COMBOS

Aqui daremos los *Combos de definiciones y convenciones notacionales* y los *Combos de teoremas* que se usaran en los examenes teoricos de las materias:

- Lenguajes Formales y Computabilidad
- Logica

Combos de definiciones y convenciones notacionales de la materia Lenguajes formales y computabilidad

Combo 1.

(1) Defina cuando un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado Σ-recursivo (no hace falta que defina "funcion Σ-recursiva")
(2) Defina $\langle s_1, s_2, ...\rangle$
(3) Defina "f es una funcion Σ-mixta"
(4) Defina "familia Σ-indexada de funciones"
(5) Defina $R(f, \mathcal{G})$ (haga el caso de valores numericos)

Combo 2. Defina:

(1) $d \overset{n}{\vdash} d'$ y $d \overset{*}{\vdash} d'$ (no hace falta que defina $\vdash$)
(2) $L(M)$
(3) "f es una funcion de tipo (n, m, s)"
(4) (x)
(5) $(x)_i$

Combo 3.

(1) Defina cuando un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado Σ-recursivamente enumerable (no hace falta que defina "funcion Σ-recursiva")
(2) Defina $s^{\leq}$
(3) Defina $*^{\leq}$
(4) Defina $\#^{\leq}$

Combo 4. Defina cuando una funcion $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ es llamada Σ-efectivamente computable y defina "el procedimiento $\mathbb{P}$ computa a la funcion f"

Combo 5. Defina cuando un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado Σ-efectivamente computable y defina: "el procedimiento efectivo $\mathbb{P}$ decide la pertenencia a S"

Combo 6. Defina cuando un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado Σ-efectivamente enumerable y defina: "el procedimiento efectivo $\mathbb{P}$ enumera a S"

Combo 7. Defina cuando una funcion $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ es llamada Σ-Turing computable y defina "la maquina de Turing M computa a la funcion f"

Combo 8. Defina:

(1) $M(P)$
(2) Lt
(3) Conjunto rectangular
(4) "S es un conjunto de tipo (n, m)"

Combo 9. Defina:

(1) "I es una instruccion de $\mathcal{S}^{\Sigma}$"
(2) "$\mathcal{P}$ es un programa de $\mathcal{S}^{\Sigma}$"
(3) $I_i^{\mathcal{P}}$
(4) $n(\mathcal{P})$
(5) Bas

Combo 10. Defina relativo al lenguaje $\mathcal{S}^{\Sigma}$:

(1) "estado"
(2) "descripcion instantanea"
(3) $S_{\mathcal{P}}$
(4) "estado obtenido luego de t pasos, partiendo del estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$"
(5) "$\mathcal{P}$ se detiene (luego de t pasos), partiendo desde el estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$"

Combo 11. Defina:

(1) $\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,\#}$
(2) "f es Σ-computable"
(3) "$\mathcal{P}$ computa a f"
(4) $M^{\leq}(P)$

Combo 12. Defina cuando un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado Σ-computable, cuando es llamado Σ-enumerable y defina "el programa $\mathcal{P}$ enumera a S"

Combo 13. Defina:

(1) $i^{n,m}$
(2) $E_{\#}^{n,m}$
(3) $E_{*}^{n,m}$
(4) $E_{\# j}^{n,m}$
(5) $E_{* j}^{n,m}$
(6) $Halt^{n,m}$
(7) $T^{n,m}$
(8) $AutoHalt^{\Sigma}$
(9) Los conjuntos A y N

Combo 14. Explique en forma detallada la notacion lambda

Combo 15. Dada una funcion $f : D_f \subseteq \omega \times \Sigma^* \to \omega$, describa que tipo de objeto es y que propiedades debe tener el macro:

$$[\mathrm{V2} \leftarrow f(\mathrm{V1}, \mathrm{W1})]$$

Combo 16. Dado un predicado $P : D_f \subseteq \omega \times \Sigma^* \to \omega$, describa que tipo de objeto es y que propiedades debe tener el macro:

$$[\mathrm{IF}\ P(\mathrm{V1}, \mathrm{W1})\ \mathrm{GOTO\ A1}]$$

Combo 17. Defina el concepto de funcion y desarrolle las tres Convenciones Notacionales asociadas a dicho concepto (Guia 1)

Combos de teoremas de la materia Lenguajes formales y computabilidad

La siguiente lista contiene 9 combos de resultados de la teoria los cuales seran utilizados para la parte teorica del examen. Algunas observaciones:

(1) Cuando el alumno desarrolle una prueba de un resultado perteneciente a un combo, podra utilizar un resultado previo sin necesidad de demostrarlo, salvo que justo el combo exija la prueba de dicho resultado. Esto implica, por ejemplo, que se pueden usar en cualquier combo que la funciones suma, producto, etc son Σ-p.r.
(2) Cuando el alumno aplique algun resultado que no figura en los resultados del combo que esta desarrollando, debera referirse a el en forma descriptivamente clara, preferentemente enunciandolo. Por ejemplo, no vale poner "por Lema 13 de la Guia 5, tenemos que...."

Combo 1.

Proposición (Caracterizacion de conjuntos Σ-p.r.)**.** *Un conjunto S es Σ-p.r. sii S es el dominio de alguna funcion Σ-p.r.*

(En la induccion de la prueba hacer solo el caso de la composicion)

Teorema (Neumann vence a Godel)**.** *Si h es Σ-recursiva, entonces h es Σ-computable*

(En la induccion de la prueba hacer solo el caso $h = R(f, \mathcal{G})$, con $I_h \subseteq \omega$)

Combo 2.

Lema (Lema de division por casos para funciones Σ-p.r.)**.** *Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$, $i = 1, ..., k$, son funciones Σ-p.r. tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces $f_1 \cup ... \cup f_k$ es Σ-p.r.*

(Hacer el caso $k = 2$, $n = 2$ y $m = 1$)

Proposición (Caracterizacion basica de conjuntos Σ-enumerables)**.** *Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ un conjunto no vacio. Entonces son equivalentes:*

(1) *S es Σ-enumerable*
(2) *Hay un programa $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma}$ tal que:*
    (a) *Para cada $x \in \omega$, tenemos que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$, donde $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$.*
    (b) *Para cada $(x_1, ...x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$ hay un $x \in \omega$ tal que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$*

(Hacer el caso $n = 2$ y $m = 1$)

Combo 3.

Teorema (Godel vence a Neumann)**.** *Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$ es Σ-computable, entonces f es Σ-recursiva.*

Teorema (Caracterizacion de conjuntos Σ-efectivamente computables)**.** *Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Son equivalentes*

(a) *S es Σ-efectivamente computable*
(b) *S y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son Σ-efectivamente enumerables*

(Haga solo (b) implica (a). La prueba de este resultado esta al final de la Guia 3)

Combo 4.

Proposición (Caracterizacion basica de conjuntos Σ-enumerables)**.** *Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ un conjunto no vacio. Entonces son equivalentes:*

(1) *S es Σ-enumerable*
(2) *Hay un programa $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma$ tal que:*
   (a) *Para cada $x \in \omega$, tenemos que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$, donde $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$.*
   (b) *Para cada $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$ hay un $x \in \omega$ tal que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$*

(Hacer el caso $n = 2$ y $m = 1$)

Lema (Lema de la sumatoria)**.** *Sea Σ un alfabeto finito. Si $f : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$ es Σ-p.r., con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios, entonces la funcion $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ es Σ-p.r.*

Combo 5.

Lema. *Sea $\Sigma = \{@, \%, !\}$. Sea*

$$f : S_1 \times S_2 \times L_1 \times L_2 \to \omega$$

con $S_1, S_2 \subseteq \omega$ y $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ conjuntos no vacios y sea $\mathcal{G}$ una familia Σ-indexada de funciones tal que

$$\mathcal{G}_a : \omega \times S_1 \times S_2 \times L_1 \times L_2 \times \Sigma^* \to \omega$$

para cada $a \in \Sigma$. Si f y cada $\mathcal{G}_a$ son Σ-efectivamente computables, entonces $R(f, \mathcal{G})$ lo es.

(Es un ejercicio de la Guia 5)

Lema (Lema de cuantificacion acotada)**.** *Sea Σ un alfabeto finito. Sea $P : S \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$ un predicado Σ-p.r., con $S, S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios. Supongamos $\bar{S} \subseteq S$ es Σ-p.r.. Entonces $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x}\, P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ es Σ-p.r.*

Combo 6.

Lema (Σ-efectivamente computable implica Σ-efectivamente enumerable)**.** *Si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ-efectivamente computable entonces S es Σ-efectivamente enumerable.*

Teorema (Caracterizacion de conjuntos Σ-r.e.)**.** *Dado $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, son equivalentes*

(1) *S es Σ-recursivamente enumerable*
(2) *$S = I_F$, para alguna $F : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que cada $F_{(i)}$ es Σ-recursiva.*
(3) *$S = D_f$, para alguna funcion Σ-recursiva f*

(Haga solo la prueba de (2)$\Rightarrow$(3), caso $k = l = 1$ y $n = m = 2$)

Combo 7.

Lema (Lema de minimizacion acotada)**.** *Sean $n, m \geq 0$. Sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ un predicado Σ-p.r.. Entonces*

(a) *$M(P)$ es Σ-recursiva.*
(b) *Si hay una funcion Σ-p.r. $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ tal que*

$M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha})$, *para cada* $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$,

entonces $M(P)$ es Σ-p.r..

Lema. *Supongamos $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-recursiva y $S \subseteq D_f$ es Σ-r.e., entonces $f|_S$ es Σ-recursiva.*

(Haga solo el caso S no vacio, $n = m = 1$ y $O = \Sigma^*$)

Combo 8.

Lema. *Supongamos $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces $AutoHalt^\Sigma$ no es Σ-recursivo.*

Teorema. *Supongamos $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces $AutoHalt^\Sigma$ no es Σ-efectivamente computable. Es decir no hay ningun procedimiento efectivo que decida si un programa de $\mathcal{S}^\Sigma$ termina partiendo de si mismo.*

Lema. *Supongamos que $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces*

$$A = \left\{\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma : AutoHalt^\Sigma(\mathcal{P}) = 1\right\}$$

es Σ-r.e. y no es Σ-recursivo. Mas aun el conjunto

$$N = \left\{\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma : AutoHalt^\Sigma(\mathcal{P}) = 0\right\}$$

no es Σ-r.e.

Teorema (Neumann vence a Godel)**.** *Si h es Σ-recursiva, entonces h es Σ-computable.*

(En la induccion de la prueba hacer solo el caso $h = M(P)$)

Combo 9.

Lema (Lema de division por casos para funciones Σ-recursivas)**.** *Supongamos* $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$, $i = 1, ..., k$, *son funciones* Σ*-recursivas tales que* $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ *para* $i \neq j$*. Entonces la funcion* $f_1 \cup ... \cup f_k$ *es* Σ*-recursiva.*

(Haga el caso $k = 2$, $n = m = 1$ y $O = \omega$)

Teorema (Godel vence a Neumann)**.** *Si* $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ *es* Σ*-computable, entonces* f *es* Σ*-recursiva.*

Combos de definiciones y convenciones notacionales de la materia Logica

Combo 1.

(1) Defina $n(\mathbf{J})$ (para $\mathbf{J} \in Just^+$)
(2) Defina "par adecuado de tipo τ" (no hace falta que defina cuando $\mathbf{J} \in Just^+$ es balanceada)
(3) Defina $Mod_T(\varphi)$
(4) Dados $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$, defina que significa $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ (i.e. Convencion notacional 4)
(5) Defina $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)/\theta$ (θ una congruencia del reticulado complementado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$)

Combo 2.

(1) Defina $(\Sigma, \tau) \models \varphi$
(2) Defina "Particion de A" y $R_{\mathcal{P}}$
(3) Defina cuando "φ_i esta bajo la hipotesis φ_l en $(\varphi, \mathbf{J})$". (no hace falta que defina $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$)
(4) Defina $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})/\theta$ (θ una congruencia del reticulado terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$). (No hace falta que defina el concepto de congruencia.)

Combo 3.

(1) Dados $t =_d t(v_1, ..., v_n) \in T^\tau$, $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$, defina $t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n]$ (i.e. Convencion notacional 2)
(2) Defina "F es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$"
(3) Defina "filtro generado por S en $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$"
(4) Defina cuando $\mathbf{J} \in Just^+$ es balanceada (no hace falta que defina $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$)

Combo 4.

(1) Defina "$(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ es un subreticulado complementado de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$"
(2) Defina $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ (version absoluta, no dependiente de una declaracion previa, i.e. $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$. No hace falta definir $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$)
(3) Defina la relacion "*v ocurre libremente en φ a partir de i*"
(4) Defina reticulado cuaterna

Combo 5. Explique la notacion declaratoria para terminos con sus 3 convenciones notacionales (convenciones 1,2 y 5 de la Guia 11)

Combo 6. Explique la notacion declaratoria para formulas con sus 3 convenciones notacionales (convenciones 3,4 y 6 de la Guia 11). Puede asumir la notacion declaratoria para terminos

Combo 7.

(1) Defina recursivamente la relacion "*v es sustituible por w en φ*"
(2) Defina cuando $\mathbf{J} \in Just^+$ es balanceada (no hace falta que defina $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$)
(3) Defina "filtro del reticulado terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$"
(4) Defina "teoria elemental"

Combo 8.

(1) Defina $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)/\theta$ (θ una congruencia del reticulado complementado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$)
(2) Dados $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$, defina que significa $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ (i.e. Convencion notacional 4)
(3) Dado un poset $(P, \leq)$, defina "a es supremo de S en $(P, \leq)$"
(4) Defina "i es anterior a j en $(\varphi, \mathbf{J})$" (no hace falta que defina $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$)

Combo 9.

(1) Defina "termino elemental de tipo τ"
(2) Defina $\dashv\vdash_T$
(3) Defina s^T (explique por que la definicion es inhambigua)
(4) Defina $\mathcal{A}_T$
(5) Defina "S es un subuniverso del reticulado complementado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$"

Combo 10.

(1) Defina "tesis del bloque $\langle i, j \rangle$ en $(\varphi, \mathbf{J})$"
(2) Defina cuando una teoria de primer orden (Σ, τ) es consistente
(3) Dada una teoria elemental (Σ, τ) y una sentencia elemental pura φ de tipo τ, defina "prueba elemental de φ en (Σ, τ)"

Combo 11.

(1) Enuncie el programa de logica matematica dado al final de la Guia 8 y explique brevemente con que definiciones matematicas se van resolviendo los tres primeros puntos y que teoremas garantizan la resolucion del 4to punto de dicho programa.

Combo 12. Defina el concepto de funcion y desarrolle las tres Convenciones Notacionales asociadas a dicho concepto (Guia 0)

Combos de teoremas de la materia Logica

La siguiente lista contiene 8 combos de resultados de la teoria los cuales seran utilizados para la parte teorica del examen. Algunas observaciones:

(1) Cuando el alumno desarrolle una prueba de un resultado perteneciente a un combo, podra utilizar un resultado previo sin necesidad de demostrarlo, salvo que justo el combo exija la prueba de dicho resultado. Cuando aplique algun resultado sin demostracion debera enunciarlo correctamente.

(2) En general se puede dejar de hacer ciertos casos en las pruebas, por ser similares a otros ya hechos. El criterio para decidir esto se puede ver en las pruebas en las guias.

Combo 1.

Theorem 1 (Teorema del Filtro Primo)**.** *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado terna distributivo y* F *un filtro. Supongamos* $x_0 \in L - F$*. Entonces hay un filtro primo* P *tal que* $x_0 \notin P$ *y* $F \subseteq P$*.*

Lemma 2 (Propiedades basicas de la consistencia)**.** *Sea* (Σ, τ) *una teoria.*

(1) *Si* (Σ, τ) *es inconsistente, entonces* $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$*, para toda sentencia* φ*.*
(2) *Si* (Σ, τ) *es consistente y* $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$*, entonces* $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ *es consistente.*
(3) *Si* $(\Sigma, \tau) \not\vdash \neg\varphi$*, entonces* $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ *es consistente.*

Combo 2.

Theorem 3 (Teorema de Dedekind)**.** *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado terna. La relacion binaria definida por:*

$$x \leq y \text{ si y solo si } x \mathsf{ s } y = y$$

es un orden parcial sobre L *para el cual se cumple que:*

$$\sup(\{x, y\}) = x \mathsf{ s } y$$
$$\inf(\{x, y\}) = x \mathsf{ i } y$$

cualesquiera sean $x, y \in L$

Lemma 4. *Supongamos que* $\vec{a}, \vec{b}$ *son asignaciones tales que si* $x_i \in Li(\varphi)$*, entonces* $a_i = b_i$*. Entonces* $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ *sii* $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$

Combo 3.

Theorem 5 (Lectura unica de terminos)**.** *Dado* $t \in T^\tau$ *se da una de las siguientes:*

(1) $t \in Var \cup \mathcal{C}$
(2) *Hay unicos* $n \geq 1,\ f \in \mathcal{F}_n,\ t_1, ..., t_n \in T^\tau$ *tales que* $t = f(t_1, ..., t_n)$*.*

Lemma 6. *Supongamos que* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *es un isomorfismo. Sea* $\varphi \in F^\tau$*. Entonces*

$$\mathbf{A} \models \varphi[(a_1, a_2, ...)] \text{ sii } \mathbf{B} \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), ...)]$$

para cada $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$*. En particular* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *satisfacen las mismas sentencias de tipo* τ*.*

Theorem 7. *Sea* $T = (\Sigma, \tau)$ *una teoria. Entonces* $(S^\tau / \dashv\vdash_T, \mathsf{s}^T, \mathsf{i}^T, {}^{\mathsf{c}^T}, 0^T, 1^T)$ *es un algebra de Boole.*

Pruebe solo el item (6).

Combo 4.

Lemma 8 (Propiedades basicas de la deduccion)**.** *Sea* (Σ, τ) *una teoria.*

(1) *(Uso de Teoremas). Si* $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$ *y* $(\Sigma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$*, entonces* $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$*.*
(2) *Supongamos* $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$*. Si* R *es una regla distinta de GENERALIZACION y ELECCION y* φ *se deduce de* $\varphi_1, ..., \varphi_n$ *por la regla* R*, entonces* $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$*.*
(3) $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ *si y solo si* $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$*.*

Theorem 9. *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^{\mathsf{c}}, 0, 1)$ un álgebra de Boole y sean $a, b \in B$. Se tiene que:*

1. $(a \,\mathsf{i}\, b)^c = a^c \,\mathsf{s}\, b^c$
2. $a \,\mathsf{i}\, b = 0$ *si y solo si* $b \leq a^c$

Lemma 10. *Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados terna y sean $(L, \leq)$ y $(L', \leq')$ los posets asociados. Sea $F : L \to L'$ una funcion. Entonces F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ si y solo si F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$*

Combo 5.

Theorem 11 (Teorema de Completitud)**.** *Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoria de primer orden. Si $T \models \varphi$, entonces $T \vdash \varphi$.*

Haga solo el caso en que τ tiene una cantidad infinita de nombres de cte que no ocurren en las sentencias de Σ. En la exposicion de la prueba no es necesario que demuestre los items (1) y (5).

Combo 6.

Theorem 12 (Teorema de Completitud)**.** *Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoria de primer orden. Si $T \models \varphi$, entonces $T \vdash \varphi$.*

Haga solo el caso en que τ tiene una cantidad infinita de nombres de cte que no ocurren en las sentencias de Σ. En la exposicion de la prueba no es necesario que demuestre los items: (1), (2), (3) y (4)

Combo 7.

Lemma 13 (Propiedades basicas de la deduccion)**.** *Sea (Σ, τ) una teoria.*

1. *(Uso de Teoremas) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.*
2. *Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$. Si R es una regla distinta de GENERALIZACION y ELECCION y φ se deduce de $\varphi_1, ..., \varphi_n$ por la regla R, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.*
3. $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ *si y solo si* $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.

Lemma 14. *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado terna y sea θ una congruencia de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$. Entonces:*

1. $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\mathsf{i}})$ *es un reticulado terna.*
2. *El orden parcial $\tilde{\leq}$ asociado al reticulado terna $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\mathsf{i}})$ cumple*

$$x/\theta \tilde{\leq} y/\theta \text{ sii } y\theta(x \,\mathsf{s}\, y)$$

Lemma 15. *Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados terna y sean $(L, \leq)$ y $(L', \leq')$ los posets asociados. Sea $F : L \to L'$ una funcion. Entonces F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ si y solo si F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$*

Combo 8.

Lemma 16. *Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F^\tau$. Entonces*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, a_2, ..., a_n] \text{ sii } \mathbf{B} \models \varphi[F(a_1), F(a_2), ..., F(a_n)]$$

para cada $a_1, a_2, ..., a_n \in A$.

Lemma 17. *Sean* $(P, \leq)$ *y* $(P', \leq')$ *posets. Supongamos* F *es un isomorfismo de* $(P, \leq)$ *en* $(P', \leq')$.

(a) *Para cada* $S \subseteq P$ *y cada* $a \in P$, *se tiene que* a *es cota superior (resp. inferior) de* S *si y solo si* $F(a)$ *es cota superior (resp. inferior) de* $F(S)$.

(b) *Para cada* $S \subseteq P$, *se tiene que existe* $\sup(S)$ *si y solo si existe* $\sup(F(S))$ *y en el caso de que existan tales elementos se tiene que* $F(\sup(S)) = \sup(F(S))$.