

# Ingeniería en Informática

## Relaciones de Estructuras de Datos. Curso 2009/2010

### Eficiencia

J. Fdez-Valdivia

*Departamento de Ciencias de la Computación e I.A. ETS Ingeniería Informática  
Universidad de Granada. 18071 Granada. Spain.  
Email: jfv@decsai.ugr.es*

#### Resumen

En este documento se presenta relación de problemas de análisis de eficiencia que se propone para la asignatura de estructura de datos de primer curso de *Ingeniería en Informática*.

## 1. Análisis de la eficiencia

**Problema 1.1** Probar que las siguientes sentencias son verdad:

- 17 es  $O(1)$
- $\frac{n(n-1)}{2}$  es  $O(n^2)$  y  $\Omega(n^2)$  (es decir,  $\Theta(n^2)$ ).
- $\max(n^3, 10n^2)$  es  $O(n^3)$
- $\log_2 n$  es  $\Theta(\log_3 n)$

**Problema 1.2** Encontrar el entero  $k$  más pequeño tal que  $f(n)$  es  $O(n^k)$  en los siguientes casos:

1.  $f(n) = 13n^2 + 4n - 73$
2.  $f(n) = 1/(n+1)$
3.  $f(n) = 1/(n-1)$
4.  $f(n) = (n-1)^3$
5.  $f(n) = (n^3 + 2n - 1)/(n+1)$
6.  $f(n) = \sqrt{n^2 - 1}$

**Problema 1.3** Ordenar de menor a mayor los siguientes órdenes de eficiencia:

$n$ ,  $\sqrt{n}$ ,  $n^3 + 1$ ,  $n^2$ ,  $n \log_2(n^2)$ ,  $n \log_2 \log_2(n^2)$ ,  $3^{\log_2(n)}$ ,  $3^n$ ,  $2^n$ ,  $2^n + 3^{n-1}$ , 20000,  $n + 100$ ,  $n2^n$

**Problema 1.4** Supongamos que  $T_1(n) \in O(f(n))$  y  $T_2(n) \in O(f(n))$ . Razonar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- a.-  $T_1(n) + T_2(n) \in O(f(n))$
- b.-  $T_1(n) \in O(f^2(n))$
- c.-  $T_1(n)/T_2(n) \in O(1)$

**Problema 1.5** Considerar las siguientes funciones de  $n$ :

$$f_1(n) = n^2$$

$$f_2(n) = n^2 + 1000n$$

$$f_3(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es impar} \\ n^3 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$f_4(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \leq 100 \\ n^3 & \text{si } n > 100 \end{cases}$$

Indicar para cada par distinto  $i$  y  $j$  si  $f_i(n)$  es  $O(f_j(n))$  y si  $f_i(n)$  es  $\Omega(f_j(n))$ .

**Problema 1.6** Demostrar que si  $f(n) \in O(g(n))$  y  $g(n) \in O(h(n))$  entonces  $f(n) \in O(h(n))$

**Problema 1.7** Demostrar que  $O(f(n)) \in O(g(n))$  sii  $f(n) \in O(g(n))$  y  $g(n) \in O(f(n))$ .

**Problema 1.8** Demostrar la siguiente jerarquía de órdenes de complejidad:

$$O(1) \subset O(\log(n)) \subset O(n) \subset O(n^2) \subset O(2^n) \subset O(n!)$$

**Problema 1.9** Obtener usando la notación  $O$ -mayúscula la eficiencia del siguiente trozo de código:

```
for (i=0; i<n; i++)
  for (j=0; j<n; j++) {
    C[i][j] = 0;
    for (k=0; k<n; k++)
      C[i][j] += A[i][k] * B[k][j];
  }
```

**Problema 1.10** Obtener usando la notación  $O$ -mayúscula la eficiencia de la siguiente función:

```
void ejemplo(int n)
{
  int i, j, k;

  for (i = 1; i < n; i++)
    for (j = i+1; j <= n; j++)
      for (k = 1; k <= j; k++)
        Global += k*i;
}
```

**Problema 1.11** Obtener usando la notación  $O$ -mayúscula la eficiencia del siguiente trozo de código:

```
for (i=0; i<n; i++)
  if (i%2) {
    for (j=i; j<n; j++)
      x* = i;
    for (j=1; j<i; j++)
      y* = j;
  }
```

**Problema 1.12** Suponer que el parámetro  $n$  en la siguiente función es una potencia positiva de 2, es decir,  $n = 2, 4, 8, 16, \dots$ . Dar la fórmula que expresa el valor de la variable *cont* en

términos del valor de  $n$  cuando la función termina.

```
void ejemplo(int n)
{
    int x, cont;

    cont = 0;
    x = 2;
    while (x < n)
    {
        x = 2*x;
        cont++;
    };
    printf(" %d\n", cont);
}
```

**Problema 1.13** Estimar el peor caso de tiempo de ejecución para la siguiente función. Emplear la notación O-mayúscula

```
int recursiva(int n)
{
    if (n <= 1)
        return 1;
    else
        return (recursiva(n - 1) + recursiva(n - 1));
}
```

**Problema 1.14** Dada la siguiente función:

```
int E(int n)
{
    if (n == 1)
        return n;
    else
        return (E(n/2) + 1);
}
```

1. ¿Cuál es el valor que devuelve la función?
2. Obtener una expresión para el peor caso de tiempo de ejecución de la función.

**Problema 1.15** Resolver la recurrencia siguiente en función de  $k$  y  $s$ :

$$T(n) = k \times T(n-1) + s^2 \quad n > 1 \quad k, s > 1 \quad T(1) = 1$$

**Problema 1.16** Considerando que el máximo de un vector es el máximo de dos valores:

1. El máximo de la primera mitad.
2. El máximo de la segunda mitad.

Implementar una función recursiva para calcular el máximo de un vector y estudiar su eficiencia.

**Problema 1.17** Resolver la recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} T(\frac{n}{2}) + n & n \geq 2 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$$

**Problema 1.18** Implementar una función recursiva que resuelva el problema de las *Torres de Hanoi* y estudiar la eficiencia en función de la altura de la torre.

**Problema 1.19** Suponiendo que la función *rectangle* tiene un tiempo de ejecución constante, calcular la eficiencia de la siguiente función fractal en función de "n", es decir, del número de niveles de profundidad.

```
/**
 * @brief Dibuja un fractal usando la función rectangle
 * @param n Número de niveles del fractal
 * @param cx Coordenada x del centro del rectángulo
 * @param cy Corrdenada y del centro del rectángulo
 * @param t Longitud del lado del cuadrado
 */
void fractal (int n, int cx, int cy, int t)
{
    if (n>0) {
        rectangle(cx-t/2,cy-t/2,cx+t/2,cy+t/2);
        fractal (n-1,cx-t/2,cy-t/2,t/4);
        fractal (n-1,cx+t/2,cy+t/2,t/4);
        fractal (n-1,cx-t/2,cy+t/2,t/4);
        fractal (n-1,cx+t/2,cy-t/2,t/4);
    }
}
```