Combos de definiciones y convenciones notacionales de la materia Logica

Combo 1.

(1) Defina $n(\mathbf{J})$ (para $\mathbf{J} \in Just^{+}$)
(2) Defina "par adecuado de tipo τ" (No hace falta que defina cuando $\mathbf{J} \in Just^{+}$ es balanceada)
(3) Defina $Mod_T(\varphi)$
(4) Dados $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$, defina que significa $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ (i.e. Convencion notacional 4)
(5) Defina $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)/\theta$ (θ una congruencia del reticulado complementado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$)

Combo 2.

(1) Defina $(\Sigma, \tau) \models \varphi$
(2) Defina "Particion de A" y $R_{\mathcal{P}}$
(3) Defina cuando "φ_i esta bajo la hipotesis φ_l en $(\varphi, \mathbf{J})$". (No hace falta que defina $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$)
(4) Defina $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})/\theta$ (θ una congruencia del reticulado terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$). (No hace falta que defina el concepto de congruencia.)

Combo 3.

(1) Dados $t =_d t(v_1, ..., v_n) \in T^{\tau}$, $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$, defina $t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n]$ (i.e. Convencion notacional 2)
(2) Defina "F es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$"
(3) Defina "filtro generado por S en $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$"
(4) Defina cuando $\mathbf{J} \in Just^{+}$ es balanceada (no hace falta que defina $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$)

Combo 4.

(1) Defina "$(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ es un subreticulado complementado de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$"
(2) Defina $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ (version absoluta, no dependiente de una declaracion previa, i.e. $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$. No hace falta definir $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$)
(3) Defina la relacion "*v ocurre libremente en φ a partir de i*"
(4) Defina reticulado cuaterna

Combo 5. Explique la notacion declaratoria para terminos con sus 3 convenciones notacionales (convenciones 1, 2 y 5 de la Guia 11)

Combo 6. Explique la notacion declaratoria para formulas con sus 3 convenciones notacionales (convenciones 3, 4 y 6 de la Guia 11). Puede asumir la notacion declaratoria para terminos

Combo 7.

(1) Defina recursivamente la relacion "*v es sustituible por w en φ*"
(2) Defina cuando $\mathbf{J} \in Just^+$ es balanceada (no hace falta que defina $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$)
(3) Defina "filtro del reticulado terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$"
(4) Defina "teoria elemental"

Combo 8.

(1) Defina $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)/\theta$ (θ una congruencia del reticulado complementado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$)
(2) Dados $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$, defina que significa $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ (i.e. Convencion notacional 4)
(3) Dado un poset $(P, \leq)$, defina "a es supremo de S en $(P, \leq)$"
(4) Defina "i es anterior a j en $(\varphi, \mathbf{J})$" (no hace falta que defina $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$)

Combo 9.

(1) Defina "termino elemental de tipo τ"
(2) Defina $\dashv\vdash_T$
(3) Defina s^T (explique por que la definicion es inhambigua)
(4) Defina $\mathcal{A}_T$
(5) Defina "S es un subuniverso del reticulado complementado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$"

Combo 10.

(1) Defina "tesis del bloque $\langle i, j \rangle$ en $(\varphi, \mathbf{J})$"
(2) Defina cuando una teoria de primer orden (Σ, τ) es consistente
(3) Dada una teoria elemental (Σ, τ) y una sentencia elemental pura φ de tipo τ, defina "prueba elemental de φ en (Σ, τ)"

Combo 11.

(1) Enuncie el programa de logica matematica dado al final de la Guia 8 y explique brevemente con que definiciones matematicas se van resolviendo los tres primeros puntos y que teoremas garantizan la resolucion del 4to punto de dicho programa.

Combo 12. Defina el concepto de funcion y desarrolle las tres Convenciones Notacionales asociadas a dicho concepto (Guia 0)

Combos de teoremas de la materia Logica

La siguiente lista contiene 8 combos de resultados de la teoria los cuales seran utilizados para la parte teorica del examen. Algunas observaciones:

(1) Cuando el alumno desarrolle una prueba de un resultado perteneciente a un combo, podra utilizar un resultado previo sin necesidad de demostrarlo, salvo que justo el combo exija la prueba de dicho resultado. Cuando aplique algun resultado sin demostracion debera enunciarlo correctamente.
(2) En general se puede dejar de hacer ciertos casos en las pruebas, por ser similares a otros ya hechos. El criterio para decidir esto se puede ver en las pruebas en las guias.

Combo 1.

Teorema (Teorema del Filtro Primo)**.** *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado terna distributivo y F un filtro. Supongamos $x_0 \in L - F$. Entonces hay un filtro primo P tal que $x_0 \notin P$ y $F \subseteq P$.*

Lema (Propiedades basicas de la consistencia)**.** *Sea (Σ, τ) una teoria.*

(1) *Si (Σ, τ) es inconsistente, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, para toda sentencia φ.*
(2) *Si (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.*
(3) *Si $(\Sigma, \tau) \not\vdash \neg\varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.*

Combo 2.

Teorema (Teorema de Dedekind)**.** *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado terna. La relacion binaria definida por:*

$$x \leq y \text{ si y solo si } x \mathsf{~s~} y = y$$

es un orden parcial sobre L para el cual se cumple que:

$$\sup(\{x, y\}) = x \mathsf{~s~} y$$
$$\inf(\{x, y\}) = x \mathsf{~i~} y$$

cualesquiera sean $x, y \in L$

Lema. *Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que si $x_i \in Li(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$. Entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$*

Combo 3.

Teorema (Lectura unica de terminos)**.** *Dado $t \in T^\tau$ se da una de las siguientes:*

(1) $t \in Var \cup \mathcal{C}$
(2) *Hay unicos $n \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_n$, $t_1, ..., t_n \in T^\tau$ tales que $t = f(t_1, ..., t_n)$.*

Lema. *Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F^\tau$. Entonces*

$$\mathbf{A} \models \varphi[(a_1, a_2, ...)] \text{ sii } \mathbf{B} \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), ...)]$$

para cada $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$. En particular $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ satisfacen las mismas sentencias de tipo τ.

Teorema. *Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoria. Entonces $(S^\tau / \dashv\vdash_T, \mathsf{s}^T, \mathsf{i}^T, {}^{\mathsf{c}^T}, 0^T, 1^T)$ es un algebra de Boole.*

Pruebe solo el item (6).

Combo 4.

Lema (Propiedades basicas de la deduccion)**.** *Sea (Σ, τ) una teoria.*

(1) *(Uso de Teoremas). Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.*
(2) *Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$. Si R es una regla distinta de GENERALIZACION y ELECCION y φ se deduce de $\varphi_1, ..., \varphi_n$ por la regla R, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.*
(3) *$(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ si y solo si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.*

Teorema. *Sea $(B, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^{\mathsf{c}}, 0, 1)$ un álgebra de Boole y sean $a, b \in B$. Se tiene que:*

(1) *$(a \mathsf{\ i\ } b)^c = a^c \mathsf{\ s\ } b^c$*
(2) *$a \mathsf{\ i\ } b = 0$ si y solo si $b \leq a^c$*

Lema. *Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados terna y sean $(L, \leq)$ y $(L', \leq')$ los posets asociados. Sea $F : L \rightarrow L'$ una funcion. Entonces F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ si y solo si F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$*

Combo 5.

Teorema (Teorema de Completitud)**.** *Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoria de primer orden. Si $T \models \varphi$, entonces $T \vdash \varphi$.*

Haga solo el caso en que τ tiene una cantidad infinita de nombres de cte que no ocurren en las sentencias de Σ. En la exposicion de la prueba no es necesario que demuestre los items (1) y (5).

Combo 6.

Teorema (Teorema de Completitud)**.** *Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoria de primer orden. Si $T \models \varphi$, entonces $T \vdash \varphi$.*

Haga solo el caso en que τ tiene una cantidad infinita de nombres de cte que no ocurren en las sentencias de Σ. En la exposicion de la prueba no es necesario que demuestre los items: (1), (2), (3) y (4)

Combo 7.

Lema (Propiedades basicas de la deduccion)**.** *Sea (Σ, τ) una teoria.*

(1) *(Uso de Teoremas). Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.*
(2) *Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$. Si R es una regla distinta de GENERALIZACION y ELECCION y φ se deduce de $\varphi_1, ..., \varphi_n$ por la regla R, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.*
(3) *$(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ si y solo si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.*

Lema. *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado terna y sea* θ *una congruencia de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$. *Entonces:*

(1) $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ *es un reticulado terna.*
(2) *El orden parcial* $\tilde{\leq}$ *asociado al reticulado terna* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ *cumple*

$$x/\theta \tilde{\leq} y/\theta \text{ sii } y\theta(x \mathsf{ s } y)$$

Lema. *Sean* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *y* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ *reticulados terna y sean* $(L, \leq)$ *y* $(L', \leq')$ *los posets asociados. Sea* $F : L \to L'$ *una funcion. Entonces* F *es un isomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *en* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ *si y solo si* F *es un isomorfismo de* $(L, \leq)$ *en* $(L', \leq')$

Combo 8.

Lema. *Supongamos que* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *es un isomorfismo. Sea* $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F^\tau$. *Entonces*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, a_2, ..., a_n] \text{ sii } \mathbf{B} \models \varphi[F(a_1), F(a_2), ..., F(a_n)]$$

para cada $a_1, a_2, ..., a_n \in A$.

Lema. *Sean* $(P, \leq)$ *y* $(P', \leq')$ *posets. Supongamos* F *es un isomorfismo de* $(P, \leq)$ *en* $(P', \leq')$.

(a) *Para cada* $S \subseteq P$ *y cada* $a \in P$, *se tiene que* a *es cota superior (resp. inferior) de* S *si y solo si* $F(a)$ *es cota superior (resp. inferior) de* $F(S)$.
(b) *Para cada* $S \subseteq P$, *se tiene que existe* $\sup(S)$ *si y solo si existe* $\sup(F(S))$ *y en el caso de que existan tales elementos se tiene que* $F(\sup(S)) = \sup(F(S))$.