¿QUIEN ES MAYOR ANA O CARLOS? Primero tenemos que calcular cuántos días tienen que pasar para que los dos relojes vuelvan a marcar la misma hora. Como el reloj de Ana se atrasa tanto como el de Carlos se adelanta, los dos relojes volverán a marcar la misma hora cuando el de Carlos se haya adelantado seis horas y el de Ana se haya atrasado otras seis. (Entonces los dos relojes marcarán las seis, y, por supuesto, ninguno irá bien.) Pero, ¿cuántos días tendrán que pasar para que el reloj de Carlos se adelante seis horas? Un adelanto de diez segundos cada hora supone un minuto cada seis horas, que es 4 minutos al día, que es una hora cada 15 días, que es 6 horas en 90 días. De modo que al cabo de 90 días los relojes volverán a marcar la misma hora.

Pero no nos han dicho en que día de enero se pusieron los dos relojes en hora. Si hubiera sido cualquier día excepto el 1 de enero, 90 días después no podía caer en marzo; tendría que caer en abril (o quizá en mayo). De modo que los relojes debieron ponerse en hora el 1 de enero. Pero aún así, 90 días después no caería en marzo a no ser que fuera un año bisiesto. (El lector puede comprobarlo con un calendario. Noventa días después del 1 de enero es el 1 de abril de un año normal y el 31 de marzo de un año bisiesto). Esto demuestra que el veintiún cumpleaños de Ana cae en año bisiesto, por tanto debió nacer en 1843, y no en 1842 ó en 1844. (Veintiún años después de 1843 es 1864, que es año bisiesto). Se nos dice que uno de los dos nació en 1842, por tanto fue Carlos quién nació en 1842. Así que Carlos es mayor que Ana.

331. ¿CUÁNTOS AÑOS TIENEN? El hijo es 7 veces mayor que el nieto. El abuelo es 12 veces mayor que el nieto. Si el niño tuviera un año, el hijo tendría 7 y el abuelo 12, y todos juntos 20. Esto es exactamente 5 veces menos de lo que ocurre en realidad. Por tanto, el nieto tiene 5 años, el hijo, 35 y el abuelo, 60. $5 + 35 + 60 = 100$.

332. ¿QUÉ EDAD TENGO? 18 años. Prueba: $3 \times 21 - 3 \times 15 = 63 - 45 = 18$.

333. AÑOS DE SINDICATO. Pedro 8 años, Joaquín 4 años. $8 = 2 \times 4$, $6 = 2 \times 3$.

334. EN EL AÑO 1.994. 25 y 40 años.

335. LA ESTRELLA DE CINE. 20 años.

336. LOS TRES HERMANOS. Francisco 35, Juan 20 y Antonio 15.

337. ¿CUÁNDO SALDRÁ DE LA CÁRCEL? Cuando el carcelero tenga el doble de años que el preso, la diferencia entre sus edades será la edad del preso. Además, la diferencia entre sus edades será la misma que ahora, es decir, 29 años. Así que cuando el preso tenga 29 años, el carcelero tendrá el doble (58). De modo que el preso tiene que esperar 4 años.

338. LA EDAD DEL CURA. Se descompone 2450 en factores primos. Como el sacristán conoce su propia edad, el doble de su edad debería permitirle elegir una de las soluciones. Al no poder hacerlo, es que tiene posibilidad de elección entre varias soluciones. Examinando las posibles posibilidades de las sumas de las tres edades, se observa que sólo el número 64 aparece dos veces: $(49 + 10 + 5 = 64)$ y $(50 + 7 + 7 = 64)$. El sacristán tiene entonces 32 años. Precizando que una de las personas es mayor que el cura, éste

da una indicación al sacristán que le permite elegir entre las dos soluciones. El cura tiene pues 49 años.

Aunque no se nos pregunta: las edades de las personas son: 50, 7 y 7.

339. DIFERENCIA DE EDAD. Sea (m, c, d, u) la descomposición según las cifras de millares, centenas, decenas y unidades de la fecha de nacimiento de Juan. Sea igualmente (m', c', d', u') la fecha de nacimiento de Pedro.

Edad de Juan: Año en curso $\rightarrow (1000m + 100c + 10d + u)$.

Edad de Pedro: Año en curso $\rightarrow (1000m' + 100c' + 10d' + u')$.

Diferencia de edad: $1000(m - m') + 100(c - c') + 10(d - d') + (u - u')$.

Por hipótesis sabemos que: $m + c + d + u = m' + c' + d' + u'$.

Luego: $(m - m') + (c - c') + (d - d') + (u - u') = 0$.

Restamos esta cantidad nula a la diferencia de edad, y obtenemos: $999(m - m') + 99(c - c') + 9(d - d')$ que evidentemente es divisible por 9. Como esta diferencia es necesariamente menor que 10 (ya que las dos edades empiezan por la misma cifra), ha de ser 9.

Juan y Pedro tienen 9 años de diferencia.

340. AL FINAL DE LA SECUNDARIA. Sean x , y las edades actuales de Rita y Carlos.

$$(x - 6)/(y - 6) = 13/11$$

$$(x - 4)/(y - 4) = 7/6. \text{ Resolviendo este sistema: } x = 32, y = 28.$$

La edad del padre dentro de 11 años (cuando el hijo termina la secundaria) es 39.

341. MENUDOS PARENTESCOS. Se llama Juan y es su sobrino.

342. VAYA PARENTESCO. Javier es hijo de Miguel.

343. ¿CUÁNTOS HIJOS? Siete hijos: seis varones y una hembra.

344. FAMILIA NUMEROSA. Ocho hermanos y cinco hermanas.

345. HERMANA QUE NO ES TÍA. Es mi madre.

346. HERMANA QUE NO ES TÍA. Es mi madre.

347. HERMANOS Y HERMANAS. Sean " x " los chicos e " y " las chicas.

$$x = y - 1, y = 2(x - 1) \text{ Resolviendo el sistema sale: 4 chicos y 3 chicas.}$$

348. ENTRE CARLOS Y JAIME. Carlos es el nieto de Jaime.

349. HIJO DE MIS PADRES Y NO ES MI HERMANO. El mismo.

350. ¿CUÁNTOS INVITADOS? Uno solo, que reunía todos esos parentescos.

351. TENIS DE CATEGORÍA. En el juego número once.

352. SERPIENTES MARINAS. Había 3 serpientes totalmente ciegas y 3 con ambos ojos sanos.

353. EL PARO AUMENTA. El agente pasó a engrosar la lista de parados, por incompetente, al haber llegado a la conclusión primera de que había más padres que hijos.

354. PARTIDO DE TENIS. Quienquiera que sirviese primero sirvió cinco juegos, y el otro jugador sirvió cuatro. Supóngase que quien sirvió primero ganó x de los juegos que sirvió, e y del resto de los juegos. El número total de juegos perdidos por el jugador que los sirvió es, entonces, $5 - x + y$. Esto es igual a 5 (se nos dijo que la que no sirvió ganó cinco juegos); por tanto, $x = y$, y el primer jugador ganó un total de $2x$ juegos. Porque sólo Santana ganó un número par de juegos, él debió ser el primero en servir.

355. CABALLOS. El más viejo el de Mac, el más lento el de Jack y el más claro el de Smith.

356. EL EXPLORADOR CONDENADO. El condenado dijo: "MORIRÉ EN LA HOGUERA". Si esta frase es cierta, el condenado debe morir envenenado. Pero en ese caso ya es falsa. Y si es falsa, debe morir en la hoguera, pero en este caso es verdadera. El condenado fue indultado.

357. EL PRISIONERO Y LOS DOS GUARDIANES. El prisionero pregunta a uno de los dos servidores: "SI LE DIJERA A TU COMPAÑERO QUE ME SEÑALE LA PUERTA DE LA LIBERTAD, ¿QUÉ ME CONTESTARÍA?" En los dos casos, el guardián señala la puerta de la esclavitud. Por supuesto elegiría la otra puerta para salir de la celda.

358. EL PRISIONERO Y LOS TRES GUARDIANES.

359. LOS 3 PRESOS Y LAS BOINAS (1). El primer preso (el que no ve ninguna boina) averigua el color de su boina: Como el tercer preso, que ve las dos boinas, no dice nada, no puede ver dos boinas negras. Si el segundo viera una boina negra en el primero, sabría que él tiene una blanca ya que no oye al tercero decir que tiene una blanca. Entonces el primer preso tiene una boina blanca.

360. LOS 3 PRESOS Y LAS BOINAS (2). Si uno cualquiera de ellos tuviera una boina negra, los otros dos sabrían que tiene una boina blanca; si no, el tercero diría inmediatamente que tiene una boina blanca. Luego cada preso tiene una boina blanca.

361. LOS MARIDOS ENGAÑADOS. Si hubiera sólo un marido engañado, habría expulsado a su mujer la primera mañana, puesto que no conocería ninguna mujer infiel y sabría que hay por lo menos una.

Si hubiera dos maridos engañados, cada uno sabría que el otro era engañado, y esperaría que éste último expulsase a su mujer la primera mañana. Como eso no tiene lugar, cada uno deduce que el otro espera lo mismo, y por tanto que hay dos mujeres infieles una de las cuales es la suya. Los dos maridos expulsan pues a sus mujeres la segunda mañana.

De la misma manera, si hubiera tres maridos engañados, cada uno sabría que los otros dos lo son, y esperaría que expulsaran a sus mujeres la segunda mañana. Como eso no tiene lugar, cada uno deduce que una tercera mujer infiel, que no puede ser otra más que la suya. Los tres maridos expulsan pues a sus mujeres la tercera mañana.

Y así sucesivamente; los cuarenta maridos expulsan a sus cuarenta mujeres a los cuarenta días, por la mañana.

362. EL CONDENADO A MUERTE. Eligió una papeleta y, con gesto fatalista, como correspondía a un árabe, se la tragó. El sultán hubo de mirar la que quedaba, para saber lo que decía la elegida por el reo, con lo que su salvación quedó asegurada merced al Gran Visir y a su propio ingenio.

363. LAS DEPORTISTAS. Ana es más alta que la tenista, por lo tanto no es ni la tenista, ni la gimnasta; la más baja es la nadadora. La gimnasta no es Ana, ni Beatriz (mujer casada), es Carmen. Por eliminación, la tenista es Beatriz.

365. EL TORNEO DE AJEDREZ. Veamos primero el número de jugadores en cada grupo. Sea x el número de jugadores del primer grupo.

$$(30-x)(29-x)/2 - x(x-1)/2 = 87$$

$870 - 59x + x^2 - x^2 + x = 174 \Rightarrow 58x = 696 \Rightarrow x = 12$. Luego hubo 12 jugadores en el primer grupo y 18 jugadores en el segundo grupo. Cada jugador del primer grupo jugó

11 partidas y como el ganador totalizó 7'5 puntos, sin perder ninguna partida, tenemos, llamando y al número de partidas en las que hizo tablas: y $0'5 + (11-y) 1 = 7'5 \Rightarrow 0'5y = 3'5 \Rightarrow y = 7$ partidas.

366. LAS TRES CARTAS. Los dos primeros enunciados sólo pueden satisfacer mediante dos disposiciones de Reyes y Damas: RDD y DRD. Los dos últimos enunciados sólo se cumplen con dos combinaciones de corazones y picas: PPC y PCP. Los dos conjuntos pueden combinarse de cuatro maneras posibles:

RP, DP, DC - RP, DC, DP - DP, RP, DC - DP, RC, DP

El último conjunto queda excluido por contener dos Damas de picas. Como los otros tres conjuntos están compuestos del Rey de picas, la Dama de picas y la Dama de corazones, tenemos la seguridad de que éstas son las tres cartas que están sobre la mesa. No podemos saber la posición de cada naípe en concreto, pero sí podemos decir que el primero ha de ser de picas y el tercero una Dama.

367. TRES PAREJAS EN LA DISCOTECA. El chico de rojo tiene que estar con la muchacha de azul. La chica no puede ir de rojo, pues la pareja llevaría el mismo color, y tampoco puede ir de verde, porque el chico de rojo habló con la chica de verde cuando estaba bailando con otro amigo.

El mismo razonamiento hace ver que la chica de verde no puede estar ni con el chico de rojo ni con el de verde. Luego debe bailar con el chico vestido de azul. Así pues, nos queda la chica de rojo con el muchacho de verde.

368. BLANCO, RUBIO Y CASTAÑO. Suponer que la dama se apellida Castaño conduce rápidamente a una contradicción. Su observación inicial fue replicada por la persona de pelo rubio, así que el pelo de Castaño no podrá ser de ese color. Tampoco puede ser castaño, ya que se correspondería con su apellido. Por lo tanto debe ser blanco. Esto implica que Rubio ha de tener el pelo castaño, y que Blanco debe tenerlo rubio. Pero la réplica de la persona rubia arrancó una exclamación de Blanco y, por consiguiente, éste habría de ser su propio interlocutor.

Por lo que antecede, la hipótesis de que la dama sea Castaño debe ser descartada. Además, el pelo de Blanco no puede ser de este color, ya que coincidirían color y apellido, y tampoco rubio, pues Blanco replica a la persona que tiene ese cabello. Hay que concluir que el pelo de Blanco es castaño. Dado que la señora no tiene el pelo castaño, resulta que ésta no se apellida Blanco, y como tampoco puede llamarse Castaño, nos vemos forzados a admitir que su apellido es Rubio. Como su pelo no puede ser ni rubio ni castaño, se debe concluir que es blanco. Si la señora Rubio no es una anciana, parece justificado que estamos hablando de una rubia platino.

369. LOS CIEN POLÍTICOS. Una respuesta bastante corriente es "50 honestos y 50 deshonestos". Otra bastante frecuente es "51 honestos y 49 deshonestos". Las dos respuestas son equivocadas.

La respuesta es que uno es honesto y 99 deshonestos.

370. COMIENDO EN EL RESTAURANTE. La mujer de Dionisio. Siguiendo el sentido de las agujas del reloj, la colocación es la siguiente: Armando, mujer de Dionisio, Basilio, mujer de Armando, Carlos, mujer de Basilio, Dionisio y mujer de Carlos.

371. LOS INCONVENIENTES DE SER DESPISTADO. Cuando el profesor aceptó la apuesta del estudiante había olvidado por completo que dos de los estudiantes, que siempre se sentaban juntos, eran gemelos.

372. EL MISMO N° DE PELOS. La probabilidad buscada es 1. Existe la certeza de que al menos dos españoles tienen el mismo número de cabellos.

Dividiendo el n° de habitantes por 5 tendremos la superficie en mm^2 que habría que tener el cuero cabelludo para que no se repitan dos cabelleras, en cuanto a n° de pelos.

Como $40\,106/5 = 8\,106\,\text{mm}^2 = 8\,\text{m}^2$ es indudable que habría de ser muy cabezotas los españoles.

373. MAZO DE BARAJA COMPLETO. En los tres casos la probabilidad es cero. Un mazo completo de la baraja francesa de 52 cartas no tiene comodines.

374. SOBRE LA SUPERFICIE DE UNA ESFERA. Uno. Es un suceso seguro.

375. EL PENTÁGONO. La probabilidad es $1/2$. Supongamos que la persona tuviera un doble situado directamente frente a él, a igual distancia y del otro lado, del centro del Pentágono. Si alguna de ambas personas viera tres lados, la otra solamente podría ver dos. Puesto que hay probabilidades iguales de que cualquiera de las personas se encuentre en uno o en otro lugar, la probabilidad de que vea tres caras es $1/2$.

Observación. Si la contaminación y la niebla de Washington se parecen en algo a las de Toronto, la probabilidad sería nula.

376. LOS 5 JUGADORES. Puesto que la probabilidad de ganar es la misma para cada jugador, esto es, $1/5$, quiere decirse que la de no ganar Juan es $4/5$. Como se jugaron 5 partidas, la probabilidad buscada de que Juan no ganase ninguna es: $p=(4/5)^5=0'32768$.

377. LA CARTA DE ARRIBA. Cualquiera que sea el color de la primera carta cortada, esta carta no puede ocupar lo alto del mazo producido tras el corte. Con el segundo corte seleccionamos al azar una carta entre 51, de las que 25 son del mismo color que la primera. Por consiguiente, la probabilidad de que las dos cartas sean de colores iguales será $25/51$, ligeramente inferior a $1/2$.

378. LAS HERMANAS DE LOS AJOS AZULES. Lo más probable es que las hermanas Jones sean cuatro en total, de las que tres tendrían los ojos azules. Efectivamente, si hay n hermanas de las cuales b tienen los ojos azules, la probabilidad de que elegidas al azar dos de ellas resulten ambas de ojos azules es $b(b-1)/n(n-1)$.

Como se nos dice que esta probabilidad es $1/2$, el problema consiste en determinar los valores enteros de b y n que le dan a la expresión anterior el valor $1/2$. Las soluciones mínimas son $n=4$ y $b=3$; las inmediatamente superiores son ya $n=21$ y $b=15$. Siendo extremadamente improbable que en una familia haya 21 hermanas, la mejor conjetura es suponer que las hermanas sean cuatro, y que tres de ellas tengan los ojos azules.

379. FICHAS EN EL TABLERO. Se pueden situar 68 fichas. Hay que alternar 5 filas de ocho fichas con 4 filas de siete fichas.

380. REY Y CABALLO. Se puede eludir el jaque durante tanto tiempo como se quiera. Basta dirigir el rey hacia el centro del tablero, ocupando siempre casillas de distinto color a las del caballo. El color de las casillas ocupadas por el caballo va cambiando a cada salto, y, por tanto, si rey y caballo ocupan colores distintos, ningún salto del caba-

llo pondrá al rey a su alcance. El único peligro reside en quedar encajonado en un rincón, donde puede ser forzoso mover en diagonal, y sufrir jaque en la jugada siguiente.

381. JUGAR ES GRANDE. (*Enviado por un lector*) No todos los tableros de x por x casillas pueden ser recorridos de esquina a esquina por un caballo. El mínimo tamaño debe ser 4×4 , en el cual el caballo emplea 2 saltos para recorrerlo. El siguiente tablero posible es de 7×7 , luego de 10×10 , 13×13 , ... Con lo que se llega a la conclusión que para que un caballo pueda ir directamente de una esquina a otra en un tablero, sin tener que hacer maniobras para alcanzar el rincón, los tableros siguen la progresión aritmética: " $4 + 3n$ ".

En un tablero de 4×4 el caballo emplea 2 saltos, en uno de 7×7 emplea 4, en uno de 10×10 salta 6 veces y 8 en uno de 13×13 . Siguiendo esta progresión llegaríamos a un tablero de $4.000.000 \times 4.000.000$, donde el caballo da un total de 2.666.666 saltos.

Pero también se puede buscar la relación entre el número de saltos y el lado del tablero, teniendo que:

Cuando el lado es: $4 + 3n$ Los saltos son: $2 + 2n$

$$4 + 0 = 4 \quad 2 + 0 = 2$$

$$4 + 3 = 7 \quad 2 + 2 = 4$$

$$4 + 6 = 10 \quad 2 + 4 = 6$$

$$4 + 9 = 13 \quad 2 + 6 = 8$$

$$4 + 1.333.332 = 4.000.000 \quad 2 + 2.666.664 = 2.666.666$$

Es sólo una teoría.

Por otra parte ya sé que solo es una teoría, pero me gustaría dar una explicación de por qué el ajedrez nunca podrá ser dado como una ciencia exacta en la que siguiendo una serie de pasos se puede dejar al rival sin problemas. Creo que a todos los que han pensado esto se les ha escapado un problema un sencillo, y es la geometría.

Como pasa por ejemplo en las damas, donde las dos escuadras son iguales, y sí que existirá una fórmula, pero aquí son escuadras asimétricas, desde el momento en que la dama no se pone en un cuadro, sino en su color, comportándose entonces en forma de espejo, lo cual rompe su teoría. Este cambio tan tonto hace el mismo efecto que si se utilizara un color con peones y otro sin ellos, resumiendo, son equipos distintos, tienen posiciones iniciales distintas, tienen estrategias distintas y objetivos distintos. Las blancas están obligadas a ganar, porque para eso juegan primero, las blancas utilizan aperturas. Las negras juegan para no perder, siempre tienen un movimiento menos, juegan con defensas.

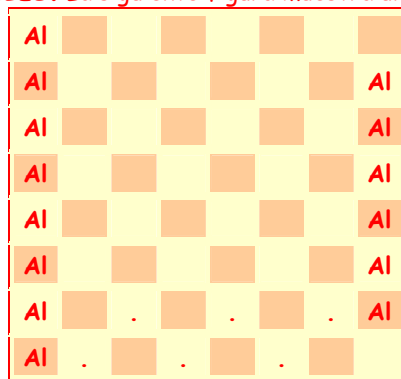
382. EL PASEO DE LA TORRE. Podríamos comenzar por éste: "En un tablero de ajedrez se señalan dos cuadros A y B. ¿Es posible pasearse con una torre por todo el tablero comenzando en A y terminando en B?"

Tomamos un tablero más pequeño, por ejemplo un tablero 2×2 con A y B en dos esquinas diagonalmente opuestas. El paseo propuesto es imposible.

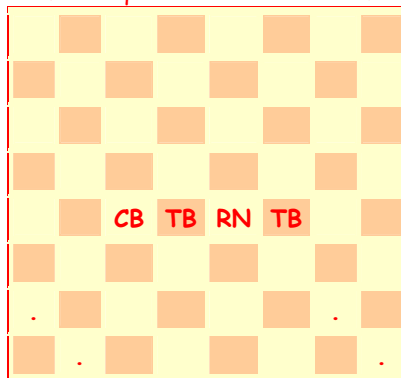
Si A y B son del mismo color, blanco por ejemplo, el paseo es imposible en el tablero 8×8 . La torre va recorriendo sucesivamente blanco, negro, blanco, negro... Así si el paseo terminase en blanco, el número de cuadros sería impar. En cambio será imposible el paseo en un tablero con un número impar de cuadros si A y B son de distinto color y también si son del mismo color si es que este color es el más escaso en el tablero.

Después de estas consideraciones, la respuesta al problema original ahora es obvia.

383. LOS 12 Y 14 ALFILES. La siguiente figura muestra una solución sencilla.



384. MATE EN EL CENTRO. He aquí la absurda solución.



385. EL ENROQUE.

- 1) Todas las casillas existentes entre el rey y la torre estén vacías.
- 2) El rey y la torre elegida no hayan sido movidos en el transcurso de la partida.
- 3) Los escaques, por los que el rey debe pasar no estén amenazados por la trayectoria de una pieza enemiga.
- 4) El rey no esté en jaque en ese momento.

386. ¿CUAL FUE LA ÚLTIMA JUGADA DE LAS BLANCAS? Un peón blanco que está en la casilla B2 corona como Torre en la casilla A1 comiendo una ficha que en ella tenían las negras.

387. DAMAS DEL MISMO COLOR. ¿Siete?

388. MATE EN UNA FRACCIÓN DE JUGADA. Levantando un poco el caballo y diciendo: "Mate descubierto."

389. LAS TABLAS.

- 1) Cuando cada jugador ha consumido 50 movimientos sin capturar ninguna pieza del adversario o sin mover los peones.
- 2) Cuando un jugador pone en jaque repetidamente el rey contrario sin llegar a conseguir el mate y la situación es irresoluble.

3) Cuando ambos adversarios carecen de las piezas necesarias para dar jaque mate, o, por ejemplo, conservan únicamente los reyes, caso clarísimo de empate, aunque sea muy excepcional.

4) Cuando un jugador no puede mover ninguna pieza por estar todas bloqueadas por el adversario (caso del rey ahogado)

5) Cuando se repite la misma jugada por tres veces consecutivas, sin poder optar por otra alternativa, y el jugador, así obligado, solicite el final de la partida por tablas.

6) Cuando los dos adversarios convienen en que la partida finalice en empate.

390. ¿CÓMO EVITAR DAR MATE EN UNA? La única manera que tienen las blancas de evitar dar jaque al rey negro, consiste en mover su torre cuatro cuadros hacia el Oeste. De esta manera, se da jaque al rey negro, pero el negro tiene libertad para tomar con su torre el alfil blanco que está dando jaque.

391. DOMINÓ Y AJEDREZ. Es imposible. En efecto, cada ficha de dominó ha de cubrir, forzosamente, una casilla blanca y otra negra, puesto que se alternan. Por tanto, cualquier combinación que eligiéramos para las fichas del dominó, habrían de cubrir el mismo número de casillas blancas que negras, y como las suprimidas son del mismo color, las 31 fichas cubrirán todo el tablero.

392. COLOCANDO FICHAS DE DOMINÓ. Indicación: Para averiguar la estrategia de Luis, lo hacemos más fácil y jugamos con un tablero 2x2; aquí no habrá duda. Después en otro 4x4, experimentamos, jugamos con el problema. Pasamos después a un tablero 6x6 y a otro 8x8. Luis gana siempre porque coloca su ficha en la posición simétrica (respecto al centro del tablero) de la que coloca su adversario. Esta estrategia es válida para cualquier tablero de dimensión par. La estrategia para tableros cuadrados con un número impar de casillas, por ejemplo 7x7, es mucho más complicada.

393. CON LAS FICHAS DEL DOMINÓ (1). Sí.

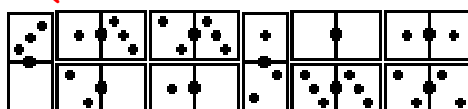
394. CON LAS FICHAS DEL DOMINÓ (2). Sí.

395. CON LAS FICHAS DEL DOMINÓ (3). Imposible, siempre quedarán dos fichas sin encajar.

396. CON LAS FICHAS DEL DOMINÓ (4). Sí.

397. CON LAS FICHAS DEL DOMINÓ (5). Imposible, siempre quedará una ficha sin encajar.

398. LAS DIEZ MÁS PEQUEÑAS.



399. TAPAR EL TABLERO. Sí. No.

400. LA PARTIDA.

BIBLIOGRAFÍA

- Albaiges Olivart J. M. - ¿Se atreve Vd. con ellos? Marcombo. Barcelona. (1981)
- Allem, J. P. - Juegos de ingenio y entretenimiento mat. Gedisa. Barcelona. (1984)
- Allem, J. P. - Nuevos juegos de ingenio y entret. mat. Gedisa. Barcelona. (1984)
- Barry Townsend, Charles. - Acertijos Clásicos. Selector. (1994)
- Berrondo, M. - Los juegos matemáticos de eureka. Reverté. Barcelona. (1987)
- Corbalán, F. - Juegos matemáticos para secundaria y Bach. Síntesis. Madrid. (1994)
- Falleta, N. - Paradojas y juegos. Ilustraciones, ... Gedisa. Barcelona. (1986)
- Fixx, J. - Juegos de recreación mental para los muy intelig. Gedisa. Barcelona. (1988)
- García Solano, R. - Matemáticas mágicas. Escuela Española. Madrid. (1988)
- Gardner, M. - Nuevos pasatiempos matemáticos. Alianza. Barcelona. (1980)
- Gardner, M. - Carnaval matemático. Alianza. Barcelona. (1980)
- Gardner, M. - Circo matemático. Alianza. Barcelona. (1983)
- Gardner, M. - Festival mágico-matemático. Alianza. Barcelona. (1984)
- Gardner, M. - ¡Ajá! Inspiración ¡Ajá! Lábor. Barcelona. (1981)
- Gardner, M. - ¡Ajá! Paradojas que hacen pensar. Lábor. Barcelona. (1983)
- Gardner, M. - Ruedas vida y otras div. matemáticas. Lábor. Barcelona. (1985)
- Gardner, M. - Juegos y enigmas de otros mundos. Gedisa. Barcelona. (1987)
- Guzmán, M. de - Cuentos con cuentas. Lábor. Barcelona. (1984)
- Guzmán, M. de - Mirar y ver. Alhambra. Madrid. (1976)
- Holt, M. - Matemáticas recreativas 2. Martínez Roca. Barcelona. (1988)
- Holt, M. - Matemáticas recreativas 3. Martínez Roca. Barcelona. (1988)
- Lánder, I. - Magia matemática. Lábor. Barcelona. (1985)
- Mataix, M. - Cajón de sastre matemático. Marcombo. Barcelona. (1978)
- Mataix, M. - Divertimientos lógicos y matemáticos. Marcombo. Barcelona. (1979)
- Mataix, M. - Fácil, menos fácil y difícil. Marcombo. Barcelona. (1980)
- Mataix, M. - El discreto encanto de las matemáticas. Marcombo. Barcelona. (1981)
- Mataix, M. - Nuevos divertimientos matemáticos. Marcombo. Barcelona. (1982)
- Mataix, M. - Droga matemática. Marcombo. Barcelona. (1983)
- Mataix, M. - Ocio matemático. Marcombo. Barcelona. (1984)
- Mataix, M. - Problemas para no dormir. Marcombo. Barcelona. (1987)
- Mataix, M. - En busca de la solución. Marcombo. Barcelona. (1989)
- Mathematical Association of America - Concursos de mat. Euler. Madrid. (1996)
- Northrop, E. P. - Paradojas matemáticas. Uteha. México. (1977)
- Paraquín, K. H. - Juegos visuales. Lábor. Barcelona. (1978)
- Perelman, Y. I. - Matemáticas recreativas. Martínez Roca. Barcelona. (1977)
- Perelman, Y. I. - Álgebra recreativa. Mir. Moscú. (1978)

Perelman, Y. I. - Problemas y experimentos recreativos. Mir. Moscú. (1983)
Rodríguez Vidal, R. - Diversiones matemáticas. Reverté. Barcelona. (1983)
Rodríguez Vidal, R. - Cuentos y cuentas de los mat. Reverté. Barcelona. (1986)
Rodríguez Vidal, R. - Enjambre matemático. Reverté. Barcelona. (1988)
Smullyan, R. - ¿Cómo se llama este libro? Cátedra. Madrid. (1981)
Smullyan, R. - ¿La dama o el tigre? Cátedra. Madrid. (1983)
Smullyan, R. - Alicia en el país de las adivinanzas. Cátedra. Madrid. (1984)
Thio de Pol, S. - Primos o algunos dislates sobre números. Alhambra. Madrid. (1976)
Revistas: SUMA. - ICE. Zaragoza.
Revistas: UNO - Laboratorio de matemáticas. Grao. Barcelona. (1996)

Estos problemas y muchos más se encuentran en **Internet** en la siguiente dirección:

<http://platea.pntic.mec.es/jescuder/>

**RESOLUCIÓN
DE
PROBLEMAS MATEMÁTICOS**



MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CULTURA
CENTRO DE PROFESORES Y RECURSOS
SALAMANCA

