

Lógica | FAMAF - UNC

# Combos de Definiciones, Convenciones Notacionales y Teoremas

Ramiro Lugo Viola

2025

# Contenido

<b>DEFINICIONES Y CONVENCIONES NOTACIONALES</b>	<b>1</b>
Combo 1 .....	1
Combo 2 .....	2
Combo 3 .....	3
Combo 4 .....	4
Combo 5 .....	6
Combo 6 .....	6
Combo 7 .....	7
Combo 8 .....	8
Combo 9 .....	9
Combo 10 .....	10
Combo 11 .....	11
Combo 12 .....	12
<b>TEOREMAS</b>	<b>13</b>
Combo 1 .....	13

# DEFINICIONES Y CONVENCIONES NOTACIONALES

## Combo 1

1. Defina  $n(\mathbf{J})$  para  $\mathbf{J} \in \text{Just}^+$ .

↳

*Definición:*

Lema 7.43 del apunte. Sea  $\mathbf{J} \in \text{Just}^+$ . Hay únicos  $n \geq 1$  y  $J_1, \dots, J_n \in \mathbf{Just}$  tales que  $\mathbf{J} = J_1 J_2 \dots J_n$ .

Dada  $\mathbf{J} \in \text{Just}^+$ , usaremos  $n(\mathbf{J})$  y  $J_1, \dots, J_{n(\mathbf{J})}$  para denotar los únicos  $n$  y  $J_1, \dots, J_n$  cuya existencia nos garantiza el lema anterior.

2. Defina “par adecuado de tipo  $\tau$ ”.

*Nota:* No hace falta que defina cuando  $\mathbf{J} \in \text{Just}^+$ .

↳

*Definición:*

Un *par adecuado de tipo  $\tau$*  es un par  $(\varphi, \mathbf{J}) \in S^{\tau+} \times \text{Just}^+$  tal que  $n(\varphi) = n(\mathbf{J})$  y  $\mathbf{J}$  es balanceada.<sup>1</sup>

3. Defina  $\text{Mod}_T(\varphi)$ .

*Definición:*

Sea  $T = (\Sigma, \tau)$  una teoría. Dada  $\varphi \in S^\tau$ , definimos  $\text{Mod}_T(\varphi) = \{\mathbf{A} : \mathbf{A} \text{ es un modelo de } T \text{ y } \mathbf{A} \models \varphi\}$ .

4. Dados  $\varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n)$ ,  $\mathbf{A}$  una estructura de tipo  $\tau$  y  $a_1, \dots, a_n \in A$ , defina qué significa  $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$  (i.e. Convención notacional 4 y parte del Combo 6).

*Definición:*

Si declaramos  $\varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n)$ ,  $\mathbf{A}$  es un modelo de tipo  $\tau$  y  $a_1, \dots, a_n \in A$  entonces  $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$  significara que  $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$ , donde  $\vec{b}$  es una asignación tal que a cada  $v_i$  le asigna el valor de  $a_i$ .

5. Defina  $(L, s, i,^c, 0, 1)/\theta$  (con  $\theta$  una congruencia del reticulado complementado  $(L, s, i,^c, 0, 1)$ ).

*Definición:*

Sea  $(L, s, i,^c, 0, 1)$  un reticulado complementado. Una *congruencia sobre  $(L, s, i,^c, 0, 1)$*  sera una relación de equivalencia sobre  $L$  la cual cumpla

(1)  $\theta$  es una congruencia sobre  $(L, s, i, 0, 1)^2$

(2)  $x/\theta = y/\theta$  implica  $x^c/\theta = y^c/\theta$ .

Las condiciones anteriores permiten definir dos operaciones binarias  $\tilde{s}$  y  $\tilde{i}$  y una operación unaria  $\tilde{c}$  como:

$$x/\theta \tilde{s} y/\theta = (x s y)/\theta, \quad x/\theta \tilde{i} y/\theta = (x i y)/\theta, \quad (x/\theta)^{\tilde{c}} = (x^c)/\theta$$

La 6-upla  $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, \tilde{c}, 0/\theta, 1/\theta)$  es llamada el *cociente de  $(L, s, i,^c, 0, 1)$  sobre  $\theta$*  y la denotamos con  $(L, s, i,^c, 0, 1)/\theta$ .

1

Definimos  $n(\varphi)$  con  $\varphi \in S^{\tau+}$  de forma análoga a la de justificaciones (con un Lema análogo también).

Definimos  $\mathbf{J}$  es *balanceada* si se dan las siguientes condiciones:

(1) Por cada  $k \in \mathbb{N}$  a lo sumo hay un  $i$  tal que  $\mathbf{J}_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$  y a lo sumo hay un  $i$  tal que  $\mathbf{J}_i = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$ , con  $\alpha \in \text{JustBas}$ .

(2) Si  $\mathbf{J}_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$ , entonces hay un  $l > i$  tal que  $\mathbf{J}_l = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$  con  $\alpha \in \text{JustBas}$ .

(3) Si  $\mathbf{J}_i = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$  con  $\alpha \in \text{JustBas}$ , entonces hay un  $l < i$  tal que  $\mathbf{J}_l = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$ .

(4) Si  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^J$ , entonces  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  o  $B_1 \subseteq B_2$  o  $B_2 \subseteq B_1$ .

Definimos  $\mathcal{B}^J$  para cada  $\mathbf{J} \in \text{Just}^+$  como  $\mathcal{B}^J = \{\langle i, j \rangle : \exists k \mathbf{J}_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k} \text{ y } \mathbf{J}_j = \text{TESIS}\bar{k}\alpha \text{ para algún } \alpha \in \text{JustBas}\}$ .

Definimos  $\langle i, j \rangle$  para  $i, j \in \mathbb{N}$  con  $i < j$  como el conjunto  $\{i, i+1, \dots, j\}$ .

2

Una *congruencia sobre  $(L, s, i, 0, 1)$*  sera una relación de equivalencia  $\theta$  la cual sea una *congruencia sobre  $(L, s, i)$* .

Una *congruencia sobre  $(L, s, i)$*  sera una relación de equivalencia  $\theta$  sobre  $L$  la cual cumpla:

$$x\theta x' \text{ y } y\theta y' \text{ implica } (x s y)\theta(x' s y') \text{ y } (x i y)\theta(x' i y')$$

## Combo 2

1. Defina  $(\Sigma, \tau) \models \varphi$ .

*Definición:*

Dada  $(\Sigma, \tau)$  una teoría y  $\varphi$  una sentencia de tipo  $\tau$ , escribiremos  $(\Sigma, \tau) \models \varphi$  cuando  $\varphi$  sea verdadera en todo modelo de  $(\Sigma, \tau)$ .

2. Defina “Partición de  $A$ ” y  $R_{\mathcal{P}}$ .

*Definición:*

Dado un conjunto  $A$ , por una *partición de  $A$*  entenderemos un conjunto  $\mathcal{P}$  tal que:

- (1) Cada elemento de  $\mathcal{P}$  es un subconjunto no vacío de  $A$ .
- (2) Si  $S_1, S_2 \in \mathcal{P}$  y  $S_1 \neq S_2$ , entonces  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ .
- (3)  $A = \{a : a \in S, \text{ para algún } S \in \mathcal{P}\}$ .

Dada una partición  $\mathcal{P}$  de un conjunto  $A$ , definimos la relación binaria asociada a  $\mathcal{P}$  como:

$$R_{\mathcal{P}} = \{(a, b) \in A^2 : a, b \in S, \text{ para algún } S \in \mathcal{P}\}$$

3. Defina cuando “ $\varphi_i$  está bajo la hipótesis  $\varphi_l$  en  $(\varphi, \mathbf{J})$ ”.

*Nota:* No hace falta que defina  $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$ .

*Definición:*

Diremos que  $\varphi_i$  *está bajo la hipótesis  $\varphi_l$*  en  $(\varphi, \mathbf{J})$  cuando haya en  $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$  un bloque de la forma  $\langle l, j \rangle$  el cual contenga a  $i$  (osea  $i \in \langle l, j \rangle$ ).

4. Defina  $(L, s, i)/\theta$  (con  $\theta$  una congruencia del reticulado terna  $(L, s, i)$ ).

*Nota:* No hace falta que defina el concepto de congruencia.

*Definición:*

Sea  $(L, s, i)$  un reticulado terna. Dada una congruencia  $\theta$  sobre  $(L, s, i)^3$ , las condiciones de congruencia permiten definir dos operaciones binarias  $\tilde{s}$  y  $\tilde{i}$  como:

$$x/\theta \tilde{s} y/\theta = (x \text{ s } y)/\theta \quad , \quad x/\theta \tilde{i} y/\theta = (x \text{ i } y)/\theta$$

Entonces la terna  $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$  es llamada el *cociente de  $(L, s, i)$  sobre  $\theta$*  y la denotamos por  $(L, s, i)/\theta$ .

<sup>3</sup>Una *congruencia sobre  $(L, s, i)$*  sera una relación de equivalencia  $\theta$  sobre  $L$  la cual cumpla:

$$x\theta x' \text{ y } y\theta y' \text{ implica } (x \text{ s } y)\theta(x' \text{ s } y') \text{ y } (x \text{ i } y)\theta(x' \text{ i } y')$$

## Combo 3

1. Dados  $t =_d t(v_1, \dots, v_n) \in T^\tau$ ,  $\mathbf{A}$  una estructura de tipo  $\tau$  y  $a_1, \dots, a_n \in A$ , define  $t^{\mathbf{A}}[a_1, \dots, a_n]$  (i.e. Convención notacional 2 y parte del [Combo 5](#)).

*Definición:*

Si declaramos  $t =_d t(v_1, \dots, v_n)$ ,  $\mathbf{A}$  es una estructura de tipo  $\tau$  y  $a_1, \dots, a_n \in A$  entonces con  $t^{\mathbf{A}}[a_1, \dots, a_n]$  denotaremos al elemento  $t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$ , donde  $\vec{b}$  es una asignación tal que a cada  $v_i$  le asigna el valor de  $a_i$ .

2. Define “ $F$  es un homomorfismo de  $(L, s, i, ^c, 0, 1)$  en  $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ ”.

*Definición:*

Sean  $(L, s, i, ^c, 0, 1)$  y  $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$  reticulados complementados. Una función  $F : L \rightarrow L'$  será llamada un *homomorfismo de  $(L, s, i, ^c, 0, 1)$  en  $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$*  si para todo  $x, y \in L$  se cumplen que:

$$\begin{aligned} F(x \text{ s } y) &= F(x) \text{ s' } F(y) & F(x \text{ i } y) &= F(x) \text{ i' } F(y) & F(x^c) &= F(x)^{c'} \\ F(0) &= 0' & F(1) &= 1' \end{aligned}$$

3. Define “filtro generado por  $S$  en  $(L, s, i)$ ”.

*Definición:*

Dado un conjunto  $S \subseteq L$ , denotaremos con  $[S]$  el siguiente conjunto

$$[S] = \{y \in L : y \geq s_1 \text{ i } \dots \text{ i } s_n, \text{ para algunos } s_1, \dots, s_n \in S, n \geq 1\}$$

Llamaremos a  $[S]$  el *filtro generado por  $S$  en  $(L, s, i)$* .

4. Define cuando  $\mathbf{J} \in \text{Just}^+$  es balanceada.

*Nota:* No hace falta que defina  $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$ .

*Definición:*

Definimos  $\mathbf{J}$  es *balanceada* si se dan las siguientes condiciones:

- (1) Por cada  $k \in \mathbb{N}$  a lo sumo hay un  $i$  tal que  $\mathbf{J}_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$  y a lo sumo hay un  $i$  tal que  $\mathbf{J}_i = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$ , con  $\alpha \in \text{JustBas}$ .
- (2) Si  $\mathbf{J}_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$ , entonces hay un  $l > i$  tal que  $\mathbf{J}_l = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$  con  $\alpha \in \text{JustBas}$ .
- (3) Si  $\mathbf{J}_i = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$  con  $\alpha \in \text{JustBas}$ , entonces hay un  $l < i$  tal que  $\mathbf{J}_l = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$ .
- (4) Si  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$ , entonces  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  o  $B_1 \subseteq B_2$  o  $B_2 \subseteq B_1$ .

## Combo 4

1. Defina “ $(L, s, i, c, 0, 1)$  es un subreticulado complementado de  $(L', s', i', c', 0', 1')$ ”.

*Definición:*

Dados reticulados complementados  $(L, s, i, c, 0, 1)$  y  $(L', s', i', c', 0', 1')$ , diremos que  $(L, s, i, c, 0, 1)$  es un subreticulado complementado de  $(L', s', i', c', 0', 1')$  si se dan las siguiente condiciones:

- (1)  $L \subseteq L'$ .
- (2)  $L$  es cerrado bajo las operaciones  $s', i'$  y  $c'$ .<sup>4</sup>
- (3)  $0 = 0'$  y  $1 = 1'$ .
- (4)  $s = s'|_{L \times L}$ ,  $i = i'|_{L \times L}$  y  $c = c'|_L$ .

2. Defina  $A \models \varphi[\vec{a}]$  (versión absoluta, no dependiente de una declaración previa, i.e.  $\vec{a} \in A^{\mathbb{N}}$ ).

*Nota:* No hace falta definir  $t^A[\vec{a}]$ .

*Definición:*

Definamos recursivamente la relación  $A \models \varphi[\vec{a}]$ , donde  $A$  es una estructura de tipo  $\tau$ ,  $\varphi \in F^\tau$  y  $\vec{a}$  una asignación de  $A$  como:

- (1) Si  $\varphi = (t \equiv s)$ , entonces  $A \models \varphi[\vec{a}]$  sii  $t^A[\vec{a}] = s^A[\vec{a}]$
- (2) Si  $\varphi = r(t_1, \dots, t_m)$ , entonces  $A \models \varphi[\vec{a}]$  sii  $(t_1^A[\vec{a}], \dots, t_m^A[\vec{a}]) \in i(r)$ .
- (3) Si  $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ , entonces  $A \models \varphi[\vec{a}]$  sii  $A \models \varphi_1[\vec{a}]$  y  $A \models \varphi_2[\vec{a}]$
- (4) Si  $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$ , entonces  $A \models \varphi[\vec{a}]$  sii  $A \models \varphi_1[\vec{a}]$  o  $A \models \varphi_2[\vec{a}]$
- (5) Si  $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ , entonces  $A \models \varphi[\vec{a}]$  sii  $A \not\models \varphi_1[\vec{a}]$  o  $A \models \varphi_2[\vec{a}]$
- (6) Si  $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ , entonces  $A \models \varphi[\vec{a}]$  sii se dan  $A \models \varphi_1[\vec{a}]$  y  $A \models \varphi_2[\vec{a}]$   
o se dan  $A \not\models \varphi_1[\vec{a}]$  y  $A \not\models \varphi_2[\vec{a}]$
- (7) Si  $\varphi = \neg \varphi_1$ , entonces  $A \models \varphi[\vec{a}]$  sii  $A \not\models \varphi_1[\vec{a}]$
- (8) Si  $\varphi = \forall x_1 \varphi_1$ , entonces  $A \models \varphi[\vec{a}]$  sii para cada  $a \in A$ , se da que  $A \models \varphi_1[\downarrow_i^a(\vec{a})]$ <sup>5</sup>
- (9) Si  $\varphi = \exists x_1 \varphi_1$ , entonces  $A \models \varphi[\vec{a}]$  sii hay un  $a \in A$  tal que  $A \models \varphi_1[\downarrow_i^a(\vec{a})]$ <sup>5</sup>

3. Defina la relación “ $v$  ocurre libremente en  $\varphi$  a partir de  $i$ ”.

*Definición:*

Definamos recursivamente la relación “ $v$  ocurre libremente en  $\varphi$  a partir de  $i$ ”, donde  $v \in \text{Var}$ ,  $\varphi \in F^\tau$  e  $i \in \{1, \dots, |\varphi|\}$ , como:

- (1) Si  $\varphi$  es atómica, entonces  $v$  ocurre libremente en  $\varphi$  a partir de  $i$  sii  $v$  ocurre en  $\varphi$  a partir de  $i$ .<sup>6</sup>
- (2) Si  $\varphi = \varphi_1 \eta \varphi_2$ , entonces  $v$  ocurre libremente en  $\varphi$  a partir de  $i$  sii se da alguna de las siguientes:
  - (a)  $v$  ocurre libremente en  $\varphi_1$  a partir de  $i - 1$ .
  - (b)  $v$  ocurre libremente en  $\varphi_2$  a partir de  $i - |\varphi_1 \eta|$ .
- (3) Si  $\varphi = \neg \varphi_1$ , entonces  $v$  ocurre libremente en  $\varphi$  a partir de  $i$  sii  $v$  ocurre libremente en  $\varphi_1$  a partir de  $i - 1$ .
- (4) Si  $\varphi = Qw\varphi_1$ , entonces  $v$  ocurre libremente en  $\varphi$  a partir de  $i$  sii  $v \neq w$  y  $v$  ocurre libremente en  $\varphi_1$  a partir de  $i - |Qw|$ .

<sup>4</sup>Es decir, para todo  $x, y \in L$  se cumple que  $x s' y \in L$ ,  $x i' y \in L$  y  $x c' \in L$ .

<sup>5</sup>Dada una estructura  $A$  de tipo  $\tau$ , una asignación  $\vec{a} \in A^{\mathbb{N}}$  y  $a \in A$ , con  $\downarrow_i^a(\vec{a})$  denotaremos la asignación que resulta de reemplazar en  $\vec{a}$  el  $i$ -ésimo elemento por  $a$ .

<sup>6</sup>Si  $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ , con  $|\alpha|, |\beta| \geq 1$  y un natural  $i \in \{1, \dots, |\beta|\}$ , se dice que  $\alpha$  ocurre a partir de  $i$  en  $\beta$  cuando se de que existan palabras  $\delta, \gamma$  tales que  $\beta = \delta \alpha \gamma$  y  $|\delta| \geq i - 1$ .

#### 4. Defina “reticulado cuaterna”.

*Definición:*

Un reticulado cuaterna es una 4-upla  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, \leq)$  tal que  $L$  es un conjunto no vacío,  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{i}$  son operaciones binarias sobre  $L$ ,  $\leq$  es una relación binaria y se cumplen las siguientes propiedades:

- (1)  $x \leq x$ , cualquiera sea  $x \in L$ .
- (2)  $x \leq y$  y  $y \leq z$ , implica  $x \leq z$ , cualquiera sean  $x, y, z \in L$ .
- (3)  $x \leq y$  y  $y \leq x$ , implica  $x = y$ , cualquiera sean  $x, y \in L$ .
- (4)  $x \leq x \mathbf{s} y$  y  $y < x \mathbf{s} y$ , cualquiera sean  $x, y \in L$ .
- (5)  $x \leq z$  y  $y \leq z$  implica  $x \mathbf{s} y \leq z$ , cualquiera sean  $x, y, z \in L$ .
- (6)  $x \leq x \mathbf{i} y$  y  $y \leq x \mathbf{i} y$ , cualquiera sean  $x, y \in L$ .
- (7)  $z \leq x$  y  $z \leq y$  implica  $z \leq x \mathbf{i} y$ , cualquiera sean  $x, y, z \in L$ .

## Combo 5

1. Explique la notación declaratoria para **términos** con sus 3 convenciones notacionales.

*Definición:*

Supongamos  $v_1, \dots, v_n \in \text{Var}$  y  $t$  un termino de tipo  $\tau$ . Entonces escribimos  $t =_d t(v_1, \dots, v_n)$  para declarar que  $v_1, \dots, v_n$  son variables distintas y tales que toda variable que ocurre en  $t$  pertenecen a  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

Esta notación declaratoria es muy útil cuando se combina con las siguientes convenciones notacionales:

**Convención notacional 1:** Si hemos declarado  $t =_d t(v_1, \dots, v_n)$  y  $P_1, \dots, P_n$  son palabras cualesquiera, entonces  $t(P_1, \dots, P_n)$  denotará la palabra que resulta de reemplazar simultáneamente cada ocurrencia de  $v_1$  en  $t$  por  $P_1$ , cada ocurrencia de  $v_2$  en  $t$  por  $P_2$ , etc.

**Convención notacional 2:** Si hemos declarado  $t =_d t(v_1, \dots, v_n)$ ,  $\mathbf{A}$  es un modelo de tipo  $\tau$  y  $a_1, \dots, a_n \in A$ , entonces con  $t^{\mathbf{A}}[a_1, \dots, a_n]$  denotaremos al elemento  $t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$ , donde  $\vec{b}$  es una asignación tal que a cada  $v_i$  le asigna el valor de  $a_i$ .

**Convención notacional 5:** Si hemos declarado  $t =_d t(v_1, \dots, v_n)$  y se da que  $t = f(t_1, \dots, t_m)$ , con  $f \in F_m, m \geq 1$  y  $t_1, \dots, t_m \in T_k^\tau$ , supondremos tácitamente que también hemos echo las declaraciones  $t_1 =_d t_1(v_1, \dots, v_k), \dots, t_m =_d t_m(v_1, \dots, v_k)$ . Esto lo podemos hacer ya que obviamente las variables que ocurren en los  $t_1, \dots, t_m$  están en  $\{v_1, \dots, v_k\}$ .

## Combo 6

1. Explique la notación declaratoria para **fórmulas** con sus 3 convenciones notacionales.

*Nota:* Puede asumir la notación declaratoria para términos.

*Definición:*

Supongamos  $v_1, \dots, v_n \in \text{Var}$  y  $\varphi$  es una formula de tipo  $\tau$ . Entonces escribimos  $\varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n)$  para declarar que  $v_1, \dots, v_n$  son variables distintas y tales que  $\text{Li}(\varphi) \subseteq \{v_1, \dots, v_n\}$ .

Esta notación declaratoria es muy útil cuando se combina con las siguientes convenciones notacionales:

**Convención notacional 3:** Si hemos declarado  $\varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n)$  y  $P_1, \dots, P_n$  son palabras cualesquiera, entonces  $\varphi(P_1, \dots, P_n)$  denotará la palabra que resulta de reemplazar simultáneamente cada ocurrencia de  $v_1$  en  $\varphi$  por  $P_1$ , cada ocurrencia de  $v_2$  en  $\varphi$  por  $P_2$ , etc.

**Convención notacional 4:** Si hemos declarado  $\varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n)$ ,  $\mathbf{A}$  es un modelo de tipo  $\tau$  y  $a_1, \dots, a_n \in A$ , entonces  $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$  significara que  $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$ , donde  $\vec{b}$  es una asignación tal que a cada  $v_i$  le asigna el valor de  $a_i$ . En general  $\mathbf{A} \not\models \varphi[\vec{b}]$  significara que no sucede  $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ .

**Convención notacional 6:** Si hemos declarado  $\varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n)$ , entonces:

- Si  $\varphi = (t \equiv s)$ , con  $t, s \in T_k^\tau$   
supondremos tácitamente que hemos hecho las declaraciones  $t =_d t(v_1, \dots, v_n)$  y  $s =_d s(v_1, \dots, v_n)$ .
- Si  $\varphi = r(t_1, \dots, t_m)$ , con  $r \in R_m$  y  $t_1, \dots, t_m \in T^\tau$   
supondremos tácitamente que hemos hecho las declaraciones  $t_1 =_d t_1(v_1, \dots, v_n), \dots, t_m =_d t_m(v_1, \dots, v_n)$ .
- Si  $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$  con  $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$  y  $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$   
supondremos tácitamente que hemos hecho las declaraciones  $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, \dots, v_n)$  y  $\varphi_2 =_d \varphi_2(v_1, \dots, v_n)$ .
- Si  $\varphi = \neg \varphi_1$  o  $\varphi = Qv_j \varphi_1$  con  $Q \in \{\forall, \exists\}, j \in \{1, \dots, n\}$  y  $\varphi_1 \in F^\tau$   
supondremos tácitamente que hemos hecho la declaración  $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, \dots, v_n)$ .
- Si  $\varphi = Qv \varphi_1$  con  $Q \in \{\forall, \exists\}, v \in \text{Var} - \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $\varphi_1 \in F^\tau$   
supondremos tácitamente que hemos hecho la declaración  $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, \dots, v_n, v)$ .



## Combo 7

### 1. Defina recursivamente la relación “ $v$ es sustituible por $w$ en $\varphi$ ”.

*Definición:*

Dadas  $v, w \in \text{Var}$  y  $\varphi \in F^\tau$  diremos que  $v$  es sustituible por  $w$  en  $\varphi$  cuando ninguna ocurrencia libre de  $v$  en  $\varphi$  suceda dentro de una ocurrencia de una subformula de la forma  $Qw\psi$  en  $\varphi$ , tal que  $Q \in \{\forall, \exists\}$ ,  $\psi \in F^\tau$ .

Ahora si definamos recursivamente la relación  $v$  es sustituible por  $w$  en  $\varphi$  de la siguiente manera:

- (1) Si  $\varphi$  es atómica, entonces  $v$  es sustituible por  $w$  en  $\varphi$ .
- (2) Si  $\varphi = \varphi_1 \eta \varphi_2$ , entonces  $v$  es sustituible por  $w$  en  $\varphi$  sii  $v$  es sustituible por  $w$  en  $\varphi_1$  y  $v$  es sustituible por  $w$  en  $\varphi_2$ .
- (3) Si  $\varphi = \neg \varphi_1$ , entonces  $v$  es sustituible por  $w$  en  $\varphi$  sii  $v$  es sustituible por  $w$  en  $\varphi_1$ .
- (4) Si  $\varphi = Qv\varphi_1$ , entonces  $v$  es sustituible por  $w$  en  $\varphi$ .
- (5) Si  $\varphi = Qw\varphi_1$  y  $v \in \text{Li}(\varphi_1)$ , entonces  $v$  **no** es sustituible por  $w$  en  $\varphi$ .
- (6) Si  $\varphi = Qw\varphi_1$  y  $v \notin \text{Li}(\varphi_1)$ , entonces  $v$  es sustituible por  $w$  en  $\varphi$ .
- (7) Si  $\varphi = Qv\varphi_1$  y  $u \neq v, w$ , entonces  $v$  es sustituible por  $w$  en  $\varphi$  sii  $v$  es sustituible por  $w$  en  $\varphi_1$ .

### 2. Defina cuando $J \in \text{Just}^+$ es balanceada. (misma que la del [Combo 3.4](#))

$\hookrightarrow$

### 3. Defina “filtro del reticulado terna $(L, s, i)$ ”.

*Definición:*

Un *filtro* de un reticulado terna  $(L, s, i)$  sera un subconjunto  $F \subseteq L$  tal que:

- (1)  $F \neq \emptyset$
- (2)  $x, y \in F$  implica  $x \cdot i y \in F$
- (3)  $x \in F$  y  $x \leq y$  implica  $y \in F$

### 4. Defina “teoría elemental”.

*Definición:*

Una *teoría elemental* sera un par  $(\Sigma, \tau)$  tal que  $\tau$  es un tipo cualquiera y  $\Sigma$  es un conjunto de sentencias elementales puras<sup>7</sup> de tipo  $\tau$ .

<sup>7</sup>Ser *sentencia* implica no tener variables libres y ser *pura* implica que no ocurran nombres de elementos fijos.

## Combo 8

1. Defina  $(L, s, i, c, 0, 1)/\theta$  (con  $\theta$  una congruencia del reticulado complementado  $(L, s, i, c, 0, 1)$ ).  
(Misma que la del [Combo 1.5](#))  $\hookrightarrow$

2. Dados  $\varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n)$ ,  $\mathbf{A}$  una estructura de tipo  $\tau$  y  $a_1, \dots, a_n \in A$ , defina qué significa  $A \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$  (i.e. Convención notacional 4 y parte del [Combo 6](#)).

*Definición:*

Si hemos declarado  $\varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n)$ ,  $\mathbf{A}$  es un modelo de tipo  $\tau$  y  $a_1, \dots, a_n \in A$ , entonces  $A \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$  significara que  $A \models \varphi[\vec{b}]$ , donde  $\vec{b}$  es una asignación tal que a cada  $v_i$  le asigna el valor de  $a_i$ . En general  $A \not\models \varphi[\vec{b}]$  significara que no sucede  $A \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ .

3. Dado un poset  $(P, \leq)$ , defina “a es supremo de  $S$  en  $(P, \leq)$ ”.

*Definición:*

Sea  $(P, \leq)$  un poset. Dado  $S \subseteq P$ , diremos que un elemento  $a \in P$  es *cota superior de  $S$  en  $(P, \leq)$*  si para todo  $x \in S$  se da  $x \leq a$ . Un elemento  $a \in P$  sera llamado *supremo de  $S$  en  $(P, \leq)$*  si se dan las condiciones:

- (1)  $a$  es *cota superior de  $S$  en  $(P, \leq)$ .*
- (2) Para cada  $b \in P$ , si  $b$  es *cota superior de  $S$  en  $(P, \leq)$* , entonces  $a \leq b$ .

4. Defina “ $i$  es anterior a  $j$  en  $(\varphi, \mathbf{J})$ ”.

*Nota:* No hace falta que defina  $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$ .

*Definición:*

Sea un *par adecuado*  $(\varphi, \mathbf{J})$  e  $i, j \in \{1, \dots, n(\varphi)\}$ <sup>8</sup>. Diremos que  $i$  es *anterior a  $j$  en  $(\varphi, \mathbf{J})$*  si  $i < j$  y ademas para todo  $B \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$  se tiene que  $i \in B \Rightarrow j \in B$ .

<sup>8</sup>Recordar  $n(\varphi)$  es la “cantidad de formulas” que tiene  $\varphi$ .

## Combo 9

### 1. Defina “término elemental de tipo $\tau$ ”.

*Definición:*

Dado un tipo  $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$  los *términos elementales de tipo  $\tau$*  se definen con las siguientes clausulas:

- Cada palabra de  $\mathcal{C}$  es un *término elemental de tipo  $\tau$* .
- Las variables  $x, y, z, w, \dots$  son *términos elementales de tipo  $\tau$* .
- Los nombres de elementos fijos  $a, b, c, d, \dots$  son *términos elementales de tipo  $\tau$* .
- Si  $f \in \mathcal{F}_n$ , con  $n \geq 1$  y  $t_1, \dots, t_n$  son términos elementales de tipo  $\tau$ , entonces  $f(t_1, \dots, t_n)$  es un *término elemental de tipo  $\tau$* .
- Una palabra es un *término elemental de tipo  $\tau$*  sii puede construirse usando las cláusulas anteriores.

### 2. Defina $\Vdash_T$ .

*Definición:*

Sea  $T = (\Sigma, \tau)$  una teoría. Definimos la siguiente relación binaria sobre  $S^{\tau^9}$  como:

$$\varphi \Vdash_T \psi \text{ sii } (\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

Es decir,  $\Vdash_T = \{(\varphi, \psi) \in S^{\tau^2} : (\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)\}$

### 3. Defina $s^T$ (explique por qué la definición es inambigua).

*Definición:*

Lema. El conjunto  $\Vdash_T$  es una *relación de equivalencia*<sup>10</sup> sobre  $S^{\tau}$ .

Gracias al Lema anterior, podemos definir sobre  $S^{\tau} / \Vdash_T$ <sup>11</sup> la siguiente operación binaria  $s^{\tau}$ :

$$[\varphi]_T s^T [\psi]_T = [(\varphi \vee \psi)]_T$$

Finalmente la definición anterior es inambigua ya que vale la siguiente propiedad:

$$\text{Si } T \vdash (\varphi \leftrightarrow \varphi') \text{ y } T \vdash (\psi \leftrightarrow \psi') \text{ entonces } T \vdash ((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi'))$$

garantizando que las clases de equivalencia son iguales independientemente de los representantes elegidos.

### 4. Defina $\mathcal{A}_T$ .

*Definición:*

Dada una teoría  $T = (\Sigma, \tau)$ , denotaremos con  $\mathcal{A}_T$  al algebra de Boole  $(S^{\tau} / \Vdash_T, s^T, i^T, c^T, 0^T, 1^T)$ , donde

$$[\varphi]_T s^T [\psi]_T = [(\varphi \vee \psi)]_T \quad [\varphi]_T i^T [\psi]_T = [(\varphi \wedge \psi)]_T \quad [\varphi]_T c^T = [\neg \varphi]_T$$

$$0^T = \{\varphi \in S^{\tau} : (\Sigma, \tau) \vdash \neg \varphi \text{ (i.e. } \varphi \text{ es refutable)}\} \quad 1^T = \{\varphi \in S^{\tau} : (\Sigma, \tau) \vdash \varphi \text{ (i.e. } \varphi \text{ es un teorema)}\}$$

El algebra  $\mathcal{A}_T$  sera llamada el *algebra de Lindenbaum de  $T$* .

### 5. Defina “ $S$ es un subuniverso del reticulado complementado $(L, s, i, c, 0, 1)$ ”.

*Definición:*

Dado  $(L, s, i, c, 0, 1)$  un reticulado complementado. Un conjunto  $S \subseteq L$  es llamado *subuniverso de  $(L, s, i, c, 0, 1)$*  si  $0, 1 \in S$  y ademas  $S$  es cerrado bajo las operaciones  $s, i, c$ .<sup>12</sup>

<sup>9</sup> $S^{\tau} = \{\varphi \in F^{\tau} : \text{Li}(\varphi) = \emptyset\}$ . es decir el conjunto de las sentencias.

<sup>10</sup>Una *relación  $R$  de equivalencia sobre  $A$*  es una relación binaria, reflexiva ( $xRx$ ), simétrica ( $xRy \Rightarrow yRx$ ) y transitiva ( $xRy \text{ e } yRz \Rightarrow xRz$ ).

<sup>11</sup> $S^{\tau} / \Vdash_T = \{\varphi / \Vdash_T : \varphi \in S^{\tau}\}$ , donde  $\varphi / \Vdash_T = \{\psi \in S^{\tau} : \varphi \Vdash_T \psi\} = \{\psi \in S^{\tau} : T \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)\}$ .

<sup>12</sup>Es decir, para todo  $x, y \in S$  se cumple que  $x s y \in S$ ,  $x i y \in S$  y  $x^c \in S$ .

## Combo 10

1. Defina “tesis del bloque  $\langle i, j \rangle$  en  $(\varphi, \mathbf{J})$ ”.

*Definición:*

Sea  $(\varphi, \mathbf{J})$  un par adecuado de tipo  $\tau$ . Si  $\langle i, j \rangle \in \mathcal{B}^J$ , entonces  $\varphi_j$  es la *tesis del bloque*  $\langle i, j \rangle$  en  $(\varphi, \mathbf{J})$ .

2. Defina cuando una teoría de primer orden  $(\Sigma, \tau)$  es consistente.

*Definición:*

Una teoría de primer orden  $(\Sigma, \tau)$  es *inconsistente* cuando haya una sentencia  $\varphi$  tal que  $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$ .

Una teoría de primer orden  $(\Sigma, \tau)$  es llamada *consistente* cuando **no** sea *inconsistente*.

3. Dada una teoría elemental  $(\Sigma, \tau)$  y una sentencia elemental pura  $\varphi$  de tipo  $\tau$ , defina “prueba elemental de  $\varphi$  en  $(\Sigma, \tau)$ ”.

*Definición:*

Dada una teoría elemental  $(\Sigma, \tau)$  y una sentencia elemental pura  $\varphi$  de tipo  $\tau$ , una *prueba elemental de  $\varphi$  en  $(\Sigma, \tau)$*  es una prueba de  $\varphi$  que posea las siguientes características:

- (1) En la prueba se parte de una estructura de tipo  $\tau$ , fija pero arbitraria en el sentido que lo único que sabemos es que ella es una estructura que satisface los axiomas de  $\Sigma$  (o sea esta es la única información particular que podemos usar).
- (2) Las deducciones en la prueba son muy simples y obvias de justificar con mínimas frases en castellano.
- (3) En la escritura de la prueba lo concerniente a la matemática misma se expresa usando solo sentencias elementales de tipo  $\tau$ .

Notar que el concepto de prueba elemental en una teoría  $(\Sigma, \tau)$  no es un concepto definido en forma precisa.

## Combo 11

1. Enuncie el **programa de lógica matemática** dado al final de la Guía 8 y explique brevemente con qué definiciones matemáticas se van resolviendo los tres primeros puntos, y qué teoremas garantizan la resolución del cuarto punto de dicho programa.

*Definición:*

### Programa de lógica matemática

- (1) Dar un modelo matemático del concepto de formula elemental de tipo  $\tau$ .
- (2) Dar una definición matemática de cuando una formula elemental de tipo  $\tau$  es verdadera en una estructura de tipo  $\tau$  para una asignación dada de valores a las variables libres y a los nombres de elementos fijos de dicha formula elemental.
- (3) Dar un modelo matemático del concepto de prueba elemental en una teoría elemental. A estos objetos matemáticos los llamaremos pruebas formales.
- (4) Intentar probar matemáticamente que nuestro concepto de prueba formal es una correcta modelización matemática de la idea intuitiva de prueba elemental en una teoría elemental.

(1)

Con las definiciones de *variables*, *términos de tipo  $\tau$*  y *formulas de tipo  $\tau$*  logramos modelizar correctamente el concepto de *formula elemental puras de tipo  $\tau$* . Entonces, si modelizamos los nombres de elementos fijos, listo.

En particular el matemático al momento de hacer una prueba elemental en una teoría elemental  $(\Sigma, \tau)$ , comienza imaginando una estructura de tipo  $\tau$  que lo único que sabe es que satisface las sentencias de  $\Sigma$ . Luego, cuando fija un elemento le pone un nombre, digamos  $b$ , y podemos pensar que expandió su estructura imaginaria a una de tipo  $(\mathcal{C} \cup \{b\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$  y continua con su razonamiento, claramente esto lo puede hacer las veces que quiera en una prueba.

Esta mecánica de prueba del matemático nos deja ver que es natural modelizar las *fórmulas elementales de tipo  $\tau$*  con fórmulas de tipo  $\tau'$ , donde  $\tau'$  es alguna extensión de  $\tau$  por nombres de constante<sup>13</sup>.

(2)

Dado un tipo  $\tau$ , una *estructura  $A$  de tipo  $\tau$* , una fórmula elemental  $\varphi$  y una asignación  $\vec{a} \in A^{\mathbb{N}}$ . Usando la relación  $A \models \varphi[\vec{a}]$  definimos cuándo es verdadera.

(3)

La definición de *prueba formal* en una *teoría de primer orden* soluciona este punto.

(4)

El *Teorema de Corrección* garantiza que las pruebas formales de nuestro modelo matemático son efectivamente pruebas elementales en alguna teoría elemental.

Pero podría pasar que sea incompleto, es decir que existan cosas que no podamos probar formalmente pero que si tengan pruebas elementales en alguna teoría elemental.

El *Teorema de Completitud* garantiza que para todo lo que pueda ser probado elementalmente en una teoría elemental, exista una prueba formal en nuestro modelo matemático.

**COMPLETAR ...** / REVISAR.

<sup>13</sup>Dado  $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$  un tipo, definimos que un tipo  $\tau'$  es una *extensión de  $\tau$  por nombres de constantes* si  $\tau'$  es de la forma  $(\mathcal{C}', \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$  con  $\mathcal{C}'$  tal que  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ .

## Combo 12

1. Defina el concepto de **función** y desarrolle las tres **Convenciones Notacionales** asociadas a dicho concepto (i.e en la Guía 0). ↪

*Definición:*

Una **función** es un conjunto  $f$  de pares ordenados con la siguiente propiedad

$$\text{Si } (x, y) \in f \text{ y } (x, z) \in f, \text{ entonces } y = z$$

Además, dada una función  $f$  definimos

$$D_f = \text{dominio de } f = \{x : (x, y) \in f \text{ para algún } y\}$$

$$I_f = \text{imagen de } f = \{y : (x, y) \in f \text{ para algún } x\}$$

A veces escribimos  $\text{Dom}(f)$  y  $\text{Im}(f)$  en lugar de  $D_f$  e  $I_f$ , respectivamente.

Las **convenciones notacionales** son

- (1) Dado  $x \in D_f$  usaremos  $f(x)$  para denotar el único  $y \in I_f$  tal que  $(x, y) \in f$ .
- (2) Escribimos  $f : S \subseteq A \rightarrow B$  para expresar que  $f$  es una función tal que  $D_f = S \subseteq A$  y  $I_f \subseteq B$ .  
Escribimos  $f : A \rightarrow B$  para expresar que  $f$  es una función tal que  $D_f = A$  y  $I_f \subseteq B$ .  
En ese contexto llamaremos a  $B$  *conjunto de llegada* ( $B$  no está determinado por  $f$ , ya que  $I_f \subseteq B$ ).
- (3) Muchas veces, para definir una función  $f$ , lo que haremos es dar su dominio y su regla de asignación. Básicamente daremos precisamente el conjunto que es  $D_f$  y quién es  $f(x)$  para cada  $x \in D_f$ . Esto determina por completo a  $f$ , ya que  $f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$ . Algunos ejemplos son

Básico	Con <i>conjunto de llegada</i> y flechas	Con flechas y por casos
$D_f = \omega$	$f : \omega \rightarrow \omega$	$f : \mathbb{N} \rightarrow \omega$
$f(x) = 23 \cdot x$	$x \rightarrow 23 \cdot x$	$x \rightarrow \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ x + 2 & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$

# TEOREMAS

## Combo 1

---

### 1. Teorema (Teorema del Filtro Primo).

Sea  $(L, s, i)$  un reticulado terna distributivo y  $F$  un filtro. Supongamos  $x_0 \in L - F$ .  
Entonces hay un filtro primo  $P$  tal que  $x_0 \notin P$  y  $F \subseteq P$ .

Demostración:

COMPLETAR ...

### 2. Lema (Propiedades básicas de la consistencia). Sea $(\Sigma, \tau)$ una teoría.

- (1) Si  $(\Sigma, \tau)$  es inconsistente, entonces  $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ , para toda sentencia  $\varphi$ .
- (2) Si  $(\Sigma, \tau)$  es consistente y  $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ , entonces  $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$  es consistente.
- (3) Si  $(\Sigma, \tau) \not\vdash \neg\varphi$ , entonces  $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$  es consistente.

Demostración:

COMPLETAR ...

