

Lenguajes Formales y Computabilidad | FAMAF - UNC

Combos de Definiciones, Convenciones Notacionales y Teoremas

Ramiro Lugo Viola

2025

Contenido

| | |
|---------------------------------------------------|-----------|
| DEFINICIONES Y CONVENCIONES NOTACIONALES | 1 |
| Combo 1 | 1 |
| Combo 2 | 2 |
| Combo 3 | 3 |
| Combo 4 | 4 |
| Combo 5 | 4 |
| Combo 6 | 4 |
| Combo 7 | 5 |
| Combo 8 | 5 |
| Combo 9 | 6 |
| Combo 10 | 7 |
| Combo 11 | 9 |
| Combo 12 | 10 |
| Combo 13 | 11 |
| Combo 14 | 13 |
| Combo 15 | 14 |
| Combo 16 | 15 |
| Combo 17 | 16 |
| Definiciones Auxiliares | 16 |
| Procedimiento efectivo | 16 |
| TEOREMAS | 17 |
| Combo 1 | 17 |
| Combo 2 | 19 |
| Combo 3 | 21 |
| Combo 4 | 22 |
| Combo 5 | 24 |
| Combo 6 | 26 |
| Combo 7 | 29 |
| Combo 8 | 32 |
| Combo 9 | 34 |
| Resultados Muy Usados en las Demostraciones | 36 |

DEFINICIONES Y CONVENCIONES NOTACIONALES

Combo 1

1. Defina cuando un **conjunto** $S \subseteq w^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado **Σ -recursivo**.

Nota: no hace falta que defina “función Σ -recursiva”.

↳

Definición:

Un conjunto $S \subseteq w^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado **Σ -recursivo** cuando la función $\chi_S^{w^n \times \Sigma^{*m}}$ sea **Σ -recursiva**.

2. Defina $\langle s_1, s_2, \dots \rangle$.

↳

Definición:

Dada una infinitupla $(s_1, s_2, \dots) \in \omega^{[\mathbb{N}]}$, usamos $\langle s_1, s_2, \dots \rangle$ para denotar al número $\prod_{i=1}^{\infty} \text{pr}(i)^{s_i}$ ¹

3. Defina “ f es una función Σ -mixta”.

↳

Definición:

Sea Σ un alfabeto finito. Dada una función f , diremos que **f es una función Σ -mixta** si cumple las siguientes propiedades:

- Existen $n, m \geq 0$ tales que $D_f \subseteq w^n \times \Sigma^{*m}$
- Además $I_f \subseteq \omega$ o $I_f \subseteq \Sigma^*$

4. Defina “familia Σ -indexada de funciones”.

Definición:

Dado un alfabeto Σ , una **familia Σ -indexada de funciones** será una función \mathcal{G} tal que $D_{\mathcal{G}} = \Sigma$ y para cada $a \in D_{\mathcal{G}}$ se tiene que $\mathcal{G}(a)$ es una función.

Notar que para cada $a \in \Sigma$ escribimos \mathcal{G}_a para denotar a la función $\mathcal{G}(a)$.

5. Defina $R(f, \mathcal{G})$.

Nota: haga el caso de valores numéricos.

↳

Definición:

Supongamos Σ un alfabeto finito. Sea

$$f : S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega$$

con $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ conjuntos no vacíos y \mathcal{G} una familia Σ -indexada de funciones tal que

$$\mathcal{G}_a : \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times \Sigma^* \rightarrow \omega \text{ para cada } a \in \Sigma$$

Definamos **$R(f, \mathcal{G})$** : $S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ de la siguiente manera

- $R(f, \mathcal{G})(\vec{x}, \vec{\alpha}, \varepsilon) = f(\vec{x}, \vec{\alpha})$
- $R(f, \mathcal{G})(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha a) = \mathcal{G}_a(R(f, \mathcal{G})(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha), \vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$

Diremos que $R(f, \mathcal{G})$ es obtenida por *recursión primitiva* a partir de f y \mathcal{G} .

¹Donde $\text{pr}(i)$ es la función que retorna el i -ésimo primo.

Combo 2

1. Defina $d \vdash^n d'$ y $d \vdash^* d'$

Nota: no hace falta que defina \vdash

↳

Definición:

Para $d, d' \in \mathbf{Des}$ y $n \geq 0$, escribimos $d \vdash^n d'$ si existen $d_1, \dots, d_{n+1} \in \mathbf{Des}$ tales que

$$d = d_1$$

$$d' = d_{n+1}$$

$$d_i \vdash d_{i+1}, \text{ para } i = 1, \dots, n$$

Luego definimos $d \vdash^* d'$ si y solo si $(\exists n \in \omega) d \vdash^n d'$.

2. Defina $L(M)$

↳

Definición:

Sea M una máquina de Turing.

Diremos que una palabra $\alpha \in \Sigma^*$ es aceptada por M por alcance de estado final cuando

$$[q_0 B \alpha] \vdash^* d, \text{ con } d \text{ tal que } \text{St}(d) \in F.$$

El **lenguaje aceptado por M por alcance de estado final** se define de la siguiente manera:

$$L(M) = \{\alpha \in \Sigma^* : \alpha \text{ es aceptada por } M \text{ por alcance de estado final}\}$$

3. Defina “ f es una función de tipo (n, m, s) ”.

↳

Definición:

Dada una función Σ -mixta f con $n, m \in \omega$ tales que $D_f \subseteq w^n \times \Sigma^{*m}$ y además $I_f \subseteq \omega$, entonces diremos que **f es una función de tipo $(n, m, \#)$** .

Si en cambio $I_f \subseteq \Sigma^*$, entonces diremos que **f es una función de tipo $(n, m, *)$** .

4. Defina (x)

↳

Definición:

Dado $x \in \mathbb{N}$, usaremos (x) para denotar a la única infinitupla $(s_1, s_2, \dots) \in \omega^{[\mathbb{N}]}$ tal que

$$x = \langle s_1, s_2, \dots \rangle = \prod_{i=1}^{\infty} \text{pr}(i)^{s_i} \quad \text{donde } \text{pr}(i) \text{ es el } i\text{-ésimo primo.}$$

5. Defina $(x)_i$

↳

Definición:

Para $i \in \mathbb{N}$, usaremos $(x)_i$ para denotar al i -ésimo elemento de la infinitupla (x) , es decir, al s_i de la definición anterior.

- $(x)_i$ es el exponente de $\text{pr}(i)$ en la (única posible) factorización de x como producto de primos.²

²Se le suele llamar la “bajada i -ésima de x ” al número $(x)_i$.

(Ya que representa bajar al exponente de $\text{pr}(i)$ en la única factorización de x como producto de primos)

Combo 3

1. Defina cuando un conjunto $S \subseteq w^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado **Σ -recursivamente enumerable**.

Nota: no hace falta que defina “función Σ -recursiva”.

↳

Definición:

Un conjunto $S \subseteq w^n \times \Sigma^{*m}$ será llamado **Σ -recursivamente enumerable** cuando sea vacío o haya una función $F : \omega \rightarrow w^n \times \Sigma^{*m}$ tal que $I_F = S$ y $F_{(i)}$ sea Σ -recursiva, para cada $i \in \{1, \dots, n+m\}$.³

2. Defina s^{\leq}

↳

Definición:

Sea $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$ un alfabeto no vacío, con \leq un orden total sobre Σ dado por $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Definimos la función $s^{\leq} : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} s^{\leq}((a_n)^m) &= (a_1)^{m+1} \quad \text{para cada } m \geq 0 \\ s^{\leq}(\alpha a_i (a_n)^m) &= \alpha a_{i+1} (a_1)^m \quad \text{cada vez que } \alpha \in \Sigma^*, \text{ con } 1 \leq i < n \text{ y } m \geq 0 \end{aligned}$$

3. Defina $*^{\leq}$

↳

Definición:

Sea $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$ un alfabeto no vacío, con \leq un orden total sobre Σ dado por $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Definimos la función $*^{\leq} : \omega \rightarrow \Sigma^*$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} *^{\leq}(0) &= \varepsilon \\ *^{\leq}(i+1) &= s^{\leq}(*^{\leq}(i)) \quad (\text{donde } s^{\leq} \text{ es la función definida justo antes}) \end{aligned}$$

4. Defina $\#^{\leq}$

↳

Definición:

Lema: Sea $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$ un alfabeto no vacío, con \leq un orden total sobre Σ dado por $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Entonces para cada $\alpha \in \Sigma^* - \{\varepsilon\}$ hay únicos $k \in \omega$ y $i_0, i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ tales que $\alpha = a_{i_k} \dots a_{i_0}$.

Sea $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$ un alfabeto no vacío, con \leq un orden total sobre Σ dado por $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Gracias al *Lema* anterior podemos definir la función $\#^{\leq} : \Sigma^* \rightarrow \omega$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \#^{\leq}(\varepsilon) &= 0 \\ \#^{\leq}(a_{i_k} \dots a_{i_0}) &= i_k n^k + \dots + i_0 n^0 \quad \text{para } i_0, i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\} \\ \#^{\leq}(\alpha) &= i_k n^k + \dots + i_0 n^0 \text{ con } \alpha = a_{i_k} \dots a_{i_0} \text{ tal que } k \in \omega \text{ y } i_0, i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

³

Dados $k, l, n, m \in \omega$ y $F : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow w^n \times \Sigma^{*m}$ con $n+m \geq 1$. Entonces denotaremos con $F_{(i)}$ a la función $p_i^{n,m} \circ F$.

- $F_{(i)} : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \omega$ para $i = 1, \dots, n$.
- $F_{(i)} : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \Sigma^*$ para $i = n+1, \dots, n+m$.

por lo tanto son Σ -mixtas y $F = [F_{(1)}, \dots, F_{(n+m)}]$.

Combo 4

1. Defina cuando una función $f : D_f \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ es llamada Σ -efectivamente computable y defina “el procedimiento \mathbb{P} computa a la función f ”. \hookrightarrow

Definición:

Una función $f : D_f \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ es llamada **Σ -efectivamente computable** si hay un procedimiento efectivo \mathbb{P} tal que

- (1) El conjunto de datos de entrada de \mathbb{P} es $w^n \times \Sigma^{*m}$.
- (2) El conjunto de datos de salida está contenido en ω .
- (3) Si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_f$, entonces \mathbb{P} se detiene partiendo de $(\vec{x}, \vec{\alpha})$, dando como dato de salida $f(\vec{x}, \vec{\alpha})$.
- (4) Si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in (w^n \times \Sigma^{*m}) - D_f$, entonces \mathbb{P} no se detiene partiendo de $(\vec{x}, \vec{\alpha})$.

Cuando \mathbb{P} cumpla los items anteriores diremos que “**el procedimiento \mathbb{P} computa a la función f** ”.

Combo 5

1. Defina cuando un conjunto $S \subseteq w^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado Σ -efectivamente computable y defina “el procedimiento efectivo \mathbb{P} decide la pertenencia a S ”. \hookrightarrow

Definición:

Un conjunto $S \subseteq w^n \times \Sigma^{*m}$ será llamado **Σ -efectivamente computable** cuando la función característica $\chi_S^{w^n \times \Sigma^{*m}}$ sea Σ -efectivamente computable.

Si \mathbb{P} es un procedimiento efectivo el cual computa a la función $\chi_S^{w^n \times \Sigma^{*m}}$, diremos que “**el procedimiento efectivo \mathbb{P} decide la pertenencia a S** ”, con respecto al conjunto $w^n \times \Sigma^{*m}$. Es decir

- El conjunto de datos de entrada de \mathbb{P} es $w^n \times \Sigma^{*m}$, siempre termina y da como dato de salida un elemento de $\{0, 1\}$.
- Dado $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in w^n \times \Sigma^{*m}$, \mathbb{P} da como salida el número 1 si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in S$ y al número 0 si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \notin S$.

Combo 6

1. Defina cuando un conjunto $S \subseteq w^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado Σ -efectivamente enumerable y defina “el procedimiento efectivo \mathbb{P} enumera a S ”. \hookrightarrow

Definición:

Un conjunto $S \subseteq w^n \times \Sigma^{*m}$ será llamado **Σ -efectivamente enumerable** cuando sea vacío o haya una función $F : \omega \rightarrow w^n \times \Sigma^{*m}$ tal que $I_F = S$ y $F_{(i)}$ sea Σ -efectivamente computable, para cada $i \in \{1, \dots, n + m\}$.

Diremos que “**el procedimiento efectivo \mathbb{P} enumera a S** ” cuando

- (1) El conjunto de datos de entrada de \mathbb{P} es ω .
- (2) \mathbb{P} se detiene para cada $x \in \omega$.
- (3) El conjunto de datos de salida de \mathbb{P} es igual a S .
(Es decir, siempre que \mathbb{P} se detiene, da como salida un elemento de S , y para cada elemento $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in S$, hay un $x \in \omega$ tal que \mathbb{P} da como salida a $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ cuando lo corremos con x como dato de entrada).

En los combos 4, 5 y 6 usamos la **definición de procedimiento efectivo** que está en definiciones auxiliares.

Combo 7

1. Defina cuando una función $f : D_f \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ es llamada Σ -Turing computable y defina “la máquina de Turing M computa a la función f ”. \hookrightarrow

Definición:

Diremos que una función $f : D_f \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ es **Σ -Turing computable** si existe una máquina de Turing con unit, $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, \mathbf{I}, F)$ tal que

- (1) Si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_f$, entonces hay un $p \in Q$ tal que

$$[q_0 B \mathbf{I}^{x_1} B \dots B \mathbf{I}^{x_n} B \alpha_1 B \dots B \alpha_m] \vdash^* [p B \mathbf{I}^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})}]$$

y $[p B \mathbf{I}^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})}] \not\vdash d$, para cada $d \in \text{Des}$.

- (2) Si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in w^n \times \Sigma^{*m} - D_f$, entonces M **no** se detiene partiendo de

$$[q_0 B \mathbf{I}^{x_1} B \dots B \mathbf{I}^{x_n} B \alpha_1 B \dots B \alpha_m]$$

Si M y f cumplen los ítems (1) y (2), diremos que “**la máquina de Turing M computa a la función f** ”.

Combo 8

1. Defina $M(P)$ \hookrightarrow

Definición:

Sea Σ un alfabeto finito y sea $P : D_P \subseteq \omega \times w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ un predicado. Dado $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in w^n \times \Sigma^{*m}$, cuando exista al menos un $t \in \omega$ tal que $P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1$, usaremos $\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ para denotar al menor de tales t 's. Esta expresión está definida solo para aquellas $(n + m)$ -uplas $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ para las cuales existe al menos un $t \in \omega$ tal que se da $P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1$ (obviamente también $(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_P$). Ahora sí, definamos

$$M(P) = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$

Es decir que

$$D_{M(P)} = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in w^n \times \Sigma^{*m} : (\exists t \in \omega) P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1\}$$

$$M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$$

2. Defina Lt \hookrightarrow

Definición:

La función $Lt : \mathbb{N} \rightarrow \omega$ se define de la siguiente manera $Lt(x) = \begin{cases} \max_i (x)_i \neq 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

3. Defina Conjunto rectangular \hookrightarrow

Definición:

Un conjunto Σ -mixto S será llamado **rectangular** si es de la forma $S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$ con $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$.

4. Defina “ S es un conjunto de tipo (n, m) ” \hookrightarrow

Definición:

Dado un conjunto Σ -mixto S , si $n, m \in \omega$ son tales que $S \subseteq w^n \times \Sigma^{*m}$, entonces diremos que **S es un conjunto de tipo (n, m)** .⁴

⁴Si $S \neq \emptyset$, entonces hay un único par (n, m) con esa propiedad. Pero si $S = \emptyset$, entonces hay varios pares (n, m) con esa propiedad. Por ello para hablar de **EL TIPO DE S** tiene que ser $S \neq \emptyset$.

Combo 9

1. Defina “ I es una instrucción de S^Σ ”

↳

Definición:

Una **instrucción de S^Σ** es ya sea una instrucción básica de S^Σ , o una instrucción de la forma αI , donde $\alpha \in \{L\bar{n} : n \in \mathbb{N}\}$ e I es una instrucción básica de S^Σ .

(Usamos Ins^Σ para denotar al conjunto de todas las instrucciones de S^Σ).

2. Defina “ \mathcal{P} es programa de S^Σ ”

↳

Definición:

Un **programa de S^Σ** es una palabra de la forma

$$I_1 I_2 \dots I_n$$

donde $n \geq 1$, $I_1, \dots, I_n \in \text{Ins}^\Sigma$ y además cumple la siguiente propiedad llamada *ley de los GOTO*

*Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, si $\text{GOTO}L\bar{m}$ es tramo final de I_i ,
entonces existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que I_j tiene label $L\bar{m}$.*

(Usamos Pro^Σ para denotar al conjunto de todos los programas de S^Σ).

3 y 4. Defina $I_i^\mathcal{P}$ y $n(\mathcal{P})$

↳

Definición:

Lema :

- (a) Si $I_1, \dots, I_n = J_1, \dots, J_m$ con $I_1, \dots, I_n, J_1, \dots, J_m \in \text{Ins}^\Sigma$, entonces $n = m$ y $I_i = J_i$ para cada $i \geq 1$.
- (b) Si $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$, entonces existe una única sucesión de instrucciones I_1, \dots, I_n tal que $\mathcal{P} = I_1 I_2 \dots I_n$.

Gracias al *Lema* anterior y dados $i \in \omega$ y $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$, tenemos unicamente determinados $n(\mathcal{P}) \in \mathbb{N}$ e $I_1^\mathcal{P}, \dots, I_{n(\mathcal{P})}^\mathcal{P} \in \text{Ins}^\Sigma$ tales que $\mathcal{P} = I_1^\mathcal{P} \dots I_{n(\mathcal{P})}^\mathcal{P}$ y definimos $I_i^\mathcal{P} = \varepsilon$ cuando $i = 0$ o $i > n(\mathcal{P})$.

5. Defina la función Bas

↳

Definición:

La función $\text{Bas} : \text{Ins}^\Sigma \rightarrow (\Sigma \cup \Sigma_p)^*$ se define de la siguiente manera

$$\text{Bas}(I) = \begin{cases} J & \text{si } I \text{ es de la forma } L\bar{k}J, \text{ con } k \in \mathbb{N} \text{ y } J \in \text{Ins}^\Sigma \\ I & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Combo 10

1. Defina relativo al lenguaje S^Σ , “estado”

↳

Definición:

Un **estado** es un par $(\vec{s}, \vec{\sigma}) = ((s_1, s_2, \dots), (\sigma_1, \sigma_2, \dots)) \in \omega^{[\mathbb{N}]} \times \Sigma^{*[\mathbb{N}]}$

Si $i \geq 1$, entonces diremos que s_i es el contenido o valor de la variable $N\bar{i}$ en el estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ y σ_i es el contenido o valor de la variable $P\bar{i}$ en el estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$.

2. Defina relativo al lenguaje S^Σ , “descripción instantánea”

↳

Definición:

Una **descripción instantánea** es una terna $(i, \vec{s}, \vec{\sigma})$ tal que $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ es un estado e $i \in \omega$.

(Es decir que el $\omega \times \omega^{[\mathbb{N}]} \times \Sigma^{*[\mathbb{N}]}$ es el conjunto formado por todas las descripciones instantáneas)

3. Defina relativo al lenguaje S^Σ la función $S_{\mathcal{P}}$

↳

Definición:

Dado un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$, definimos $S_{\mathcal{P}} : \omega \times \omega^{[\mathbb{N}]} \times \Sigma^{*[\mathbb{N}]} \rightarrow \omega \times \omega^{[\mathbb{N}]} \times \Sigma^{*[\mathbb{N}]}$ tal que

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = \text{descripción instantánea que resulta luego de realizarp}^5 I_i^{\mathcal{P}}, \text{ estando en el estado } (\vec{s}, \vec{\sigma})$$

Para definirla formalmente damos los siguientes casos

Cuando $i \in \{1, \dots, n(\mathcal{P})\}$ entonces

- Caso Bas($I_i^{\mathcal{P}}$) = $N\bar{k} \leftarrow N\bar{k} - 1$. Entonces $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, (s_1, \dots, s_{k-1}, s_k - 1, s_{k+1}, \dots), \vec{\sigma})$
- Caso Bas($I_i^{\mathcal{P}}$) = $N\bar{k} \leftarrow N\bar{k} + 1$. Entonces $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, (s_1, \dots, s_{k-1}, s_k + 1, s_{k+1}, \dots), \vec{\sigma})$
- Caso Bas($I_i^{\mathcal{P}}$) = $N\bar{k} \leftarrow N\bar{n}$. Entonces $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, (s_1, \dots, s_{k-1}, s_n, s_{k+1}, \dots), \vec{\sigma})$
- Caso Bas($I_i^{\mathcal{P}}$) = $N\bar{k} \leftarrow 0$. Entonces $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, (s_1, \dots, s_{k-1}, 0, s_{k+1}, \dots), \vec{\sigma})$
- Caso Bas($I_i^{\mathcal{P}}$) = IF $N\bar{k} \neq 0$ GOTO $L\bar{m}$. Sea s_k el valor de $N\bar{k}$ en $(\vec{s}, \vec{\sigma})$, entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = \begin{cases} (\min\{l : I_l^{\mathcal{P}} \text{ tiene label } L\bar{m}\}, \vec{s}, \vec{\sigma}) & \text{si } s_k \neq 0 \\ (i + 1, \vec{s}, \vec{\sigma}) & \text{si } s_k = 0 \end{cases}$$

- Caso Bas($I_i^{\mathcal{P}}$) = $P\bar{k} \leftarrow \sim P\bar{k}$. Entonces $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, \vec{s}, (\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \sim \sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots))$
- Caso Bas($I_i^{\mathcal{P}}$) = $P\bar{k} \leftarrow P\bar{k}.a$. Entonces $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, \vec{s}, (\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_k a, \sigma_{k+1}, \dots))$
- Caso Bas($I_i^{\mathcal{P}}$) = $P\bar{k} \leftarrow P\bar{n}$. Entonces $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, \vec{s}, (\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_n, \sigma_{k+1}, \dots))$
- Caso Bas($I_i^{\mathcal{P}}$) = $P\bar{k} \leftarrow \varepsilon$. Entonces $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, \vec{s}, (\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \varepsilon, \sigma_{k+1}, \dots))$
- Caso Bas($I_i^{\mathcal{P}}$) = IF $P\bar{k}$ BEGINS a GOTO $L\bar{m}$. Sea σ_k el valor de $P\bar{k}$ en $(\vec{s}, \vec{\sigma})$, entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = \begin{cases} (\min\{l : I_l^{\mathcal{P}} \text{ tiene label } L\bar{m}\}, \vec{s}, \vec{\sigma}) & \text{si } \sigma_k \text{ comienza con a} \\ (i + 1, \vec{s}, \vec{\sigma}) & \text{si } \sigma_k \text{ no comienza con a} \end{cases}$$

- Caso Bas($I_i^{\mathcal{P}}$) = GOTO $L\bar{m}$. Entonces $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (\min\{l : I_l^{\mathcal{P}} \text{ tiene label } L\bar{m}\}, \vec{s}, \vec{\sigma})$
- Caso Bas($I_i^{\mathcal{P}}$) = SKIP. Entonces $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, \vec{s}, \vec{\sigma})$

Pero cuando $i \notin \{1, \dots, n(\mathcal{P})\}$ simplemente, $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i, \vec{s}, \vec{\sigma})$.

⁵El verbo “realizarp” una actividad es realizarla si se puede.

4. Defina relativo al lenguaje S^Σ , “estado obtenido luego de t pasos, partiendo del estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ ” \hookrightarrow

Definición:

Diremos que

$$\overbrace{S_{\mathcal{P}}(\dots S_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(1, \vec{s}, \vec{\sigma}))\dots)}^{t \text{ veces}} = (j, \vec{u}, \vec{\eta})$$

es la descripción instantánea obtenida luego de t pasos, partiendo del estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ y $(\vec{u}, \vec{\eta})$ **es el estado obtenido luego de t pasos, partiendo del estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$.**

5. Defina relativo al lenguaje S^Σ , “ \mathcal{P} se detiene (luego de t pasos), partiendo del estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ ” \hookrightarrow

Definición:

Cuando la primera coordenada de

$$\overbrace{S_{\mathcal{P}}(\dots S_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(1, \vec{s}, \vec{\sigma}))\dots)}^{t \text{ veces}}$$

sea igual a $n(\mathcal{P}) + 1$ diremos que **\mathcal{P} se detiene (luego de t pasos), partiendo del estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$.**

Combo 11

1. Defina $\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,\#}$

↳

Definición:

Dados $x_1, \dots, x_n \in \omega$ y $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in \Sigma^*$, usaremos $\|x_1, \dots, x_n, \sigma_1, \dots, \sigma_m\|$ para denotar el estado $((x_1, \dots, x_n, 0, \dots), (\sigma_1, \dots, \sigma_m, \varepsilon, \dots))$.

Ahora sí, dado $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$, definamos para cada par $n, m \in \omega$, la función $\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,\#}$ de la siguiente manera

$$D_{\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,\#}} = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in w^n \times \Sigma^{*m} : \mathcal{P} \text{ termina,} \\ \text{partiendo del estado } \|x_1, \dots, x_n, \sigma_1, \dots, \sigma_m\|\}$$

$$\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,\#}(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \text{valor de N1 en el estado obtenido cuando } \mathcal{P} \text{ termina,} \\ \text{partiendo de } \|x_1, \dots, x_n, \sigma_1, \dots, \sigma_m\|$$

2. Defina “ f es Σ -computable”

↳

Definición:

Una función Σ -mixta $f : D_f \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ es llamada **Σ -computable** si hay un programa \mathcal{P} de S^Σ tal que $f = \Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,\#}$.

Análogamente una función Σ -mixta $f : D_f \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*$ es llamada **Σ -computable** si hay un programa \mathcal{P} de S^Σ tal que $f = \Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,*}$.

3. Defina “ \mathcal{P} computa a f ”

↳

Definición:

Sea \mathcal{P} un programa de S^Σ .

Dada una función Σ -mixta $f : D_f \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ diremos que **\mathcal{P} computa f** si $f = \Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,\#}$.

Análogamente, si $f : D_f \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*$, también diremos que **\mathcal{P} computa a f** si $f = \Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,*}$.

4. Defina $M^{\leq}(P)$

↳

Definición:

Sea Σ un alfabeto no vacío, \leq un orden total sobre Σ^6 y $P : D_P \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ un predicado.

Dado $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in w^n \times \Sigma^{*m}$, cuando exista al menos un $\alpha \in \Sigma^*$ tal que $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 1$, usaremos

$$\min_{\alpha} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$$

para denotar al menor de tales α' s. Esta expresión está definida solo para aquellas $(n+m)$ -uplas $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ para las cuales existe al menos un $\alpha \in \Sigma^*$ tal que se da $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 1$ (obviamente también $(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) \in D_P$).

Ahora sí, definamos

$$M^{\leq}(P) = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} [\min_{\alpha} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)]$$

Es decir que

$$D_{M^{\leq}(P)} = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in w^n \times \Sigma^{*m} : (\exists \alpha \in \Sigma^*) P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 1\}$$

$$M^{\leq}(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_{\alpha} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M^{\leq}(P)}$$

⁶Recordar que \leq puede ser naturalmente extendido a un orden total sobre Σ^* ↳

Combo 12

1. Defina cuando un conjunto $S \subseteq w^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado Σ -computable. \hookrightarrow

Definición:

Un conjunto $S \subseteq w^n \times \Sigma^{*m}$ será llamado **Σ -computable** cuando la función $\chi_S^{w^n \times \Sigma^{*m}}$ sea Σ -computable.

2. Defina cuando un conjunto $S \subseteq w^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado Σ -enumerable. \hookrightarrow

Definición:

Un conjunto $S \subseteq w^n \times \Sigma^{*m}$ será llamado **Σ -enumerable** cuando sea vacío o haya una función $F : \omega \rightarrow w^n \times \Sigma^{*m}$ tal que $I_F = S$ y $F_{(i)}$ sea Σ -computable, para cada $i \in \{1, \dots, n+m\}$.

3. Defina “el programa \mathcal{P} que enumera a S ”. \hookrightarrow

Definición:

Diremos que **el programa $\mathcal{P} \in S^\Sigma$ enumera a S** cuando cumple lo siguiente

- Para cada $x \in \omega$, tenemos que \mathcal{P} se detiene partiendo del estado $\|x\|$ y llega a un estado $((x_1, \dots, x_n, y_1, \dots), (\sigma_1, \dots, \sigma_m, \beta_1, \dots))$, donde $(x_1, \dots, x_n, \sigma_1, \dots, \sigma_m) \in S$.
- Para cada $(x_1, \dots, x_n, \sigma_1, \dots, \sigma_m) \in S$, hay un $x \in \omega$ tal que \mathcal{P} se detiene partiendo del estado $\|x\|$ y llega a un estado $((x_1, \dots, x_n, y_1, \dots), (\sigma_1, \dots, \sigma_m, \beta_1, \dots))$.

(Notar que en los estados se agregan y_1, \dots y β_1, \dots para representar “datos extra” que el programa puede haber producido además de los datos de salida relevantes $(x_1, \dots, x_n, \sigma_1, \dots, \sigma_m)$)

Combo 13

1, 2 y 3. Defina las funciones $i^{n,m}$, $E_{\#}^{n,m}$ y $E_{*}^{n,m}$

↳

Definiciones:

Sean $n, m \in \omega$ fijos. Definimos

$$\begin{aligned} i^{n,m} &: \omega \times w^n \times \Sigma^{*m} \times \text{Pro}^{\Sigma} \rightarrow \omega \\ E_{\#}^{n,m} &: \omega \times w^n \times \Sigma^{*m} \times \text{Pro}^{\Sigma} \rightarrow \omega^{[\mathbb{N}]} \\ E_{*}^{n,m} &: \omega \times w^n \times \Sigma^{*m} \times \text{Pro}^{\Sigma} \rightarrow \Sigma^{*[\mathbb{N}]} \end{aligned}$$

de la siguiente manera

$$\begin{aligned} (i^{n,m}(0, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), E_{\#}^{n,m}(0, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), E_{*}^{n,m}(0, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P})) &= (1, (x_1, \dots, x_n, 0, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \varepsilon, \dots)) \\ (i^{n,m}(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), E_{\#}^{n,m}(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), E_{*}^{n,m}(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P})) &= \\ S_{\mathcal{P}}(i^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), E_{\#}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), E_{*}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P})) & \end{aligned}$$

Notar que

$$(i^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), E_{\#}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), E_{*}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}))$$

es la descripción instantánea luego de correr \mathcal{P} una cantidad t de pasos, partiendo de $\|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|$.⁷

Además $i^{n,m}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -mixta pero $E_{\#}^{n,m}$ y $E_{*}^{n,m}$ no.

4 y 5. Defina las funciones $E_{\#j}^{n,m}$ y $E_{*j}^{n,m}$

↳

Definiciones:

Definimos para cada $j \in \mathbb{N}$, las funciones

$$\begin{aligned} E_{\#j}^{n,m} &: \omega \times w^n \times \Sigma^{*m} \times \text{Pro}^{\Sigma} \rightarrow \omega \\ E_{*j}^{n,m} &: \omega \times w^n \times \Sigma^{*m} \times \text{Pro}^{\Sigma} \rightarrow \Sigma^{*} \end{aligned}$$

de la siguiente manera

$$\begin{aligned} E_{\#j}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) &= j\text{-ésima coordenada de } E_{\#}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) \\ E_{*j}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) &= j\text{-ésima coordenada de } E_{*}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) \end{aligned}$$

y es claro que estas funciones son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -mixtas.

⁷Osea que para el paso t podemos pensar que $i^{n,m}$ representa “número de instrucción”, $E_{\#}^{n,m}$ representa “los valores numéricos” y $E_{*}^{n,m}$ representa “los valores alfabéticos”.

6. Defina $Halt^{n,m}$

↪

*Definiciones:*Dados $n, m \in \omega$, definimos

$$Halt^{n,m} = \lambda t \vec{x} \vec{\alpha} [i^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = n(\mathcal{P}) + 1]$$

Es decir que dado $(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) \in \omega \times w^n \times \Sigma^{*m} \times \text{Pro}^\Sigma$, tenemos que

$$Halt^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) = 1 \quad \text{sii} \quad \mathcal{P} \text{ se detiene luego de } t \text{ pasos, partiendo del estado } \|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|.$$

Ojo, la notación lambda es respecto al alfabeto $(\Sigma \cup \Sigma_p)$.7. Defina $T^{n,m}$

↪

*Definiciones:*Dados $n, m \in \omega$ y como $Halt^{n,m}$ es un predicado podemos definir

$$T^{n,m} = M(Halt^{n,m})$$

Es decir que para $(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) \in D_{T^{n,m}}$:

$$T^{n,m}(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) = \text{cantidad de pasos necesarios para que } \mathcal{P} \text{ se detenga partiendo de } \|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|$$

Notar que $D_{T^{n,m}} = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ se detiene partiendo de } \|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|\}$.8. Defina $AutoHalt^\Sigma$

↪

*Definición:*Cuando $\Sigma_p \subseteq \Sigma$, podemos definir

$$AutoHalt^\Sigma = \lambda \mathcal{P} [(\exists t \in \omega) Halt^{0,1}(t, \mathcal{P}, \mathcal{P})]$$

Pensándolo de otra manera, podemos decir que para cada $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ tenemos que

$$AutoHalt^\Sigma(\mathcal{P}) = 1 \text{ si y solo si } \mathcal{P} \text{ se detiene partiendo del estado } \|\mathcal{P}\| \text{ (i.e de sí mismo)}$$

9. Defina los conjuntos A y N

↪

*Definición:*Dado $\Sigma_p \subseteq \Sigma$, definimos

$$A = \{\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma : AutoHalt^\Sigma(\mathcal{P}) = 1\}$$

$$N = \{\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma : AutoHalt^\Sigma(\mathcal{P}) = 0\}$$

Combo 14

1. Explique en forma detallada la notación lambda.



Definición:

Definamos primero cuándo una **expresión** E será llamada **lambdificable con respecto a Σ** . Dado que no es un concepto matemáticamente preciso, daremos características que se deben cumplir

(1) Puede involucrar variables:

(i) Numéricas, valuadas en ω y seleccionadas de x, y, z, n, m, k, \dots

x_1, x_2, \dots

y_1, y_2, \dots

etc

(ii) Alfabéticas, valuadas en Σ^* y seleccionadas de $\alpha, \beta, \gamma, \eta, \dots$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots$

β_1, β_2, \dots

etc

(2) Puede no involucrar variables, por lo tanto produce un valor constante.

(3) Para ciertas valuaciones de sus variables E puede no estar definida. (Por ejemplo $\text{Pred}(x)$ con $x = 0$)

(4) Cuando E esté definida al valuar sus variables numéricas en ω y alfabéticas en Σ^* deberá producir siempre un elemento de ω o de Σ^* . (Es decir no puede tomar valores mixtos)

(5) Se pueden usar expresiones del lenguaje coloquial castellano. (Por ejemplo “*es x un número primo*”)

(6) Las expresiones booleanas toman valores en $\{0, 1\} \subseteq \omega$. (“1 = verdad”, “0 = falso”)

Ahora definamos la **notación lambda**.

Sea un alfabeto fijo y finito Σ , E una expresión que sea lambdificable con respecto a Σ . Sean $x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ variables distintas tales que, las variables numéricas que ocurren en E están en $\{x_1, \dots, x_n\}$ y las variables alfabéticas que ocurren en E están en $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$. Entonces

$$\lambda x_1 \dots x_n \alpha_1 \dots \alpha_m [E]$$

denota la función definida por:

- $D_{\lambda x_1 \dots x_n \alpha_1 \dots \alpha_m [E]} = \{(k_1, \dots, k_n, \beta_1, \dots, \beta_m) \in w^n \times \Sigma^{*m} : E \text{ está definida cuando le asignamos a cada } x_i \text{ el valor } k_i \text{ y a cada } \alpha_i \text{ el valor } \beta_i\}$
- $\lambda x_1 \dots x_n \alpha_1 \dots \alpha_m [E](k_1, \dots, k_n, \beta_1, \dots, \beta_m) = \text{valor que asume o representa } E \text{ cuando le asignamos a cada } x_i \text{ el valor } k_i \text{ y a cada } \alpha_i \text{ el valor } \beta_i.$

Notar que por (4) $\lambda x_1 \dots x_n \alpha_1 \dots \alpha_m [E]$ es Σ -mixta de tipo (n, m, s) con $s \in \{\#, *\}$ según corresponda.

Combo 15

1. Dada una función $f : D_f \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$, describa qué tipo de objeto es y que propiedades debe tener el macro $[V2 \leftarrow f(V1, W1)]$ \hookrightarrow

Definición:

Dada una función $f : D_f \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$, usaremos

$$[V2 \leftarrow f(V1, W1)]$$

para denotar el macro M , el cual es de tipo palabra y cumple las siguientes propiedades

- (1) Las variables oficiales de M son $V1$, $V2$ y $W1$.
- (2) M No tiene labels oficiales.
- (3) Si reemplazamos
 - (a) Las variables oficiales de M (i.e. $V1$, $V2$, $W1$) por las variables concretas $\overline{Nk_1}, \overline{Nk_2}$ y $\overline{Pj_1}$ con $k_1, k_2, j_1 \in \mathbb{N}$.
 - (b) Las variables auxiliares de M por variables concretas (distintas de a dos) y distintas de $\overline{Nk_1}, \overline{Nk_2}, \overline{Pj_1}$.
 - (c) Los labels auxiliares de M por labels concretos (distintos de a dos).

Entonces la palabra así obtenida es un programa de S^Σ que denotaremos con

$$[\overline{Nk_2} \leftarrow f(\overline{Nk_1}, \overline{Pj_1})]$$

el cual debe tener la siguiente propiedad:

Si lo hacemos correr partiendo de un estado e que le asigne a las variables $\overline{Nk_1}$ y $\overline{Pj_1}$ valores x_1 y α_1 , entonces independientemente de los valores que les asigne e al resto de las variables se dará que

- (i) Si $(x_1, \alpha_1) \notin D_f$ entonces $[\overline{Nk_2} \leftarrow f(\overline{Nk_1}, \overline{Pj_1})]$ **no se detiene**.
- (ii) Si $(x_1, \alpha_1) \in D_f$, entonces $[\overline{Nk_2} \leftarrow f(\overline{Nk_1}, \overline{Pj_1})]$ se detiene (i.e. intenta realizar la siguiente a su última instrucción) y llega a un estado e' el cual cumple
 - (a) e' le asigna a $\overline{Nk_2}$ el valor $f(x_1, \alpha_1)$.
 - (b) e' solo puede diferir de e en los valores que le asigna a $\overline{Nk_2}$ o a las variables que fueran a reemplazar a las variables auxiliares de M . Al resto de las variables, no las modifica.

Finalmente el programa $[\overline{Nk_2} \leftarrow f(\overline{Nk_1}, \overline{Pj_1})]$ es llamado la **expansión del macro** $[V2 \leftarrow f(V1, W1)]$ con respecto a la elección de variables y labels realizada.

Combo 16

1. Dado un predicado $P : D_f \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$, describa qué tipo de objeto es y qué propiedades debe tener el macro $[\text{IF } P(V1, W1) \text{ GOTO } A1]$ \hookrightarrow

Definición:

Dado un predicado $P : D_f \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$, usaremos

$$[\text{IF } P(V1, W1) \text{ GOTO } A1]$$

para denotar el macro M , el cual es de tipo palabra y cumple las siguientes propiedades

- (1) Las variables oficiales de M son $V1$ y $W1$.
- (2) $A1$ es el único label oficial de M .
- (3) Si reemplazamos
 - (a) Las variables oficiales de M (i.e. $V1, W1$) por las variables concretas $\overline{Nk_1}$ y $\overline{Pj_1}$ con $k_1, j_1 \in \mathbb{N}$.
 - (b) El label oficial $A1$ por el label concreto \overline{Lk} con $k \in \mathbb{N}$.
 - (c) Las variables auxiliares de M por variables concretas (distintas de a dos) y distintas de $\overline{Nk_1}, \overline{Pj_1}$.
 - (d) Los labels auxiliares de M por labels concretos (distintos de a dos) y todos distintos de \overline{Lk} .

Entonces la palabra así obtenida es un programa de S^Σ , salvo por la ley de los GOTO respecto de \overline{Lk} . Este programa lo denotaremos con

$$[\text{IF } P(\overline{Nk_1}, \overline{Pj_1}) \text{ GOTO } \overline{Lk}]$$

el cual debe tener la siguiente propiedad:

Si lo hacemos correr partiendo de un estado e que le asigne a las variables $\overline{Nk_1}$ y $\overline{Pj_1}$ valores x_1 y α_1 , entonces independientemente de los valores que le asigne e al resto de las variables se dará que

- (i) Si $(x_1, \alpha_1) \notin D_P$ entonces $[\text{IF } P(\overline{Nk_1}, \overline{Pj_1}) \text{ GOTO } \overline{Lk}]$ **no se detiene**.
- (ii) Si $(x_1, \alpha_1) \in D_P$ entonces luego de una cantidad finita de pasos de $[\text{IF } P(\overline{Nk_1}, \overline{Pj_1}) \text{ GOTO } \overline{Lk}]$
 - (a) Si $P(x_1, \alpha_1) = 1$, **direcciona al label \overline{Lk}** .
 - (b) Si $P(x_1, \alpha_1) = 0$, **se detiene**. (i.e. intenta realizar la siguiente a su última instrucción)

En ambos casos quedándose en un estado e' el cual solo puede diferir de e en los valores que le asigna a las variables que fueran a reemplazar a las variables auxiliares de M . Al resto de las variables, no las modifica.

8

Finalmente, el programa $[\text{IF } P(\overline{Nk_1}, \overline{Pj_1}) \text{ GOTO } \overline{Lk}]$ es llamado la **expansión del macro** $[\text{IF } P(V1, W1) \text{ GOTO } A1]$ con respecto a la elección de variables y labels realizada.

⁸El punto (ii) en el apunte está así

- (ii) Si $(x_1, \alpha_1) \in D_P$ y $P(x_1, \alpha_1) = 1$, entonces luego de una cantidad finita de pasos $[\text{IF } P(\overline{Nk_1}, \overline{Pj_1}) \text{ GOTO } \overline{Lk}]$ **direcciona al label \overline{Lk}** quedándose en un estado e' el cual solo puede diferir de e en los valores que le asigna a las variables que fueran a reemplazar a las variables auxiliares, al resto de las variables, no las modifica.
- (iii) Si $(x_1, \alpha_1) \in D_P$ y $P(x_1, \alpha_1) = 0$, entonces luego de una cantidad finita de pasos $[\text{IF } P(\overline{Nk_1}, \overline{Pj_1}) \text{ GOTO } \overline{Lk}]$ **se detiene** quedando en un estado e' el cual solo puede diferir de e en los valores que le asigna a las variables que fueran a reemplazar a las variables auxiliares, al resto de las variables, no las modifica.

Combo 17

1. Defina el concepto de función y desarrolle las tres Convenciones Notacionales asociadas a dicho concepto.

Nota: de la Guía 1



Definición:

Una **función** es un conjunto f de pares ordenados con la siguiente propiedad

$$\text{Si } (x, y) \in f \text{ y } (x, z) \in f, \text{ entonces } y = z$$

Además, dada una función f definimos

$$D_f = \text{dominio de } f = \{x : (x, y) \in f \text{ para algún } y\}$$

$$I_f = \text{imagen de } f = \{y : (x, y) \in f \text{ para algún } x\}$$

A veces escribimos $\text{Dom}(f)$ y $\text{Im}(f)$ en lugar de D_f e I_f , respectivamente.

Las **convenciones notacionales** son

- (1) Dado $x \in D_f$ usaremos $f(x)$ para denotar el único $y \in I_f$ tal que $(x, y) \in f$.
- (2) Escribimos $f : S \subseteq A \rightarrow B$ para expresar que f es una función tal que $D_f = S \subseteq A$ y $I_f \subseteq B$.
Escribimos $f : A \rightarrow B$ para expresar que f es una función tal que $D_f = A$ y $I_f \subseteq B$.
En ese contexto llamaremos a B *conjunto de llegada* (B no está determinado por f , ya que $I_f \subseteq B$).
- (3) Muchas veces, para definir una función f , lo que haremos es dar su dominio y su regla de asignación. Básicamente daremos precisamente el conjunto que es D_f y quién es $f(x)$ para cada $x \in D_f$. Esto determina por completo a f , ya que $f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$. Algunos ejemplos son

| Básico | Con <i>conjunto de llegada</i> y flechas | Con flechas y por casos |
|---------------------|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $D_f = \omega$ | $f : \omega \rightarrow \omega$ | $f : \mathbb{N} \rightarrow \omega$ |
| $f(x) = 23 \cdot x$ | $x \rightarrow 23 \cdot x$ | $x \rightarrow \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ x + 2 & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$ |

Definiciones Auxiliares

Aux. Procedimiento efectivo \mathbb{P} .



Definición:

Llamaremos **procedimientos efectivos** \mathbb{P} a aquellos que posean las siguientes características

- (1) El ejecutante de \mathbb{P} es una persona que trabajará con papel y lápiz disponibles en forma ilimitada.
- (2) Cada paso o tarea de \mathbb{P} debe ser simple y fácil de realizar en forma efectiva por cualquier persona.
- (3) El procedimiento \mathbb{P} comienza con cierto dato de entrada y sigue uno de dos posibles comportamientos
 - (a) \mathbb{P} luego de cierta cantidad de pasos realizados, se detiene y da cierto dato de salida.
 - (b) \mathbb{P} nunca se detiene, generando tareas sucesivamente sin fin.

Diremos que \mathbb{P} *se detiene* (caso a) o *no se detiene* (caso b) partiendo del dato de entrada en cuestión.

- (4) Hay $n, m \in \omega$ y un alfabeto Σ tales que el conjunto de datos de entrada de \mathbb{P} es $w^n \times \Sigma^{*m}$.

Para ciertas $(n + m)$ -uplas de $w^n \times \Sigma^{*m}$ el procedimiento \mathbb{P} se detendrá y para otras no.

Esta definición está con otras palabras. ([Definición original en el apunte](#))

TEOREMAS

Combo 1

1. Proposición (Caracterización de conjuntos Σ -p.r.) .

Un conjunto S es Σ -p.r. sii S es el dominio de alguna función Σ -p.r.

Nota: en la inducción de la prueba hacer solo el caso de la composición. ↪

Demostración:

(\Rightarrow) Notar que $S = D_{\text{Pred} \circ \chi_S^{w^n \times \Sigma^{*m}}}$ y $\text{Pred} \circ \chi_S^{w^n \times \Sigma^{*m}}$ es claramente Σ -p.r. ya que S lo es.

(\Leftarrow) Probaremos por inducción sobre k que para cada $F \in \text{PR}_k^\Sigma$, D_F es Σ -p.r.

El caso $k = 0$, es fácil ya que $\text{PR}_0^\Sigma = \{\text{Suc}, \text{Pred}, C_0^{0,0}, C_\varepsilon^{0,0}\} \cup \{d_a : a \in \Sigma\} \cup \{p_j^{n,m} : 1 \leq j \leq n+m\}$ y $D_{\text{Suc}} = \omega$, $D_{\text{Pred}} = \mathbb{N}$, $D_{C_0^{0,0}} = D_{C_\varepsilon^{0,0}} = \{\diamond\}$ y $D_{p_j^{n,m}} = w^n \times \Sigma^{*m}$, que claramente son todos Σ -p.r.

Por lo tanto supongamos que vale para un k fijo y veamos que se cumple también para $F \in \text{PR}_{k+1}^\Sigma$.

Hay varios casos. Veamos el caso que $F = g \circ [g_1, \dots, g_r]$ con $g, g_1, \dots, g_r \in \text{PR}_k^\Sigma$.

Si $F = \emptyset$, entonces es claro que D_F es Σ -p.r.

Si $F \neq \emptyset$, tenemos entonces que r es de la forma $n + m$ y

$$g : D_g \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$$

$$g_i : D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \omega, \text{ para cada } i = 1, \dots, n$$

$$g_i : D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \Sigma^*, \text{ para cada } i = n+1, \dots, n+m$$

con $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ y $k, l \in \omega$. Por el Lema (1), hay funciones Σ -p.r. $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{n+m}$ las cuales son Σ -totales y

$$g_i = \bar{g}_i \upharpoonright_{D_{g_i}} \text{ para } i = 1, \dots, n+m$$

Por hipótesis inductiva los conjuntos D_g, D_{g_i} , con $i = 1, \dots, n+m$, son Σ -p.r. y por lo tanto también

$$S = \bigcap_{i=1}^{n+m} D_{g_i}$$

Notar que $\chi_{D_F}^{w^k \times \Sigma^{*l}} = \left(\chi_{D_g}^{w^n \times \Sigma^{*m}} \circ [\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{n+m}] \wedge \chi_S^{w^k \times \Sigma^{*l}} \right)$ lo cual nos dice que D_F es Σ -p.r. ■

Lema (1): Sea $O = \{\omega, \Sigma^*\}$ y $n, m \in \omega$. Si $f : D_f \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ es Σ -p.r., entonces existe una función Σ -p.r. $\bar{f} : w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ tal que $f = \bar{f} \upharpoonright_{D_f}$. (En la guía 5, es el lema 18 y en el [apunte el 4.17](#))

⁹El truco está en que $D_{\text{Pred}} = \omega - \{0\}$ por lo tanto cada vez que $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \notin S$ (i.e. $\chi_S^{w^n \times \Sigma^{*m}}(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 0$), $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \notin D_{\text{Pred} \circ \chi_S^{w^n \times \Sigma^{*m}}}$

2. Teorema (Neumann vence a Gödel) . Si h es Σ -recursiva, entonces h es Σ -computable.

Nota: en la inducción de la prueba hacer solo el caso $h = R(f, \mathcal{G})$, con $I_h \subseteq \omega$

↳

Demostración:

Esto será probado por inducción en k que si $h \in R_k^\Sigma$, entonces h es Σ -computable .

El caso $k = 0$, es fácil ya que $R_0 = \text{PR}_0$, entonces hay que hacer programas que computen

$\{\text{Suc}, \text{Pred}, C_0^{0,0}, C_\varepsilon^{0,0}\} \cup \{d_a : a \in \Sigma\} \cup \{p_j^{n,m} : 1 \leq j \leq n+m\}$, los cuales son todos triviales

| Suc | Pred | $C_0^{0,0}$ | $C_\varepsilon^{0,0}$ | d_a | $p_j^{n,m}$ |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------|-------------------|-----------------------------|----------------------|-------------------------------------------------------------|
| $N1 \leftarrow N1 + 1$ | IF $N1 \neq 0$ GOTO L2 L1 GOTO L1 L2 $N1 \leftarrow N1 - 1$ | $N1 \leftarrow 0$ | $P1 \leftarrow \varepsilon$ | $P1 \leftarrow P1.a$ | $N1 \leftarrow N\bar{j}$ o $P1 \leftarrow P\bar{j}$ |

Supongamos que la propiedad se cumple para un k fijo y veamos que se cumple también para $h \in R_{k+1}^\Sigma$.

Hay varios casos. Veamos el caso que $h = R(f, \mathcal{G})$ con $f \in R_k^\Sigma$ y $\mathcal{G} \in R_k^\Sigma$ que son

$$f : S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega$$

$$\mathcal{G}_a : \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times \Sigma^* \rightarrow \omega, \quad a \in \Sigma$$

Sea $\Sigma = \{a_1, \dots, a_r\}$. Por hipótesis inductiva, las funciones f, \mathcal{G}_a con $a \in \Sigma$, son Σ -computables y por lo tanto tenemos las macros

$$[\overline{Vn+1} \leftarrow f(\overline{V1}, \dots, \overline{Vn}, \overline{W1}, \dots, \overline{Wm})]$$

$$[\overline{Vn+2} \leftarrow \mathcal{G}_{a_i}(\overline{V1}, \dots, \overline{Vn+1}, \overline{W1}, \dots, \overline{Wm+1})] \text{ con } i = 1, \dots, r$$

Podemos entonces hacer el siguiente programa (tener en cuenta que $\overline{Pm+2} = \varepsilon$ al iniciar)

$$\begin{aligned}
 & [\overline{Nn+1} \leftarrow f(\overline{N1}, \dots, \overline{Nn}, \overline{P1}, \dots, \overline{Pm})] \\
 \overline{Lr+1} \quad & \text{IF } \overline{Pm+1} \text{ BEGINS } a_1 \text{ GOTO L1} \\
 & \vdots \\
 & \text{IF } \overline{Pm+1} \text{ BEGINS } a_r \text{ GOTO } \overline{Lr} \\
 & \text{GOTO } \overline{Lr+2} \\
 \text{L1} \quad & \overline{Pm+1} \leftarrow \sim \overline{Pm+1} \\
 & [\overline{Nn+1} \leftarrow \mathcal{G}_{a_1}(\overline{Nn+1}, \overline{N1}, \dots, \overline{Nn}, \overline{P1}, \dots, \overline{Pm}, \overline{Pm+2})] \\
 & \overline{Pm+2} \leftarrow \overline{Pm+2} . a_1 \\
 & \text{GOTO } \overline{Lr+1} \\
 & \vdots \\
 \overline{Lr} \quad & \overline{Pm+1} \leftarrow \sim \overline{Pm+1} \\
 & [\overline{Nn+1} \leftarrow \mathcal{G}_{a_r}(\overline{Nn+1}, \overline{N1}, \dots, \overline{Nn}, \overline{P1}, \dots, \overline{Pm}, \overline{Pm+2})] \\
 & \overline{Pm+2} \leftarrow \overline{Pm+2} . a_r \\
 & \text{GOTO } \overline{Lr+1} \\
 \overline{Lr+2} \quad & \overline{N1} \leftarrow \overline{Nn+1}
 \end{aligned}$$

es fácil ver que el programa computa h^{10} , por lo tanto **h es Σ -computable**. (El resto de casos no los pide) ■

¹⁰Recordar que $R(f, \mathcal{G})(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha a) = \mathcal{G}_a(R(f, \mathcal{G})(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha), \vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$. La idea es que, por ejemplo para $\vec{x}, \vec{\alpha}$ y $\alpha = a_1 a_2 a_3$ tenemos que $\mathcal{G}_{a_3}(\mathcal{G}_{a_2}(\mathcal{G}_{a_1}(f(\vec{x}, \vec{\alpha}), \vec{x}, \vec{\alpha}, \varepsilon), \vec{x}, \vec{\alpha}, a_1), \vec{x}, \vec{\alpha}, a_1 a_2))$ por esto calculamos primero f y después en $\overline{Pm+1}$ vamos llevando los $\varepsilon, a_1 a_2, a_1 a_2 a_3$

Combo 2

- 1. Lema** (Lema de división por casos para funciones Σ -p.r.) . Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*$, con $i = 1, \dots, k$, son funciones Σ -p.r. tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces $f_1 \cup \dots \cup f_k$ es Σ -p.r.
 Nota: hacer el caso $k = 2, n = 2$ y $m = 1$ \hookrightarrow

Demostración:

Supongamos $k = 2, n = 2$ y $m = 1$. Por lo tanto tenemos que

$$\bar{f}_i : \omega \times \omega \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*, i = 1, 2$$

son funciones Σ -p.r. tales que $f_i = \bar{f}_i \upharpoonright_{D_{f_i}}, i = 1, 2$ por el Lema (1). Luego por la Proposición (Caracterización de Conjuntos Σ -p.r.), los conjuntos D_{f_1} y D_{f_2} son Σ -p.r. y por lo tanto por el Lema (o.p de Conjuntos Σ -p.r.), $D_{f_1} \cup D_{f_2}$ también. Finalmente dado que

$$f_1 \cup f_2 = \left(\lambda \alpha \beta [\alpha \beta] \circ \left[\lambda x \alpha [\alpha^x] \circ \left[\chi_{D_{f_1}}^{w^n \times \Sigma^{*m}}, \bar{f}_1 \right] \quad , \quad \lambda x \alpha [\alpha^x] \circ \left[\chi_{D_{f_2}}^{w^n \times \Sigma^{*m}}, \bar{f}_2 \right] \right] \right) \upharpoonright_{D_{f_1} \cup D_{f_2}}$$

y el Lema (Restricción de Dominios Σ -p.r.), tenemos que $f_1 \cup f_2$ es Σ -p.r.. ■

Lema (1): Sea $O = \{\omega, \Sigma^*\}$ y $n, m \in \omega$. Si $f : D_f \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ es Σ -p.r., entonces existe una función Σ -p.r. $\bar{f} : w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ tal que $f = \bar{f} \upharpoonright_{D_f}$. (En la guía 5, es el lema 18 y en el apunte el 4.17)

2. Proposición (Caracterización básica de conjuntos Σ -enumerables).

Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ un conjunto no vacío. Entonces son equivalentes

- (1) S es Σ -enumerable.
- (2) Hay un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ tal que
 - (a) Para cada $x \in \omega$, tenemos que \mathcal{P} se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, \dots, x_n, y_1, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots))$ donde $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \in S$.
 - (b) Para cada $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \in S$ hay un $x \in \omega$ tal que \mathcal{P} se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, \dots, x_n, y_1, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots))$.

Nota: hacer el caso $n = 2$ y $m = 1$

↳

Demostración:

Haremos el caso $n = 2$ y $m = 1$, es decir $S \subseteq \omega \times \omega \times \Sigma^*$.

(1) \implies (2)

Ya que S es no vacío, por definición hay una $F : \omega \rightarrow \omega \times \omega \times \Sigma^*$ tal que $I_F = S$ y $F_{(i)}$ es Σ -computable, para cada $i = 1, 2, 3$. Entonces por el Primer Manantial existen los macros

$$[V2 \leftarrow F_{(1)}(V1)] \quad [V2 \leftarrow F_{(2)}(V1)] \quad [W1 \leftarrow F_{(3)}(V1)]$$

Y damos el programa \mathcal{P}

$$\begin{aligned} [P1 \leftarrow F_{(3)}(N1)] \\ [N2 \leftarrow F_{(2)}(N1)] \\ [N1 \leftarrow F_{(1)}(N1)] \end{aligned}$$

Donde se supone que las expansiones de los macros usan variables auxiliares que no aparecen en la lista $N1, N2, P1$ y tampoco repiten labels auxiliares.

Notar que para cada $x \in \omega$, \mathcal{P} siempre se detiene partiendo de un estado $\|x\|$ porque las $F_{(i)}$ son Σ -totales, entonces sus macros siempre se detienen. Luego es fácil ver que **cumplen las condiciones**

- (a) Porque ya sabemos que para cada $x \in \omega$, \mathcal{P} se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y además como $F(x) = (F_{(1)}(x), F_{(2)}(x), F_{(3)}(x)) = (x_1, x_2, \alpha_1) \in S$ entonces \mathcal{P} se detiene con un estado de la forma $((x_1, x_2, y_1, \dots), (\alpha_1, \beta_1, \dots))$ donde $(x_1, x_2, \alpha_1) \in S$.
- (b) Porque para cada $(x_1, x_2, \alpha_1) \in S$, sabemos por definición que existe un $x \in \omega$ tal que $F(x) = (F_{(1)}(x), F_{(2)}(x), F_{(3)}(x)) = (x_1, x_2, \alpha_1)$. Y como \mathcal{P} siempre se detiene, incluso partiendo del estado $\|x\|$, llegará a un estado de la forma $((x_1, x_2, y_1, \dots), (\alpha_1, \beta_1, \dots))$.

(1) \Leftarrow (2)

Supongamos $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ que cumple (a) y (b) de (2).

Sean

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \ N1 \leftarrow N1 \quad \mathcal{P}_2 = \mathcal{P} \ N1 \leftarrow N2 \quad \mathcal{P}_3 = \mathcal{P} \ P1 \leftarrow P1$$

definamos las funciones

$$F_1 = \Psi_{\mathcal{P}_1}^{1,0,\#} \quad F_2 = \Psi_{\mathcal{P}_2}^{1,0,\#} \quad F_3 = \Psi_{\mathcal{P}_3}^{1,0,*}$$

Notar que cada F_i es Σ -computable y tienen dominio igual a ω . Sea $F = [F_1, F_2, F_3]$, por definición $D_F = \omega$ y ya que $F_i = F_{(i)}$, para cada $i = 1, 2, 3$ tenemos que cada $F_{(i)}$ es Σ -computable. Resta ver que $I_F = S$

$I_F \subseteq S$ Por (a) tenemos que \mathcal{P} para todo $x \in \omega$ partiendo de $\|x\|$ llega a un estado de la forma $((x_1, x_2, y_1, \dots), (\alpha_1, \beta_1, \dots))$ donde $(x_1, x_2, \alpha_1) \in S$. Por lo tanto $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x)) = (x_1, x_2, \alpha_1) \in S$ entonces $I_F \subseteq S$.

$S \subseteq I_F$ Por (b) tenemos que para cada $(x_1, x_2, \alpha_1) \in S$, hay un $x \in \omega$ tal que \mathcal{P} partiendo de $\|x\|$ llega a un estado de la forma $((x_1, x_2, y_1, \dots), (\alpha_1, \beta_1, \dots))$. Por lo tanto $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x)) = (x_1, x_2, \alpha_1) \in I_F$ entonces $S \subseteq I_F$.

Entonces finalmente $I_F = S$ y por lo tanto S es Σ -enumerable. ■

Combo 3

1. Teorema (Gödel vence a Neumann).

Si $f : D_f \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*$ es Σ -computable, entonces f es Σ -recursiva. \hookrightarrow

Demostración:

Sea \mathcal{P}_0 un programa que compute a f . Primero veamos que f es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -recursiva. Notar que¹¹

$$f = E_{*1}^{n,m} \circ \left[T^{n,m} \circ \left[p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m}, C_{\mathcal{P}_0}^{n,m} \right], p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m}, C_{\mathcal{P}_0}^{n,m} \right]$$

donde $p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m}$ y $C_{\mathcal{P}_0}^{n,m}$ son respecto al alfabeto $\Sigma \cup \Sigma_p$, es decir que tienen dominio $\omega^n \times (\Sigma \cup \Sigma_p)^{*m}$. Esto nos dice que f es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -recursiva. Osea que el Teorema (Independencia del Alfabeto) nos dice que **f es Σ -recursiva.** ■

2. Teorema (Caracterización de conjuntos Σ -efectivamente computable).

Sea $S \subseteq w^n \times \Sigma^{*m}$. Son equivalentes

(a) S es Σ -efectivamente computable.

(b) S y $(w^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son Σ -enumerables

Nota: haga solo (b) \implies (a). La prueba está al final de la Guía 3 \hookrightarrow

Demostración:

(b) \implies (a)

Si $S = \emptyset$ o $S = w^n \times \Sigma^{*m}$ es claro que se cumple (a).

Así que supongamos que $S \neq \emptyset$ y $S \neq w^n \times \Sigma^{*m}$ por lo cual $(w^n \times \Sigma^{*m}) - S \neq \emptyset$.

Además sea \mathbb{P}_1 un procedimiento efectivo que enumere a S y \mathbb{P}_2 un procedimiento efectivo que enumere a $(w^n \times \Sigma^{*m}) - S$. Ahora sí es fácil ver que el siguiente procedimiento efectivo \mathbb{P} computa $\chi_S^{w^n \times \Sigma^{*m}}$

Sea $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in w^n \times \Sigma^{*m}$.

Etapas 1

Darle a la variable T el valor 0.

Etapas 2

Realizar \mathbb{P}_1 con el valor T como entrada para obtener de salida la ulpa $(\vec{y}, \vec{\beta})$.

Etapas 3

Realizar \mathbb{P}_2 con el valor T como entrada para obtener de salida la ulpa $(\vec{z}, \vec{\gamma})$.

Etapas 4

Si $(\vec{y}, \vec{\beta}) = (\vec{x}, \vec{\alpha})$, entonces detenerse y dar como dato de salida el valor 1.

Si $(\vec{z}, \vec{\gamma}) = (\vec{x}, \vec{\alpha})$, entonces detenerse y dar como dato de salida el valor 0.

Si no sucede ninguna de las dos, aumentar T en 1 y volver a la Etapa 2.

ya que, los procedimientos \mathbb{P}_1 y \mathbb{P}_2 siempre terminan y además para todo $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in w^n \times \Sigma^{*m}$ se cumple que $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in S$ o $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \notin S$. Osea que siempre existe algún $t \in \omega$ tal que haga detenerse a \mathbb{P} dando como dato de salida 1 o 0 respectivamente.

Entonces **S es Σ -efectivamente computable.** ■

¹¹

$$f = \underbrace{E_{*1}^{n,m}}_{\text{resultado de P1, importante (*)}} \circ \left[\underbrace{T^{n,m} \circ [p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m}, C_{\mathcal{P}_0}^{n,m}]}_{\text{cantidad de pasos para que termine}}, \underbrace{p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m}}_{\text{input}}, \underbrace{C_{\mathcal{P}_0}^{n,m}}_{\text{programa}} \right]$$

Combo 4

1. Proposición (misma que la del combo 2).

↳

2. Lema (Lema de la sumatoria).

Sea Σ un alfabeto finito. Si $f : \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega$ es Σ -p.r., con $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacíos, entonces la función $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha} \left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$ es Σ -p.r. ↳

Demostración:

Sea $G = \lambda tx\vec{x}\vec{\alpha} \left[\sum_{i=x}^{i=t} f(i, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$. Ya que (es un simple cambio de lugar las variables)

$$\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha} \left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] = G \circ [p_2^{n+2,m}, p_1^{n+2,m}, p_3^{n+2,m}, \dots, p_{n+m+2}^{n+2,m}]$$

basta probar que G es Σ -p.r. Primero notar que

$$G(0, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ f(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$G(t+1, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > t+1 \\ G(t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq t+1 \end{cases}$$

osea que si definimos

$$h : \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega$$

$$(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ f(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$g : \omega^3 \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega$$

$$(A, t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x > t+1 \\ A + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq t+1 \end{cases}$$

tenemos que $G = R(h, g)$. Es decir que sólo nos falta probar que h y g son Σ -p.r. Sean así

$$D_1 = \{(x, x_1, x_2, \alpha_1) \in \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m : x > 0\}$$

$$D_2 = \{(x, x_1, x_2, \alpha_1) \in \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m : x = 0\}$$

$$H_1 = \{(z, t, x, x_1, x_2, \alpha_1) \in \omega^3 \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m : x > t+1\}$$

$$H_2 = \{(z, t, x, x_1, x_2, \alpha_1) \in \omega^3 \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m : x \leq t+1\}$$

Notar que

$$h = C_0^{n+1,m} \upharpoonright_{D_1} \cup \lambda x\vec{x}\vec{\alpha} [f(0, \vec{x}, \vec{\alpha})] \upharpoonright_{D_2}$$

$$g = C_0^{n+3,m} \upharpoonright_{H_1} \cup \lambda Atx\vec{x}\vec{\alpha} [A + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha})] \upharpoonright_{H_2}$$

Para probarlo, vamos a ver que todas las funciones y conjuntos que aparecen en h y g son Σ -p.r.

Trivialmente $C_0^{n+1,m}$ y $C_0^{n+3,m}$ son Σ -p.r. Luego como f es Σ -p.r. y

$$\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [f(0, \vec{x}, \vec{\alpha})] = f \circ [C_0^{n+1,m}, p_2^{n+1,m}, \dots, p_{n+1+m}^{n+1,m}]$$

$$\lambda A t x \vec{x} \vec{\alpha} [A + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha})] = \lambda x y [x + y] \circ [p_1^{n+3,m}, f \circ [\text{Suc} \circ p_2^{n+3,m}, p_4^{n+3,m}, \dots, p_{n+3+m}^{n+3,m}]]$$

entonces tenemos que ambas funciones son Σ -p.r. Resta ver que los conjuntos D_1, D_2, H_1 y H_2 son Σ -p.r.

- D_1 y D_2 : Como f es Σ -p.r., por la Proposición (Caracterización de Conjuntos Σ -p.r.), tengo que $D_f = \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$ también es Σ -p.r. Ahora como

$$\chi_{D_1}^{\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}} = \left(\chi_{D_f}^{\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}} \wedge \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [x > 0] \right)$$

$$\chi_{D_2}^{\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}} = \left(\chi_{D_f}^{\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}} \wedge \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [x = 0] \right)$$

por el Lema (o.p de Predicados Σ -p.r.), tenemos que D_1 y D_2 son Σ -p.r. .

- H_1 y H_2 : Como f es Σ -p.r., por la Proposición (Caracterización de Conjuntos Σ -p.r.), tengo que $D_f = \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$ también es Σ -p.r..

Entonces no es difícil ver que $R = \omega^3 \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$ es Σ -p.r. usando el Lema (Caracterización de Conjuntos Rectangulares Σ -p.r.). Ahora como

$$\chi_{H_1}^{\omega^{n+3} \times \Sigma^{*m}} = \left(\chi_R^{\omega^{n+3} \times \Sigma^{*m}} \wedge \lambda z t x \vec{x} \vec{\alpha} [x > t+1] \right)$$

$$\chi_{H_2}^{\omega^{n+3} \times \Sigma^{*m}} = \left(\chi_R^{\omega^{n+3} \times \Sigma^{*m}} \wedge \lambda z t x \vec{x} \vec{\alpha} [x \leq t+1] \right)$$

por el Lema (o.p de Predicados Σ -p.r.), tenemos que H_1 y H_2 son Σ -p.r. .

Juntando todo por el Lema (Restricción de Dominios Σ -p.r.), todas las funciones usadas en h y g son Σ -p.r., pero notar que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ y $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, entonces por el Lema (División por Casos para funciones Σ -p.r.), tenemos que h y g son Σ -p.r. Por lo tanto $G = R(h, g)$ es Σ -p.r. ■

Combo 5

- 1. Lema.** Sea $\Sigma = \{@, \%, !\}$. Sea $f : S_1 \times S_2 \times L_1 \times L_2 \rightarrow \omega$ con $S_1, S_2 \subseteq \omega$ y $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ no vacíos y sea \mathcal{G} una familia Σ -indexada de funciones tal que $\mathcal{G}_a : \omega \times S_1 \times S_2 \times L_1 \times L_2 \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ para cada $a \in \Sigma$. Si f y cada \mathcal{G}_a son Σ -efectivamente computables, **entonces** $R(f, \mathcal{G})$ lo es. Nota: es un ej de la Guía 5.

Demostración:

Dado que $f, \mathcal{G}_@, \mathcal{G}_\%$ y $\mathcal{G}_!$ son Σ -efectivamente computables, entonces existen programas $\mathbb{P}_f, \mathbb{P}_@, \mathbb{P}_\%$ y $\mathbb{P}_!$ que las computan respectivamente. Entonces notar que el siguiente procedimiento efectivo \mathbb{P} computa $R(f, \mathcal{G})$

Sea $(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha) \in S_1 \times S_2 \times L_1 \times L_2 \times \Sigma^*$

Etapa 1

Hago las asignaciones $I \leftarrow \varepsilon$ y $J \leftarrow \alpha$.

Realizar \mathbb{P}_f con la entrada $(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2)$ y guardar la salida en la variable A .

Etapa 2

Si $J = \varepsilon$, entonces detenerse y dar como dato de salida el valor A .

Si $J \neq \varepsilon$, realizar las asignaciones $B \leftarrow [J]_1$ y $J \leftarrow \sim J$.

Ahora según el caso si $B = @$ voy a la Etapa 3,

si $B = \%$ voy a la Etapa 4,

si $B = !$ voy a la Etapa 5.

Etapa 3

Corro el procedimiento $\mathbb{P}_@$ con la entrada $(A, x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, I)$ y guardar la salida en la variable A .

Hago $I \leftarrow I@$ y voy a la Etapa 2

Etapa 4

Corro el procedimiento $\mathbb{P}_\%$ con la entrada $(A, x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, I)$ y guardar la salida en la variable A .

Hago $I \leftarrow I\%$ y voy a la Etapa 2

Etapa 5

Corro el procedimiento $\mathbb{P}_!$ con la entrada $(A, x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, I)$ y guardar la salida en la variable A .

Hago $I \leftarrow I!$ y voy a la Etapa 2

y por ello $R(f, \mathcal{G})$ es Σ -efectivamente computable. ■

2. Lema (Lema de cuantificación acotada) . Sea Σ un alfabeto finito. Sea $P : S \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega$ un predicado Σ -p.r., con $S, S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacíos. Supongamos $\bar{S} \subseteq S$ es Σ -p.r. Entonces $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[\left(\forall t \in \bar{S} \right)_{(t \leq x)} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$ es Σ -p.r. \hookrightarrow

Demostración:

Sea

$$\bar{P} = P \upharpoonright_{\bar{S} \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m} \cup C_1^{1+n,m} \upharpoonright_{(\omega - \bar{S}) \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m}$$

veamos que es Σ -p.r.

Como $\bar{S} \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \cap (\omega - \bar{S}) \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m = \emptyset$, P y $C_1^{1+n,m}$ son Σ -p.r., por el Lema (División por Casos para funciones Σ -p.r.) y el Lema (Restricción de Dominios Σ -p.r.), alcanza con ver que los siguientes conjuntos son Σ -p.r.

$$\bar{S} \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \quad \text{y} \quad (\omega - \bar{S}) \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$$

Por la Proposición (Caracterización de Conjuntos Σ -p.r.) sabemos que $D_P = S \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$ es Σ -p.r. , por lo tanto, por el Lema (Caracterización de Conjuntos Rectangulares Σ -p.r.) , $S_1, \dots, S_n, L_1, \dots, L_m$ son Σ -p.r. y además como \bar{S} es Σ -p.r., por el Lema (o.p de Conjuntos Σ -p.r.) , $(\omega - \bar{S})$ también. Entonces nuevamente por el Lema (Caracterización de Conjuntos Rectangulares Σ -p.r.) , ambos conjuntos son Σ -p.r. Así \bar{P} es Σ -p.r. Notar que $D_{\bar{P}} = \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$. Además, como

$$\begin{aligned} \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[\left(\forall t \in \bar{S} \right)_{(t \leq x)} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] &= \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=0}^{t=x} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \\ &= \lambda x y \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=x}^{t=y} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \circ [C_0^{1+n,m}, p_1^{1+n,m}, \dots, p_{1+n+m}^{1+n,m}] \end{aligned}$$

el Lema de la Sumatoria implica que $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[\left(\forall t \in \bar{S} \right)_{(t \leq x)} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$ es Σ -p.r. \blacksquare

Combo 6

1. Lema (Σ -efectivamente computable implica Σ -efectivamente enumerable).

Si $S \subseteq w^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ -efectivamente computable entonces S es Σ -efectivamente enumerable. \hookrightarrow

Demostración:

Si $S = \emptyset$, por definición es Σ -efectivamente enumerable.

Supongamos entonces que $S \neq \emptyset$ y fijamos $(\vec{z}, \vec{\gamma}) \in S$. Sea \mathbb{P}_S el procedimiento efectivo que compute a $\chi_S^{w^n \times \Sigma^{*m}}$. Sea \mathbb{P}_1 un procedimiento efectivo que enumere a $w^n \times \Sigma^{*m}$, usando las bajadas y $*^{\leq}$, que ya sabemos que son Σ -efectivamente computable. Entonces \mathbb{P}_1 sería

Sea $x \in \omega$

Etapla 1

Si $x = 0$, entonces detenerse y dar como dato de salida $(0, 0, 0, \dots, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots)$

Etapla 2

Detenerse y dar como dato de salida $((x)_1, \dots, (x)_n, *^{\leq}((x)_{n+1}), \dots, *^{\leq}((x)_{(n+m)}))$

Entonces el siguiente procedimiento efectivo \mathbb{P} enumera a S

Sea $x \in \omega$

Etapla 1

Realizar \mathbb{P}_1 con la entrada x para obtener como salida a un $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in w^n \times \Sigma^{*m}$.

Etapla 2

Realizar \mathbb{P}_S con la entrada $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ para obtener como salida un booleano e .

Etapla 3

Si $e = 1$, entonces detenerse y dar como dato de salida $(\vec{x}, \vec{\alpha})$.

Si $e = 0$, entonces detenerse y dar como dato de salida $(\vec{z}, \vec{\gamma})$.

y por ello S es Σ -efectivamente enumerable. ■

2. Teorema (Caracterización de conjuntos Σ -recursivamente enumerable).

Dado $S \subseteq w^n \times \Sigma^{*m}$. Son equivalentes

(1) S es Σ -recursivamente enumerable.

(2) $S = I_F$, para alguna $F : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow w^n \times \Sigma^{*m}$ tal que cada $F_{(i)}$ es Σ -recursiva.

(3) $S = D_f$, para alguna función Σ -recursiva f .

Nota: haga solo la prueba (2) \implies (3), caso $k = l = 1$ y $n = m = 2$

\hookrightarrow

Demostración:

(2) \implies (3)

Haremos el caso $k = l = 1$ y $n = m = 2$, osea que $S \subseteq \omega^2 \times \Sigma^{*2}$ y $F : D_F \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega^2 \times \Sigma^{*2}$ es tal que $I_F = S$ y $F_{(1)}, F_{(2)}, F_{(3)}$ y $F_{(4)}$ son Σ -recursivas.

Gracias al Teorema (Neumann vence a Gödel), para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, las funciones $F_{(i)}$ son Σ -computable, entonces por definición existen los programas \mathcal{P}_i que las computan. Sea \leq un orden total sobre Σ . Definimos

$$H_i = \lambda t x_1 \alpha_1 [\neg \text{Halt}^{1,1}(t, x_1, \alpha_1, \mathcal{P}_i)]$$

(te dice si el programa \mathcal{P}_i no se detiene partiendo de (x_1, α_1) en t pasos)

Notar que $D_{H_i} = \omega \times \omega \times \Sigma^*$ y H_i es Σ -mixta. Además sabemos que $\text{Halt}^{1,1}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r, por lo tanto resulta fácil que H_i es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. Entonces por el Teorema (Independencia del Alfabeto), H_i es Σ -p.r., lo cual por el Segundo Manantial existen los macros

$$[\text{IF } \neg H_i(V2, V1, W1) \text{ GOTO } A1]$$

pero para usarlas de forma más intuitiva, las escribimos como

$$[\text{IF } \neg \text{Halt}^{1,1}(V2, V1, W1) \text{ GOTO } A1]$$

Luego para $i = 1, 2$ definimos

$$E_i = \lambda x t x_1 \alpha_1 [x \neq E_{\#1}^{1,1}(t, x_1, \alpha_1, \mathcal{P}_i)]$$

(te dice si el programa \mathcal{P}_i en t pasos devuelve x)

Y para $i = 3, 4$, definimos

$$E_i = \lambda t x_1 \alpha_1 [\alpha \neq E_{*1}^{1,1}(t, x_1, \alpha_1, \mathcal{P}_i)]$$

(te dice si el programa \mathcal{P}_i en t pasos devuelve α)

Notar que los predicados E_i son Σ -mixtos. Además sabemos que $E_{\#1}^{1,1}$ y $E_{*1}^{1,1}$ son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r, por lo tanto resulta fácil que los E_i son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. Entonces por el Teorema (Independencia del Alfabeto), cada E_i es Σ -p.r., lo cual por el Segundo Manantial existen los macros

$$[\text{IF } E_i(V2, V3, V1, W1) \text{ GOTO } A1] \quad [\text{IF } E_i(V2, V1, W1, W2) \text{ GOTO } A1]$$

(para $i = 1, 2$) (para $i = 3, 4$)

pero para usarlas de forma más intuitiva, las escribimos como

$$[\text{IF } V2 \neq E_{\#1}^{1,1}(V3, V1, W1, \mathcal{P}_i) \text{ GOTO } A1] \quad [\text{IF } W2 \neq E_{*1}^{1,1}(V2, V1, W1, \mathcal{P}_i) \text{ GOTO } A1]$$

(para $i = 1, 2$) (para $i = 3, 4$)

Ahora ya que las funciones $f_1 = \lambda x [(x)_1]$, $f_2 = \lambda x [(x)_2]$ y $f_3 = \circ \lambda x [*(x)_3]$ son Σ -p.r., por el Segundo Manantial existen los macros

$$[V2 \leftarrow f_1(V1)] \quad [V2 \leftarrow f_2(V1)] \quad [P1 \leftarrow f_3(V1)]$$

pero para usarlas de forma más intuitiva, las escribimos como

$$[V2 \leftarrow (V1)_1] \quad [V2 \leftarrow (V1)_2] \quad [P1 \leftarrow *^{\leq} (V1)_3]$$

Ahora sí, sea \mathcal{P} el siguiente programa de S^Σ

```

L1  N20 ← N20 + 1
    [ N10 ← (N20)1 ]
    [ N3 ← (N20)2 ]
    [ P3 ← *≤ (N20)3 ]
    [ IF ¬Halt1,1(N10, N3, P3,  $\mathcal{P}_1$ ) GOTO L1 ]
    [ IF ¬Halt1,1(N10, N3, P3,  $\mathcal{P}_2$ ) GOTO L1 ]
    [ IF ¬Halt1,1(N10, N3, P3,  $\mathcal{P}_3$ ) GOTO L1 ]
    [ IF ¬Halt1,1(N10, N3, P3,  $\mathcal{P}_4$ ) GOTO L1 ]
    [ IF N1 ≠ E1,1#1(N10, N3, P3,  $\mathcal{P}_1$ ) GOTO L1 ]
    [ IF N2 ≠ E1,1#1(N10, N3, P3,  $\mathcal{P}_2$ ) GOTO L1 ]
    [ IF P1 ≠ E1,1*1(N10, N3, P3,  $\mathcal{P}_3$ ) GOTO L1 ]
    [ IF P2 ≠ E1,1*1(N10, N3, P3,  $\mathcal{P}_4$ ) GOTO L1 ]

```

es fácil entender el programa si lo ves por partes y teniendo en cuenta que toma como entrada $(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2)$

- La línea 2 genera un candidato t a cantidad de pasos.
- Las líneas 3 y 4 generan un candidato (y_1, γ_2) para la entrada de los $F_{(i)}$.
- Las líneas del 5 al 8 verifican si $F_{(1)}, F_{(2)}, F_{(3)}$ y $F_{(4)}$ se detienen en t pasos, con la entrada (y_1, γ_2) .
- Las líneas del 9 al 12 verifican si $F_{(1)}, F_{(2)}, F_{(3)}$ y $F_{(4)}$ devuelven x_1, x_2, α_1 y α_2 respectivamente.
- Si alguna verificación **no** es cierta, se vuelve a la línea 1 y repite el proceso con nuevos candidatos.

Finalmente, como $F = [F_{(1)}, F_{(2)}, F_{(3)}, F_{(4)}]$ y $I_F = S$, \mathcal{P} se detiene sólo cuando $(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) \in S$.

Sabiendo esto, es fácil ver que computa la función $p_1^{2,2}|_S$. Entonces, listo porque $p_1^{2,2}|_S$ es Σ -computable, por lo cual es Σ -recursiva por el *Teorema (Gödel vence a Neumann)*, y trivialmente $\text{Dom}(p_1^{2,2}|_S) = S$. ■

Combo 7

1. Lema (Lema de minimización acotada).

Sean $n, m \geq 0$. Sea $P : D_P \subseteq \omega \times w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ un predicado Σ -p.r. Entonces

(a) $M(P)$ es Σ -recursiva.

(b) Si hay una función Σ -p.r. $f : w^n \times \Sigma^{*m}$ tal que

$$M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$$

entonces $M(P)$ es Σ -p.r.

↳

Demostración:

(a) (Idea básica, hacer que P sea Σ -total y que siga siendo Σ -p.r.)

Definimos el siguiente predicado, que es Σ -total y pone ceros donde P no estaba definida

$$\overline{P} = P \cup C_0^{1+n,m}|_{(\omega \times w^n \times \Sigma^{*m}) - D_P}$$

Dado que P es Σ -p.r., por la *Proposición (Caracterización de Conjuntos Σ -p.r.)*, D_P también.

Entonces por el *Lema (o.p de Conjuntos Σ -p.r.)* tengo que $(\omega \times w^n \times \Sigma^{*m}) - D_P$ es Σ -p.r. y por lo tanto, por

el *Lema (Restricción de Dominios Σ -p.r.)*, $C_0^{1+n,m}|_{(\omega \times w^n \times \Sigma^{*m}) - D_P}$ también. Como trivialmente

$D_P \cap ((\omega \times w^n \times \Sigma^{*m}) - D_P) = \emptyset$ por el *Lema (División por Casos para funciones Σ -p.r.)* \overline{P} es Σ -p.r.

Ahora es fácil ver que $M(P) = M(\overline{P})$ ya que la minimización está definida cuando el predicado es 1. Osea

$$\{t \in \omega : P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1\} = \{t \in \omega : \overline{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1\}$$

Esto claramente dice que $D_{M(P)} = D_{M(\overline{P})}$ y que $M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = M(\overline{P})(\vec{x}, \vec{\alpha})$, para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$, por lo cual $M(P) = M(\overline{P})$.

Ahora sí con ver que $M(\overline{P})$ es Σ -recursiva, alcanza. Pero esto es fácil, porque si tomamos k tal que $\overline{P} \in \text{PR}_k^\Sigma \subseteq R_k^\Sigma$ y como \overline{P} es Σ -total, tenemos que $M(\overline{P}) \in R_{k+1}^\Sigma$ y por lo tanto $M(\overline{P}) \in R^\Sigma$.

(b)

Ya que $M(P) = M(\overline{P})$, basta probar que $M(\overline{P})$ es Σ -p.r. (va a ser necesaria la “cota” que nos da f)

Primero veremos que $D_{M(\overline{P})}$ es un conjunto Σ -p.r. Para ello notar que

$$\chi_{D_{M(\overline{P})}}^{w^n \times \Sigma^{*m}} = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists t \in \omega)_{t \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha})} \overline{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$$

lo cual nos dice que

$$\chi_{D_{M(\overline{P})}}^{w^n \times \Sigma^{*m}} = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists t \in \omega)_{t \leq x} \overline{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})] \circ [f, p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m}]$$

Pero dado que \overline{P} es Σ -p.r., por el *Lema de cuantificación acotada*, nos dice que $\lambda \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists t \in \omega)_{t \leq x} \overline{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ es Σ -p.r. y como f es Σ -p.r. tengo que $\chi_{D_{M(\overline{P})}}^{w^n \times \Sigma^{*m}}$ también. Ahora definamos un predicado que será muy útil

$$P_1 = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} [\overline{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \wedge (\forall j \in \omega)_{j \leq t} j = t \vee \neg \overline{P}(j, \vec{x}, \vec{\alpha})]$$

(Te dice si para los $< a t$ no se cumple \overline{P} y para t si se cumple)

Veamos además que es Σ -p.r. Si defino $Q = \lambda j \vec{x} \vec{\alpha} [j = t \vee \neg \overline{P}(j, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ que claramente es Σ -p.r. por el *Lema (o.p de Predicados Σ -p.r.)*. Por el *Lema de cuantificación acotada*, tengo que $\lambda \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall j \in \omega)_{j \leq t} Q(j, t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ es Σ -p.r. Pero notar que $P_1 = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} [\overline{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \wedge (\forall j \in \omega)_{j \leq t} Q(j, t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ entonces nuevamente por el *Lema (o.p de Predicados Σ -p.r.)*, P_1 es Σ -p.r.

Notar además que P_1 es Σ -total y

$$P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \quad \text{si y solo si} \quad (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(\overline{P})} \text{ y } t = M(\overline{P})(\vec{x}, \vec{\alpha})$$

Esto nos dice que

$$M(\overline{P}) = \left(\lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})} t^{P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right] \right) \upharpoonright_{D_{M(\overline{P})}}$$

(como $t^0 = 1$, $t^1 = t$ y un solo t va a cumplir P_1 entonces queda $1 \times \dots \times 1 \times t \times 1 \dots = t$)

por lo cual para probar que $M(\overline{P})$ es Σ -p.r., basta probar que

$$F = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})} t^{P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right]$$

lo es, pero

$$F = \lambda x y \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=x}^y t^{P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right] \circ [C_0^{n,m}, f, p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m}]$$

y por lo tanto el Lema de la Sumatoria nos dice que F es Σ -p.r., por lo cual $M(\overline{P}) = M(P)$ es Σ -p.r. ■

Lema (Lema de cuantificación acotada):

Sea Σ un alfabeto finito. Sea $P : S \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega$ un predicado Σ -p.r., con $S, S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacíos. Supongamos $\overline{S} \subseteq S$ es Σ -p.r.

Entonces $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[(\exists t \in \overline{S})_{(t \leq x)} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$ es Σ -p.r. (Cambiar \forall por \exists y es el [Combo 5.2](#) o el Lema 23 de la guía 5)

2. Lema .

Supongamos $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ es Σ -recursiva, $O = \{\omega, \Sigma^*\}$ y $S \subseteq D_f$ es Σ -recursivamente enumerable entonces $f|_S$ es Σ -recursiva.

Nota: haga solo el caso S no vacío, $n = m = 1$ y $O = \Sigma^*$

↳

Demostración:

Haremos el caso $n = m = 1$ y $O = \Sigma^*$, osea que $f : D_f \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$.

Como S es Σ -recursivamente enumerable tenemos que hay una función $F : \omega \rightarrow \omega \times \Sigma^*$ tal que $I_F = S$ y $F_{(1)}$ y $F_{(2)}$ son Σ -recursivas. Además f también, entonces por el Segundo Manantial, existen las macros

$$[W2 \leftarrow f(V1, W1)] \quad [V2 \leftarrow F_{(1)}(V1)] \quad [W2 \leftarrow F_{(2)}(V1)]$$

Y como $D = \lambda xy[x \neq y]$ y $D' = \lambda \alpha \beta[\alpha \neq \beta]$ son Σ -p.r. Por el Segundo Manantial, existen las macros

$$[IF D(V1, V2) GOTO A1] \quad [IF D'(W1, W2) GOTO A1]$$

pero para usarlas de forma más intuitiva, las escribimos como

$$[IF V1 \neq V2 GOTO A1] \quad [IF W1 \neq W2 GOTO A1]$$

Ahora sí, sea \mathcal{P} el siguiente programa de S^Σ (donde $N10 = 0$ al iniciar)

```

L1  [ N2 ← F(1)(N10) ]
    [ P2 ← F(2)(N10) ]
    [ IF N1 ≠ N2 GOTO L2 ]
    [ IF P1 ≠ P2 GOTO L2 ]
    [ P1 ← f(N1, P1) ]
    GOTO L3
L2  N10 ← N10 + 1
    GOTO L1
L3  SKIP

```

el cual es fácil ver que \mathcal{P} computa $f|_S$. Ya que, si analizamos por líneas

- Las **líneas 1** y **2** generan un elemento $(y, \beta) \in S$.
- Las líneas **3** y **4** comparan el input (x, α) con (y, β) .
 - Si son iguales, esto implicaría que $(x, \alpha) \in S$. Por eso calculamos $f(x, \alpha)$ y lo retornamos.
 - Si no son iguales, se incrementa la variable para generar y se vuelve a la **línea 1** para generar un nuevo $(y, \beta) \in S$.

Notar que si $(x, \alpha) \notin S$, entonces \mathcal{P} no se detiene porque la comparación **nunca** va a dar igual. Entonces así \mathcal{P} computa $f|_S$, por lo tanto es Σ -computable y por el Teorema (Gödel vence a Neumann), es Σ -recursiva. ■

Combo 8

1. Lema. Supongamos que $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces AutoHalt^Σ no es Σ -recursivo. \hookrightarrow

Demostración:

Lo vamos a demostrar por el absurdo, entonces supongamos que AutoHalt^Σ **sí es Σ -recursivo**.

Por el Segundo Manantial tenemos que hay un macro

$$[\text{ IF } \text{AutoHalt}^\Sigma(W1) \text{ GOTO } A1]$$

Sea \mathcal{P}_0 el siguiente programa de S^Σ

$$L1 \quad [\text{ IF } \text{AutoHalt}^\Sigma(P1) \text{ GOTO } L1]$$

Notar que por definición de AutoHalt^Σ sabemos que para cada $\mathcal{P} \in S^\Sigma$ se cumple que

$$\text{AutoHalt}^\Sigma(\mathcal{P}) = 1 \text{ sii } \mathcal{P} \text{ se detiene partiendo del estado } \|\mathcal{P}\|.$$

pero por otra parte

$$\text{AutoHalt}^\Sigma(\mathcal{P}_0) = 0 \text{ sii } \mathcal{P}_0 \text{ se detiene partiendo del estado } \|\mathcal{P}_0\|$$

Estas dos afirmaciones se contradicen y el absurdo viene de que supusimos que AutoHalt^Σ sí es Σ -recursivo. ■

Otra forma de decir lo mismo, es que si corremos \mathcal{P}_0 partiendo de $\|\mathcal{P}_0\|$, tenemos dos posibilidades

- $\text{AutoHalt}^\Sigma(\mathcal{P}_0) = 0$, osea que se sale del IF y \mathcal{P}_0 **termina**, por lo tanto $\text{AutoHalt}^\Sigma(\mathcal{P}_0) = 1$. Absurdo.
- $\text{AutoHalt}^\Sigma(\mathcal{P}_0) = 1$, osea entra en bucle y \mathcal{P}_0 **no termina**, por lo tanto $\text{AutoHalt}^\Sigma(\mathcal{P}_0) = 0$. Absurdo.

2. Teorema. Supongamos que $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces AutoHalt^Σ no es Σ -efectivamente computable. Es decir, no hay ningún procedimiento efectivo que decida si un programa de S^Σ termina partiendo de sí mismo. \hookrightarrow

Demostración:

Si AutoHalt^Σ fuera Σ -efectivamente computable, la *Tesis de Church* nos diría que es Σ -recursivo, contradiciendo el Lema anterior. *Tesis de Church* : “Toda función Σ -efectivamente computable es Σ -recursiva.” ■

3. Lema. Supongamos que $\Sigma \supseteq \Sigma_p$.

Entonces $A = \{\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma : \text{AutoHalt}^\Sigma(\mathcal{P}) = 1\}$ es Σ -recursivamente enumerable y no Σ -recursivo.

Más aún $N = \{\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma : \text{AutoHalt}^\Sigma(\mathcal{P}) = 0\}$ no es Σ -recursivamente enumerable. \hookrightarrow

Demostración:

Sea $P = \lambda t \mathcal{P} [\text{Halt}^{0,1}(t, \mathcal{P}, \mathcal{P})]^{12}$. Notar que P es Σ -p.r. (porque $\Sigma \supseteq \Sigma_p$) y por lo tanto $M(P)$ es Σ -recursiva. Además, recordar que se definió $\text{AutoHalt}^\Sigma = \lambda \mathcal{P} [(\exists t \in \omega) \text{Halt}^{0,1}(t, \mathcal{P}, \mathcal{P}) = 1]$, entonces

$$D_{M(P)} = \{\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma : (\exists t \in \omega) P(t, \mathcal{P}) = 1\} = \{\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma : \text{AutoHalt}^\Sigma(\mathcal{P}) = 1\} = A$$

Pero por la *Caracterización de conjuntos Σ -r.e.* (dada en el Combo 6.2) que entre otras cosas dice: un conjunto es Σ -r.e. sii es el dominio de alguna función Σ -r.e.. Entonces como $D_{M(P)} = A$ tenemos que **A sí es Σ -r.e.** Supongamos ahora que N es Σ -r.e.. Entonces por el *Lema de restricción de dominios de funciones Σ -r.* (dado en el Combo 7.2) la función $C_0^{0,1} \upharpoonright_N$ es Σ -recursiva ya que $C_0^{0,1}$ lo es. Análogamente como A es Σ -r.e., también lo es $C_1^{0,1} \upharpoonright_A$.

¹²Recordar que $\text{Halt}^{n,m} = \lambda t \vec{x} \vec{\alpha} \mathcal{P} [i^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) = n(\mathcal{P}) + 1]$, osea te dice si \mathcal{P} con entrada $\|\vec{x}, \vec{\alpha}\|$ luego de t pasos terminó.

Ahora sí, ya que

$$\text{AutoHalt}^\Sigma = C_1^{0,1} \mid_A \cup C_0^{0,1} \mid_N, \quad A \cup N = \text{Pro}^\Sigma \quad y \quad A \cap N = \emptyset$$

por el Lema (División por Casos para funciones Σ -r.) tenemos que AutoHalt^Σ es Σ -recursiva, lo cual contradice el Lema anterior. Esto prueba que N **no es Σ -r.e.**

Finalmente, supongamos que A es Σ -recursivo. Entonces el conjunto $N = (\Sigma^* - A) \cap \text{Pro}^\Sigma$ debería serlo, lo cual es absurdo por lo visto anteriormente. Por lo tanto A **no es Σ -recursivo.** ■

4. Teorema (Neumann vence a Gödel) . Si una función h es Σ -recursiva, entonces h es Σ -computable.

Nota: en la inducción, hacer solo el caso $h = M(P)$

↳

Demostración:

Esto será probado por inducción en k , que si $h \in R_k^\Sigma$, entonces h es Σ -computable .

El caso $k = 0$ es fácil ya que $R_0 = \text{PR}_0$, entonces hay que hacer programas que computen

$\{\text{Suc}, \text{Pred}, C_0^{0,0}, C_\varepsilon^{0,0}\} \cup \{d_a : a \in \Sigma\} \cup \{p_j^{n,m} : 1 \leq j \leq n+m\}$, los cuales son todos triviales

| Suc | Pred | $C_0^{0,0}$ | $C_\varepsilon^{0,0}$ | d_a | $p_j^{n,m}$ |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------|-------------------|-----------------------------|----------------------|-----------------------------------------------------------|
| $N1 \leftarrow N1 + 1$ | IF $N1 \neq 0$ GOTO L2 L1 GOTO L1 L2 $N1 \leftarrow N1 - 1$ | $N1 \leftarrow 0$ | $P1 \leftarrow \varepsilon$ | $P1 \leftarrow P1.a$ | $N1 \leftarrow N\bar{j}$ o $P1 \leftarrow P\bar{j}$ |

Supongamos que la propiedad se cumple para un k fijo y veamos que se cumple también para $h \in R_{k+1}^\Sigma$.

Hay varios casos. Veamos el caso donde $h = M(P)$, con $P : \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$, un predicado en R_k^Σ .

Por hipótesis inductiva P es Σ -computable, osea que por el Primer Manantial existe el macro

$$[\text{IF } P(V1, \dots, V\overline{n+1}, W1, \dots, W\overline{m}) \text{ GOTO } A1]$$

El cual nos permite realizar el siguiente programa \mathcal{P} de S^Σ

$$\begin{aligned} \text{L1} \quad & [\text{IF } P(\overline{Nn+1}, N1, \dots, N\overline{n}, P1, \dots, P\overline{m}) \text{ GOTO } \text{L2}] \\ & \overline{Nn+1} \leftarrow \overline{Nn+1} + 1 \\ & \text{GOTO } \text{L1} \\ \text{L2} \quad & N1 \leftarrow \overline{Nn+1} \end{aligned}$$

que es fácil ver que computa $M(P)$. Supongamos que \mathcal{P} inicia de un estado $\|\vec{x}, \vec{\alpha}\|$, entonces hay dos casos

- Si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \notin D_{M(P)}$, entonces el predicado P nunca va a ser 1, incluso al incrementar $\overline{Nn+1}$, por lo tanto \mathcal{P} nunca se va a detener.
- Si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$, entonces eventualmente P va a ser 1. Como además $\overline{Nn+1}$ inicia en 0 e incrementa de a 1, cuando P valga 1 entonces va a retornar el mínimo valor, osea $M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha})$.

Por esto \mathcal{P} computa $M(P)$ y por lo tanto $M(P)$ **es Σ -computable.** ■

Combo 9

1. Lema (Lema división por casos para funciones Σ -recursivas).

Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O, i = 1, \dots, k$ son Σ -recursivas. Tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para cada $i \neq j$. Entonces la función $f_1 \cup \dots \cup f_k$ es Σ -recursiva.

Nota: haga el caso $k = 2, n = m = 1$ y $O = \omega$

↳

Demostración:

Haremos el caso $k = 2, n = m = 1$ y $O = \omega$. Osea que tenemos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ con $i = 1, 2$.

Por el Teorema (Neumann vence a Gödel) las funciones son Σ -computables, osea que existen los programas \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 tales que las computan respectivamente. Entonces para $i = 1, 2$ definamos

$$H_i = \lambda t x_1 \alpha_1 [\text{Halt}^{1,1}(t, x_1, \alpha_1, \mathcal{P}_i)]$$

(Te dice si en t pasos el programa \mathcal{P}_i con entrada $\|x_1, \alpha_1\|$ termina)

notar que $D_{H_i} = \omega \times \omega \times \Sigma^*$ y que H_i es Σ -mixta. Además sabemos que $\text{Halt}^{1,1}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -pr. Entonces por el Teorema (Independencia del Alfabeto), H_i es Σ -p.r. y por el Segundo Manantial existen las macros

$$[\text{IF } H_i(V1, V2, W1) \text{ GOTO } A1]$$

pero para usarla de forma más intuitiva, la escribimos como

$$[\text{IF } \text{Halt}^{1,1}(V1, V2, W1, \mathcal{P}_i) \text{ GOTO } A1]$$

Luego ya que cada f_i es Σ -computable, por el Primer Manantial existen las macros

$$[V2 \leftarrow f_1(V1, W1)] \quad [V3 \leftarrow f_2(V1, W1)]$$

Con todo esto definimos el siguiente programa \mathcal{P} de S^Σ

```

L1  N10 ← N10 + 1
    [ IF Halt1,1(N10, N1, P1,  $\mathcal{P}_1$ ) GOTO L2 ]
    [ IF Halt1,1(N10, N1, P1,  $\mathcal{P}_2$ ) GOTO L3 ]
    GOTO L1
L2  [ N1 ←  $f_1$ (N1, N1) ]
    GOTO L4
L3  [ N1 ←  $f_2$ (N1, N1) ]
L4  SKIP

```

el cual claramente computa $f_1 \cup f_2$, ya que si corremos \mathcal{P} partiendo del estado $\|x_1, \alpha_1\|$, tenemos dos casos

- $(x_1, \alpha_1) \in D_{f_1 \cup f_2}$, entonces en alguna cantidad de pasos se va cumplir alguno de los dos IF (nunca ambos ya que $D_{f_1} \cap D_{f_2} = \emptyset$) y se va a detener retornando $f_1(x_1, \alpha_1)$ o $f_2(x_1, \alpha_1)$, según corresponda.
- $(x_1, \alpha_1) \notin D_{f_1 \cup f_2}$, entonces nunca se van a cumplir los IF, por lo tanto \mathcal{P} nunca va a detenerse.

por lo tanto $f_1 \cup f_2$ es Σ -computable. ■

2. Teorema (Gödel vence a Neumann) .

Si $f : D_f \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ es Σ -computable, entonces f es Σ -recursiva.

↳

Demostración:

Sea \mathcal{P}_0 un programa que compute a f . Primero veamos que f es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -recursiva. Notar que¹³

$$f = E_{\#1}^{n,m} \circ [T^{n,m} \circ [p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m}, C_{\mathcal{P}_0}^{n,m}], p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m}, C_{\mathcal{P}_0}^{n,m}]$$

donde $p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m}$ y $C_{\mathcal{P}_0}^{n,m}$ son respecto al alfabeto $\Sigma \cup \Sigma_p$, es decir, tienen dominio $\omega^n \times (\Sigma \cup \Sigma_p)^{*m}$. Esto nos dice que f es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -recursiva. Osea que el Teorema (Independencia del Alfabeto) nos dice que **f es Σ -recursiva.** ■

¹³

$$f = \underbrace{E_{\#1}^{n,m}}_{\text{resultado de N1, importante (\#)}} \circ \left[\underbrace{T^{n,m} \circ [p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m}, C_{\mathcal{P}_0}^{n,m}]}_{\text{cantidad de pasos para que termine}}, \underbrace{p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m}}_{\text{input}}, \underbrace{C_{\mathcal{P}_0}^{n,m}}_{\text{programa}} \right]$$

Resultados Muy Usados en las Demostraciones

Las (★) indican que son un combo y el [**n**] es la cantidad de veces que se mencionó el resultado (incluso en una misma demo).

Lema (Operaciones con Predicados Σ -p.r.) [4]

Si $P : S \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ y $Q : S \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ son predicados Σ -p.r., entonces $P \wedge Q, P \vee Q$ y $\neg P$ también.

Lema (Operaciones con Conjuntos Σ -p.r.) [3]

Si $S_1, S_2 \subseteq w^n \times \Sigma^{*m}$ son Σ -p.r., entonces $S_1 \cup S_2, S_1 \cap S_2$ y $S_1 - S_2$ son Σ -p.r.

Lema (Restricción de Dominios Σ -p.r.) [4]

Supongamos $f : D_f \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ es Σ -p.r. Si $S \subseteq D_f$ es Σ -p.r., entonces $f|_S$ es Σ -p.r.

Lema (Caracterización de Conjuntos Rectangulares Σ -p.r.) [3]

Supongamos $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacíos. Entonces $S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$ es Σ -p.r. sii $S_1, \dots, S_n, L_1, \dots, L_m$ son Σ -p.r.

Lema (Lema de la Sumatoria) (Combo 4.2) [2]

(★)

Sea Σ un alfabeto finito. Si $f : \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega$ es Σ -p.r., con $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacíos. Entonces $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha} \left[\prod_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$ es Σ -p.r.

Proposición (Caracterización de Conjuntos Σ -p.r.) (Combo 1.1) [5]

(★)

Un conjunto S es Σ -p.r. sii S es el dominio de alguna función Σ -p.r.

Proposición (Primer Manantial de Macros) [3]

Sea Σ un alfabeto finito. Si

$$f : D_f \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$$

$$g : D_g \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*$$

$$P : D_P \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \{0, 1\}$$

son **Σ -computables**, entonces en S^Σ hay macros

$$[\overline{Vn+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$$

$$[\overline{Wm+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$$

$$[\text{IF } P(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}) \text{ GOTO } A1]$$

Proposición (Segundo Manantial de Macros) [7]

Sea Σ un alfabeto finito. Si

$$f : D_f \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$$

$$g : D_g \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*$$

$$P : D_P \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \{0, 1\}$$

son **Σ -recursivas**, entonces en S^Σ hay macros

$$[\overline{Vn+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$$

$$[\overline{Wm+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$$

$$[\text{IF } P(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}) \text{ GOTO } A1]$$

Teorema (Independencia del Alfabeto) [5]

Sea Σ y Γ alfabetos cualquiera y f una función Σ -mixta y Γ -mixta, entonces f es Σ -recursiva sii f es Γ -recursiva.

Teorema (Neumann vence a Gödel) (Combos 1.2 | 8.4) (★)

Si h es Σ -recursiva, entonces h es Σ -computable. [2]

Teorema (Gödel vence a Neumann) (Combos 3.1 | 9.2) (★)

Si h es Σ -computable, entonces h es Σ -recursiva. [2]

Lema (Lema de división por casos para funciones Σ -p.r.) (Combo 2.1) [3]

(★)

Sea $O = \{\omega, \Sigma^*\}$ y $n, m, k \in \omega$. Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O, i = 1, \dots, k$ son **Σ -p.r.**

Tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para cada $i \neq j$. Entonces la función $f_1 \cup \dots \cup f_k$ es **Σ -p.r.**

Lema (Lema de división por casos para funciones Σ -recursivas) (Combo 9.1) [1]

(★)

Sea $O = \{\omega, \Sigma^*\}$ y $n, m, k \in \omega$. Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq w^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O, i = 1, \dots, k$ son **Σ -recursivas**.

Tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para cada $i \neq j$. Entonces la función $f_1 \cup \dots \cup f_k$ es **Σ -recursiva**.

Referencias de los Resultados Anteriores (Están acá para no sobrecargar la página anterior)

1. *Lema (Operaciones con Predicados Σ -p.r.)* es el lema 14 de la Guía 5.
2. *Lema (Operaciones con Conjuntos Σ -p.r.)* es el lema 15 de la Guía 5.
3. *Lema (Restricción de Dominios Σ -p.r.)* es el lema 17 de la Guía 5.
4. *Lema (Caracterización de Conjuntos Rectangulares Σ -p.r.)* es el lema 16 de la Guía 5.
5. *Lema (Lema de la Sumatoria)* es el lema 22 de la Guía 5 y casi es el **Combo 4.2**.
6. *Proposición (Caracterización de Conjuntos Σ -p.r.)* es la prop 19 de la Guía 5, del apunte la 4.4 y el **Combo 1.1**.
7. *Proposición (Primer Manantial de Macros)* es la proposición 5 de la Guía 7.
8. *Proposición (Segundo Manantial de Macros)* es la proposición 2 de la Guía 8.
9. *Teorema (Independencia del Alfabeto)* es el teorema 4.2 del apunte.
10. *Teorema (Neumann vence a Gödel)* es el teorema 1 de la Guía 8, el **Combo 1.2** y el **Combo 8.4**.
11. *Teorema (Gödel vence a Neumann)* del apunte es el 4.3 y el **Combo 9.2**.
12. *Lema (Lema de división por casos para funciones Σ -p.r.)* es el lema 4.18 del apunte y el **Combo 2.1**.
13. *Lema (Lema de división por casos para funciones Σ -recursivas)* es el lema 4.56 del apunte y el **Combo 9.1**.