Lógica | FAMAF - UNC

Combos de Definiciones, Convenciones Notacionales y Teoremas

Ramiro Lugo Viola

2025

Contenido

Definiciones y Convenciones Notacionales 1

- Combo 1 ... 1
- Combo 2 ... 2
- Combo 3 ... 3
- Combo 4 ... 4
- Combo 5 ... 6
- Combo 6 ... 7
- Combo 7 ... 8
- Combo 8 ... 9
- Combo 9 ... 10
- Combo 10 ... 11
- Combo 11 ... 12
- Combo 12 ... 13

Teoremas 14

- Combo 1 ... 14
- Combo 2 ... 17
- Combo 3 ... 19
- Combo 4 ... 22
- Combo 5 y 6 ... 25
- Combo 7 ... 29
- Combo 8 ... 30

Definiciones y Convenciones Notacionales

Combo 1

1. Defina $n(\boldsymbol{J})$ para $\boldsymbol{J} \in Just^{+}$.

Definición:
Dada $\boldsymbol{J} \in Just^{+}$, usaremos $n(\boldsymbol{J})$ y $\boldsymbol{J}_1, ..., \boldsymbol{J}_{n(\boldsymbol{J})}$ para denotar los únicos n y $J_1, ..., J_n$ cuyas existencias nos lo garantiza el <u>*Lema*</u>: Sea $\boldsymbol{J} \in Just^{+}$. Hay únicos $n \geq 1$ y $J_1, ..., J_n \in \mathbf{Just}$ tales que $\boldsymbol{J} = J_1 J_2 ... J_n$.

2. Defina "par adecuado de tipo τ" .
Nota: No hace falta que defina cuando $\boldsymbol{J} \in Just^{+}$ es balanceada.

Definición:
Dada $\varphi \in S^{\tau +}$, usaremos $n(\boldsymbol{\varphi})$ y $\boldsymbol{\varphi}_1, ..., \boldsymbol{\varphi}_{n(\boldsymbol{\varphi})}$ para denotar los únicos n y $\varphi_1, ..., \varphi_n$ cuyas existencias nos lo garantiza el <u>*Lema*</u>: Sea $\varphi \in S^{\tau +}$. Hay únicos $n \geq 1$ y $\varphi_1, ..., \varphi_n \in S^{\tau +}$ tales que $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_1 \varphi_2 ... \varphi_n$.

Un *par adecuado de tipo* τ es un par $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{J}) \in S^{\tau +} \times \text{Just}^{+}$ tal que $n(\boldsymbol{\varphi}) = n(\boldsymbol{J})$ y $\boldsymbol{J}$ es balanceada.

3. Defina $Mod_T(\varphi)$.

Definición:
Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría. Dada $\varphi \in S^{\tau}$, definimos $Mod_T(\varphi) = \{\boldsymbol{A} : \boldsymbol{A} \text{ es un modelo de } T \ y \ \boldsymbol{A} \vDash \varphi\}$.

4. Dados $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$, defina qué significa $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$ (i.e. Convención notacional 4 y parte del <u>Combo 6</u>).

Definición:
Si declaramos $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, $\mathbf{A}$ es un modelo de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$ entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$ significará que $\boldsymbol{A} \vDash \varphi\left[\vec{b}\right]$, donde $\vec{b}$ es una asignación tal que a cada v_i le asigna el valor de a_i.

5. Defina $(L, s, i, ^c, 0, 1)/\theta$ (con θ una congruencia del reticulado complementado $(L, s, i, ^c, 0, 1)$) .

Definición:
Sea $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ un reticulado complementado. Una *congruencia sobre* $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ será una relación de equivalencia sobre L la cual cumpla

(1) θ es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$[1]

(2) $x/\theta = y/\theta$ implica $x^c/\theta = y^c/\theta$.

Las condiciones anteriores permiten definir dos operaciones binarias $\tilde{\mathsf{s}}$ y $\tilde{\boldsymbol{i}}$ y una operación unaria $^{\tilde{c}}$ como:

$$x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, y/\theta = (x \,\mathsf{s}\, y)/\theta \qquad , \qquad x/\theta \,\tilde{\boldsymbol{i}}\, y/\theta = (x \,\boldsymbol{i}\, y)/\theta \qquad , \qquad (x/\theta)^{\tilde{c}} = (x^c)/\theta$$

La 6-upla $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\boldsymbol{i}}, ^{\tilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ es llamada el *cociente de* $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ sobre θ y la denotamos con $(L, s, i, ^c, 0, 1)/\theta$.

[1] Una *congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ será una relación de equivalencia θ la cual sea una *congruencia sobre* (L, s, i).
Una *congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$ será una relación de equivalencia θ sobre L la cual cumpla:

$$x\theta x' \ \ y \ \ y\theta y' \quad \text{implica} \quad (x \,\mathsf{s}\, y)\theta(x' \,\mathsf{s}\, y') \ \ y \ \ (x \,\boldsymbol{i}\, y)\theta(x' \,\boldsymbol{i}\, y')$$

Combo 2

1. Defina $(\Sigma, \tau) \vDash \varphi$.

Definición:
Dada (Σ, τ) una teoría y φ una sentencia de tipo τ, escribiremos $(\Sigma, \tau) \vDash \varphi$ cuando φ sea verdadera en todo modelo de (Σ, τ).

2. Defina "Partición de A" y $R_{\mathcal{P}}$.

Definición:
Dado un conjunto A, por una *partición de A* entenderemos un conjunto $\mathcal{P}$ tal que:

(1) Cada elemento de $\mathcal{P}$ es un subconjunto no vacío de A.
(2) Si $S_1, S_2 \in \mathcal{P}$ y $S_1 \neq S_2$, entonces $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.
(3) $A = \{a : a \in S, \text{para algún } S \in \mathcal{P}\}$.

Dada una partición $\mathcal{P}$ de un conjunto A, definimos la relación binaria asociada a $\mathcal{P}$ como:

$$R_{\mathcal{P}} = \left\{(a, b) \in A^2 : a, b \in S, \text{para algún } S \in \mathcal{P}\right\}$$

3. Defina cuando "φ_i está bajo la hipótesis φ_l en $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{J})$".
Nota: No hace falta que defina $\mathcal{B}^{\boldsymbol{J}}$.

Definición:
Dado un par adecuado $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{J})$.
Diremos que $\quad$ *φ_i está bajo la hipótesis φ_l en $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{J})$* $\quad$ o $\quad$ *φ_l es la hipótesis de φ_i en $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{J})$*
cuando haya en $\mathcal{B}^{\boldsymbol{J}}$ un bloque de la forma $\langle l, j\rangle$ el cual contenga a i (osea $i \in \langle l, j\rangle$).

4. Defina $(L, s, i)/\theta$ (con θ una congruencia del reticulado terna (L, s, i)).
Nota: No hace falta que defina el concepto de congruencia.

Definición:
Sea (L, s, i) un reticulado terna.
Una *congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$ será una relación de equivalencia θ sobre L la cual cumpla:

$$x\theta x' \;\; y \;\; y\theta y' \quad \text{implica} \quad (x \mathsf{s} y)\theta(x' \mathsf{s} y') \;\; y \;\; (x \boldsymbol{i} y)\theta(x' \boldsymbol{i} y')$$

Gracias a lo anterior podemos definir en forma inambigua dos operaciones binarias $\tilde{\mathsf{s}}$ y $\tilde{\boldsymbol{i}}$ sobre L/θ como:

$$x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, y/\theta = (x \mathsf{s} y)/\theta \qquad , \qquad x/\theta \,\tilde{\boldsymbol{i}}\, y/\theta = (x \boldsymbol{i} y)/\theta$$

Entonces la terna $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\boldsymbol{i}})$ es llamada el *cociente de* (L, s, i) *sobre* θ y la denotamos por $(L, s, i)/\theta$.

Combo 3

1. Dados $t =_d t(v_1, ..., v_n) \in T^\tau$, $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$, defina $t^A[a_1, ..., a_n]$ (i.e. Convención notacional 2 y parte del Combo 5).

Definición:
Si declaramos $t =_d t(v_1, ..., v_n)$, $\mathbf{A}$ es una estructura de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$ entonces con $t^A[a_1, ..., a_n]$ denotaremos al elemento $t^{\boldsymbol{A}}\left[\vec{b}\right]$, donde $\vec{b}$ es una asignación tal que a cada v_i le asigna el valor de a_i.

2. Defina "F es un homomorfismo de $(L, s, i,^c, 0, 1)$ en $\left(L', s', i',^{c'}, 0', 1'\right)$".

Definición:
Sean $(L, s, i,^c, 0, 1)$ y $\left(L', s', i',^{c'}, 0', 1'\right)$ reticulados complementados. Una función $F : L \to L'$ será llamada un *homomorfismo de* $(L, s, i,^c, 0, 1)$ *en* $\left(L', s', i',^{c'}, 0', 1'\right)$ si para todo $x, y \in L$ se cumplen que:

$$F(x \mathsf{\,s\,} y) = F(x) \mathsf{\,s\,}' F(y) \qquad F(x \,\boldsymbol{i}\, y) = F(x) \,\boldsymbol{i}\,' F(y) \qquad F(x^c) = F(x)^{c'}$$

$$F(0) = 0' \qquad F(1) = 1'$$

3. Defina "filtro generado por S en (L, s, i)".

Definición:
Dado un conjunto $S \subseteq L$, denotaremos con $[S)$ el siguiente conjunto

$$[S) = \{y \in L : y \geq s_1 \,\boldsymbol{i}\, ... \,\boldsymbol{i}\, s_n, \text{para algunos } s_1, ..., s_n \in S, n \geq 1\}$$

y lo llamaremos el *filtro generado por* S *en* (L, s, i).

4. Defina cuando $\boldsymbol{J} \in Just^+$ es balanceada.
Nota: No hace falta que defina $\mathcal{B}^{\boldsymbol{J}}$.

Definición:
Definimos $\boldsymbol{J}$ es *balanceada* si se dan las siguientes condiciones:

(1) Por cada $k \in \mathbb{N}$ a lo sumo hay un i tal que $\boldsymbol{J}_i = \text{HIPOTESIS}\overline{k}$ y a lo sumo hay un j tal que $\boldsymbol{J}_j = \text{TESIS}\overline{k}\alpha$, con $\alpha \in \text{JustBas}$.

(2) Si $\boldsymbol{J}_i = \text{HIPOTESIS}\overline{k}$, entonces hay un $l > i$ tal que $\boldsymbol{J}_l = \text{TESIS}\overline{k}\alpha$ con $\alpha \in \text{JustBas}$.

(3) Si $\boldsymbol{J}_i = \text{TESIS}\overline{k}\alpha$ con $\alpha \in \text{JustBas}$, entonces hay un $l < i$ tal que $\boldsymbol{J}_l = \text{HIPOTESIS}\overline{k}$.

(4) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^{\boldsymbol{J}}$, entonces $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ o $B_1 \subseteq B_2$ o $B_2 \subseteq B_1$.

Combo 4

1. Defina "$(L, \mathtt{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$ es un subreticulado complementado de $\left(L', \mathtt{s}', \boldsymbol{i}', ^{c'}, 0', 1'\right)$".

Definición:
Dados reticulados complementados $(L, \mathtt{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$ y $\left(L', \mathtt{s}', \boldsymbol{i}', ^{c'}, 0', 1'\right)$, diremos que $(L, \mathtt{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$ *es un subreticulado complementado de* $\left(L', \mathtt{s}', \boldsymbol{i}', ^{c'}, 0', 1'\right)$ si se dan las siguiente condiciones:

(1) $L \subseteq L'$.
(2) L es cerrado bajo las operaciones $\mathtt{s}'$, $\boldsymbol{i}'$ y $^{c'}$.[2]
(3) $0 = 0'$ y $1 = 1'$.
(4) $\mathtt{s} = \mathtt{s}'|_{L\times L}$, $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}'|_{L\times L}$ y $^c = {}^{c'}|_L$.

2. Defina $A \vDash \varphi[\vec{a}]$ (versión absoluta, no dependiente de una declaración previa, i.e. $\vec{a} \in A^{\mathbb{N}}$).
Nota: No hace falta definir $t^A[\vec{a}]$.

Definición:
Sea $\boldsymbol{A} = (A, i)$ una estructura de tipo τ, $\varphi \in F^\tau$ y $\vec{a} \in A^{\mathbb{N}}$ una asignación.
Definamos recursivamente la relación $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$ como:

(1) Si $\varphi = (t \equiv s)$, entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$ sii $t^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}] = s^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}]$
(2) Si $\varphi = r(t_1, ..., t_m)$, entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$ sii $\left(t_1^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}], ..., t_m^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}]\right) \in i(r)$.
(3) Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$ sii $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_1[\vec{a}]$ y $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_2[\vec{a}]$
(4) Si $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$ sii $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_1[\vec{a}]$ o $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_2[\vec{a}]$
(5) Si $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$ sii $\boldsymbol{A} \nvDash \varphi_1[\vec{a}]$ o $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_2[\vec{a}]$
(6) Si $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$ sii se dan $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_1[\vec{a}]$ y $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_2[\vec{a}]$ o se dan $\boldsymbol{A} \nvDash \varphi_1[\vec{a}]$ y $\boldsymbol{A} \nvDash \varphi_2[\vec{a}]$
(7) Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$ sii $\boldsymbol{A} \nvDash \varphi_1[\vec{a}]$
(8) Si $\varphi = \forall x_1 \varphi_1$, entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$ sii para cada $a \in A$, se da que $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_1[\downarrow_i^a(\vec{a})]$
(9) Si $\varphi = \exists x_1 \varphi_1$, entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$ sii hay un $a \in A$ tal que $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_1[\downarrow_i^a(\vec{a})]$

aclarar que $\boldsymbol{A} \nvDash \varphi$ denota que no se cumple lo anterior. Ademas dados $\vec{a} \in A^{\mathbb{N}}$ y $a \in A$ usamos $\downarrow_i^a(\vec{a})$ para denota la asignación que resulta de reemplazar en $\vec{a}$ el i-ésimo elemento por a.[3]

[2] Es decir, para todo $x, y \in L$ se cumple que $x \,\mathtt{s}'\, y \in L$, $x \,\boldsymbol{i}'\, y \in L$ y $x^{c'} \in L$.

[3] Cuando se de $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$ diremos que *la estructura A satisface φ en la asignación $\vec{a}$* y en tal caso diremos *φ es **verdadera** en A para la asignación $\vec{a}$.*
Cuando **no** se de $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$ diremos que *la estructura A **no** satisface φ en la asignación $\vec{a}$* y en tal caso diremos *φ es **falsa** en A para la asignación $\vec{a}$.*

3. Defina la relación *"v ocurre libremente en φ a partir de i"*.

Definición:
Recordar que dadas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$, con $|\alpha|, |\beta| \geq 1$ y un natural $i \in \{1, ..., |\beta|\}$, se dice que α *ocurre a partir de i en β* cuando se de que existan palabras δ, γ tales que $\beta = \delta\alpha\gamma$ y $|\delta| \geq i - 1$.

Definamos recursivamente la relación *"v ocurre libremente en φ a partir de i"*, donde $v \in \mathrm{Var}$, $\varphi \in F^\tau$ e $i \in \{1, ..., |\varphi|\}$, como:

(1) Si φ es atómica, entonces *v ocurre libremente en φ a partir de i* sii v ocurre en φ a partir de i.

(2) Si $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, entonces *$v$ ocurre libremente en φ a partir de i* sii se da alguna de las siguientes:
   (a) v ocurre libremente en φ_1 a partir de $i - 1$.
   (b) v ocurre libremente en φ_2 a partir de $i - |(\varphi_1 \eta|$.

(3) Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces *v ocurre libremente en φ a partir de i* sii v ocurre libremente en φ_1 a partir de $i - 1$.

(4) Si $\varphi = Qw\varphi_1$, entonces *v ocurre libremente en φ a partir de i* sii $v \neq w$ y v ocurre libremente en φ_1 a partir de $i - |Qw|$.

4. Defina "reticulado cuaterna".

Definición:
Un reticulado cuaterna es una 4-upla $(L, \mathtt{s}, \boldsymbol{i}, \leq)$ tal que L es un conjunto no vacío, $\mathtt{s}$ e $\boldsymbol{i}$ son operaciones binarias sobre L, $\leq$ es una relación binaria sobre L y se cumplen las siguientes propiedades:

(1) $x \leq x$, cualquiera sea $x \in L$.
(2) $x \leq y$ y $y \leq z$, implica $x \leq z$, cualquiera sean $x, y, z \in L$.
(3) $x \leq y$ y $y \leq x$, implica $x = y$, cualquiera sean $x, y \in L$.
(4) $x \leq x \mathtt{s} y$ y $y < x \mathtt{s} y$, cualquiera sean $x, y \in L$.
(5) $x \leq z$ y $y \leq z$ implica $x \mathtt{s} y \leq z$, cualquiera sean $x, y, z \in L$.
(6) $x \leq x \boldsymbol{i} y$ y $y \leq x \boldsymbol{i} y$, cualquiera sean $x, y \in L$.
(7) $z \leq x$ y $z \leq y$ implica $z \leq x \boldsymbol{i} y$, cualquiera sean $x, y, z \in L$.

Combo 5

1. Explique la notación declaratoria para **términos** con sus 3 convenciones notacionales.

Definición:
Supongamos $v_1, ..., v_n \in \text{Var}$ y t un termino de tipo τ. Entonces escribimos $t =_d t(v_1, ..., v_n)$ para declarar que $v_1, ..., v_n$ son variables distintas y tales que toda variable que ocurre en t pertenecen a $\{v_1, ..., v_n\}$.

Esta notación declaratoria es muy útil cuando se combina con las siguientes convenciones notacionales:

Convención notacional 1: Si hemos declarado $t =_d t(v_1, ..., v_n)$ y $P_1, ..., P_n$ son palabras cualquieras, entonces $t(P_1, ..., P_n)$ denotará la palabra que resulta de reemplazar simultáneamente cada ocurrencia de v_1 en t por P_1, cada ocurrencia de v_2 en t por P_2, etc.

Convención notacional 2: Si hemos declarado $t =_d t(v_1, ..., v_n)$, $\mathbf{A}$ es un modelo de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$, entonces con $t^A[a_1, ..., a_n]$ denotaremos al elemento $t^{\mathbf{A}}\left[\vec{b}\right]$, donde $\vec{b}$ es una asignación tal que a cada v_i le asigna el valor de a_i.

Lema (Lectura única de términos declarados) : Sea τ un tipo cualquier y supongamos $t \in T^\tau$. Si $\varphi =_d t(v_1, ..., v_n)$, entonces se da una y solo una de las siguientes:

(1) $t = c$, para algún $c \in \mathcal{C}$.

(2) $t = v_j$, para algún $j \in \{1, ..., n\}$.

(3) $t = f(t_1, ..., t_m)$, para algún $f \in F_m, m \geq 1$ y $t_1, ..., t_m \in T^\tau$ únicos.

Convención notacional 5: Si hemos declarado $t =_d t(v_1, ..., v_n)$ y se da el caso (3) del Lema anterior, supondremos tácitamente que también hemos echo las declaraciones $t_1 =_d t_1(v_1, ..., v_n), ..., t_m =_d t_m(v_1, ..., v_n)$. Esto lo podemos hacer ya que obviamente las variables que ocurren en los $t_1, ..., t_m$ están en $\{v_1, ..., v_n\}$.

Combo 6

1. Explique la notación declaratoria para **fórmulas** con sus 3 convenciones notacionales.
Nota: Puede asumir la notación declaratoria para términos.

Definición:
Supongamos $v_1, ..., v_n \in \mathrm{Var}$ y φ es una formula de tipo τ. Entonces escribimos $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$ para declarar que $v_1, ..., v_n$ son variables distintas y tales que $\mathrm{Li}(\varphi) \subseteq \{v_1, ..., v_n\}$.
Esta notación declaratoria es muy útil cuando se combina con las siguientes convenciones notacionales:

Convención notacional 3: Si hemos declarado $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$ y $P_1, ..., P_n$ son palabras cualquieras, entonces $\varphi(P_1, ..., P_n)$ denotará la palabra que resulta de reemplazar simultáneamente cada ocurrencia libre de v_1 en φ por P_1, cada ocurrencia libre de v_2 en φ por P_2, etc.

Convención notacional 4: Si hemos declarado $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, $\mathbf{A}$ es un modelo de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$, entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$ significara que $\boldsymbol{A} \vDash \varphi\left[\vec{b}\right]$, donde $\vec{b}$ es una asignación tal que a cada v_i le asigna el valor de a_i. En general $\boldsymbol{A} \nvDash \varphi[a_1, ..., a_n]$ significara que no cumple $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$.

Lema (Lectura única de fórmulas declaradas) : Sea τ un tipo cualquier y $\varphi \in F^\tau$.
Supongamos $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$. Entonces se de una y solo una de las siguientes.

(1) $\varphi = (t \equiv s)$ con $t, s \in T^\tau$ únicos.
(2) $\varphi = r(t_1, ..., t_m)$ con $r \in \mathcal{R}_m$ y $t_1, ..., t_m \in T^\tau$ únicos.
(3) $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, con $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$ únicas.
(4) $\varphi = \neg\varphi_1$ con $\varphi_1 \in F^\tau$, única.
(5) $\varphi = Qv_j\varphi_1$, con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $j \in \{1, ..., n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$, únicas.
(6) $\varphi = Qv\varphi_1$, con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $v \notin \{v_1, ..., v_n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$, únicas.

Ahora notar que según el caso del Lema anterior, si declaramos $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$ tenemos que:
- Caso (1), entonces las variables que ocurren en t y s están en $\{v_1, ..., v_n\}$.
- Caso (2), entonces las variables que ocurren en $t_1, ..., t_m$ están en $\{v_1, ..., v_n\}$.
- Caso (3), entonces $\mathrm{Li}(\varphi_1) \cup \mathrm{Li}(\varphi_2) \subseteq \{v_1, ..., v_n\}$.
- Caso (4) o (5), entonces $\mathrm{Li}(\varphi_1) \subseteq \{v_1, ..., v_n\}$.
- Caso (6), entonces $\mathrm{Li}(\varphi_1) \subseteq \{v_1, ..., v_n, v\}$.

esto ultimo nos permite hacer la siguiente convención notacional:

Convención notacional 6: Si hemos declarado $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, entonces según el caso del Lema mencionado antes, tenderemos que:
- Caso (1) , $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T_k^\tau$
  supondremos tácitamente que hemos hecho las declaraciones $t =_d t(v_1, ..., v_n)$ y $s =_d s(v_1, ..., v_n)$.
- Caso (2) , $\varphi = r(t_1, ..., t_m)$, con $r \in R_m$ y $t_1, ..., t_m \in T^\tau$
  supondremos tácitamente que hemos hecho las declaraciones $t_1 =_d t_1(v_1, ..., v_n), ..., t_m =_d t_m(v_1, ..., v_n)$.
- Caso (3) , $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$ con $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ y $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$
  supondremos tácitamente que hemos hecho las declaraciones $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n)$ y $\varphi_2 =_d \varphi_2(v_1, ..., v_n)$.
- Caso (4) o (5) , $\varphi = \neg\varphi_1$ o $\varphi = Qv_j\varphi_1$ con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $j \in \{1, ..., n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$
  supondremos tácitamente que hemos hecho la declaración $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n)$.
- Caso (6) , $\varphi = Qv\varphi_1$ con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $v \in \mathrm{Var} - \{v_1, ..., v_n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$
  supondremos tácitamente que hemos hecho la declaración $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n, v)$.

Combo 7

1. Defina recursivamente la relación *"v es sustituible por w en φ"*.

Definición:
Dadas $v, w \in \text{Var}$ y $\varphi \in F^\tau$ diremos que v *es sustituible por* w *en* φ cuando ninguna ocurrencia libre de v en φ suceda dentro de una ocurrencia de una subformula de la forma $Qw\psi$ en φ, tal que $Q \in \{\forall, \exists\}, \psi \in F^\tau$.
Ahora si definamos recursivamente la relación v *es sustituible por* w *en* φ de la siguiente manera:

(1) Si φ es atómica, entonces v *es sustituible por* w *en* φ.
(2) Si $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, entonces v *es sustituible por* w *en* φ sii v *es sustituible por* w *en* φ_1 y v *es sustituible por* w *en* φ_2.
(3) Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces v *es sustituible por* w *en* φ sii v *es sustituible por* w *en* φ_1.
(4) Si $\varphi = Qv\varphi_1$, entonces v *es sustituible por* w *en* φ.
(5) Si $\varphi = Qw\varphi_1$ y $v \in \text{Li}(\varphi_1)$, entonces v ***no*** *es sustituible por* w *en* φ.
(6) Si $\varphi = Qw\varphi_1$ y $v \notin \text{Li}(\varphi_1)$, entonces v *es sustituible por* w *en* φ.
(7) Si $\varphi = Qu\varphi_1$ y $u \neq, v, w$, entonces v *es sustituible por* w *en* φ sii v *es sustituible por* w *en* φ_1.

2. Defina cuando $\boldsymbol{J} \in Just^+$ es balanceada. (misma que la del Combo 3.4) ↳

3. Defina "filtro del reticulado terna (L, s, i)".

Definición:
Un *filtro* de un reticulado terna (L, $\mathtt{s}$, $\boldsymbol{i}$) será un subconjunto $F \subseteq L$ tal que:

(1) $F \neq \emptyset$
(2) $x, y \in F$ implica $x \; \boldsymbol{i} \; y \in F$
(3) $x \in F$ y $x \leq y$ implica $y \in F$

4. Defina "teoría elemental".

Definición:
Una *teoría elemental* sera un par (Σ, τ) tal que τ es un tipo cualquiera y Σ es un conjunto de sentencias elementales puras[4] de tipo τ.

[4]Ser *sentencia* implica no tener variables libres y ser *pura* implica que no ocurran nombres de elementos fijos.

Combo 8

1. Defina $(L, s, i, ^c, 0, 1)/\theta$ (con θ una congruencia del reticulado complementado $(L, s, i, ^c, 0, 1)$).
(Misma que la del Combo 1.5) ↳

2. Dados $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, **A** una estructura de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$, defina qué significa $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$ (i.e. Convención notacional 4 y parte del Combo 6).

Definición:
Si hemos declarado $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, **A** es un modelo de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$, entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$ significara que $\boldsymbol{A} \vDash \varphi\left[\vec{b}\right]$, donde $\vec{b}$ es una asignación tal que a cada v_i le asigna el valor de a_i.
En general $\boldsymbol{A} \nvDash \varphi[a_1, ..., a_n]$ significara que no se cumple $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$.

3. Dado un poset $(P, \leq)$, defina "a es supremo de S en $(P, \leq)$".

Definición:
Sea $(P, \leq)$ un poset. Dado $S \subseteq P$, diremos que un elemento $a \in P$ es *cota superior de S en $(P, \leq)$* si para todo $x \in S$ se da $x \leq a$. Un elemento $a \in P$ sera llamado *supremo de S en $(P, \leq)$* si se dan las condiciones:
(1) a es *cota superior de S en $(P, \leq)$*.
(2) Para cada $b \in P$, si b es *cota superior de S en $(P, \leq)$*, entonces $a \leq b$.

4. Defina "i es anterior a j en $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{J})$".
Nota: No hace falta que defina $\mathcal{B}^{\boldsymbol{J}}$.

Definición:
Sea un *par adecuado* $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{J})$ e $i, j \in \{1, ..., n(\boldsymbol{\varphi})\}$[5]. Diremos que i *es anterior a j en* $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{J})$ si $i < j$ y ademas para todo $B \in \mathcal{B}^{\boldsymbol{J}}$ se tiene que $i \in B \Rightarrow j \in B$.

5

Recordar $n(\boldsymbol{\varphi})$ es la "cantidad de formulas" que tiene $\boldsymbol{\varphi}$.
Dada $\varphi \in S^{\tau+}$, usaremos $n(\boldsymbol{\varphi})$ y $\boldsymbol{\varphi}_1, ..., \boldsymbol{\varphi}_{n(\boldsymbol{\varphi})}$ para denotar los únicos n y $\varphi_1, ..., \varphi_n$ cuyas existencias nos lo garantiza el *Lema*: Sea $\varphi \in S^{\tau+}$. Hay únicos $n \geq 1$ y $\varphi_1, ..., \varphi_n \in S^{\tau+}$ tales que $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_1\varphi_2...\varphi_n$.

Combo 9

1. Defina "término elemental de tipo τ". ↳

Definición:
Dado un tipo $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ los *términos elementales de tipo* τ se definen con las siguientes clausulas:

- Cada palabra de $\mathcal{C}$ es un *término elemental de tipo* τ.
- Las variables $x, y, z, w, \ldots$ son *términos elementales de tipo* τ.
- Los nombres de elementos fijos $a, b, c, d, \ldots$ son *términos elementales de tipo* τ.
- Si $f \in \mathcal{F}_n$, con $n \geq 1$ y $t_1, \ldots, t_n$ son términos elementales de tipo τ, entonces $f(t_1, \ldots, t_n)$ es un *término elemental de tipo* τ.
- Una palabra es un *término elemental de tipo* τ sii puede construirse usando las cláusulas anteriores.

2. Defina $\dashv\vdash_T$.

Definición:
Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría. Definimos la siguiente relación binaria sobre S^τ [6] como:

$$\varphi \dashv\vdash_T \psi \ \text{ sii } \ (\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

Es decir, $\dashv\vdash_T = \left\{(\varphi, \psi) \in S^{\tau^2} : (\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)\right\}$

3. Defina s^T (explique por qué la definición es inambigua).

Definición:
Lema. El conjunto $\dashv\vdash_T$ *es una relación de equivalencia*[7] *sobre* S^τ.
Gracias al Lema anterior, podemos definir sobre $S^\tau / \dashv\vdash_T$[8] la siguiente operación binaria s^τ:

$$[\varphi]_T \mathsf{s}^T [\psi]_T = [(\varphi \vee \psi)]_T$$ [9]

Finalmente la definición anterior es inambigua ya que vale la siguiente propiedad:

$$\text{Si } T \vdash (\varphi \leftrightarrow \varphi') \ \text{ y } \ T \vdash (\psi \leftrightarrow \psi') \ \text{ entonces } \ T \vdash ((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi'))$$

garantizando que las clases de equivalencia son iguales independientemente de los representantes elegidos.

4. Defina $\mathcal{A}_T$.

Definición:
Dada una teoría $T = (\Sigma, \tau)$, denotaremos con $\mathcal{A}_T$ al algebra de Boole $\left(S^\tau / \dashv\vdash_T, \mathsf{s}^T, \boldsymbol{i}^T, {}^{c^T}, 0^T, 1^T\right)$, donde

$$[\varphi]_T \ \mathsf{s}^T [\psi]_T = [(\varphi \vee \psi)]_T \qquad [\varphi]_T \ \boldsymbol{i}^T [\psi]_T = [(\varphi \wedge \psi)]_T \qquad [\varphi]_T^{c^T} = [\neg\varphi]_T$$

$$0^T = \{\varphi \in S^\tau : (\Sigma, \tau) \vdash \neg\varphi \ \text{(i.e. } \varphi \text{ es refutable)}\} \qquad 1^T = \{\varphi \in S^\tau : (\Sigma, \tau) \vdash \varphi \ \text{(i.e. } \varphi \text{ es un teorema)}\}$$

El algebra $\mathcal{A}_T$ sera llamada el *algebra de Lindenbaum de* T.

5. Defina "S es un subuniverso del reticulado complementado $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i}, {}^c, 0, 1)$".

Definición:
Dado $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i}, {}^c, 0, 1)$ un reticulado complementado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado *subuniverso de* $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i}, {}^c, 0, 1)$ si $0, 1 \in S$ y ademas S es cerrado bajo las operaciones $\mathsf{s}, \boldsymbol{i}, {}^c$. [10]

[6] $S^\tau = \{\varphi \in F^\tau : \mathrm{Li}(\varphi) = \emptyset\}$, es decir el conjunto de las sentencias.
[7] Una *relación* R *de equivalencia sobre* A es una relación binaria, reflexiva (xRx), simétrica ($xRy \Rightarrow yRx$) y transitiva (xRy e $yRz \Rightarrow xRz$).
[8] $S^\tau / \dashv\vdash_T = \{\varphi / \dashv\vdash_T : \varphi \in S^\tau\}$, donde $\varphi / \dashv\vdash_T = \{\psi \in S^\tau : \varphi \dashv\vdash_T \psi\} = \{\psi \in S^\tau : T \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)\}$.
[9] $[\varphi]_T$ denota la clase de φ respecto a la relación de equivalencia $\dashv\vdash_T$.
[10] Es decir, para todo $x, y \in S$ se cumple que $x \ \mathsf{s} \ y \in S$, $x \ \boldsymbol{i} \ y \in S$ y $x^c \in S$.

Combo 10

1. Defina "tesis del bloque $\langle i, j\rangle$ en $(\varphi, \boldsymbol{J})$".

Definición:
Definimos $\mathcal{B}^{\boldsymbol{J}}$ para cada $\boldsymbol{J} \in \text{Just}^{+}$ como

$$\mathcal{B}^{\boldsymbol{J}} = \left\{\langle i, j\rangle : \exists k \;\; \boldsymbol{J}_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k} \;\; y \; \boldsymbol{J}_j = \text{TESIS}\bar{k}\alpha \text{ para algún } \alpha \in \text{JustBas}\right\}$$ [11]

Sea $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{J})$ un par adecuado de tipo τ. Si $\langle i, j\rangle \in \mathcal{B}^{\boldsymbol{J}}$, entonces $\boldsymbol{\varphi}_j$ es la *tesis del bloque* $\langle i, j\rangle$ en $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{J})$.

2. Defina cuando una teoría de primer orden (Σ, τ) es consistente.

Definición:
Una teoría de primer orden (Σ, τ) es *inconsistente* cuando haya una sentencia φ tal que $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \land \neg\varphi)$.
Una teoría de primer orden (Σ, τ) es llamada *consistente* cuando **no** sea *inconsistente*.

3. Dada una teoría elemental (Σ, τ) y una sentencia elemental pura φ de tipo τ, defina "prueba elemental de φ en (Σ, τ)".

Definición:
Dada una teoría elemental (Σ, τ) y una sentencia elemental pura φ de tipo τ, una *prueba elemental de* φ en (Σ, τ) es una prueba de φ que posea las siguientes características:

(1) En la prueba se parte de una estructura de tipo τ , fija pero arbitraria en el sentido que lo único que sabemos es que ella es una estructura que satisface los axiomas de Σ (o sea esta es la única información particular que podemos usar).
(2) Las deducciones en la prueba son muy simples y obvias de justificar con mínimas frases en castellano.
(3) En la escritura de la prueba lo concerniente a la matemática misma se expresa usando solo sentencias elementales de tipo τ.

Notar que el concepto de prueba elemental en una teoría (Σ, τ) no es un concepto definido en forma precisa.

[11] Definimos $\langle i, j\rangle$ para $i, j \in \mathbb{N}$ con $i < j$ como el conjunto $\{i, i + 1, ..., j\}$.

Combo 11

1. Enuncie el **programa de lógica matemática** dado al final de la Guía 8 y explique brevemente con qué definiciones matemáticas se van resolviendo los tres primeros puntos, y qué teoremas garantizan la resolución del cuarto punto de dicho programa.

Definición:

Programa de lógica matemática

(1) Dar un modelo matemático del concepto de formula elemental de tipo τ.

(2) Dar una definición matemática de cuando una formula elemental de tipo τ es verdadera en una estructura de tipo τ para una asignación dada de valores a las variables libres y a los nombres de elementos fijos de dicha formula elemental.

(3) Dar un modelo matemático del concepto de prueba elemental en una teoría elemental. A estos objetos matemáticos los llamaremos pruebas formales.

(4) Intentar probar matemáticamente que nuestro concepto de prueba formal es una correcta modelización matemática de la idea intuitiva de prueba elemental en una teoría elemental.

(1)

Con las definiciones de *variables*, *términos de tipo* τ y *formulas de tipo* τ logramos modelizar correctamente el concepto de *formula elemental puras de tipo* τ. Entonces, si modelizamos los nombres de elementos fijos, listo.

En particular el matemático al momento de hacer una prueba elemental en una teoría elemental (Σ, τ), comienza imaginando una estructura de tipo τ que lo único que sabe es que satisface las sentencias de Σ. Luego, cuando fija un elemento le pone un nombre, digamos b, y podemos pensar que expandió su estructura imaginaria a una de tipo $(\mathcal{C} \cup \{b\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ y continua con su razonamiento, claramente esto lo puede hacer las veces que quiera en una prueba.

Esta mecánica de prueba del matemático nos deja ver que es natural modelizar las *fórmulas elementales de tipo* τ con fórmulas de tipo τ', donde τ' es alguna extensión de τ por nombres de constante[12].

(2)

Dado un tipo τ, una *estructura* $\boldsymbol{A}$ *de tipo* τ , una fórmula elemental φ y una asignación $\vec{a} \in A^{\mathbb{N}}$.
Usando la relación $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$ definimos cuándo es verdadera.

(3)

La definición de *prueba formal* en una *teoría de primer orden* soluciona este punto.

(4)

El *Teorema de Corrección* garantiza que las pruebas formales de nuestro modelo matemático son efectivamente pruebas elementales en alguna teoría elemental.

Pero podría pasar que sea incompleto, es decir que existan cosas que no podamos probar formalmente pero que si tengan pruebas elementales en alguna teoría elemental.

El *Teorema de Completitud* garantiza que para todo lo que pueda ser probado elementalmente en una teoría elemental, exista una prueba formal en nuestro modelo matemático.

[12] Dado $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ un tipo, definimos que un tipo τ' es una *extensión de* τ *por nombres de constantes* si τ' es de la forma $(\mathcal{C}', \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ con $\mathcal{C}'$ tal que $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$.

Combo 12

1. Defina el concepto de **función** y desarrolle las tres **Convenciones Notacionales** asociadas a dicho concepto (Guía 0). ↳

Definición:
Una **función** es un conjunto f de pares ordenados con la siguiente propiedad

$$\text{Si } (x, y) \in f \text{ y } (x, z) \in f, \text{ entonces } y = z$$

Además, dada una función f definimos

$$D_f = \text{dominio de } f = \{x : (x, y) \in f \text{ para algún } \ y\}$$
$$I_f = \text{imagen de } f = \{y : (x, y) \in f \text{ para algún } \ x\}$$

A veces escribimos Dom(f) y Im(f) en lugar de D_f e I_f, respectivamente.
Las **convenciones notacionales** son

(1) Dado $x \in D_f$ usaremos $f(x)$ para denotar el único $y \in I_f$ tal que $(x, y) \in f$.
(2) Escribimos $f : S \subseteq A \to B$ para expresar que f es una función tal que $D_f = S \subseteq A$ y $I_f \subseteq B$.
Escribimos $f : A \to B$ para expresar que f es una función tal que $D_f = A$ y $I_f \subseteq B$.
En ese contexto llamaremos a B *conjunto de llegada* (B no está determinado por f, ya que $I_f \subseteq B$).
(3) Muchas veces, para definir una función f, lo que haremos es dar su dominio y su regla de asignación.
Básicamente daremos precisamente el conjunto que es D_f y quién es $f(x)$ para cada $x \in D_f$.
Esto determina por completo a f, ya que $f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$. Algunos ejemplos son:

Básico	Con *conjunto de llegada* y flechas	Con flechas y por casos
$D_f = \omega$	$f : \omega \to \omega$	$f : \mathbb{N} \to \omega$
$f(x) = 23 \cdot x$	$x \to 23 \cdot x$	$x \to \begin{cases} x+1 & \text{si x es par} \\ x+2 & \text{si x es impar} \end{cases}$

TEOREMAS

Combo 1

1. Teorema (Teorema del Filtro Primo).
Sea (L, s, i) un reticulado terna distributivo y F un filtro. Supongamos $x_0 \in L - F$.
Entonces hay un filtro primo P tal que $x_0 \notin P$ y $F \subseteq P$. ↳

Demostración:
Sea

$$\mathcal{F} = \{F_1 : F_1 \text{ es un filtro, } \; x_0 \notin F_1 \;\text{ y }\; F \subseteq F_1\}$$

Notar que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ porque $F \in \mathcal{F}$.
F es un filtro, $x_0 \notin F$ y $F \subseteq F$. (Si $x_0 \in F \Rightarrow x_0 \notin L - F$, absurdo porque $x_0 \in L - F$)
Por lo cual $(\mathcal{F}, \subseteq)$ es un poset.
Veamos que cada cadena en $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene al menos una cota superior (para aplicar el Lema de Zorn).
Sea C una cadena.
Si $C = \emptyset$, entonces cualquier elemento de $\mathcal{F}$ es cota superior de C (ya que $\emptyset \subseteq A$ para cualquier conjunto A).
Si $C \neq \emptyset$, sea

$$G = \{x : x \in F_1, \text{ para algún } \; F_1 \in C\}$$

(notar que C es una cadena de $(\mathcal{F}, \subseteq)$, por lo tanto $F_1 \in \mathcal{F}$)

Veamos que G es un filtro. Para ello hay que probar las 3 propiedades de un filtro:

(1) $\boldsymbol{G \neq \emptyset}$, lo cual es claro ya que $C \neq \emptyset$ y todo filtro es no vacío.

(2) $\boldsymbol{x, y \in G}$ **implica** $\boldsymbol{x \; i \; y \in G}$
Supongamos $x, y \in G$, por definición de G tenemos que hay $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $x \in F_1$ y $y \in F_2$.
Pero como $F_1, F_2 \in C$ y C es una cadena de $(\mathcal{F}, \subseteq)$, entonces $F_1 \subseteq F_2$ o $F_2 \subseteq F_1$.
Si $F_1 \subseteq F_2$, entonces $x, y \in F_2$, pero como F_2 es un filtro tenemos que $x \; \boldsymbol{i} \; y \in F_2 \subseteq G$.
Si $F_2 \subseteq F_1$, entonces $x, y \in F_1$, pero como F_1 es un filtro tenemos que $x \; \boldsymbol{i} \; y \in F_1 \subseteq G$.
Por lo tanto en cualquier caso $x \; \boldsymbol{i} \; y \in G$.

(3) $\boldsymbol{x \in G}$ **y** $\boldsymbol{x \leq y}$ **implica** $\boldsymbol{y \in G}$
Supongamos $x \in G$ y supongamos $x \leq y$ para algún $y \in L$.
Por definición de G tenemos que hay $F_1 \in \mathcal{F}$ tal que $x \in F_1$.
Pero como F_1 es filtro y $x \in F_1$ y $x \leq y$, entonces $y \in F_1 \subseteq G$.
Por lo tanto $y \in G$.

Concluimos así que G es un filtro.
Ademas $x_0 \notin G$ ya que todo filtro $F_1 \in \mathcal{F}$ usado para construir G cumplían que $x_0 \notin F_1$.
Ademas $F \subseteq G$ ya que todo filtro $F_1 \in \mathcal{F}$ usado para construir G cumplía que $F \subseteq F_1$ y $G \neq \emptyset$.
Entonces como G es filtro, $x_0 \notin G$ y $F \subseteq G$ por lo tanto concluimos que $G \in \mathcal{F}$.
Si tomamos cualquier $F_1 \in C$ por definición $F_1 \subseteq G$. Es decir que G es una cota superior de C en $(\mathcal{F}, \subseteq)$.
Entonces probamos que C tiene al menos una cota superior de C.

Asi hemos probado que cada cadena en $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene al menos una cota superior.

Por el *Lema de Zorn*, $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene un elemento maximal P. Veamos que P es un filtro primo.

Claramente P es un filtro ya que $P \in \mathcal{F}$.

Para terminar de ver que sea *primo* debemos ver que cumpla las siguientes propiedad:

(1) $\boldsymbol{P \neq L}$, es directo ya que $P \in \mathcal{F}$, entonces $x_0 \notin P$ por lo tanto $P \neq L$.

(2) **Si $\boldsymbol{x \,\mathsf{s}\, y \in P}$, entonces $\boldsymbol{x \in P}$ o $\boldsymbol{y \in P}$**

Supongamos que $x \,\mathsf{s}\, y \in P$. Vamos a probar que $x \in P$ o $y \in P$ por el absurdo. Supongamos $x, y \notin P$.
Pero como $\emptyset \neq P \cup \{x\} \subseteq L$, por el *Lema para* $[S)$ tengo que $[P \cup \{x\})$ es un filtro.
Ademas $P \subset P \cup \{x\} \subseteq [P \cup \{x\})$, pero como P es un elemento maximal de $(\mathcal{F}, \subseteq)$, tenemos que $[P \cup \{x\}) \notin \mathcal{F}$, por lo que $x_0 \in [P \cup \{x\})$ ya que es filtro y $F \subseteq P \subseteq [P \cup \{x\})$.
Análogamente $x_0 \in [P \cup \{y\})$.
Como $x_0 \in [P \cup \{x\})$ tenemos que hay $p_1, \ldots, p_k \in P \cup \{x\}$, tales que

$$x_0 \geq p_1 \,\boldsymbol{i} \ldots \boldsymbol{i}\, p_k$$

Si $p_i \neq x$ para $i = 1, \ldots, k$, tenemos que $p_i \in P$, entonces por propiedad de filtro (2), $p_1 \,\boldsymbol{i} \ldots \boldsymbol{i}\, p_k \in P$.
Como $p_1 \,\boldsymbol{i} \ldots \boldsymbol{i}\, p_k \leq x_0$ de nuevo por propiedad de filtro (3) $x_0 \in P$, absurdo.
Si existe $p_j = x$ con $j \in \{1, \ldots, k\}$, entonces $p_1 \,\boldsymbol{i} \ldots \boldsymbol{i}\, p_k = p_1 \,\boldsymbol{i} \ldots \boldsymbol{i}\, p_{j-1} \,\boldsymbol{i}\, p_{j+1} \,\boldsymbol{i} \ldots \boldsymbol{i}\, p_k \,\boldsymbol{i}\, x$.
Esto lo podemos repetir para cada p_i que sea igual a x y como $x \,\boldsymbol{i}\, x = x$ tenemos que claramente hay $p'_1, \ldots, p'_n \in P$ tales que $p_1 \,\boldsymbol{i} \ldots \boldsymbol{i}\, p_k = p'_1 \,\boldsymbol{i} \ldots \boldsymbol{i}\, p'_n \,\boldsymbol{i}\, x$
Concluimos entonces que hay $p_1, \ldots, p_n \in P$ tales que

$$p_1 \,\boldsymbol{i} \ldots \boldsymbol{i}\, p_n \,\boldsymbol{i}\, x \leq x_0$$

Análogamente como $x_0 \in [P \cup \{y\})$ tenemos que hay $q_1, \ldots, q_m \in P$ tales que

$$q_1 \,\boldsymbol{i} \ldots \boldsymbol{i}\, q_m \,\boldsymbol{i}\, y \leq x_0$$

Si llamamos p y q a los siguientes elementos

$$p = p_1 \,\boldsymbol{i} \ldots \boldsymbol{i}\, p_n \qquad y \qquad q = q_1 \,\boldsymbol{i} \ldots \boldsymbol{i}\, q_m$$

usando que el $\boldsymbol{i}$ es cota inferior y transitividad, tenemos que

$$(p \,\boldsymbol{i}\, x) \,\boldsymbol{i}\, q \leq (p \,\boldsymbol{i}\, x) \leq x_0 \qquad y \qquad (q \,\boldsymbol{i}\, y) \,\boldsymbol{i}\, p \leq (q \,\boldsymbol{i}\, y) \leq x_0$$

distribuyendo inteligentemente tenemos que

$$(p \,\boldsymbol{i}\, q) \,\boldsymbol{i}\, x \leq x_0 \qquad y \qquad (p \,\boldsymbol{i}\, q) \,\boldsymbol{i}\, y \leq x_0$$

si llamamos $h = p \,\boldsymbol{i}\, q$, tenemos que

$$h \,\boldsymbol{i}\, x \leq x_0 \qquad y \qquad h \,\boldsymbol{i}\, y \leq x_0$$

ahora por la propiedad de que el s es la menor cota superior tenemos que

$$(h \,\boldsymbol{i}\, x) \,\mathsf{s}\, (h \,\boldsymbol{i}\, y) \leq x_0$$

pero como $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$ es distributivo, tenemos que

$$(h \,\boldsymbol{i}\, x) \,\mathsf{s}\, (h \,\boldsymbol{i}\, y) = h \,\boldsymbol{i}\, (x \,\mathsf{s}\, y)$$

por lo tanto $h \,\boldsymbol{i}\, (x \,\mathsf{s}\, y) \leq x_0$.
Pero como $p, q \in P$, entonces por la propiedad de los filtros (2) $h \in P$ y por hipótesis $x \,\mathsf{s}\, y \in P$, entonces nuevamente por la propiedad de los filtros (2) tenemos que $h \,\boldsymbol{i}\, (x \,\mathsf{s}\, y) \in P$.
Finalmente como $h \,\boldsymbol{i}\, (x \,\mathsf{s}\, y) \leq x_0$ por propiedad de los filtros (3) tenemos que $x_0 \in P$, absurdo.

Entonces P es un filtro primo tal que $P \in \mathcal{F}$, entonces $x_0 \notin P$ y $F \subseteq P$. ■

Lema de Zorn : Sea $(P, \leq)$ un poset y supongamos que toda cadena en P tiene al menos una cota superior. Entonces hay un elemento maximal en $(P, \leq)$.

Lema para $[S)$: Sea $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$ un reticulado terna. Supongamos $S \subseteq L$ es no vacío.
Entonces $[S)$ es un filtro de $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$.

2. Lema (Propiedades básicas de la consistencia). *Sea (Σ, τ) una teoría.*

(1) Si (Σ, τ) es inconsistente, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, para toda sentencia φ.

(2) Si (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.

(3) Si $(\Sigma, \tau) \nvdash \neg\varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.

Demostración:

(1) Supongamos que (Σ, τ) es inconsistente. Por lo tanto por definición $(\Sigma, \tau) \vdash (\psi \wedge \neg\psi)$ para alguna sentencia ψ. Ahora dada una sentencia φ arbitraria pero fija, tenemos que φ se deduce por la **regla del absurdo** a parir de $(\psi \wedge \neg\psi)$. Entonces por *Lema (Propiedades básicas$\vdash$)* .(2) tenemos que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.[13]

(2) Supongamos que (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$. Para probarlo lo haremos por el absurdo. Supongamos que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es inconsistente. Por lo tanto tendríamos que vale

$$(\Sigma, \tau) \vdash \varphi \quad \text{y} \quad (\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash (\psi \wedge \neg\psi)$$

con ψ alguna sentencia. Pero entonces por *Lema (Propiedades básicas$\vdash$)* .(1) tendríamos que $(\Sigma, \tau) \vdash (\psi \wedge \neg\psi)$. Es decir (Σ, τ) es inconsistente, absurdo. Entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.[14]

(3) Supongamos que $(\Sigma, \tau) \nvdash \neg\varphi$.
Supongamos que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es inconsistente. Entonces por definición tenemos que

$$\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash (\psi \wedge \neg\psi)$$

para algún ψ. Pero por *Lema (Propiedades básicas$\vdash$)* .(3) tendríamos

$$\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to (\psi \wedge \neg\psi))$$

Finalmente tenemos que $\neg\varphi$ se deduce por la **regla del absurdo** a partir de $(\varphi \to (\psi \wedge \neg\psi))$. Por lo tanto tendríamos que $\Sigma, \tau) \vdash \neg\varphi$, absurdo. Entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.[15] ■

Lema (Propiedades básica de$\vdash$) es el Combo 4.1:
Sea (Σ, τ) una teoría.

(1) (Uso de Teoremas) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

(2) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Si **R** s una regla distinta de GENERALIZACION y ELECCION y φ se deduce de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ por la regla **R**, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

(3) $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ sii $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.

13

Como φ era arbitraria pero fija, lo probamos para toda sentencia φ. Pero esto bajo la hipótesis de que (Σ, τ) es inconsistente. Entonces probamos "Si (Σ, τ) es inconsistente, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, para toda sentencia φ".

14

Entonces probamos $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente. Pero esto bajo la hipótesis de que (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$. Entonces probamos "Si (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente".

15

Entonces probamos $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente. Pero esto bajo la hipótesis de que $(\Sigma, \tau) \nvdash \neg\varphi$. Entonces probamos "Si $(\Sigma, \tau) \nvdash \neg\varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente".

Combo 2

1. Teorema (Teorema de Dedekind) **.**
Sea $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$ *un reticulado terna. La relación binaria definida por:*

$$x \leq y \;\text{ sii }\; x \mathsf{s} y = y$$

es un orden parcial sobre L para el cual se cumple que:

$$\sup(\{x, y\}) = x \mathsf{s} y \qquad\qquad \inf(\{x, y\}) = x \,\boldsymbol{i}\, y$$

cualesquiera sean $x, y \in L$*.* ↳

Demostración:
Probemos que ≤ es reflexiva (es decir $x \leq x$ para cada $x \in L$).
Sea $x \in L$. Por propiedad de $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$ tenemos que $x \mathsf{s} x = x$, entonces por definición de $\leq$, se da $x \leq x$.
Probemos que ≤ es antisimétrica (es decir si $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces $x = y$).
Sean $x, y \in L$ tales que $x \leq y$ y $y \leq x$. Es decir por definición de $\leq$ tenemos que $x \mathsf{s} y = y$ e $y \mathsf{s} x = x$.
Entonces aplicando propiedades de $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$ tenemos que

$$x = y \mathsf{s} x = x \mathsf{s} y = y$$

por lo tanto $x = y$.
Probemos que ≤ es transitiva (es decir si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$).
Sean $x, y, z \in L$ tales que $x \leq y$ y $y \leq z$. Es decir por definición de $\leq$ tenemos que $x \mathsf{s} y = y$ e $y \mathsf{s} z = z$.
Entonces aplicando propiedades de $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$ tenemos que

$$x \mathsf{s} z = x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z) = (x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z = y \mathsf{s} z = z$$

por lo tanto $x \leq z$.
Osea que probamos que $(L, \leq)$ es un poset.
Probemos que $\boldsymbol{\sup(\{x, y\}) = x \mathsf{s} y}$. Primero debemos ver que $x \mathsf{s} y$ es cota superior de $\{x, y\}$, es decir

$$x \leq x \mathsf{s} y \quad \text{y} \quad y \leq x \mathsf{s} y$$

que por definición de $\leq$ es equivalente a ver

$$x \mathsf{s} (x \mathsf{s} y) = x \mathsf{s} y \quad \text{y} \quad y \mathsf{s} (x \mathsf{s} y) = x \mathsf{s} y$$

Notar que usando propiedad de $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$ tenemos que

$$x \mathsf{s} (x \mathsf{s} y) = (x \mathsf{s} x) \mathsf{s} y = x \mathsf{s} y$$

$$y \mathsf{s} (x \mathsf{s} y) = y \mathsf{s} (y \mathsf{s} x) = (y \mathsf{s} y) \mathsf{s} x = y \mathsf{s} x = x \mathsf{s} y$$

entonces listo. Falta ver que $x \mathsf{s} y$ es menor o igual que cualquier otra cota superior de $\{x, y\}$.
Para ello supongamos $x, y \leq z$ con $z \in L$. Por definición de $\leq$ tenemos que

$$x \mathsf{s} z = z \quad \text{y} \quad y \mathsf{s} z = z$$

Entonces usando propiedad de $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$ tenemos que

$$(x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z = x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z) = x \mathsf{s} z = z$$

por lo tanto por definición de $\leq$ tenemos que $x \mathsf{s} y \leq z$, lo que nos dice que $x \mathsf{s} y$ es la menor cota superior.
Entonces probamos que $\sup(\{x, y\}) = x \mathsf{s} y$.

Probemos que $\inf(\{x, y\}) = x\ \boldsymbol{i}\ y$.

Para ello vamos a probar para todo $x, y \in L$ vale $\quad x \leq y$ sii $x\ \boldsymbol{i}\ y = x$

- Supongamos $x \leq y$. Por definición de $\leq$ tenemos que $x\ \mathtt{s}\ y = y$.
  Entonces usando propiedad de $(L, \mathtt{s}\ , \boldsymbol{i}\ )$ tenemos que
  $$x\ \boldsymbol{i}\ y = x\ \boldsymbol{i}\ (x\ \mathtt{s}\ y) = x$$
  por lo tanto $x\ \boldsymbol{i}\ y = x$.
- Supongamos $x\ \boldsymbol{i}\ y = x$. Entonces usando propiedad de $(L, \mathtt{s}\ , \boldsymbol{i}\ )$ tenemos que
  $$x\ \mathtt{s}\ y = (x\ \boldsymbol{i}\ y)\ \mathtt{s}\ y = y\ \mathtt{s}\ (x\ \boldsymbol{i}\ y) = y\ \mathtt{s}\ (y\ \boldsymbol{i}\ x) = y$$
  por lo tanto $x\ \mathtt{s}\ y = y$, entonces por definición de $\leq$ tenemos que $x \leq y$.

Usando lo anterior podemos probar que $\inf(\{x, y\}) = x\ \boldsymbol{i}\ y$ similar a como vimos $\sup(\{x, y\}) = x\ \mathtt{s}\ y$. ■

2. **Lema.** *Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que si $x_i \in \mathrm{Li}(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$. Entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$ sii $\boldsymbol{A} \vDash \varphi\left[\vec{b}\right]$.*

Demostración:

Sea $\boldsymbol{A}$ una estructura de tipo τ. Probaremos por inducción k que vale el *Lema* para cada $\varphi \in F_k^\tau$.

Caso Base ($k = 0$):

Sea $\varphi \in F_0^\tau$. Ademas sean $\vec{a}, \vec{b}$ asignaciones tales que si $x_i \in \mathrm{Li}(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$.

Entonces tenemos dos casos para φ

(1) $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T^\tau$. Notar que todas las variables que ocurren en φ son libres, entonces sabemos por el <u>*Lema análogo para Términos*</u> que $t^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}] = t^{\boldsymbol{A}}\left[\vec{b}\right]$ y $s^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}] = s^{\boldsymbol{A}}\left[\vec{b}\right]$.
Ahora por definición y remplazando obtenemos que:
$$\boldsymbol{A} \vDash (t \equiv s)[\vec{a}] \ \text{ sii } \ t^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}] = s^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}] \text{ sii } t^{\boldsymbol{A}}\left[\vec{b}\right] = s^{\boldsymbol{A}}\left[\vec{b}\right] \ \text{ sii } \ \boldsymbol{A} \vDash (t \equiv s)\left[\vec{b}\right]$$

(2) $\varphi = r(t_1, ..., t_n)$, con $r \in R_n^\tau$ y $t_1, ..., t_n \in T^\tau$, es análogo[16].

Caso Inductivo:

Supongamos que el lema vale para todo $\varphi \in F_k^\tau$ y probaremos que vale para todo $\varphi \in F_{k+1}^\tau$.

Sea $\varphi \in F_{k+1}^\tau - F_k^\tau$, ya que si $\varphi \in F_k^\tau$ sale directo.

Ademas sean $\vec{a}, \vec{b}$ asignaciones tales que si $x_i \in \mathrm{Li}(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$.

Entonces tenemos varios casos para φ, veremos algunos:

- Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$. Notar que $\mathrm{Li}(\varphi_i) \subseteq \mathrm{Li}(\varphi), i = 1, 2$, por *H.I* tenemos que $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_i[\vec{a}]$ sii $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_i\left[\vec{b}\right]$.
  Entonces por definición y remplazando obtenemos que
  $$\boldsymbol{A} \vDash \varphi[\vec{a}] \ \text{ sii } \ \boldsymbol{A} \vDash \varphi_1[\vec{a}] \text{ y } \boldsymbol{A} \vDash \varphi_2[\vec{a}] \ \text{ sii } \ \boldsymbol{A} \vDash \varphi_1\left[\vec{b}\right] \text{ y } \boldsymbol{A} \vDash \varphi_2\left[\vec{b}\right] \ \text{ sii } \ \boldsymbol{A} \vDash \varphi\left[\vec{b}\right]$$
- Los casos para $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ y $\varphi = \neg\varphi_1$ son análogos.
- Si $\varphi = \forall x_j \varphi_1$. Supongamos $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$, por definición vale que para todo $a \in A$, $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_1\left[\downarrow_j^a(\vec{a})\right]$. Notar que $\downarrow_j^a(\vec{a})$ y $\downarrow_j^a\left(\vec{b}\right)$ coinciden en toda $x_i \in \mathrm{Li}(\varphi_1)$ ya que $\mathrm{Li}(\varphi_1) \subseteq \mathrm{Li}(\varphi) \cup \left\{x_j\right\}$. Entonces por *H.I* tenemos que $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_1\left[\downarrow_j^a\left(\vec{b}\right)\right]$ para todo $a \in A$, por lo que $\boldsymbol{A} \vDash \varphi\left[\vec{b}\right]$.
  Luego $\boldsymbol{A} \vDash \varphi\left[\vec{b}\right]$ implica $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$ es análogo, por lo que concluimos que $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$ sii $\boldsymbol{A} \vDash \varphi\left[\vec{b}\right]$.
- El caso para $\varphi = \exists x_j \varphi_1$ es análogo. ■

Lema análogo para Términos :

Sea $\boldsymbol{A}$ una estructura de tipo $\boldsymbol{\tau}$ y sea $t \in T^\tau$. Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que $a_i = b_i$, cada vez que x_i ocurre en t. Entonces $t^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}] = t^{\boldsymbol{A}}\left[\vec{b}\right]$.

[16] Nuevamente todas las variables que ocurren en φ son libres, entonces sabemos por el <u>*Lema análogo para Términos*</u> que $t_i^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}] = t_i^{\boldsymbol{A}}\left[\vec{b}\right]$ con $i = 1, ..., n$. Ahora por definición y remplazando obtenemos que:
$$\boldsymbol{A} \vDash r(t_1, ..., t_n)[\vec{a}] \ \text{ sii } \ \left(t_1^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}], ..., t_n^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}]\right) \in r^{\boldsymbol{A}} \text{ sii } \left(t_1^{\boldsymbol{A}}\left[\vec{b}\right], ..., t_n^{\boldsymbol{A}}\left[\vec{b}\right]\right) \in r^{\boldsymbol{A}} \ \text{ sii } \ \boldsymbol{A} \vDash r(t_1, ..., t_n)\left[\vec{b}\right]$$

Combo 3

1. Teorema (Lectura única de términos)**.** *Dado $t \in T^\tau$ se da una y solo una de las siguientes:*

(1) $t \in \mathrm{Var} \cup \mathcal{C}$.

(2) Hay únicos $n \geq 1$, $f \in F_n^\tau$, $t_1, ..., t_n \in T^\tau$ tales que $t = f(t_1, ..., t_n)$.

Demostración:
Por el *Lema Menu para términos* tenemos que se dan (1) o (2) y obviamente no pueden darse ambas a la vez. Veamos que vale le unicidad de (2). Supongamos que

$$t = f(t_1, ..., t_n) = g(s_1, ..., s_m)$$

con $n, m \geq 1$, $f \in F_n^\tau$, $g \in F_m^\tau$, $t_1, ..., t_n \in T^\tau$ y $s_1, ..., s_m \in T^\tau$.
Claramente $f = g$. Osea que $n = m$.
Notar que si t_1 es tramo inicial de s_1 o s_1 es tramo inicial de t_1 el *Lema Mordisqueo de Términos* nos dice que $t_1 = s_1$. Con el mismo razonamiento, podemos probar que $t_i = s_i$ para cada $i = 1, ..., n$. ■

Lema Menu para términos : Supongamos $t \in T_{k+1}^\tau$, con $k \geq 0$. Entonces se da alguna de las siguientes:

(1) $t \in \mathrm{Var} \cup \mathcal{C}$.

(2) $t = f(t_1, ..., t_n)$, con $n \geq 1$, $f \in F_n^\tau$ y $t_1, ..., t_n \in T_k^\tau$.

Lema Mordisqueo de Términos : Sean $s, t \in T^\tau$ y supongamos que hay palabras x, y, z, con $y \neq \varepsilon$ tales que $s = xy$ y $t = yz$. Entonces $x = z = \varepsilon$ o $s, t \in \mathcal{C}$.
"En particular si un término es tramo inicial o final de otro término, entonces dichos términos son iguales".

2. Lema. *Supongamos que $F : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F^\tau$. Entonces*

$$\boldsymbol{A} \vDash \varphi[(a_1, a_2, \ldots)] \ \text{ sii } \ \boldsymbol{B} \vDash \varphi[(F(a_1), F(a_2), \ldots)]$$

para cada $(a_1, a_2, \ldots) \in A^N$. En particular $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ satisfacen las mismas sentencias de tipo τ.

Demostración:

Para $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots) \in A^{\mathbb{N}}$, denotaremos $(F(a_1), F(a_2), \ldots)$ con $F(\vec{a})$. Vamos a probar por inducción k:

- $\mathbf{Teo}_{\boldsymbol{k}}$: Supongamos que $F : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F_k^\tau$. Entonces

$$\boldsymbol{A} \vDash \varphi[(a_1, a_2, \ldots)] \ \text{ sii } \ \boldsymbol{B} \vDash \varphi[(F(a_1), F(a_2), \ldots)] \quad \text{para cada } (a_1, a_2, \ldots) \in A^N$$

Caso Base $\mathbf{Teo}_{\mathbf{0}}$: Es decir para $\varphi \in F_0^\tau$. Sea $\vec{a} \in A^N$ arbitraria. Tenemos dos casos para φ

- $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T^\tau$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \vDash \varphi[\vec{a}] \ &\text{sii} \ t^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}] = s^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}] && (\text{def. de} \vDash) \\
&\text{sii} \ F\big(t^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}]\big) = F\big(s^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}]\big) && (\text{F un iso}) \\
&\text{sii} \ t^{\boldsymbol{B}}[F(\vec{a})] = s^{\boldsymbol{B}}[F(\vec{a})] && \big(\underline{\textit{Lema análogo para términos}}\big) \\
&\text{sii} \ \boldsymbol{B} \vDash (t \equiv s)[F(\vec{a})] && (\text{def. de} \vDash)
\end{aligned}$$

- $\varphi = r(t_1, \ldots, t_n)$, con $r \in R_n^\tau$ y $t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \vDash \varphi[\vec{a}] \ &\text{sii} \ \big(t_1^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}], \ldots, t_n^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}]\big) \in r^{\boldsymbol{A}} && (\text{def. de} \vDash) \\
&\text{sii} \ \big(F\big(t_1^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}]\big), \ldots, F\big(t_n^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}]\big)\big) \in r^{\boldsymbol{B}} && (\text{F un iso}) \\
&\text{sii} \ \big(t_1^{\boldsymbol{B}}[F(\vec{a})], \ldots, t_n^{\boldsymbol{B}}[F(\vec{a})]\big) \in r^{\boldsymbol{B}} && \big(\underline{\textit{Lema análogo para términos}}\big) \\
&\text{sii} \ \boldsymbol{B} \vDash r(t_1, \ldots, t_n)[F(\vec{a})] && (\text{def. de} \vDash)
\end{aligned}$$

Caso Inductivo $\mathbf{Teo}_{\boldsymbol{k}}$ implica $\mathbf{Teo}_{\boldsymbol{k+1}}$: Supongamos que vale Teo_k y probaremos que vale Teo_{k+1}. Sea $\varphi \in F_{k+1}^\tau - F_k^\tau$, ya que si $\varphi \in F_k^\tau$ sale directo. Por <u>*Teorema de lectura única de formulas*</u> hay varios casos

- Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ con $\varphi_1, \varphi_2 \in F_k^\tau$. Entonces

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \vDash \varphi[\vec{a}] \ &\text{sii} \ \boldsymbol{A} \vDash \varphi_1[\vec{a}] \ \text{ y } \ \boldsymbol{A} \vDash \varphi_2[\vec{a}] && (\text{def. de} \vDash) \\
&\text{sii} \ \boldsymbol{B} \vDash \varphi_1[F(\vec{a})] \ \text{ y } \ \boldsymbol{B} \vDash \varphi_2[F(\vec{a})] && (\text{Teo}_k) \\
&\text{sii} \ \boldsymbol{B} \vDash \varphi[F(\vec{a})] && (\text{def. de} \vDash)
\end{aligned}$$

- Los casos para $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ y $\varphi = \neg\varphi_1$ son análogos.
- Si $\varphi = \forall x_j \varphi_1$ con $\varphi_1 \in F_k^\tau$. Sea $\vec{a} \in A^N$ arbitraria. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \vDash \varphi[\vec{a}] \ &\text{sii para todo } a \in A, \text{ se da } \boldsymbol{A} \vDash \varphi_1\big[\downarrow_j^a(\vec{a})\big] && (\text{def. de} \vDash) \\
&\text{sii para todo } a \in A, \text{ se da } \boldsymbol{B} \vDash \varphi_1\Big[F\Big(\downarrow_j^a(\vec{a})\Big)\Big] && (\text{Teo}_k) \\
&\text{sii para todo } a \in A, \text{ se da } \boldsymbol{B} \vDash \varphi_1\Big[\downarrow_j^{F(a)}(F(\vec{a}))\Big] && (\text{deducción inteligente}) \\
&\text{sii para todo } b \in B, \text{ se da } \boldsymbol{B} \vDash \varphi_1\big[\downarrow_j^b(F(\vec{a}))\big] && (\text{F sobre ya que es iso}) \\
&\text{sii} \ \boldsymbol{B} \vDash \varphi[F(\vec{a})] && (\text{def. de} \vDash)
\end{aligned}$$

- El caso para $\varphi = \exists x_j \varphi_1$ con $\varphi_1 \in F_k^\tau$ es análogo.

Finalmente probamos Teo_k por inducción. ■

Lema análogo para términos: Sea $F : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un isomorfismo. Entonces

$$F\big(t^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}]\big) = t^{\boldsymbol{B}}[F(\vec{a})] \quad \text{para cada } t \in T^\tau \text{ y cada } \vec{a} \in A^N.$$

Teorema de lectura única de formulas: Dado $\varphi \in F^\tau$ se da una y solo una de las siguientes:

1) $\varphi = (t \equiv s)$ con $t, s \in T^\tau$, únicos. (2) $\varphi = r(t_1, \ldots, t_n)$ con $r \in \mathcal{R}_n^\tau$, $t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$, únicos.
(3) $\varphi = \neg\varphi_1$ con $\varphi_1 \in F_k^\tau$, único. (4) $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$ con $\eta \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in F_k^\tau$, únicos.
(5) $\varphi = Qv\varphi_1$ con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $\varphi_1 \in F_k^\tau$ y $v \in \text{Var}$, únicos.

3. Teorema. *Sea* $T = (\Sigma, \tau)$ *una teoría. Entonces* $\left(S^\tau/{\dashv\vdash_T}, \mathbf{s}^T, \boldsymbol{i}^T, {}^{c^T}, 0^T, 1^T\right)$ *es un álgebra de Boole.*
Nota: Pruebe solo el item (6).

Demostración:
Por definición de algebra de Boole, debemos probar que valen varias propiedades. En total (13), pero solo veremos la (6). Para cualquier $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S^\tau$ debe cumplirse la siguiente igualdad

$$[\varphi_1]_T \mathbf{s}^T \left([\varphi_2]_T \mathbf{s}^T [\varphi_3]_T\right) = \left([\varphi_1]_T \mathbf{s}^T [\varphi_2]_T\right) \mathbf{s}^T [\varphi_3]_T$$

Aplicando la definición de $\mathbf{s}^T$, básicamente tenemos que ver

$$[\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)]_T = [(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3]_T$$

Es decir, debemos probar que $T \vdash ((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \leftrightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$. Su prueba formal es

1.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	HIPOTESIS$\overline{1}$
2.	φ_1	HIPOTESIS$\overline{2}$
3.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(3)
4.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS$\overline{2}$ DISJUNCIONINTRODUCCION(3)
5.	$(\varphi_1 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$	CONCLUSION
6.	$(\varphi_2 \vee \varphi_3)$	HIPOTESIS$\overline{3}$
7.	φ_2	HIPOTESIS$\overline{4}$
8.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(7)
9.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS$\overline{4}$ DISJUNCIONINTRODUCCION(8)
10.	$(\varphi_2 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$	CONCLUSION
11.	φ_3	HIPOTESIS$\overline{5}$
12.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS$\overline{5}$ DISJUNCIONINTRODUCCION(11)
13.	$(\varphi_3 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$	CONCLUSION
14.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS$\overline{3}$ DIVISIONPORCASOS(6, 10, 13)
15.	$((\varphi_2 \vee \varphi_3) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$	CONCLUSION
16.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS$\overline{1}$ DIVISIONPORCASOS(1, 5, 15)
17.	$((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$	CONCLUSION
18.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	HIPOTESIS$\overline{6}$
19.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	HIPOTESIS$\overline{7}$
20.	φ_1	HIPOTESIS$\overline{8}$
21.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	TESIS$\overline{8}$ DISJUNCIONINTRODUCCION(19)
22.	$(\varphi_1 \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)))$	CONCLUSION
23.	φ_2	HIPOTESIS$\overline{9}$
24.	$(\varphi_2 \vee \varphi_3)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(23)
25.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	TESIS$\overline{9}$ DISJUNCIONINTRODUCCION(24)
26.	$(\varphi_2 \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)))$	CONCLUSION
27.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	TESIS$\overline{7}$ DIVISIONPORCASOS(19, 22, 16)
28.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)))$	CONCLUSION
29.	φ_3	HIPOTESIS$\overline{10}$
30.	$(\varphi_2 \vee \varphi_3)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(29)
31.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	TESIS$\overline{10}$ DISJUNCIONINTRODUCCION(30)
32.	$(\varphi_3 \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)))$	CONCLUSION
33.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	TESIS$\overline{6}$ DIVISIONPORCASOS(18, 28, 32)
34.	$(((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)))$	CONCLUSION
35.	$((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \leftrightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$	EQUIVALENCIAINTRODUCCION(17, 34)

■

Combo 4

1. Lema (Propiedades básicas de la deducción $\vdash$) **.** *Sea (Σ, τ) una teoría.*

(1) (Uso de Teoremas) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

*(2) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$. Si **R** s una regla distinta de GENERALIZACION y ELECCION y φ se deduce de $\varphi_1, ..., \varphi_n$ por la regla **R**, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.*

(3) $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ sii $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$. ↳

Demostración:

(1) Notar que basta con hacer el caso $n = 1$. Para $n \geq 2$ sale aplicando n veces el caso $n = 1$.
Supongamos que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1\}, \tau) \vdash \varphi$.
Sea $(\alpha_1, ..., \alpha_h, I_1, ..., I_h)$ una prueba formal de φ_1 en (Σ, τ).
Sea $(\psi_1, ..., \psi_m, J_1, ..., J_m)$ una prueba formal de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1\}, \tau)$.
Notar que por el *Lema (Cambio de indice de hipótesis)* y el *Lema (Cambio de nombres de constante auxiliares)* podemos suponer que estas dos pruebas no comparten ningún nombre de constante auxiliar y que tampoco comparten números asociados a hipótesis o tesis. Para cada $i = 1, ..., m$, definamos $\tilde{J}_i$ de la siguiente manera

Sea $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\overline{k} : k \in \mathbb{N}\}$

- Si $\psi_i = \varphi_1$ y $J_i = \alpha\text{AXIOMAPROPIO}$ entonces $\tilde{J}_i = \alpha\text{EVOCACION}(\overline{h})$.
- Si $\psi_i \neq \varphi_1$ y $J_i = \alpha\text{AXIOMAPROPIO}$, entonces $\tilde{J}_i = J_i$.
- Si $J_i \in \{\alpha\text{AXIOMALOGICO}, \alpha\text{CONCLUSION}, \alpha\text{HIPOTESIS}\overline{k}\}$, entonces $\tilde{J}_i = J_i$.
- Si $J_i = \alpha R\left(\overline{l_1}, ..., \overline{l_k}\right)$ y R alguna regla, entonces $\tilde{J}_i = \alpha R\left(\overline{l_1 + h}, ..., \overline{l_k + h}\right)$.

Es fácil chequear que $\left(\alpha_1 ... \alpha_h \varphi_1 ... \varphi_m, I_1 ... I_h \tilde{J}_1 ... \widetilde{J_m}\right)$ es una prueba formal de φ en (Σ, τ).

(2) Notar que

1.	φ_1	AXIOMAPROPIO
2.	φ_2	AXIOMAPROPIO
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	φ_n	AXIOMAPROPIO
$n+1$.	φ	$R\left(\overline{1}, ..., \overline{n}\right)$

es una prueba formal de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \tau)$, entonces por (1) tenemos que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

(3)

(→) Si $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash (\varphi \to \psi), \varphi$ y por (2)[17] esto implica que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.

(←) Si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$. Sea $(\varphi_1, ..., \varphi_n, J_1, ..., J_n)$ una prueba formal de ψ en $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$.
Entonces para cada $i = 1, ..., n$, definamos $\tilde{J}_i$ de la siguiente manera.

Sea $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\overline{k} : k \in \mathbb{N}\}$

- Si $\varphi_i = \varphi$ y $J_i = \alpha\text{AXIOMAPROPIO}$ entonces $\tilde{J}_i = \alpha\text{EVOCACION}(1)$.
- Si $\varphi_i \neq \varphi$ y $J_i = \alpha\text{AXIOMAPROPIO}$, entonces $\tilde{J}_i = J_i$.
- Si $J_i \in \{\alpha\text{AXIOMALOGICO}, \alpha\text{CONCLUSION}, \alpha\text{HIPOTESIS}\overline{k}\}$, entonces $\tilde{J}_i = J_i$.
- Si $J_i = \alpha R\left(\overline{l_1}, ..., \overline{l_k}\right)$ y R alguna regla, entonces $\tilde{J}_i = \alpha R\left(\overline{l_1 + 1}, ..., \overline{l_k + 1}\right)$.

Notar que $\widetilde{J_n}$ **no** es de la forma $\text{TESIS}\overline{k}\beta$ ya que si lo fuera también debería serlo J_n, entonces debería existir $J_{n+1} = \text{CONCLUSION}$, pero J_n es la ultima. Análogamente $\widetilde{J_n}$, tampoco es de la forma $\text{HIPOTESIS}\overline{k}$.
Sea m tal que ninguna J_i es igual a $\text{HIPOTESIS}\overline{m}$. Es fácil chequear que

$$\left(\varphi\varphi_1, ..., \varphi_n(\varphi \to \psi), \text{HIPOTESIS}\overline{m}\tilde{J}_1 ... \tilde{J}_{n-1}\ \text{TESIS}\overline{m}\tilde{J}_n\text{CONCLUSION}\right)$$

es una prueba formal de $(\varphi \to \psi)$ en (Σ, τ). ■

[17] usando $R = \text{MODUSPONENS}$.

Lema (Cambio de indice de hipótesis) :
Sea $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{J})$ una prueba formal de φ en (Σ, τ). Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $J_i \neq$ HIPOTESIS$\overline{\text{m}}$, para cada $i = 1, ..., n(\boldsymbol{\varphi})$. Supongamos que $\boldsymbol{J}_i =$ HIPOTESIS$\overline{\text{k}}$ y que $\boldsymbol{J}_j =$ TESIS$\overline{\text{k}}\alpha$, con $[\alpha]_1 \notin$ Num.
Sea $\tilde{\boldsymbol{J}}$ el resultado de remplazar en $\boldsymbol{J}$ la justificación $\boldsymbol{J}_i$ por HIPOTESIS$\overline{\text{m}}$ y la justificació $\boldsymbol{J}_j$ por TESIS$\overline{\text{m}}\alpha$.
Entonces $\left(\boldsymbol{\varphi}, \tilde{\boldsymbol{J}}\right)$ es una prueba formal de φ en (Σ, τ).

Lema (Cambio de nombres de constante auxiliares) :
Sea $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{J})$ una prueba formal de φ en (Σ, τ). Sea C_1 el conjunto de nombres de constante auxiliares de $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{J})$.
Sea $e \in C_1$. Sea $\tilde{e} \notin C \cup C_1$ tal que $(C \cup (C_1 - \{e\}) \cup \{\tilde{e}\}, F, R, a)$ es un tipo.
Sea $\tilde{\varphi}_i =$ resultado de remplazar en φ_i cada ocurrencia de e por $\tilde{e}$.
Entonces $\left(\tilde{\varphi}_1 ... \tilde{\varphi}_{n(\boldsymbol{\varphi})}, \boldsymbol{J}\right)$ es una prueba formal de φ en (Σ, τ).

2. Teorema. *Sea* $(B, \mathsf{s}, \boldsymbol{i}, {}^c, 0, 1)$ *un álgebra de Boole y sean* $a, b \in B$*.Se tiene que:*
(1) $(a \,\boldsymbol{i}\, b)^c = a^c \,\mathsf{s}\, b^c$
(2) $a \,\boldsymbol{i}\, b = 0$ sii $b \leq a^c$

Demostración:
(1) Para probar, veamos que $a^c \,\mathsf{s}\, b^c$ es el complemento de $a \,\boldsymbol{i}\, b$. Es decir debemos ver que

$$(a \,\boldsymbol{i}\, b) \,\mathsf{s}\, (a^c \,\mathsf{s}\, b^c) = 1 \text{ y } (a \,\boldsymbol{i}\, b) \,\boldsymbol{i}\, (a^c \,\mathsf{s}\, b^c) = 0$$

$$\begin{aligned}
& (a \,\boldsymbol{i}\, b) \,\mathsf{s}\, (a^c \,\mathsf{s}\, b^c) & \\
&= (a^c \,\mathsf{s}\, b^c) \,\mathsf{s}\, (a \,\boldsymbol{i}\, b) && (\text{I2}) \\
&= ((a^c \,\mathsf{s}\, b^c) \,\mathsf{s}\, a) \,\boldsymbol{i}\, ((a^c \,\mathsf{s}\, b^c) \,\mathsf{s}\, b) && (\text{Dis}_2) \\
&= ((a \,\mathsf{s}\, a^c) \,\mathsf{s}\, b^c) \,\boldsymbol{i}\, ((b \,\mathsf{s}\, b^c) \,\mathsf{s}\, a^c) && (\text{I4 e I2}) \\
&= (1 \,\mathsf{s}\, b^c) \,\boldsymbol{i}\, (1 \,\mathsf{s}\, a^c) && (\text{I9}) \\
&= 1 \,\boldsymbol{i}\, 1 && (\text{I1}) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (a \,\boldsymbol{i}\, b) \,\boldsymbol{i}\, (a^c \,\mathsf{s}\, b^c) & \\
&= ((a \,\boldsymbol{i}\, b) \,\boldsymbol{i}\, a^c) \,\mathsf{s}\, ((a \,\boldsymbol{i}\, b) \,\boldsymbol{i}\, b^c) && (\text{Dis}_1) \\
&= ((a \,\boldsymbol{i}\, a^c) \,\boldsymbol{i}\, b) \,\mathsf{s}\, ((b \,\boldsymbol{i}\, b^c) \,\boldsymbol{i}\, a) && (\text{I5 e I3}) \\
&= (0 \,\boldsymbol{i}\, b) \,\mathsf{s}\, (0 \,\boldsymbol{i}\, a) && (\text{I8}) \\
&= 0 \,\mathsf{s}\, 0 && (\text{I1}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Entonces $a^c \,\mathsf{s}\, b^c$ es un complemento de $(a \,\boldsymbol{i}\, b)$ pero el *Lema (Unicidad del Complemento)* aplicado a $(B, \mathsf{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$, nos dice que es único, por lo tanto $(a \,\boldsymbol{i}\, b)^c = a^c \,\mathsf{s}\, b^c$.
(2)
(→) Supongamos que $a \,\boldsymbol{i}\, b = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
b &= (b \,\boldsymbol{i}\, a) \,\mathsf{s}\, (b \,\boldsymbol{i}\, a^c) \quad (\textit{Lema útil}) \\
&= (a \,\boldsymbol{i}\, b) \,\mathsf{s}\, (b \,\boldsymbol{i}\, a^c) \\
&= 0 \,\mathsf{s}\, (b \,\boldsymbol{i}\, a^c) \\
&= b \,\boldsymbol{i}\, a^c
\end{aligned}$$

Dado que $b \,\boldsymbol{i}\, a^c$ es cota inferior de a^c tenemos que $b \,\boldsymbol{i}\, a^c \leq a^c$, remplazando por lo anterior sale que $b \leq a^c$.
(←) Supongamos que $b \leq a^c$. Por reflexividad $a \leq a$ y el *Lema (Monotonía)* aplicado al reticulado par $(B, \leq)$ nos dice que $a \,\boldsymbol{i}\, b \leq a \,\boldsymbol{i}\, a^c = 0$, pero 0 es mínimo, entonces $0 \leq a \,\boldsymbol{i}\, b$. Entonces por antisimetría $a \,\boldsymbol{i}\, b = 0$.■

Lema (Unicidad del Complemento) : Sea $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Si $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ es distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento.
Lema (útil) : Sea $(B, \mathsf{s}, \boldsymbol{i}, {}^c, 0, 1)$ un álgebra de Boole. Entonces para cualquiera $x, y \in B$ se tiene que $y = (y \,\boldsymbol{i}\, x) \,\mathsf{s}\, (y \,\boldsymbol{i}\, x^c)$.
Lema (Monotonía) : Sea $(L, \leq)$ un reticulado par y sean $x, y, z, w \in L$ tales que $x \leq z$ e $y \leq w$. Entonces $x \,\boldsymbol{i}\, y \leq z \,\boldsymbol{i}\, w$.
Lema : Sea $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$ un reticulado terna. Entonces, $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$ satisface $\text{Dis}_1 \Leftrightarrow (L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$ satisface Dis_2.

3. Lema . *Sea* $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$ *y* $(L', \mathsf{s}', \boldsymbol{i}')$ *reticulados terna y sean* $(L, \leq)$ *y* $(L', \leq')$ *los posets asociados.*
Sea $F : L \to L'$ *una función.*
Entonces F *es un isomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$ *en* $(L', \mathsf{s}', \boldsymbol{i}')$ *sii* F *es un isomorfismo de* $(L, \leq)$ *en* $(L', \leq')$*.*

Demostración:
(→) Supongamos que F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \boldsymbol{i}')$.
Para que F sea un isomorfismo $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$, debemos ver:

(1) $\boldsymbol{F}$ **es biyectiva**. Lo cual sale directo ya que F es isomorfismo de reticulados.
(2) $\boldsymbol{F}$ **es un homomorfismo de** $\boldsymbol{(L, \leq)}$ **en** $\boldsymbol{(L', \leq')}$. Sean $x, y \in L$ tales que $x \leq y$.
Entonces $x \,\mathsf{s}\, y = y$, por lo cual $F(y) = F(x \,\mathsf{s}\, y) = F(x) \,\mathsf{s}'\, F(y)$ es decir $F(x) \leq' F(y)$.
(3) $\boldsymbol{F^{-1}}$ **es un homomorfismo de** $\boldsymbol{(L', \leq')}$ **en** $\boldsymbol{(L, \leq)}$. Análogo al anterior.

Entonces F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$.
(←) Supongamos que F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$.
Para que F sea un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \boldsymbol{i}')$, debemos ver:

(1) $\boldsymbol{F}$ **es biyectiva**. Lo cual sale directo ya que F es isomorfismo de posets.
(2) $\boldsymbol{F}$ **es un homomorfismo de** $\boldsymbol{(L, \mathsf{s}, i)}$ **en** $\boldsymbol{(L', \mathsf{s}', i')}$. Sean $x, y \in L$.

$$\begin{aligned} F(x \,\mathsf{s}\, y) &= F(\sup(\{x, y\})) && (\underline{\textit{Teorema de Dedekind}}) \\ &= \sup(\{F(x), F(y)\}) && \left(\underline{\textit{Lema sup e inf en iso de posets}}\right) \\ &= F(x) \,\mathsf{s}'\, F(y) && (\underline{\textit{Teorema de Dedekind}}) \end{aligned}$$

entonces $F(x \,\mathsf{s}\, y) = F(x) \,\mathsf{s}'\, F(y)$ y de forma similar se prueba que $F(x \,\boldsymbol{i}\, y) = F(x) \,\boldsymbol{i}'\, F(y)$.
(3) $\boldsymbol{F^{-1}}$ **es un homomorfismo de** $\boldsymbol{(L, \mathsf{s}, i)}$ **en** $\boldsymbol{(L', \mathsf{s}', i')}$. Análogo al anterior.

Entonces F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \boldsymbol{i}')$. ■

Teorema de Dedekind (Combo 2.1) : Sea $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$ un reticulado terna. La relación binaria definida por:
$x \leq y$ sii $x \,\mathsf{s}\, y = y$ es un orden parcial sobre L para el cual se cumple que cualesquiera sean $x, y \in L$:

$$\sup(\{x, y\}) = x \,\mathsf{s}\, y \qquad \inf(\{x, y\}) = x \,\boldsymbol{i}\, y$$

Lema (sup e inf en Isomorfismo de Posets) :
Sea $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets y sea $F : P \to P'$ un isomorfismo de posets. Para cada $x, y, z \in P$, tenemos que

$$z = \sup(\{x, y\}) \quad \text{sii} \quad F(z) = F(\sup(\{x, y\})) = \sup(\{F(x), F(y)\})$$
$$z = \inf(\{x, y\}) \quad \text{sii} \quad F(z) = F(\inf(\{x, y\})) = \inf(\{F(x), F(y)\})$$

Combo 5 y 6

1. Teorema de Completitud. *Sea* $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría de primer orden. *Si* $T \vDash \varphi$, *entonces* $T \vdash \varphi$.
Nota: Haga solo el caso en que τ tiene una cantidad infinita de nombres de cte que no ocurren en las sentencias de Σ. En la prueba no es necesario que probar los items (1) y (5) (Combo 6: (1), (2), (3) y (4)).

Demostración:
Lo probaremos por el absurdo, es decir supongamos que hay una sentencia φ_0 tal que $T \vDash \varphi_0$ pero $T \nvdash \varphi_0$.
Notar que como $T \nvdash \varphi_0$, tenemos que $[\varphi_0]_T \neq 1^T = \{\varphi \in S^\tau : T \vdash \varphi\}$ y ademas $[\neg\varphi_0]_T \neq 0^T$.[18]
Ahora por el *Lema de Enumeración* hay una infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, ...) \in F^{\tau\mathbb{N}}$ tal que
- $|\mathrm{Li}(\gamma_j)| \leq 1$, para cada $j \in \mathbb{N}$.
- Si $|\mathrm{Li}(\gamma)| \leq 1$, entonces $\gamma = \gamma_j$, para algún $j \in \mathbb{N}$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, defino $w_j \in \mathrm{Var}$ tal que $\mathrm{Li}(\gamma_j) \subseteq \{w_j\}$. Ahora, para cada $j \in \mathbb{N}$ declaremos $\gamma_j =_d \gamma_j(w_j)$.
Notar que por el *Lema del ínfimo* tenemos que $\inf\left(\left\{\left[\gamma_j(t)\right]_T : t \in T_c^\tau\right\}\right) = \left[\forall w_j \gamma_j(w_j)\right]_T$ para cada $j \in \mathbb{N}$.
Por el *Teorema de Rasiova Y Sikorski* tenemos que hay un filtro primo $\mathcal{U}$ de $\mathcal{A}_T$, el cual cumple:
(a) $[\neg\varphi_0]_T \in \mathcal{U}$.
(b) Para cada $j \in \mathbb{N}$, si $\left\{\left[\gamma_j(t) : t \in T_c^\tau\right]\right\} \subseteq \mathcal{U}$, implica $\left[\forall w_j \gamma_j(w_j)\right]_T \in \mathcal{U}$.
Ya que $(\gamma_1, \gamma_2, ...)$ cubre todas las formulas con a lo sumo una variable libre, podemos reescribir (b) como:
(b)' Para cada $\varphi =_d \varphi(v) \in F^\tau$, si $\{[\varphi(t) : t \in T_c^\tau]\} \subseteq \mathcal{U}$, implica $[\forall v \varphi(v)]_T \in \mathcal{U}$.
Definamos la siguiente relación sobre T_c^τ:

$$t \bowtie s \quad \text{sii} \quad [(t = s)]_T \in \mathcal{U}$$

Veamos entonces que:
(1) $\bowtie$ una relación de equivalencia.
(2) Para cada $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F^\tau, t_1, ..., t_n, s_1, ..., s_n \in T_c^\tau$, si $t_1 \bowtie s_1, ..., t_n \bowtie s_n$. Entonces

$$[\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U} \quad \text{sii} \quad [\varphi(s_1, ..., s_n)]_T \in \mathcal{U}$$

(3) Para cada $f \in \mathcal{F}_n, t_1, ..., t_n, s_1, ..., s_n \in T_c^\tau$, se da que

$$t_1 \bowtie .s_1, ..., t_n \bowtie s_n \quad \text{implica} \quad f(t_1, ..., t_n) \bowtie f(s_1, ..., s_n)$$

(2) Notar que

$$T \vdash (\,(\,(t_1 \equiv s_1) \wedge ... \wedge (t_n \equiv s_n) \wedge \varphi(t_1, ..., t_n)\,) \rightarrow \varphi(s_1, ..., s_n)\,)$$

ahora gracias al *Lema (de* $\leq^T$*)* sabemos que

$$[(t_1 \equiv s_1) \wedge ... \wedge (t_n \equiv s_n) \wedge \varphi(t_1, ..., t_n)]_T \quad \leq^T \quad [\varphi(s_1, ..., s_n)]_T$$

y por definición de $\boldsymbol{i}^T$, ($[\varphi]_T\ \boldsymbol{i}^T\ [\psi]_T = [\varphi \wedge \psi]_T$) tenemos que

$$[t_1 \equiv s_1]_T\ \boldsymbol{i}^T \ ...\ \boldsymbol{i}^T\ [t_n \equiv s_n]_T\ \boldsymbol{i}^T\ [\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \quad \leq^T \quad [\varphi(s_1, ..., s_n)]_T \qquad (*)$$

en particular como $t_1 \bowtie s_1, ..., t_n \bowtie s_n$, por definición de $\bowtie$ tenemos que

$$[t_1 \equiv s_1]_T, ..., [t_n \equiv s_n]_T \in \mathcal{U}$$

y por ser $\mathcal{U}$ un filtro (Item (2), $x, y \in F \Rightarrow x\ \boldsymbol{i}\ y \in F$) tenemos que

$$[t_1 \equiv s_1]_T\ \boldsymbol{i}^T\ ...\ \boldsymbol{i}^T\ [t_n \equiv s_n]_T \in \mathcal{U}$$

pero si suponemos $[\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}$, por lo mismo tenemos que

$$[t_1 \equiv s_1]_T\ \boldsymbol{i}^T\ ...\ \boldsymbol{i}^T\ [t_n \equiv s_n]_T\ \boldsymbol{i}^T\ [\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}$$

y de nuevo por ser $\mathcal{U}$ un filtro ($x \in \mathcal{U}$ y $x \leq^T y \Rightarrow y \in \mathcal{U}$) y $(*)$ tengo que $[\varphi(s_1, ..., s_n)]_T \in \mathcal{U}$. Conclusión

$$[\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U} \quad \text{implica} \quad [\varphi(s_1, ..., s_n)]_T \in \mathcal{U}$$

La otra implicación es análoga.

[18] Dada $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría. Para toda sentencia $\varphi \in S^\tau$
- φ es un teorema si T sii $T \vdash \varphi$.
- φ es refutable si T sii $T \vdash \neg\varphi$.

y ademas
- $1^T = \{\varphi \in S^\tau : \varphi \text{ es un teorema de } T\} = \{\varphi \in S^\tau : T \vdash \varphi\}$
- $0^T = \{\varphi \in S^\tau : \varphi \text{ es refutable en } T\} = \{\varphi \in S^\tau : T \vdash \neg\varphi\}$

(3) Sea $f \in \mathcal{F}_n, t_1, ..., t_n, s_1, ..., s_n \in T_c^\tau$ y supongamos $t_1 \bowtie .s_1, ..., t_n \bowtie s_n$.
Si tomamos $\varphi = (f(v_1, ..., v_n) \equiv f(s_1, ..., s_n))$ aplicando (2) obtenemos que

$$[\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U} \quad \text{sii} \quad [\varphi(s_1, ..., s_n)]_T \in \mathcal{U}$$

$$[f(t_1, ..., t_n) \equiv f(s_1, ..., s_n)]_T \in \mathcal{U} \quad \text{sii} \quad [(f(s_1, ..., s_n) \equiv f(s_1, ..., s_n)]_T \in \mathcal{U}$$

Pero $[(f(s_1, ..., s_n) \equiv f(s_1, ..., s_n)]_T = 1^T$ y $1^T \in \mathcal{U}$, entonces $[f(s_1, ..., s_n) \equiv f(s_1, ..., s_n)]_T \in \mathcal{U}$.
Así concluimos que $[f(t_1, ..., t_n) \equiv f(s_1, ..., s_n)]_T \in \mathcal{U}$, es decir $f(t_1, ..., t_n) \bowtie f(s_1, ..., s_n)$.

Definamos ahora un modelo $\boldsymbol{A}_\mathcal{U}$ de tipo τ de la siguiente manera:

- Universo de $\boldsymbol{A}_\mathcal{U} = T_c^\tau / \bowtie$.
- $c^{\boldsymbol{A}_\mathcal{U}} = c/\bowtie$, para cada $c \in \mathcal{C}$.
- $f^{\boldsymbol{A}_\mathcal{U}}(t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie) = f(t_1, ..., t_n)/\bowtie$, para cada $f \in \mathcal{F}_n$ y $t_1, ..., t_n \in T_c^\tau$.
- $r^{\boldsymbol{A}_\mathcal{U}} = \left\{(t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie) : [r(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}\right\}$, para cada $r \in \mathcal{R}_n$.

Notar que la definición de $f^{\boldsymbol{A}_\mathcal{U}}$ es inambigua gracias a (3). Probemos las siguientes propiedades básicas:

(4) Para cada $t =_d t(v_1, ..., v_n) \in T^\tau, t_1, ..., t_n \in T_c^\tau$, tenemos que

$$t^{\boldsymbol{A}_\mathcal{U}}[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] = t(t_1, ..., t_n)/\bowtie$$

(5) Para cada $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F^\tau, t_1, ..., t_n \in T_c^\tau$, se da que

$$\boldsymbol{A}_\mathcal{U} \vDash \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \quad \text{sii} \quad [\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}$$

(4) Lo vamos a probar por inducción en el k tal que $t \in T_k^\tau$.
Caso Base: Sea $t =_d t(v_1, ..., v_n) \in T_0^\tau, t_1, ..., t_n \in T_c^\tau$. Tenemos dos casos:

- Si $t = c \in \mathcal{C}$.

$$\begin{aligned} t^{\boldsymbol{A}_\mathcal{U}}[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] &= c^{\boldsymbol{A}_\mathcal{U}} && (\text{Lema, Carácter recursivo de la notación } t^{\boldsymbol{A}}[a_1, ..., a_n]) \\ &= c/\bowtie && (\text{def. } \boldsymbol{A}_\mathcal{U}) \\ &= t(t_1, ..., t_n)/\bowtie && (\text{por Notación Declaratoria}) \end{aligned}$$

- Si $t = v_i$ para algún $i = 1, ..., n$.

$$\begin{aligned} t^{\boldsymbol{A}_\mathcal{U}}[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] &= t_i/\bowtie && (\text{Lema, Carácter recursivo de la notación } t^{\boldsymbol{A}}[a_1, ..., a_n]) \\ &= t(t_1, ..., t_n)/\bowtie && (\text{por Notación Declaratoria}) \end{aligned}$$

Caso Inductivo: Supongamos que vale para cada $s \in T_k^\tau$ y veamos que se cumple para $t \in T_{k+1}^\tau$.
Sea $t =_d t(v_1, ..., v_n) \in T_{k+1}^\tau, t_1, ..., t_n \in T_c^\tau$. Si $t \in T_k^\tau$, directo por HI. Si $t =_d t(v_1, ..., v_n) \in T_{k+1}^\tau - T_k^\tau$, se da que $t =_d f(s_1, ..., s_m)$ con $f \in \mathcal{F}_m$ y $s_1, ..., s_m \in T_k^\tau$. Por convención notacional $s_i =_d s_i(v_1, ..., v_n)$.
Entonces por el *Lema, Carácter recursivo de la notación* $t^{\boldsymbol{A}}[a_1, ..., a_n]$ tenemos que

$$t^{\boldsymbol{A}_\mathcal{U}}[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] = f^{\boldsymbol{A}_\mathcal{U}}\left(s_1^{\boldsymbol{A}_\mathcal{U}}[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie], ..., s_m^{\boldsymbol{A}_\mathcal{U}}[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie]\right)$$

luego por HI $s_i^{\boldsymbol{A}_\mathcal{U}}[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] = s_i(t_1, ..., t_n)/\bowtie$, entonces

$$t^{\boldsymbol{A}_\mathcal{U}}[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] = f^{\boldsymbol{A}_\mathcal{U}}(s_1(t_1, ..., t_n)/\bowtie, ..., s_m(t_1, ..., t_n)/\bowtie)$$

y por definición de $f^{\boldsymbol{A}_\mathcal{U}}$

$$t^{\boldsymbol{A}_\mathcal{U}}[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] = f(s_1(t_1, ..., t_n), ..., s_m(t_1, ..., t_n))/\bowtie$$

y por notación declaratoria llegamos a que

$$t^{\boldsymbol{A}_\mathcal{U}}[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] = t(t_1, ..., t_n)/\bowtie$$

REVISAR ...

(5) Lo probaremos por inducción en el k tal que $\varphi \in F_k^\tau$.

<u>Caso Base</u>: Sea $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F_0^\tau, t_1, ..., t_n \in T_c^\tau$. Tenemos dos casos:

- Si $\varphi = (t \equiv s)$ con $t, s \in T^\tau$. Por convención notacional tenemos $t =_d t(v_1, ..., v_n)$ y $s =_d s(v_1, ..., v_n)$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\mathcal{U}} \vDash \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \quad &\text{sii} \quad t^{\boldsymbol{A}_{\mathcal{U}}}[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] = s^{\boldsymbol{A}_{\mathcal{U}}}[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \\
&\text{sii} \quad t(t_1, ..., t_n)/\bowtie = s(t_1, ..., t_n)/\bowtie && \text{(por 4)} \\
&\text{sii} \quad t(t_1, ..., t_n) \bowtie s(t_1, ..., t_n) && \text{(def. clase equiv)} \\
&\text{sii} \quad [(t(t_1, ..., t_n) \equiv s(t_1, ..., t_n))]_T \in \mathcal{U} && (\text{def} \bowtie) \\
&\text{sii} \quad [\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}
\end{aligned}$$

- Si $\varphi = r(s_1, ..., s_m)$ con $r \in \mathcal{R}_m$ y $s_1, ..., s_m \in T^\tau$. Por convención notacional $s_i =_d s_i(v_1, ..., v_n)$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\mathcal{U}} \vDash \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \quad &\text{sii} \quad \left(s_1^{\boldsymbol{A}_{\mathcal{U}}}[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie], ..., s_m^{\boldsymbol{A}_{\mathcal{U}}}[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie]\right) \in r^{\boldsymbol{A}_{\mathcal{U}}} \\
&\text{sii} \quad (s_1(t_1, ..., t_n)/\bowtie, ..., s_m(t_1, ..., t_n)/\bowtie) \in r^{\boldsymbol{A}_{\mathcal{U}}} && \text{(por 4)} \\
&\text{sii} \quad \left[r\left(s_1(t_1, ..., t_n), ..., s_{m(t_1, ..., t_n)}\right)\right]_T \in \mathcal{U} && (\text{def } r^{\boldsymbol{A}_{\mathcal{U}}}) \\
&\text{sii} \quad [\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}
\end{aligned}$$

<u>Caso Inductivo</u>: Supongamos que vale para cada $\psi \in F_k^\tau$ y veamos que se cumple para $\varphi \in F_{k+1}^\tau$.
Sea $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F_{k+1}^\tau, t_1, ..., t_n \in T_c^\tau$. Si $\varphi \in F_k^\tau$, es directo por HI.
Entonces veamos $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F_{k+1}^\tau - F_k^\tau$. Tenemos varios casos para la forma de φ:

- Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$. Por convención notacional $\varphi_i =_d \varphi_i(v_1, ..., v_n)$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\mathcal{U}} \vDash \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \quad &\text{sii} \quad \boldsymbol{A}_{\mathcal{U}} \vDash \varphi_1[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \text{ y } \boldsymbol{A}_{\mathcal{U}} \vDash \varphi_2[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \\
&\text{sii} \quad [\varphi_1(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U} \text{ y } [\varphi_2(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U} && \text{(por HI)} \\
&\text{sii} \quad [\varphi_1(t_1, ..., t_n) \; \boldsymbol{i}^T \; \varphi_2(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U} && \text{(??????)} \\
&\text{sii} \quad [\varphi_1(t_1, ..., t_n) \wedge \varphi_2(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U} && (\text{def. } \boldsymbol{i}^T) \\
&\text{sii} \quad [\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}
\end{aligned}$$

- Si $\varphi = \forall v \varphi_1$, con $v \in \mathrm{Var} - \{v_1, ..., v_n\}$. Por convención notacional $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n)$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\mathcal{U}} \vDash \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \quad &\text{sii} \quad \boldsymbol{A}_{\mathcal{U}} \vDash \varphi_1[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie, t/\bowtie] \quad \text{para todo } t \in T_c^\tau \\
&\text{sii} \quad [\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)]_T \in \mathcal{U} \quad \text{para todo } t \in T_c^\tau && \text{(por HI)} \\
&\text{sii} \quad [\forall v_1 \varphi_1(t_1, ..., t_n, t)]_T \in \mathcal{U} \\
&\text{sii} \quad [\varphi(t_1, ..., t_n, t)]_T \in \mathcal{U}
\end{aligned}$$

- Si $\varphi = \exists v \varphi_1$, con $v \in \mathrm{Var} - \{v_1, ..., v_n\}$.
  Por convención notacional $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n)$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\mathcal{U}} \vDash \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \quad &\text{sii} \quad \boldsymbol{A}_{\mathcal{U}} \vDash \varphi_1[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie, t/\bowtie] \quad \text{para algún } t \in T_c^\tau \\
&\text{sii} \quad [\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)]_T \in \mathcal{U} \quad \text{para algún } t \in T_c^\tau && \text{(por HI)} \\
&\text{sii} \quad \left([\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)]_T\right)^{c^T} \notin \mathcal{U} \quad \text{para algún } t \in T_c^\tau \\
&\text{sii} \quad [\neg\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)]_T \notin \mathcal{U} \quad \text{para algún } t \in T_c^\tau \\
&\text{sii} \quad [\forall v \neg\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)]_T \notin \mathcal{U} \quad \text{para algún } t \in T_c^\tau \\
&\text{sii} \quad \left([\forall v \neg\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)]_T\right)^{c^T} \in \mathcal{U} \quad \text{para algún } t \in T_c^\tau \\
&\text{sii} \quad [\neg\forall v \neg\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)]_T \in \mathcal{U} \quad \text{para algún } t \in T_c^\tau \\
&\text{sii} \quad [\exists v_1 \varphi_1(t_1, ..., t_n, t)]_T \in \mathcal{U} \\
&\text{sii} \quad [\varphi(t_1, ..., t_n, t)]_T \in \mathcal{U}
\end{aligned}$$

Pero ahora notar que (5) en particular nos dice que, $\boldsymbol{A}_{\mathcal{U}} \vDash \psi$ sii $[\psi]_T \in \mathcal{U}$ para cada $\psi \in S^\tau$. De esta forma llegamos que $\boldsymbol{A}_{\mathcal{U}} \vDash \Sigma$ y $\boldsymbol{A}_{\mathcal{U}} \vDash \neg\varphi_0$, lo cual contradice la suposición de que $T \vDash \varphi_0$.

REVISAR ... ■

Lema de Enumeración : Sea τ un tipo. Hay una infinitupla $(\gamma_1, \gamma_{,2}, ...) \in F^{\tau\mathbb{N}}$ tal que

- $|\mathrm{Li}(\gamma_j)| \leq 1$, para cada $j \in \mathbb{N}$.
- Si $|\mathrm{Li}(\gamma)| \leq 1$, entonces $\gamma = \gamma_j$, para algún $j \in \mathbb{N}$.

Lema del ínfimo : Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría y supongamos que τ tiene una cantidad infinita de nombres de cte que no ocurren en las sentencias de Σ. Entonces para cada formula $\varphi =_d \varphi(v)$, se tiene que en el algebra de Lindenbaum $\mathcal{A}_T$, se cumple $[\forall v \varphi]_T = \inf(\{[\varphi(t)]_T : t \in T_c^\tau\})$

Teorema de Rasiova Y Sikorski : Sea $(B, \mathsf{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$ un algebra de Boole. Sea $a \in B$, $a \neq 0$. Supongamos que (A_1, A_2,...) es una infinitupla de subconjuntos de B tal que existe $\inf(A_j)$ para cada $j = 1, 2, ...$. Entonces hay un filtro primo P el cual cumple:

(a) $a \in P$.

(b) $A_j \subseteq P$ implica $\inf(A_j) \in P$, para cada $j = 1, 2, ...$

Lema (de $\leq^T$) : Sea T una teoría. Se tiene que $[\varphi]_T \leq^T [\psi]_T$ sii $T \vdash (\varphi \to \psi)$.

Combo 7

1. Lema (Propiedades básicas de la deducción $\vdash$). *Sea (Σ, τ) una teoría.*

(1) (Uso de Teoremas) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

*(2) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$. Si **R** s una regla distinta de GENERALIZACION y ELECCION y φ se deduce de $\varphi_1, ..., \varphi_n$ por la regla **R**, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.*

(3) $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ sii $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$. .

Nota: Mismo que el Combo 4.1 ↳

2. Lema. *Sea $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$ reticulados terna y sea θ una congruencia de $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$. Entonces*

(1) $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\boldsymbol{i}})$ es un reticulado terna.

(2) El orden parcial $\tilde{\leq}$ asociado al reticulado terna $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\boldsymbol{i}})$ cumple

$$x/\theta \mathrel{\tilde{\leq}} y/\theta \quad \text{sii} \quad y\theta(x \mathsf{s} y)$$

Demostración:

Recordemos las definiciones:

$$x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, y/\theta = (x \mathsf{s} y)/\theta \qquad \text{y} \qquad x/\theta \,\tilde{\boldsymbol{i}}\, y/\theta = (x \boldsymbol{i} y)/\theta$$

(1) Veamos entonces que $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\boldsymbol{i}})$ cumple las (I1)-(I7) propiedades para ser un reticulado terna.

Sean $x/\theta, y/\theta, z/\theta \in L/\theta$ elementos arbitrarios.

(I1) $x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; x/\theta = (x \mathsf{s} x)/\theta = x/\theta \quad , \quad x/\theta \;\tilde{\boldsymbol{i}}\; x/\theta = (x \boldsymbol{i} x)/\theta = x/\theta$

(I2) $x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta = (x \mathsf{s} y)/\theta = (y \mathsf{s} x)/\theta = y/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; x/\theta$

(I3) Análogo al anterior.

(I4) $(x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta) \;\tilde{\mathsf{s}}\; z/\theta = ((x \mathsf{s} y)/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; z/\theta) = ((x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z)/\theta = (x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z))/\theta$
$= (x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; (y \mathsf{s} z)/\theta) = (x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; (y/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; z/\theta))$

(I5) Análogo al anterior.

(I6) $x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; (x/\theta \;\tilde{\boldsymbol{i}}\; y/\theta) = (x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; (x \boldsymbol{i} y)/\theta) = (x \mathsf{s} (x \boldsymbol{i} y))/\theta = x/\theta$

(I7) Análogo al anterior.

(2) Por definición de $\tilde{\leq}$ tenemos que

$$x/\theta \mathrel{\tilde{\leq}} y/\theta \quad \text{sii} \quad y/\theta = x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta$$

pero por definición de $\tilde{\mathsf{s}}$ tenemos que $x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta = (x \mathsf{s} y)/\theta$. Entonces

$$x/\theta \mathrel{\tilde{\leq}} y/\theta \quad \text{sii} \quad y/\theta = (x \mathsf{s} y)/\theta$$

y como no es difícil ver que vale $y/\theta = (x \mathsf{s} y)/\theta$ sii $y\theta(x \mathsf{s} y)$[19], tenemos que

$$x/\theta \mathrel{\tilde{\leq}} y/\theta \quad \text{sii} \quad y\theta(x \mathsf{s} y)$$

■

3. Lema. *Sea $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \boldsymbol{i}')$ reticulados terna y sean $(L, \leq)$ y $(L', \leq')$ los posets asociados.*

Sea $F : L \to L'$ una función.

Entonces F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \boldsymbol{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \boldsymbol{i}')$ sii F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$.

Nota: Mismo que el Combo 4.3 ↳

[19]Dada una una relación de equivalencia R sobre un conjunto A.
Sea $a \in A$ arbitrario, como R es reflexiva, tengo que aRa, entonces $a \in a/R$.
Sean $a, b \in A$ arbitrarios.
(→) Si $\boldsymbol{a/R = b/R}$ tenemos que $b \in a/R$ entonces $\boldsymbol{aRb}$.
(←) Si $\boldsymbol{aRb}$. Tomamos $c \in a/R$, entonces aRc, por simetría bRa y por transitividad bRc, luego $c \in b/R$. Por lo tanto $a/R \subseteq b/R$. Tomamos $c \in b/R$, entonces bRc, por transitividad aRc, luego $c \in a/R$. Por lo tanto $b/R \subseteq a/R$. Conclusión $\boldsymbol{a/R = b/R}$.

Combo 8

1. Lema. *Supongamos que $F : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F^\tau$. Entonces*

$$\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n] \ \text{ sii } \ \boldsymbol{B} \vDash \varphi[F(a_1), ..., F(a_n)]$$

para cada $a_1, ..., a_n \in \boldsymbol{A}$. (El Como 3.2 es el mismo Lema pero para infinituplas)

Demostración:

Llamaremos $(*)$ al *Lema Carácter recursivo de la notación $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$* y probaremos por inducción en k:

- $\mathbf{Teo}_{\boldsymbol{k}}$: Supongamos que $F : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F_k^\tau$. Entonces
$$\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n] \ \text{ sii } \ \boldsymbol{B} \vDash \varphi[F(a_1), ..., F(a_n)] \quad \text{para cada } a_1, ..., a_n \in A$$

Caso Base: Sea $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F_0^\tau$ y $a_1, ..., a_n \in \boldsymbol{A}$. Por definición de F_0^τ tenemos dos casos:

- Si $\varphi = (t \equiv s)$ con $t, s \in T^\tau$. Por convención notacional tenemos $t =_d t(v_1, ..., v_n)$ y $s =_d s(v_1, ..., v_n)$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n] \ &\text{sii} \ t^{\boldsymbol{A}}[a_1, ..., a_n] = s^{\boldsymbol{A}}[a_1, ..., a_n] && (*)\\
&\text{sii} \ F\big(t^{\boldsymbol{A}}[a_1, ..., a_n]\big) = F\big(s^{\boldsymbol{A}}[a_1, ..., a_n]\big) && \text{(por ser F inyectiva)}\\
&\text{sii} \ t^{\boldsymbol{B}}[F(a_1), ..., F(a_n)] = s^{\boldsymbol{B}}[F(a_1), ..., F(a_n)] && \text{(Lema análogo para términos)}\\
&\text{sii} \ \boldsymbol{B} \vDash \varphi[F(a_1), ..., F(a_n)] && (*)
\end{aligned}$$

- Si $\varphi = r(t_1, ..., t_m)$ con $r \in \mathcal{R}_m$ y $t_1, ..., t_m \in T^\tau$. Análogo[20], solo cambia que usamos F isomorfismo.

Caso Inductivo: Supongamos que vale Teo_k y vemos Teo_{k+1}. Sea $\varphi \in F_{k+1}^\tau - F_k^\tau$, ya que si $\varphi \in F_k^\tau$ es directo. Sean $a_1, ..., a_n \in \boldsymbol{A}$. Por el *Lema Lectura única de formulas declaradas* ,para φ tenemos los casos:

- Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$. Por convención notacional $\varphi_i =_d \varphi_i(v_1, ..., v_n)$. Ademas claramente $\varphi_1, \varphi_2 \in F_k^\tau$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n] \ &\text{sii} \ \boldsymbol{A} \vDash \varphi_1[a_1, ..., a_n] \text{ y } \boldsymbol{A} \vDash \varphi_2[a_1, ..., a_n] && (*)\\
&\text{sii} \ \boldsymbol{B} \vDash \varphi_1[F(a_1), ..., F(a_n)] \text{ y } \boldsymbol{B} \vDash \varphi_2[F(a_1), ..., F(a_n)] && (\text{por Teo}_k)\\
&\text{sii} \ \boldsymbol{B} \vDash \varphi[F(a_1), ..., F(a_n)] && (*)
\end{aligned}$$

- Si $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$ con $\eta \in \{\vee, \to, \leftrightarrow\}$ o $\varphi = \neg\varphi_1$. Son análogos al caso anterior.
- Si $\varphi = \forall v_j \varphi_1$. Por convención notacional $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n)$. Claramente $\varphi_1 \in F_k^\tau$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n] \ &\text{sii} \ \boldsymbol{A} \vDash \varphi_1\big[a_1, ..., a_{j-1}, a, a_{j+1}, ..., a_n\big] \ \text{ para cada } \ a \in \boldsymbol{A} && (*)\\
&\text{sii} \ \boldsymbol{B} \vDash \varphi_1\big[F(a_1), ..., F\big(a_{j-1}\big), F(a), F\big(a_{j+1}\big), ..., F(a_n)\big] \ \text{ para cada } \ a \in \boldsymbol{A} && (\text{por Teo}_k)\\
&\text{sii} \ \boldsymbol{B} \vDash \varphi_1\big[F(a_1), ..., F\big(a_{j-1}\big), b, F\big(a_{j+1}\big), ..., F(a_n)\big] \ \text{ para cada } \ b \in \boldsymbol{B} && \text{(por F sobre)}\\
&\text{sii} \ \boldsymbol{B} \vDash \varphi[F(a_1), ..., F(a_n)] && (*)
\end{aligned}$$

- Si $\varphi = \exists v \varphi_1$ con $v \notin \{v_1, ..., v_n\}$. Por conv. notacional $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n, v)$. Claramente $\varphi_1 \in F_k^\tau$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n] \ &\text{sii} \ \boldsymbol{A} \vDash \varphi_1[a_1, ..., a_n, a] \ \text{ para algún } \ a \in \boldsymbol{A} && (*)\\
&\text{sii} \ \boldsymbol{B} \vDash \varphi_1[F(a_1), ..., F(a_n), F(a)] \ \text{ para algún } \ a \in \boldsymbol{A} && (\text{por Teo}_k)\\
&\text{(si tomamos tal elemento } a \text{, tenemos que } F(a) \in B \text{ por lo tanto)}\\
&\text{sii} \ \boldsymbol{B} \vDash \varphi_1[F(a_1), ..., F(a_n), b] \ \text{ para algún } \ b \in \boldsymbol{B}\\
&\text{sii} \ \boldsymbol{B} \vDash \varphi[F(a_1), ..., F(a_n)] && (*)
\end{aligned}$$

- Los casos $\varphi = \forall v \varphi_1$ con $v \notin \{v_1, ..., v_n\}$ y $\varphi = \exists v_j \varphi_1$ son análogos a los anteriores. ∎

[20] Si $\varphi = r(t_1, ..., t_m)$ con $r \in \mathcal{R}_m$ y $t_1, ..., t_m \in T^\tau$. Por convención notacional $t_i =_d t_i(v_1, ..., v_n)$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n] \ &\text{sii} \ \big(t_1^{\boldsymbol{A}}[a_1, ..., a_n], ..., t_m^{\boldsymbol{A}}[a_1, ..., a_n]\big) \in r^{\boldsymbol{A}} && (*)\\
&\text{sii} \ \big(F\big(t_1^{\boldsymbol{A}}[a_1, ..., a_n]\big), ..., F\big(t_m^{\boldsymbol{A}}[a_1, ..., a_n]\big)\big) \in r^{\boldsymbol{B}} && \text{(por ser F iso)}\\
&\text{sii} \ \big(t_1^{\boldsymbol{B}}[F(a_1), ..., F(a_n)], ..., t_m^{\boldsymbol{B}}[F(a_1), ..., F(a_n)]\big) \in r^{\boldsymbol{B}} && \text{(Lema análogo para términos)}\\
&\text{sii} \ \boldsymbol{B} \vDash \varphi[F(a_1), ..., F(a_n)] && (*)
\end{aligned}$$

Lema análogo para términos: Sea $F : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un isomorfismo. Sea $t =_d t(v_1, ..., v_n) \in T^\tau$. Entonces
$$F\big(t^{\boldsymbol{A}}[a_1, ..., a_n]\big) = t^{\boldsymbol{B}}[F(a_1), ..., F(a_n)] \quad \text{para cada } t \in T^\tau \text{ y cada } \ a_1, ..., a_n \in A$$

Lema Carácter recursivo de la notación $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$:
Supongamos $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$. Sea $\boldsymbol{A} = (A, i)$ un modelo de tipo τ y sean $a_1, ..., a_n \in A$. Entonces

(1) Si $\varphi = (t \equiv s)$, entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$ sii $t^{\boldsymbol{A}}[a_1, ..., a_n] = s^{\boldsymbol{A}}[a_1, ..., a_n]$
(2) Si $\varphi = r(t_1, ..., t_m)$, entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$ sii $\big(t_1^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}], ..., t_m^{\boldsymbol{A}}[\vec{a}]\big) \in i(r)$.
(3) Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$ sii $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_1[a_1, ..., a_n]$ y $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_2[a_1, ..., a_n]$
(4) Si $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$ sii $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_1[a_1, ..., a_n]$ o $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_2[a_1, ..., a_n]$
(5) Si $\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$, entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$ sii $\boldsymbol{A} \nvDash \varphi_1[a_1, ..., a_n]$ o $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_2[a_1, ..., a_n]$
(6) Si $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$ sii
se dan $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_1[a_1, ..., a_n]$ y $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_2[a_1, ..., a_n]$ o se dan $\boldsymbol{A} \nvDash \varphi_1[a_1, ..., a_n]$ y $\boldsymbol{A} \nvDash \varphi_2[a_1, ..., a_n]$
(7) Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$ sii $\boldsymbol{A} \nvDash \varphi_1[a_1, ..., a_n]$
(8) Si $\varphi = \forall v_j \varphi_1$, entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$ sii
para cada $a \in A$, se da que $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_1\left[a_1, .., a_{j-1}, a, a_{j+1}, ..., a_n\right]$
(9) Si $\varphi = \forall v \varphi_1$ y $v \notin \{v_1, ..., v_n\}$, entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$ sii
para cada $a \in A$, se da que $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_1[a_1, ..., a_n, a]$
(10) Si $\varphi = \exists v_j \varphi_1$, entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$ sii
para algún $a \in A$, se da que $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_1\left[a_1, .., a_{j-1}, a, a_{j+1}, ..., a_n\right]$
(11) Si $\varphi = \exists v \varphi_1$ y $v \notin \{v_1, ..., v_n\}$, entonces $\boldsymbol{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$ sii
para algún $a \in A$, se da que $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_1[a_1, ..., a_n, a]$

Lema Lectura única de formulas declaradas: Sea τ un tipo cualquier y $\varphi \in F^\tau$.
Supongamos $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$. Entonces se de una y solo una de las siguientes.

(1) $\varphi = (t \equiv s)$ con $t, s \in T^\tau$ únicos.
(2) $\varphi = r(t_1, ..., t_m)$ con $r \in \mathcal{R}_m$ y $t_1, ..., t_m \in T^\tau$ únicos.
(3) $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, con $\eta \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$ únicas.
(4) $\varphi = \neg\varphi_1$ con $\varphi_1 \in F^\tau$, única.
(5) $\varphi = Qv_j\varphi_1$, con $Q \in \{\forall, \exists\}, j \in \{1, ..., n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$, únicas.
(6) $\varphi = Qv\varphi_1$, con $Q \in \{\forall, \exists\}, v \notin \{v_1, ..., v_n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$, únicas.

Mas aún, si $\varphi \in F_{k+1}^\tau$, cuando se da (3), (4), (5) o (6), se tiene que $\varphi_i \in F_k^\tau$.

2. Lema. *Sea $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Supongamos F es un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$.*

(a) Para cada $S \subseteq P$ y para cada $a \in P$, se tiene que a es cota superior (resp. inferior) de S sii $F(a)$ es cota superior (resp. inferior) de $F(S)$.

(b) Para cada $S \subseteq P$, se tiene que existe $\sup(S)$ sii existe $\sup(F(S))$ y en ese caso de que existan tales elementos se tiene que $F(\sup(S)) = \sup(F(S))$.

Nota: Aclarar que en este caso $F(S) = \{F(a) : a \in S\}$.

Demostración:

(a) Sea $S \subseteq P$ y sea $a \in P$.

- Supongamos que a es cota superior de S (veamos entonces que $F(a)$ es cota superior de $F(S)$).
  Sea $b' \in F(S)$ arbitrario, como es F sobre, existe $b \in S$ tal que $b' = F(b)$.
  Entonces $b \leq a$ y por ser F un isomorfismo tenemos que $F(b) \leq' F(a)$, es decir $b' \leq' F(a)$.
  Como $b' \in F(S)$ era arbitrario, tenemos que $F(a)$ es cota superior de $F(S)$.
- Supongamos ahora que $F(a)$ es cota superior de $F(S)$ (veamos entonces que a es cota superior de S).
  Sea $b \in S$ arbitrario. Entonces $F(b) \leq' F(a)$ y por ser F isomorfismo, tengo que F^{-1} también es un homomorfismo. Por lo cual $F^{-1}(F(b)) \leq F^{-1}(F(a))$, es decir $b \leq a$.
  Como $b \in S$ era arbitrario, tenemos que a es cota superior de S.

  El caso de cotas inferiores es análogo.

(b) Sea $S \subseteq P$.

- Supongamos que existe $a = \sup(S)$ (veamos entonces que $F(a) = \sup(F(S))$).
  Por (a) tenemos que $F(a)$ es un cota superior de $F(S)$ arbitraria (falta ver que es la menor de ellas).
  Supongamos $b' \in P'$ es cota superior de $F(S)$. Como F es sobre, existe $b \in P$ tal que $b' = F(b)$.
  Es decir $F(b)$ es cota superior de $F(S)$, entonces por (a) tenemos que b es cota superior de S.
  Como $a = \sup(S)$, se da que $a \leq b$ y como F un isomorfismo, $F(a) \leq' F(b)$, es decir $F(a) \leq' b'$.
  Pero como b' era una cota superior arbitraria de $F(S)$, probamos que $F(a)$ es la menor cota superior.
  Entonces $F(a) = \sup(F(S))$, por lo tanto existe $\sup(F(S))$.
- Si existe $\sup(F(S))$ entonces existe $\sup(S)$, es análogo al anterior. ∎