Tercer Problema de la Evaluación Continua

.- Demostrar usando el Lema de Bombeo que este lenguaje de palíndromos de 0 y 1 no es regular

$L = \{u \in \{0,1\}^* : u = u^{-1}\}$

Tenemos la intuición de que este lenguaje no es regular.

Vamos a suponer lo contrario, el lenguaje es regular y por lo tanto satisface el Lema de Bombeo.

En este caso, se daría lo siguiente:

$\exists\ n \in N$ tal que $\forall\ z \in L$, $|z| >= n$ (para cualquier cadena ‘z’ del lenguaje con más de n símbolos), dónde $z = 1^n0^n1^n$ (ésta es la cadena que elegimos de ejemplo pero podría ser otra) es un palíndromo de longitud $|z| = |\ 1^n0^n1^n\ | = 3n > n$.

El lema de bombeo cita que la cadena z se puede factorizar en 3 subcadenas, $z = 1^n0^n1^n = uvw$ y que uvw verifican las 3 propiedades:

(Usamos las 2 primeras propiedades para ver lo que hay en uvw)

1) $|uv| <= n$

Nuestra cadena sería de la siguiente forma:

$$1\overset{n}{\text{——}}1 \text{ — } 0\overset{n}{\text{——}}0 \text{ — } 1\overset{n}{\text{——}}1$$

Entonces si uv tienen que ser menor o igual que n, solo pueden ser 1 porque si tuviéramos $1^n\,0$ ya tendríamos que $uv > n$.

Por tanto, $u = 1^{l\ \text{(ES UNA L)}}$; $v = 1^k$; $w = 1^{n-l-k}0^n\,1^n$

2) $|v| >= 1$; entonces $v = 1^k$ y $k >= 1$.

3) Vamos a alcanzar una contradicción con $i = 0$, bombeamos 0 veces los símbolos de ‘v’; $uv^0w = 1^l1^{n-l-k}0^n1^n = 1^{n-k}\ 0^n\ 1^n$. Ahora tenemos que ver si $1^{n-k}\ 0^n\ 1^n$ con $k >= 1$ pertenece a L:

Se tiene que dar que $u = 1^{n-k}\ 0^n\ 1^n = u^{-1}$

$u^{-1} = 1^n\ 0^n\ 1^{n-k}$ → aquí se demuestra que la cadena no coincide con su inversa ($u\ != u^{-1}$, u tiene menos 1 que u^{-1} al principio y más 1 al final), no es un palíndromo. Hemos alcanzado una contradicción, la hipótesis que proponemos al principio es falsa. Todavía no podemos afirmar que el lenguaje sea regular, sólo sabemos que no es regular.