Combos de definiciones y convenciones notacionales de la materia
Lenguajes formales y computabilidad

Combo 1.

(1) Defina cuando un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado Σ-recursivo (no hace falta que defina "funcion Σ-recursiva")
(2) Defina $\langle s_1, s_2, ...\rangle$
(3) Defina "f es una funcion Σ-mixta"
(4) Defina "familia Σ-indexada de funciones"
(5) Defina $R(f, \mathcal{G})$ (haga el caso de valores numericos)

Combo 2. Defina:

(1) $d \overset{n}{\vdash} d'$ y $d \overset{*}{\vdash} d'$ (no hace falta que defina $\vdash$)
(2) $L(M)$
(3) "f es una funcion de tipo (n, m, s)"
(4) (x)
(5) $(x)_i$

Combo 3.

(1) Defina cuando un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado Σ-recursivamente enumerable (no hace falta que defina "funcion Σ-recursiva")
(2) Defina $s^{\leq}$
(3) Defina $*^{\leq}$
(4) Defina $\#^{\leq}$

Combo 4. Defina cuando una funcion $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ es llamada Σ-efectivamente computable y defina "el procedimiento $\mathbb{P}$ computa a la funcion f"

Combo 5. Defina cuando un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado Σ-efectivamente computable y defina: "el procedimiento efectivo $\mathbb{P}$ decide la pertenencia a S"

Combo 6. Defina cuando un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado Σ-efectivamente enumerable y defina: "el procedimiento efectivo $\mathbb{P}$ enumera a S"

Combo 7. Defina cuando una funcion $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ es llamada Σ-Turing computable y defina "la maquina de Turing M computa a la funcion f"

Combo 8. Defina:

(1) $M(P)$
(2) Lt
(3) Conjunto rectangular
(4) "S es un conjunto de tipo (n, m)"

Combo 9. Defina:

(1) "I es una instruccion de $\mathcal{S}^{\Sigma}$"
(2) "$\mathcal{P}$ es un programa de $\mathcal{S}^{\Sigma}$"
(3) $I_i^{\mathcal{P}}$
(4) $n(\mathcal{P})$
(5) Bas

Combo 10. Defina relativo al lenguaje $\mathcal{S}^{\Sigma}$:

(1) "estado"
(2) "descripcion instantanea"
(3) $S_{\mathcal{P}}$
(4) "estado obtenido luego de t pasos, partiendo del estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$"
(5) "$\mathcal{P}$ se detiene (luego de t pasos), partiendo desde el estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$"

Combo 11. Defina:

(1) $\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,\#}$
(2) "f es Σ-computable"
(3) "$\mathcal{P}$ computa a f"
(4) $M^{\leq}(P)$

Combo 12. Defina cuando un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado Σ-computable, cuando es llamado Σ-enumerable y defina "el programa $\mathcal{P}$ enumera a S"

Combo 13. Defina:

(1) $i^{n,m}$
(2) $E_{\#}^{n,m}$
(3) $E_{*}^{n,m}$
(4) $E_{\#j}^{n,m}$
(5) $E_{*j}^{n,m}$
(6) $Halt^{n,m}$
(7) $T^{n,m}$
(8) $AutoHalt^{\Sigma}$
(9) Los conjuntos A y N

Combo 14. Explique en forma detallada la notacion lambda

Combo 15. Dada una funcion $f : D_f \subseteq \omega \times \Sigma^* \to \omega$, describa que tipo de objeto es y que propiedades debe tener el macro:

$$[\mathrm{V2} \leftarrow f(\mathrm{V1}, \mathrm{W1})]$$

Combo 16. Dado un predicado $P : D_f \subseteq \omega \times \Sigma^* \to \omega$, describa que tipo de objeto es y que propiedades debe tener el macro:

$$[\mathrm{IF}\ P(\mathrm{V1}, \mathrm{W1})\ \mathrm{GOTO\ A1}]$$

Combo 17. Defina el concepto de funcion y desarrolle las tres Convenciones Notacionales asociadas a dicho concepto (Guia 1)

Combos de teoremas de la materia Lenguajes formales y computabilidad

La siguiente lista contiene 9 combos de resultados de la teoria los cuales seran utilizados para la parte teorica del examen. Algunas observaciones:

(1) Cuando el alumno desarrolle una prueba de un resultado perteneciente a un combo, podra utilizar un resultado previo sin necesidad de demostrarlo, salvo que justo el combo exija la prueba de dicho resultado. Esto implica, por ejemplo, que se pueden usar en cualquier combo que la funciones suma, producto, etc son Σ-p.r.

(2) Cuando el alumno aplique algun resultado que no figura en los resultados del combo que esta desarrollando, debera referirse a el en forma descriptivamente clara, preferentemente enunciandolo. Por ejemplo, no vale poner "por Lema 13 de la Guia 5, tenemos que...."

Combo 1.

Proposición (Caracterizacion de conjuntos Σ-p.r.)**.** *Un conjunto S es Σ-p.r. sii S es el dominio de alguna funcion Σ-p.r.*

(En la induccion de la prueba hacer solo el caso de la composicion)

Teorema (Neumann vence a Godel)**.** *Si h es Σ-recursiva, entonces h es Σ-computable*

(En la induccion de la prueba hacer solo el caso $h = R(f, \mathcal{G})$, con $I_h \subseteq \omega$)

Combo 2.

Lema (Lema de division por casos para funciones Σ-p.r.)**.** *Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$, $i = 1, ..., k$, son funciones Σ-p.r. tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces $f_1 \cup ... \cup f_k$ es Σ-p.r.*

(Hacer el caso $k = 2$, $n = 2$ y $m = 1$)

Proposición (Caracterizacion basica de conjuntos Σ-enumerables)**.** *Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ un conjunto no vacio. Entonces son equivalentes:*

(1) *S es Σ-enumerable*

(2) *Hay un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^{\Sigma}$ tal que:*

   (a) *Para cada $x \in \omega$, tenemos que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$, donde $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$.*

   (b) *Para cada $(x_1, ...x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$ hay un $x \in \omega$ tal que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$*

(Hacer el caso $n = 2$ y $m = 1$)

Combo 3.

Teorema (Godel vence a Neumann)**.** *Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$ es Σ-computable, entonces f es Σ-recursiva.*

Teorema (Caracterizacion de conjuntos Σ-efectivamente computables)**.** *Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Son equivalentes*

(a) *S es Σ-efectivamente computable*
(b) *S y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son Σ-efectivamente enumerables*

(Haga solo (b) implica (a). La prueba de este resultado esta al final de la Guia 3)

Combo 4.

Proposición (Caracterizacion basica de conjuntos Σ-enumerables)**.** *Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ un conjunto no vacio. Entonces son equivalentes:*

(1) *S es Σ-enumerable*
(2) *Hay un programa $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma}$ tal que:*
   (a) *Para cada $x \in \omega$, tenemos que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$, donde $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$.*
   (b) *Para cada $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$ hay un $x \in \omega$ tal que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$*

(Hacer el caso $n = 2$ y $m = 1$)

Lema (Lema de la sumatoria)**.** *Sea Σ un alfabeto finito. Si $f : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$ es Σ-p.r., con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios, entonces la funcion $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ es Σ-p.r.*

Combo 5.

Lema. *Sea $\Sigma = \{@, \%, !\}$. Sea*

$$f : S_1 \times S_2 \times L_1 \times L_2 \to \omega$$

con $S_1, S_2 \subseteq \omega$ y $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ conjuntos no vacios y sea $\mathcal{G}$ una familia Σ-indexada de funciones tal que

$$\mathcal{G}_a : \omega \times S_1 \times S_2 \times L_1 \times L_2 \times \Sigma^* \to \omega$$

para cada $a \in \Sigma$. Si f y cada $\mathcal{G}_a$ son Σ-efectivamente computables, entonces $R(f, \mathcal{G})$ lo es.

(Es un ejercicio de la Guia 5)

Lema (Lema de cuantificacion acotada)**.** *Sea Σ un alfabeto finito. Sea $P : S \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$ un predicado Σ-p.r., con $S, S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios. Supongamos $\bar{S} \subseteq S$ es Σ-p.r.. Entonces $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x}\, P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ es Σ-p.r.*

Combo 6.

Lema (Σ-efectivamente computable implica Σ-efectivamente enumerable)**.** *Si* $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ *es* Σ*-efectivamente computable entonces* S *es* Σ*-efectivamente enumerable.*

Teorema (Caracterizacion de conjuntos Σ-r.e.)**.** *Dado* $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$*, son equivalentes*

(1) S *es* Σ*-recursivamente enumerable*
(2) $S = I_F$*, para alguna* $F : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ *tal que cada* $F_{(i)}$ *es* Σ*-recursiva.*
(3) $S = D_f$*, para alguna funcion* Σ*-recursiva* f

(Haga solo la prueba de (2)$\Rightarrow$(3), caso $k = l = 1$ y $n = m = 2$)

Combo 7.

Lema (Lema de minimizacion acotada)**.** *Sean* $n, m \geq 0$*. Sea* $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ *un predicado* Σ*-p.r.. Entonces*

(a) $M(P)$ *es* Σ*-recursiva.*
(b) *Si hay una funcion* Σ*-p.r.* $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ *tal que*

$M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha})$*, para cada* $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$*,*

entonces $M(P)$ *es* Σ*-p.r..*

Lema. *Supongamos* $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ *es* Σ*-recursiva y* $S \subseteq D_f$ *es* Σ*-r.e., entonces* $f|_S$ *es* Σ*-recursiva.*

(Haga solo el caso S no vacio, $n = m = 1$ y $O = \Sigma^*$)

Combo 8.

Lema. *Supongamos* $\Sigma \supseteq \Sigma_p$*. Entonces* $AutoHalt^\Sigma$ *no es* Σ*-recursivo.*

Teorema. *Supongamos* $\Sigma \supseteq \Sigma_p$*. Entonces* $AutoHalt^\Sigma$ *no es* Σ*-efectivamente computable. Es decir no hay ningun procedimiento efectivo que decida si un programa de* $\mathcal{S}^\Sigma$ *termina partiendo de si mismo.*

Lema. *Supongamos que* $\Sigma \supseteq \Sigma_p$*. Entonces*

$$A = \left\{\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma : AutoHalt^\Sigma(\mathcal{P}) = 1\right\}$$

es Σ*-r.e. y no es* Σ*-recursivo. Mas aun el conjunto*

$$N = \left\{\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma : AutoHalt^\Sigma(\mathcal{P}) = 0\right\}$$

no es Σ*-r.e.*

Teorema (Neumann vence a Godel)**.** *Si* h *es* Σ*-recursiva, entonces* h *es* Σ*-computable.*

(En la induccion de la prueba hacer solo el caso $h = M(P)$)

Combo 9.

Lema (Lema de division por casos para funciones Σ-recursivas)**.** *Supongamos* $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$*,* $i = 1, ..., k$*, son funciones* Σ*-recursivas tales que* $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ *para* $i \neq j$*. Entonces la funcion* $f_1 \cup ... \cup f_k$ *es* Σ*-recursiva.*

(Haga el caso $k = 2$, $n = m = 1$ y $O = \omega$)

Teorema (Godel vence a Neumann)**.** *Si* $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ *es* Σ*-computable, entonces* f *es* Σ*-recursiva.*