

Lógica | FAMAF - UNC

Combos de Definiciones, Convenciones Notacionales y Teoremas

Ramiro Lugo Viola

2025

Contenido

DEFINICIONES Y CONVENCIONES NOTACIONALES	1
Combo 1	1
Combo 2	2
Combo 3	3
Combo 4	4
Combo 5	6
Combo 6	6
Combo 7	7
Combo 8	8
Combo 9	9
Combo 10	10
Combo 11	11
Combo 12	12
TEOREMAS	13
Combo 1	13
Combo 2	16
Combo 3	18
Resultados Muy Usados en las Demostraciones	21

DEFINICIONES Y CONVENCIONES NOTACIONALES

Combo 1

1. Defina $n(\mathbf{J})$ para $\mathbf{J} \in Just^+$.

↳

Definición:

Lema 7.43 del apunte. Sea $\mathbf{J} \in Just^+$. Hay únicos $n \geq 1$ y $J_1, \dots, J_n \in \mathbf{Just}$ tales que $\mathbf{J} = J_1 J_2 \dots J_n$.

Dada $\mathbf{J} \in Just^+$, usaremos $n(\mathbf{J})$ y $J_1, \dots, J_{n(\mathbf{J})}$ para denotar los únicos n y J_1, \dots, J_n cuya existencia nos garantiza el lema anterior.

2. Defina “par adecuado de tipo τ ”.

Nota: No hace falta que defina cuando $\mathbf{J} \in Just^+$ es balanceada.

↳

Definición:

Un *par adecuado de tipo τ* es un par $(\varphi, \mathbf{J}) \in S^\tau^+ \times \mathbf{Just}^+$ tal que $n(\varphi) = n(\mathbf{J})$ y \mathbf{J} es balanceada.

3. Defina $Mod_T(\varphi)$.

Definición:

Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría. Dada $\varphi \in S^\tau$, definimos $Mod_T(\varphi) = \{\mathbf{A} : \mathbf{A}$ es un modelo de T y $\mathbf{A} \models \varphi\}$.

4. Dados $\varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n)$, \mathbf{A} una estructura de tipo τ y $a_1, \dots, a_n \in A$, defina qué significa $A \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ (i.e. Convención notacional 4 y parte del Combo 6).

Definición:

Si declaramos $\varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n)$, \mathbf{A} es un modelo de tipo τ y $a_1, \dots, a_n \in A$ entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ significara que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$, donde \vec{b} es una asignación tal que a cada v_i le asigna el valor de a_i .

5. Defina $(L, s, i, c, 0, 1)/\theta$ (con θ una congruencia del reticulado complementado $(L, s, i, c, 0, 1)$) .

Definición:

Sea $(L, s, i, c, 0, 1)$ un reticulado complementado. Una *congruencia sobre* $(L, s, i, c, 0, 1)$ sera una relación de equivalencia sobre L la cual cumpla

- (1) θ es una congruencia sobre $(L, s, i, 0, 1)$ ¹
- (2) $x/\theta = y/\theta$ implica $x^c/\theta = y^c/\theta$.

Las condiciones anteriores permiten definir dos operaciones binarias \tilde{s} y \tilde{i} y una operación unaria \tilde{c} como:

$$x/\theta \tilde{s} y/\theta = (x s y)/\theta \quad , \quad x/\theta \tilde{i} y/\theta = (x i y)/\theta \quad , \quad (x/\theta)^{\tilde{c}} = (x^c)/\theta$$

La 6-upla $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, \tilde{c}, 0/\theta, 1/\theta)$ es llamada el *cociente de* $(L, s, i, c, 0, 1)$ sobre θ y la denotamos con $(L, s, i, c, 0, 1)/\theta$.

¹

Una *congruencia sobre* $(L, s, i, 0, 1)$ sera una relación de equivalencia θ la cual sea una *congruencia sobre* (L, s, i) .

Una *congruencia sobre* (L, s, i) sera una relación de equivalencia θ sobre L la cual cumpla:

$x\theta x' \quad y\theta y'$ implica $(x s y)\theta(x' s y') \quad y \quad (x i y)\theta(x' i y')$

Combo 2

1. Defina $(\Sigma, \tau) \models \varphi$.

Definición:

Dada (Σ, τ) una teoría y φ una sentencia de tipo τ , escribiremos $(\Sigma, \tau) \models \varphi$ cuando φ sea verdadera en todo modelo de (Σ, τ) .

2. Defina “Partición de A ” y $R_{\mathcal{P}}$.

Definición:

Dado un conjunto A , por una *partición de A* entenderemos un conjunto \mathcal{P} tal que:

- (1) Cada elemento de \mathcal{P} es un subconjunto no vacío de A .
- (2) SI $S_1, S_2 \in \mathcal{P}$ y $S_1 \neq S_2$, entonces $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.
- (3) $A = \{a : a \in S, \text{ para algún } S \in \mathcal{P}\}$.

Dada una partición \mathcal{P} de un conjunto A , definimos la relación binaria asociada a \mathcal{P} como:

$$R_{\mathcal{P}} = \{(a, b) \in A^2 : a, b \in S, \text{ para algún } S \in \mathcal{P}\}$$

3. Defina cuando “ φ_i está bajo la hipótesis φ_l en (φ, \mathbf{J}) ”.

Nota: No hace falta que defina $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$.

Definición:

Diremos que φ_i está bajo la hipótesis φ_l en (φ, \mathbf{J}) cuando haya en $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$ un bloque de la forma $\langle l, j \rangle$ el cual contenga a i (osea $i \in \langle l, j \rangle$).

4. Defina $(L, s, i)/\theta$ (con θ una congruencia del reticulado terna (L, s, i)).

Nota: No hace falta que defina el concepto de congruencia.

Definición:

Sea (L, s, i) un reticulado terna. Dada una congruencia θ sobre (L, s, i) ², las condiciones de congruencia permiten definir dos operaciones binarias \tilde{s} y \tilde{i} como:

$$x/\theta \tilde{s} y/\theta = (x \mathbf{s} y)/\theta \quad , \quad x/\theta \tilde{i} y/\theta = (x \mathbf{i} y)/\theta$$

Entonces la terna $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$ es llamada el *cociente de (L, s, i) sobre θ* y la denotamos por $(L, s, i)/\theta$.

²Una congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ sera una relación de equivalencia θ sobre L la cual cumpla:
 $x\theta x' \ y \ y\theta y'$ implica $(x \mathbf{s} y)\theta(x' \mathbf{s} y') \ y \ (x \mathbf{i} y)\theta(x' \mathbf{i} y')$

Combo 3

1. Dados $t =_d t(v_1, \dots, v_n) \in T^\tau$, \mathbf{A} una estructura de tipo τ y $a_1, \dots, a_n \in A$, defina $t^A[a_1, \dots, a_n]$ (i.e. Convención notacional 2 y parte del Combo 5).

Definición:

Si declaramos $t =_d t(v_1, \dots, v_n)$, \mathbf{A} es una estructura de tipo τ y $a_1, \dots, a_n \in A$ entonces con $t^A[a_1, \dots, a_n]$ denotaremos al elemento $t^A[\vec{b}]$, donde \vec{b} es una asignación tal que a cada v_i le asigna el valor de a_i .

2. Defina “ F es un homomorfismo de $(L, s, i^c, 0, 1)$ en $(L', s', i'^{c'}, 0', 1')$ ”.

Definición:

Sean $(L, s, i^c, 0, 1)$ y $(L', s', i'^{c'}, 0', 1')$ reticulados complementados. Una función $F : L \rightarrow L'$ será llamada un *homomorfismo de $(L, s, i^c, 0, 1)$ en $(L', s', i'^{c'}, 0', 1')$* si para todo $x, y \in L$ se cumplen que:

$$\begin{aligned} F(x \mathbf{s} y) &= F(x) \mathbf{s}' F(y) & F(x \mathbf{i} y) &= F(x) \mathbf{i}' F(y) & F(x^c) &= F(x)^{c'} \\ F(0) &= 0' & F(1) &= 1' \end{aligned}$$

3. Defina “filtro generado por S en (L, s, i) ”.

Definición:

Dado un conjunto $S \subseteq L$, denotaremos con $[S]$ el siguiente conjunto

$$[S] = \{y \in L : y \geq s_1 \mathbf{i} \dots \mathbf{i} s_n, \text{ para algunos } s_1, \dots, s_n \in S, n \geq 1\}$$

Llamaremos a $[S]$ el *filtro generado por S en (L, s, i)* .

4. Defina cuando $J \in Just^+$ es balanceada.

Nota: No hace falta que defina \mathcal{B}^J .

Definición:

Definimos J es *balanceada* si se dan las siguientes condiciones:

- (1) Por cada $k \in \mathbb{N}$ a lo sumo hay un i tal que $J_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$ y a lo sumo hay un i tal que $J_i = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$, con $\alpha \in \text{JustBas}$.
- (2) Si $J_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$, entonces hay un $l > i$ tal que $J_l = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$ con $\alpha \in \text{JustBas}$.
- (3) Si $J_i = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$ con $\alpha \in \text{JustBas}$, entonces hay un $l < i$ tal que $J_l = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$.
- (4) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^J$, entonces $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ o $B_1 \subseteq B_2$ o $B_2 \subseteq B_1$.

Combo 4

1. Defina “ $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ es un subreticulado complementado de $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ ”.

Definición:

Dados reticulados complementados $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ y $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}', ^{c'}, 0', 1')$, diremos que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ es un subreticulado complementado de $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ si se dan las siguientes condiciones:

- (1) $L \subseteq L'$.
- (2) L es cerrado bajo las operaciones \mathbf{s}' , \mathbf{i}' y $^{c'}$.³
- (3) $0 = 0'$ y $1 = 1'$.
- (4) $\mathbf{s} = \mathbf{s}'|_{L \times L}$, $\mathbf{i} = \mathbf{i}'|_{L \times L}$ y $^c = {c'}|_L$.

2. Defina $A \models \varphi[\vec{a}]$ (versión absoluta, no dependiente de una declaración previa, i.e. $\vec{a} \in A^{\mathbb{N}}$).

Nota: No hace falta definir $t^A[\vec{a}]$.

Definición:

Definamos recursivamente la relación $A \models \varphi[\vec{a}]$, donde A es una estructura de tipo τ , $\varphi \in F^\tau$ y \vec{a} una asignación de A como:

- (1) Si $\varphi = (t \equiv s)$, entonces $A \models \varphi[\vec{a}]$ si $t^A[\vec{a}] = s^A[\vec{a}]$
- (2) Si $\varphi = r(t_1, \dots, t_m)$, entonces $A \models \varphi[\vec{a}]$ si $(t_1^A[\vec{a}], \dots, t_m^A[\vec{a}]) \in i(r)$.
- (3) Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, entonces $A \models \varphi[\vec{a}]$ si $A \models \varphi_1[\vec{a}]$ y $A \models \varphi_2[\vec{a}]$
- (4) Si $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, entonces $A \models \varphi[\vec{a}]$ si $A \models \varphi_1[\vec{a}]$ o $A \models \varphi_2[\vec{a}]$
- (5) Si $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, entonces $A \models \varphi[\vec{a}]$ si $A \not\models \varphi_1[\vec{a}]$ o $A \models \varphi_2[\vec{a}]$
- (6) Si $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, entonces $A \models \varphi[\vec{a}]$ si se dan $A \models \varphi_1[\vec{a}]$ y $A \models \varphi_2[\vec{a}]$
o se dan $A \not\models \varphi_1[\vec{a}]$ y $A \not\models \varphi_2[\vec{a}]$
- (7) Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces $A \models \varphi[\vec{a}]$ si $A \not\models \varphi_1[\vec{a}]$
- (8) Si $\varphi = \forall x_1 \varphi_1$, entonces $A \models \varphi[\vec{a}]$ si para cada $a \in A$, se da que $A \models \varphi_1[\downarrow_i^a(\vec{a})]$ ⁴
- (9) Si $\varphi = \exists x_1 \varphi_1$, entonces $A \models \varphi[\vec{a}]$ si hay un $a \in A$ tal que $A \models \varphi_1[\downarrow_i^a(\vec{a})]$ ⁵

3. Defina la relación “ v ocurre libremente en φ a partir de i ”.

Definición:

Definamos recursivamente la relación “ v ocurre libremente en φ a partir de i ”, donde $v \in \text{Var}$, $\varphi \in F^\tau$ e $i \in \{1, \dots, |\varphi|\}$, como:

- (1) Si φ es atómica, entonces v ocurre libremente en φ a partir de i si v ocurre en φ a partir de i .⁵
- (2) Si $\varphi = \varphi_1 \eta \varphi_2$, entonces v ocurre libremente en φ a partir de i si se da alguna de las siguientes:
 - (a) v ocurre libremente en φ_1 a partir de $i - 1$.
 - (b) v ocurre libremente en φ_2 a partir de $i - |\varphi_1 \eta|$.
- (3) Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces v ocurre libremente en φ a partir de i si v ocurre libremente en φ_1 a partir de $i - 1$.
- (4) Si $\varphi = Qw\varphi_1$, entonces v ocurre libremente en φ a partir de i si $v \neq w$ y v ocurre libremente en φ_1 a partir de $i - |Qw|$.

³Es decir, para todo $x, y \in L$ se cumple que $x \mathbf{s}'y \in L$, $x \mathbf{i}'y \in L$ y $x^{c'} \in L$.

⁴Dada una estructura A de tipo τ , una asignación $\vec{a} \in A^{\mathbb{N}}$ y $a \in A$, con $\downarrow_i^a(\vec{a})$ denotaremos la asignación que resulta de reemplazar en \vec{a} el i -ésimo elemento por a .

⁵Si $\alpha, \beta \in \Sigma^*$, con $|\alpha|, |\beta| \geq 1$ y un natural $i \in \{1, \dots, |\beta|\}$, se dice que α ocurre a partir de i en β cuando se da que existan palabras δ, γ tales que $\beta = \delta\alpha\gamma$ y $|\delta| \geq i - 1$.

4. Defina “reticulado cuaterna”.

Definición:

Un reticulado cuaterna es una 4-upla $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, \leq)$ tal que L es un conjunto no vacío, \mathbf{s} e \mathbf{i} son operaciones binarias sobre L , \leq es una relación binaria y se cumplen las siguientes propiedades:

- (1) $x \leq x$, cualquiera sea $x \in L$.
- (2) $x \leq y$ y $y \leq z$, implica $x \leq z$, cualquiera sean $x, y, z \in L$.
- (3) $x \leq y$ y $y \leq x$, implica $x = y$, cualquiera sean $x, y \in L$.
- (4) $x \leq y \mathbf{s} y$ y $y < x \mathbf{s} y$, cualquiera sean $x, y \in L$.
- (5) $x \leq z$ y $y \leq z$ implica $x \mathbf{s} y \leq z$, cualquiera sean $x, y, z \in L$.
- (6) $x \leq x \mathbf{i} y$ y $y \leq x \mathbf{i} y$, cualquiera sean $x, y \in L$.
- (7) $z \leq x$ y $z \leq y$ implica $z \leq x \mathbf{i} y$, cualquiera sean $x, y, z \in L$.

Combo 5

- Explique la notación declaratoria para **términos** con sus 3 convenciones notacionales.

Definición:

Supongamos $v_1, \dots, v_n \in \text{Var}$ y t un término de tipo τ . Entonces escribimos $t =_d t(v_1, \dots, v_n)$ para declarar que v_1, \dots, v_n son variables distintas y tales que toda variable que ocurre en t pertenecen a $\{v_1, \dots, v_n\}$. Esta notación declaratoria es muy útil cuando se combina con las siguientes convenciones notacionales:

Convención notacional 1: Si hemos declarado $t =_d t(v_1, \dots, v_n)$ y P_1, \dots, P_n son palabras cualesquieras, entonces $t(P_1, \dots, P_n)$ denotará la palabra que resulta de reemplazar simultáneamente cada ocurrencia de v_1 en t por P_1 , cada ocurrencia de v_2 en t por P_2 , etc.

Convención notacional 2: Si hemos declarado $t =_d t(v_1, \dots, v_n)$, A es un modelo de tipo τ y $a_1, \dots, a_n \in A$, entonces con $t^A[a_1, \dots, a_n]$ denotaremos al elemento $t^A[\vec{b}]$, donde \vec{b} es una asignación tal que a cada v_i le asigna el valor de a_i .

Convención notacional 5: Si hemos declarado $t =_d t(v_1, \dots, v_n)$ y se da que $t = f(t_1, \dots, t_m)$, con $f \in F_m$, $m \geq 1$ y $t_1, \dots, t_m \in T_k^\tau$, supondremos tácitamente que también hemos echo las declaraciones $t_1 =_d t_1(v_1, \dots, v_k), \dots, t_m =_d t_m(v_1, \dots, v_k)$. Esto lo podemos hacer ya que obviamente las variables que ocurren en los t_1, \dots, t_m están en $\{v_1, \dots, v_k\}$.

Combo 6

- Explique la notación declaratoria para **fórmulas** con sus 3 convenciones notacionales.

Nota: Puede asumir la notación declaratoria para términos.

Definición:

Supongamos $v_1, \dots, v_n \in \text{Var}$ y φ es una formula de tipo τ . Entonces escribimos $\varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n)$ para declarar que v_1, \dots, v_n son variables distintas y tales que $\text{Li}(\varphi) \subseteq \{v_1, \dots, v_n\}$.

Esta notación declaratoria es muy útil cuando se combina con las siguientes convenciones notacionales:

Convención notacional 3: Si hemos declarado $\varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n)$ y P_1, \dots, P_n son palabras cualesquieras, entonces $\varphi(P_1, \dots, P_n)$ denotará la palabra que resulta de reemplazar simultáneamente cada ocurrencia de v_1 en φ por P_1 , cada ocurrencia de v_2 en φ por P_2 , etc.

Convención notacional 4: Si hemos declarado $\varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n)$, A es un modelo de tipo τ y $a_1, \dots, a_n \in A$, entonces $A \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ significara que $A \models \varphi[\vec{b}]$, donde \vec{b} es una asignación tal que a cada v_i le asigna el valor de a_i . En general $A \not\models \varphi[\vec{b}]$ significara que no sucede $A \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

Convención notacional 6: Si hemos declarado $\varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n)$, entonces:

- Si $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T_k^\tau$
supondremos tácitamente que hemos hecho las declaraciones $t =_d t(v_1, \dots, v_n)$ y $s =_d s(v_1, \dots, v_n)$.
- Si $\varphi = r(t_1, \dots, t_m)$, con $r \in R_m$ y $t_1, \dots, t_m \in T^\tau$
supondremos tácitamente que hemos hecho las declaraciones $t_1 =_d t_1(v_1, \dots, v_n), \dots, t_m =_d t_m(v_1, \dots, v_n)$.
- Si $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$ con $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ y $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$
supondremos tácitamente que hemos hecho las declaraciones $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, \dots, v_n)$ y $\varphi_2 =_d \varphi_2(v_1, \dots, v_n)$.
- Si $\varphi = \neg \varphi_1$ o $\varphi = Qv_j \varphi_1$ con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$
supondremos tácitamente que hemos hecho la declaración $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, \dots, v_n)$.
- Si $\varphi = Qv \varphi_1$ con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $v \in \text{Var} - \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$
supondremos tácitamente que hemos hecho la declaración $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, \dots, v_n, v)$.

Combo 7

1. Defina recursivamente la relación “ v es sustituible por w en φ ”.

Definición:

Dadas $v, w \in \text{Var}$ y $\varphi \in F^\tau$ diremos que v es sustituible por w en φ cuando ninguna ocurrencia libre de v en φ suceda dentro de una ocurrencia de una subformula de la forma $Qw\psi$ en φ , tal que $Q \in \{\forall, \exists\}, \psi \in F^\tau$. Ahora si definamos recursivamente la relación v es sustituible por w en φ de la siguiente manera:

- (1) Si φ es atómica , entonces v es sustituible por w en φ .
- (2) Si $\varphi = \varphi_1 \eta \varphi_2$, entonces v es sustituible por w en φ si y solo si v es sustituible por w en φ_1 y v es sustituible por w en φ_2 .
- (3) Si $\varphi = \neg \varphi_1$, entonces v es sustituible por w en φ si y solo si v es sustituible por w en φ_1 .
- (4) Si $\varphi = Qv\varphi_1$, entonces v es sustituible por w en φ .
- (5) Si $\varphi = Qw\varphi_1$ y $v \in \text{Li}(\varphi_1)$, entonces v no es sustituible por w en φ .
- (6) Si $\varphi = Qw\varphi_1$ y $v \notin \text{Li}(\varphi_1)$, entonces v es sustituible por w en φ .
- (7) Si $\varphi = Qv\varphi_1$ y $u \neq v, w$, entonces v es sustituible por w en φ si y solo si v es sustituible por w en φ_1 .

2. Defina cuando $J \in \text{Just}^+$ es balanceada. (misma que la del [Combo 3.4](#))



3. Defina “filtro del reticulado terna (L, s, i) ”.

Definición:

Un filtro de un reticulado terna (L, \leq, \wedge) sera un subconjunto $F \subseteq L$ tal que:

- (1) $F \neq \emptyset$
- (2) $x, y \in F$ implica $x \wedge y \in F$
- (3) $x \in F$ y $x \leq y$ implica $y \in F$

4. Defina “teoría elemental”.

Definición:

Una teoría elemental sera un par (Σ, τ) tal que τ es un tipo cualquiera y Σ es un conjunto de sentencias elementales puras⁶ de tipo τ .

⁶Ser sentencia implica no tener variables libres y ser pura implica que no ocurran nombres de elementos fijos.

Combo 8

1. Defina $(L, s, i, c, 0, 1)/\theta$ (con θ una congruencia del reticulado complementado $(L, s, i, c, 0, 1)$).
 (Misma que la del [Combo 1.5](#)) ↳

2. Dados $\varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n)$, \mathbf{A} una estructura de tipo τ y $a_1, \dots, a_n \in A$, defina qué significa $A \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ (i.e. Convención notacional 4 y parte del [Combo 6](#)).

Definición:

Si hemos declarado $\varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n)$, \mathbf{A} es un modelo de tipo τ y $a_1, \dots, a_n \in A$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ significara que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$, donde \vec{b} es una asignación tal que a cada v_i le asigna el valor de a_i . En general $\mathbf{A} \not\models \varphi[\vec{b}]$ significara que no sucede $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

3. Dado un poset (P, \leq) , defina “a es supremo de S en (P, \leq) ”.

Definición:

Sea (P, \leq) un poset. Dado $S \subseteq P$, diremos que un elemento $a \in P$ es *cota superior de S en (P, \leq)* si para todo $x \in S$ se da $x \leq a$. Un elemento $a \in P$ sera llamado *supremo de S en (P, \leq)* si se dan las condiciones:

- (1) a es *cota superior de S en (P, \leq)* .
- (2) Para cada $b \in P$, si b es *cota superior de S en (P, \leq)* , entonces $a \leq b$.

4. Defina “ i es anterior a j en (φ, J) ”.

Nota: No hace falta que defina \mathcal{B}^J .

Definición:

Sea un *par adecuado* (φ, J) e $i, j \in \{1, \dots, n(\varphi)\}$ ⁷. Diremos que i es anterior a j en (φ, J) si $i < j$ y ademas para todo $B \in \mathcal{B}^J$ se tiene que $i \in B \Rightarrow j \in B$.

⁷Recordar $n(\varphi)$ es la “cantidad de formulas” que tiene φ .

Combo 9

1. Defina “término elemental de tipo τ ”.

Definición:

Dado un tipo $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ los *términos elementales de tipo τ* se definen con las siguientes cláusulas:

- Cada palabra de \mathcal{C} es un *término elemental de tipo τ* .
- Las variables x, y, z, w, \dots son *términos elementales de tipo τ* .
- Los nombres de elementos fijos a, b, c, d, \dots son *términos elementales de tipo τ* .
- Si $f \in \mathcal{F}_n$, con $n \geq 1$ y t_1, \dots, t_n son términos elementales de tipo τ , entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ es un *término elemental de tipo τ* .
- Una palabra es un *término elemental de tipo τ* si puede construirse usando las cláusulas anteriores.

2. Defina $\dashv\vdash_T$.

Definición:

Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría. Definimos la siguiente relación binaria sobre S^τ ⁸ como:

$$\varphi \dashv\vdash_T \psi \text{ si } (\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

Es decir, $\dashv\vdash_T = \{(\varphi, \psi) \in S^{\tau^2} : (\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)\}$

3. Defina s^T (explique por qué la definición es inambigua).

Definición:

Lema. El conjunto $\dashv\vdash_T$ es una relación de equivalencia⁹ sobre S^τ .

Gracias al Lema anterior, podemos definir sobre $S^\tau / \dashv\vdash_T$ ¹⁰ la siguiente operación binaria s^τ :

$$[\varphi]_T s^\tau [\psi]_T = [(\varphi \vee \psi)]_T$$

Finalmente la definición anterior es inambigua ya que vale la siguiente propiedad:

$$\text{Si } T \vdash (\varphi \leftrightarrow \varphi') \text{ y } T \vdash (\psi \leftrightarrow \psi') \text{ entonces } T \vdash ((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi'))$$

garantizando que las clases de equivalencia son iguales independientemente de los representantes elegidos.

4. Defina \mathcal{A}_T .

Definición:

Dada una teoría $T = (\Sigma, \tau)$, denotaremos con \mathcal{A}_T al álgebra de Boole $(S^\tau / \dashv\vdash_T, s^\tau, i^\tau, c^\tau, 0^\tau, 1^\tau)$, donde

$$[\varphi]_T s^\tau [\psi]_T = [(\varphi \vee \psi)]_T \quad [\varphi]_T i^\tau [\psi]_T = [(\varphi \wedge \psi)]_T \quad [\varphi]_T^{c^\tau} = [\neg \varphi]_T$$

$$0^\tau = \{\varphi \in S^\tau : (\Sigma, \tau) \vdash \neg \varphi \text{ (i.e. } \varphi \text{ es refutable)}\} \quad 1^\tau = \{\varphi \in S^\tau : (\Sigma, \tau) \vdash \varphi \text{ (i.e. } \varphi \text{ es un teorema)}\}$$

El álgebra \mathcal{A}_T sera llamada el *álgebra de Lindenbaum de T*.

5. Defina “ S es un subuniverso del reticulado complementado $(L, s, i, c, 0, 1)$ ”.

Definición:

Dado $(L, s, i, c, 0, 1)$ un reticulado complementado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado *subuniverso de $(L, s, i, c, 0, 1)$* si $0, 1 \in S$ y ademas S es cerrado bajo las operaciones s, i, c . ¹¹

⁸ $S^\tau = \{\varphi \in F^\tau : \text{Li}(\varphi) = \emptyset\}$. Es decir el conjunto de las sentencias.

⁹ Una relación R de equivalencia sobre A es una relación binaria, reflexiva (xRx), simétrica ($xRy \Rightarrow yRx$) y transitiva ($xRy \text{ e } yRz \Rightarrow xRz$).

¹⁰ $S^\tau / \dashv\vdash_T = \{\varphi / \dashv\vdash_T : \varphi \in S^\tau\}$, donde $\varphi / \dashv\vdash_T = \{\psi \in S^\tau : \varphi \dashv\vdash_T \psi\} = \{\psi \in S^\tau : T \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)\}$.

¹¹ Es decir, para todo $x, y \in S$ se cumple que $x s y \in S$, $x i y \in S$ y $x^c \in S$.

Combo 10

1. Defina “tesis del bloque $\langle i, j \rangle$ en (φ, J) ”.

Definición:

Sea (φ, J) un par adecuado de tipo τ . Si $\langle i, j \rangle \in \mathcal{B}^J$, entonces φ_j es la *tesis del bloque* $\langle i, j \rangle$ en (φ, J) .

2. Defina cuando una teoría de primer orden (Σ, τ) es consistente.

Definición:

Una teoría de primer orden (Σ, τ) es *inconsistente* cuando haya una sentencia φ tal que $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$.

Una teoría de primer orden (Σ, τ) es llamada *consistente* cuando **no** sea *inconsistente*.

3. Dada una teoría elemental (Σ, τ) y una sentencia elemental pura φ de tipo τ , defina “prueba elemental de φ en (Σ, τ) ”.

Definición:

Dada una teoría elemental (Σ, τ) y una sentencia elemental pura φ de tipo τ , una *prueba elemental de φ* en (Σ, τ) es una prueba de φ que posea las siguientes características:

- (1) En la prueba se parte de una estructura de tipo τ , fija pero arbitraria en el sentido que lo único que sabemos es que ella es una estructura que satisface los axiomas de Σ (o sea esta es la única información particular que podemos usar).
- (2) Las deducciones en la prueba son muy simples y obvias de justificar con mínimas frases en castellano.
- (3) En la escritura de la prueba lo concerniente a la matemática misma se expresa usando solo sentencias elementales de tipo τ .

Notar que el concepto de prueba elemental en una teoría (Σ, τ) no es un concepto definido en forma precisa.

Combo 11

1. Enuncie el **programa de lógica matemática** dado al final de la Guía 8 y explique brevemente con qué definiciones matemáticas se van resolviendo los tres primeros puntos, y qué teoremas garantizan la resolución del cuarto punto de dicho programa.

Definición:

Programa de lógica matemática

- (1) Dar un modelo matemático del concepto de formula elemental de tipo τ .
- (2) Dar una definición matemática de cuando una formula elemental de tipo τ es verdadera en una estructura de tipo τ para una asignación dada de valores a las variables libres y a los nombres de elementos fijos de dicha formula elemental.
- (3) Dar un modelo matemático del concepto de prueba elemental en una teoría elemental. A estos objetos matemáticos los llamaremos pruebas formales.
- (4) Intentar probar matemáticamente que nuestro concepto de prueba formal es una correcta modelización matemática de la idea intuitiva de prueba elemental en una teoría elemental.

(1)

Con las definiciones de *variables*, *términos de tipo τ* y *formulas de tipo τ* logramos modelizar correctamente el concepto de *formula elemental puras de tipo τ* . Entonces, si modelizamos los nombres de elementos fijos, listo.

En particular el matemático al momento de hacer una prueba elemental en una teoría elemental (Σ, τ) , comienza imaginando una estructura de tipo τ que lo único que sabe es que satisface las sentencias de Σ . Luego, cuando fija un elemento le pone un nombre, digamos b , y podemos pensar que expandió su estructura imaginaria a una de tipo $(\mathcal{C} \cup \{b\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ y continua con su razonamiento, claramente esto lo puede hacer las veces que quiera en una prueba.

Esta mecánica de prueba del matemático nos deja ver que es natural modelizar las *fórmulas elementales de tipo τ* con fórmulas de tipo τ' , donde τ' es alguna extensión de τ por nombres de constante¹².

(2)

Dado un tipo τ , una *estructura A de tipo τ* , una fórmula elemental φ y una asignación $\vec{a} \in A^{\mathbb{N}}$. Usando la relación $A \models \varphi[\vec{a}]$ definimos cuándo es verdadera.

(3)

La definición de *prueba formal* en una *teoría de primer orden* soluciona este punto.

(4)

El *Teorema de Corrección* garantiza que las pruebas formales de nuestro modelo matemático son efectivamente pruebas elementales en alguna teoría elemental.

Pero podría pasar que sea incompleto, es decir que existan cosas que no podamos probar formalmente pero que si tengan pruebas elementales en alguna teoría elemental.

El *Teorema de Completitud* garantiza que para todo lo que pueda ser probado elementalmente en una teoría elemental, exista una prueba formal en nuestro modelo matemático.

REVISAR ...

¹²Dado $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ un tipo, definimos que un tipo τ' es una *extensión de τ por nombres de constantes* si τ' es de la forma $(\mathcal{C}', \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ con \mathcal{C}' tal que $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$.

Combo 12

1. Defina el concepto de **función** y desarrolle las tres **Convenciones Notacionales** asociadas a dicho concepto (i.e en la Guía 0). ↳

Definición:

Una **función** es un conjunto f de pares ordenados con la siguiente propiedad

$$\text{Si } (x, y) \in f \text{ y } (x, z) \in f, \text{ entonces } y = z$$

Además, dada una función f definimos

$$D_f = \text{dominio de } f = \{x : (x, y) \in f \text{ para algún } y\}$$

$$I_f = \text{imagen de } f = \{y : (x, y) \in f \text{ para algún } x\}$$

A veces escribimos $\text{Dom}(f)$ y $\text{Im}(f)$ en lugar de D_f e I_f , respectivamente.

Las **convenciones notacionales** son

- (1) Dado $x \in D_f$ usaremos $f(x)$ para denotar el único $y \in I_f$ tal que $(x, y) \in f$.
- (2) Escribimos $f : S \subseteq A \rightarrow B$ para expresar que f es una función tal que $D_f = S \subseteq A$ y $I_f \subseteq B$.
Escribimos $f : A \rightarrow B$ para expresar que f es una función tal que $D_f = A$ y $I_f \subseteq B$.
En ese contexto llamaremos a B *conjunto de llegada* (B no está determinado por f , ya que $I_f \subseteq B$).
- (3) Muchas veces, para definir una función f , lo que haremos es dar su dominio y su regla de asignación.
Básicamente daremos precisamente el conjunto que es D_f y quién es $f(x)$ para cada $x \in D_f$. Esto determina por completo a f , ya que $f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$. Algunos ejemplos son

Básico	Con <i>conjunto de llegada</i> y flechas	Con flechas y por casos
$D_f = \omega$	$f : \omega \rightarrow \omega$	$f : \mathbb{N} \rightarrow \omega$
$f(x) = 23 \cdot x$	$x \rightarrow 23 \cdot x$	$x \rightarrow \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ x + 2 & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$

TEOREMAS

Combo 1

1. Teorema (Teorema del Filtro Primo).

Sea (L, s, i) un reticulado terna distributivo y F un filtro. Supongamos $x_0 \in L - F$.

Entonces hay un filtro primo P tal que $x_0 \notin P$ y $F \subseteq P$. ↳

Demostración:

Sea

$$\mathcal{F} = \{F_1 : F_1 \text{ es un filtro, } x_0 \notin F_1 \text{ y } F \subseteq F_1\}$$

Notar que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ porque $F \in \mathcal{F}$.

F es un filtro, $x_0 \notin F$ y $F \subseteq F$. (Si $x_0 \in F \Rightarrow x_0 \notin L - F$, absurdo porque $x_0 \in L - F$)

Por lo cual (\mathcal{F}, \subseteq) es un poset.

Veamos que cada cadena en (\mathcal{F}, \subseteq) tiene al menos una cota superior (para aplicar el Lema de Zorn).

Sea C una cadena.

Si $C = \emptyset$, entonces cualquier elemento de \mathcal{F} es cota superior de C (ya que $\emptyset \subseteq A$ para cualquier conjunto A).

Si $C \neq \emptyset$, sea

$$G = \{x : x \in F_1, \text{ para algún } F_1 \in C\}$$

(notar que C es una cadena de (\mathcal{F}, \subseteq) , por lo tanto $F_1 \in \mathcal{F}$)

Veamos que G es un filtro. Para ello hay que probar las 3 propiedades de un filtro:

(1) $G \neq \emptyset$, lo cual es claro ya que $C \neq \emptyset$ y todo filtro es no vacío.

(2) $x, y \in G$ implica $x \vee y \in G$

Supongamos $x, y \in G$, por definición de G tenemos que hay $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $x \in F_1$ y $y \in F_2$.

Pero como $F_1, F_2 \in C$ y C es una cadena de (\mathcal{F}, \subseteq) , entonces $F_1 \subseteq F_2$ o $F_2 \subseteq F_1$.

Si $F_1 \subseteq F_2$, entonces $x, y \in F_2$, pero como F_2 es un filtro tenemos que $x \vee y \in F_2 \subseteq G$.

Si $F_2 \subseteq F_1$, entonces $x, y \in F_1$, pero como F_1 es un filtro tenemos que $x \vee y \in F_1 \subseteq G$.

Por lo tanto en cualquier caso $x \vee y \in G$.

(3) $x \in G$ y $x \leq y$ implica $y \in G$

Supongamos $x \in G$ y supongamos $x \leq y$ para algún $y \in L$.

Por definición de G tenemos que hay $F_1 \in \mathcal{F}$ tal que $x \in F_1$.

Pero como F_1 es filtro y $x \in F_1$ y $x \leq y$, entonces $y \in F_1 \subseteq G$.

Por lo tanto $y \in G$.

Concluimos así que G es un filtro.

Ademas $x_0 \notin G$ ya que todo filtro $F_1 \in \mathcal{F}$ usado para construir G cumplían que $x_0 \notin F_1$.

Ademas $F \subseteq G$ ya que todo filtro $F_1 \in \mathcal{F}$ usado para construir G cumplía que $F \subseteq F_1$ y $G \neq \emptyset$.

Entonces como G es filtro, $x_0 \notin G$ y $F \subseteq G$ por lo tanto concluimos que $G \in \mathcal{F}$.

Si tomamos cualquier $F_1 \in C$ por definición $F_1 \subseteq G$. Es decir que G es una cota superior de C en (\mathcal{F}, \subseteq) .

Entonces probamos que C tiene al menos una cota superior de G .

Así hemos probado que cada cadena en (\mathcal{F}, \subseteq) tiene al menos una cota superior.

Por el *Lema de Zorn*, (\mathcal{F}, \subseteq) tiene un elemento maximal P . Veamos que P es un filtro primo.

Claramente P es un filtro ya que $P \in \mathcal{F}$.

Para terminar de ver que sea *primo* debemos ver que cumpla las siguientes propiedades:

- (1) $P \neq L$, es directo ya que $P \in \mathcal{F}$, entonces $x_0 \notin P$ por lo tanto $P \neq L$.
- (2) Si $x \leq y \in P$, entonces $x \in P \text{ o } y \in P$

Supongamos que $x \leq y \in P$. Vamos a probar que $x \in P \text{ o } y \in P$ por el absurdo. Supongamos $x, y \notin P$.

Notar que $[P \cup \{x\})$ es un filtro el cual contiene a P .

Pero como P es un elemento maximal de (\mathcal{F}, \subseteq) , tenemos que $x_0 \in [P \cup \{x\})$.

Análogamente $x_0 \in [P \cup \{y\})$.

Como $x_0 \in [P \cup \{x\})$ tenemos que hay $p_1, \dots, p_k \in P \cup \{x\}$, tales que

$$x_0 \geq p_1 \cdot i \dots \cdot i p_k$$

Si $p_i \neq x$ para $i = 1, \dots, k$, tenemos que $p_i \in P$, entonces por propiedad de filtro (2), $p_1 \cdot i \dots \cdot i p_k \in P$.

Como $p_1 \cdot i \dots \cdot i p_k \leq x_0$ de nuevo por propiedad de filtro (3) $x_0 \in P$, absurdo.

Si existe $p_j = x$ con $j \in \{1, \dots, k\}$, entonces $p_1 \cdot i \dots \cdot i p_k = p_1 \cdot i \dots \cdot i p_{j-1} \cdot i p_{j+1} \cdot i \dots \cdot i p_k \cdot i x$.

Esto lo podemos repetir para cada p_i que sea igual a x y como $x \cdot i x = x$ tenemos que claramente hay $p'_1, \dots, p'_n \in P$ tales que $p_1 \cdot i \dots \cdot i p_k = p'_1 \cdot i \dots \cdot i p'_n \cdot i x$

Concluimos entonces que hay $p_1, \dots, p_n \in P$ tales que

$$p_1 \cdot i \dots \cdot i p_n \cdot i x \leq x_0$$

Análogamente como $x_0 \in [P \cup \{y\})$ tenemos que hay $q_1, \dots, q_m \in P$ tales que

$$q_1 \cdot i \dots \cdot i q_m \cdot i y \leq x_0$$

Si llamamos p y q a los siguientes elementos

$$p = p_1 \cdot i \dots \cdot i p_n \quad y \quad q = q_1 \cdot i \dots \cdot i q_m$$

usando que el $\cdot i$ es cota inferior y transitividad, tenemos que

$$(p \cdot i x) \cdot i q \leq (p \cdot i x) \leq x_0 \quad y \quad (q \cdot i y) \cdot i p \leq (q \cdot i y) \leq x_0$$

distribuyendo inteligentemente tenemos que

$$(p \cdot i q) \cdot i x \leq x_0 \quad y \quad (p \cdot i q) \cdot i y \leq x_0$$

si llamamos $h = p \cdot i q$, tenemos que

$$h \cdot i x \leq x_0 \quad y \quad h \cdot i y \leq x_0$$

ahora por la propiedad de que el \leq es la menor cota superior tenemos que

$$(h \cdot i x) \leq (h \cdot i y) \leq x_0$$

pero como $(L, \leq, \cdot i)$ es distributivo, tenemos que

$$(h \cdot i x) \leq (h \cdot i y) = h \cdot (x \leq y)$$

por lo tanto

$$h \cdot (x \leq y) \leq x_0.$$

Pero como $p, q \in P$, entonces por la propiedad de los filtros (2) $h \in P$ y por hipótesis $x \leq y \in P$, entonces nuevamente por la propiedad de los filtros (2) tenemos que $h \cdot (x \leq y) \in P$.

Finalmente como $h \cdot (x \leq y) \leq x_0$ por propiedad de los filtros (3) tenemos que $x_0 \in P$, absurdo.

Entonces P es un filtro primo tal que $P \in \mathcal{F}$, entonces $x_0 \notin P$ y $F \subseteq P$. ■

2. Lema (Propiedades básicas de la consistencia). *Sea (Σ, τ) una teoría.*

- (1) *Si (Σ, τ) es inconsistente, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, para toda sentencia φ .*
- (2) *Si (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.*
- (3) *Si $(\Sigma, \tau) \not\vdash \neg\varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.*

Demostración:

(1) Supongamos que (Σ, τ) es inconsistente. Por lo tanto por definición $(\Sigma, \tau) \vdash (\psi \wedge \neg\psi)$ para alguna sentencia ψ . Ahora dada una sentencia φ arbitraria pero fija, tenemos que φ se deduce por la **regla del absurdo** a partir de $(\psi \wedge \neg\psi)$. Entonces por *Lema (Propiedades básicas)* .(2) tenemos que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.¹³

(2) Supongamos que (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$. Para probarlo lo haremos por el absurdo. Supongamos que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es inconsistente. Por lo tanto tendríamos que vale

$$(\Sigma, \tau) \vdash \varphi \quad y \quad (\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash (\psi \wedge \neg\psi)$$

con ψ alguna sentencia. Pero entonces por *Lema (Propiedades básicas)* .(1) tendríamos que $(\Sigma, \tau) \vdash (\psi \wedge \neg\psi)$. Es decir (Σ, τ) es inconsistente, absurdo. Entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.¹⁴

(3) Supongamos que $(\Sigma, \tau) \not\vdash \neg\varphi$.

Supongamos que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es inconsistente. Entonces por definición tenemos que

$$\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau \vdash (\psi \wedge \neg\psi)$$

para algún ψ . Pero por *Lema (Propiedades básicas)* .(3) tendríamos

$$\Sigma, \tau \vdash (\varphi \rightarrow (\psi \wedge \neg\psi))$$

Finalmente tenemos que $\neg\varphi$ se deduce por la **regla del absurdo** a partir de $(\varphi \rightarrow (\psi \wedge \neg\psi))$. Por lo tanto tendríamos que $\Sigma, \tau \vdash \neg\varphi$, absurdo. Entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.¹⁵

¹³

Como φ era arbitraria pero fija, lo probamos para toda sentencia φ . Pero esto bajo la hipótesis de que (Σ, τ) es inconsistente. Entonces probamos “Si (Σ, τ) es inconsistente, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, para toda sentencia φ ”.

¹⁴

Entonces probamos $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente. Pero esto bajo la hipótesis de que (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$. Entonces probamos “Si (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente”.

¹⁵

Entonces probamos $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente. Pero esto bajo la hipótesis de que $(\Sigma, \tau) \not\vdash \neg\varphi$. Entonces probamos “Si $(\Sigma, \tau) \not\vdash \neg\varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente”.

Combo 2

1. Teorema (Teorema de Dedekind).

Sea (L, \leq, i) un reticulado terna. La relación binaria definida por:

$$x \leq y \text{ si } x \leq y = y$$

es un orden parcial sobre L para el cual se cumple que:

$$\sup(\{x, y\}) = x \leq y \quad \inf(\{x, y\}) = x \leq y$$

cualesquiera sean $x, y \in L$.

↳

Demostración:

Probemos que \leq es reflexiva (es decir $x \leq x$ para cada $x \in L$).

Sea $x \in L$. Por propiedad de (L, \leq, i) tenemos que $x \leq x = x$, entonces por definición de \leq , se da $x \leq x$.

Probemos que \leq es antisimétrica (es decir si $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces $x = y$).

Sean $x, y \in L$ tales que $x \leq y$ y $y \leq x$. Es decir por definición de \leq tenemos que $x \leq y = y$ e $y \leq x = x$.

Entonces aplicando propiedad de (L, \leq, i) tenemos que

$$x = y \leq x = x \leq y = y$$

por lo tanto $x = y$.

Probemos que \leq es transitiva (es decir si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$).

Sean $x, y, z \in L$ tales que $x \leq y$ y $y \leq z$. Es decir por definición de \leq tenemos que $x \leq y = y$ e $y \leq z = z$.

Entonces aplicando propiedad de (L, \leq, i) tenemos que

$$x \leq z = x \leq (y \leq z) = (x \leq y) \leq z = y \leq z = z$$

por lo tanto $x \leq z$.

Osea que probamos que (L, \leq) es un poset.

Probemos que $\sup(\{x, y\}) = x \leq y$. Primero debemos ver que $x \leq y$ es cota superior de $\{x, y\}$, es decir

$$x \leq x \leq y \quad y \leq x \leq y$$

que por definición de \leq es equivalente a ver

$$x \leq (x \leq y) = x \leq y \quad y \leq (x \leq y) = x \leq y$$

Notar que usando propiedad de (L, \leq, i) tenemos que

$$x \leq (x \leq y) = (x \leq x) \leq y = x \leq y$$

$$y \leq (x \leq y) = y \leq (y \leq x) = (y \leq y) \leq x = y \leq x = x \leq y$$

entonces listo. Falta ver que $x \leq y$ es menor o igual que cualquier otra cota superior de $\{x, y\}$.

Para ello supongamos $x, y \leq z$ con $z \in L$. Por definición de \leq tenemos que

$$x \leq z = z \quad y \leq z = z$$

Entonces usando propiedad de (L, \leq, i) tenemos que

$$(x \leq y) \leq z = x \leq (y \leq z) = x \leq z = z$$

por lo tanto por definición de \leq tenemos que $x \leq y \leq z$, lo que nos dice que $x \leq y$ es la menor cota superior.

Entonces probamos que $\sup(\{x, y\}) = x \leq y$.

Probemos que $\inf(\{x, y\}) = x \ i \ y$.

Para ello vamos a probar para todo $x, y \in L$ vale $x \leq y$ si y solo si $x \ i \ y = x$

- Supongamos $x \leq y$. Por definición de \leq tenemos que $x \ s \ y = y$.

Entonces usando propiedad de (L, s, i) tenemos que

$$x \ i \ y = x \ i \ (x \ s \ y) = x$$

por lo tanto $x \ i \ y = x$.

- Supongamos $x \ i \ y = x$. Entonces usando propiedad de (L, s, i) tenemos que

$$x \ s \ y = (x \ i \ y) \ s \ y = y \ s \ (x \ i \ y) = y$$

por lo tanto $x \ s \ y = y$, entonces por definición de \leq tenemos que $x \leq y$.

Usando el resultado anterior podemos probar que $\inf(\{x, y\}) = x \ i \ y$ de forma análoga a como probamos que $\sup(\{x, y\}) = x \ s \ y$. ■

2. Lema. Supongamos que \vec{a}, \vec{b} son asignaciones tales que si $x_i \in \text{Li}(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$.

Entonces $A \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $A \models \varphi[\vec{b}]$.

Demostración:

Sea A una estructura de tipo τ . Probaremos por inducción k que vale el *Lema* para cada $\varphi \in F_k^\tau$.

Caso Base ($k = 0$):

Sea $\varphi \in F_0^\tau$. Ademas sean \vec{a}, \vec{b} asignaciones tales que si $x_i \in \text{Li}(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$.

Entonces tenemos dos casos para φ

- (1) $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T^\tau$. Notar que todas las variables que ocurren en φ son libres, entonces sabemos por el *Lema análogo para Términos* que $t^A[\vec{a}] = t^A[\vec{b}]$ y $s^A[\vec{a}] = s^A[\vec{b}]$.

Ahora por definición y remplazando obtenemos que:

$$A \models (t \equiv s)[\vec{a}] \text{ si y solo si } t^A[\vec{a}] = s^A[\vec{a}] \text{ si y solo si } t^A[\vec{b}] = s^A[\vec{b}] \text{ si y solo si } A \models (t \equiv s)[\vec{b}]$$

- (2) $\varphi = r(t_1, \dots, t_n)$, con $r \in R_n^\tau$ y $t_1, \dots, t_n \in T^\tau$, es análogo¹⁶.

Caso Inductivo:

Supongamos que el lema vale para todo $\varphi \in F_k^\tau$ y probaremos que vale para todo $\varphi \in F_{k+1}^\tau$.

Sea $\varphi \in F_{k+1}^\tau - F_k^\tau$, ya que si $\varphi \in F_k^\tau$ sale directo.

Ademas sean \vec{a}, \vec{b} asignaciones tales que si $x_i \in \text{Li}(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$.

Entonces tenemos varios casos para φ , veremos algunos:

- Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$. Notar que $\text{Li}(\varphi_i) \subseteq \text{Li}(\varphi)$, $i = 1, 2$, por *H.I* tenemos que $A \models \varphi_i[\vec{a}]$ si y solo si $A \models \varphi_i[\vec{b}]$. Entonces por definición y remplazando obtenemos que

$$A \models \varphi[\vec{a}] \text{ si y solo si } A \models \varphi_1[\vec{a}] \text{ y } A \models \varphi_2[\vec{a}] \text{ si y solo si } A \models \varphi_1[\vec{b}] \text{ y } A \models \varphi_2[\vec{b}] \text{ si y solo si } A \models \varphi[\vec{b}]$$

- Los casos para $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ y $\varphi = \neg \varphi_1$ son análogos.
- Si $\varphi = \forall x_j \varphi_1$. Supongamos $A \models \varphi[\vec{a}]$, por definición vale que para todo $a \in A$, $A \models \varphi_1[\downarrow_j^a(\vec{a})]$. Notar que $\downarrow_j^a(\vec{a})$ y $\downarrow_j^a(\vec{b})$ coinciden en toda $x_i \in \text{Li}(\varphi_1)$ ya que $\text{Li}(\varphi_1) \subseteq \text{Li}(\varphi) \cup \{x_j\}$. Entonces por *H.I* tenemos que $A \models \varphi_1[\downarrow_j^a(\vec{b})]$ para todo $a \in A$, por lo que $A \models \varphi[\vec{b}]$. Luego $A \models \varphi[\vec{b}]$ implica $A \models \varphi[\vec{a}]$ es análogo, por lo que concluimos que $A \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $A \models \varphi[\vec{b}]$.
- El caso para $\varphi = \exists x_j \varphi_1$ es análogo.

Finalmente probamos el lema por inducción. ■

¹⁶Nuevamente todas las variables que ocurren en φ son libres, entonces sabemos por el *Lema análogo para Términos* que $t_i^A[\vec{a}] = t_i^A[\vec{b}]$ con $i = 1, \dots, n$. Ahora por definición y remplazando obtenemos que:

$$A \models r(t_1, \dots, t_n)[\vec{a}] \text{ si y solo si } (t_1^A[\vec{a}], \dots, t_n^A[\vec{a}]) \in r^A \text{ si y solo si } (t_1^A[\vec{b}], \dots, t_n^A[\vec{b}]) \in r^A \text{ si y solo si } A \models r(t_1, \dots, t_n)[\vec{b}]$$

Combo 3

1. Teorema (Lectura única de términos). *Dado $t \in T^\tau$ se da una y solo una de las siguientes:*

- (1) $t \in \text{Var} \cup \mathcal{C}$.
- (2) Hay únicos $n \geq 1$, $f \in F_n^\tau$, $t_1, \dots, t_n \in T^\tau$ tales que $t = f(t_1, \dots, t_n)$.

Demostración:

Por el Lema (Menú para términos) tenemos que se dan (1) o (2) y obviamente no pueden darse ambas a la vez. Veamos que vale la unicidad de (2). Supongamos que

$$t = f(t_1, \dots, t_n) = g(s_1, \dots, s_m)$$

con $n, m \geq 1$, $f \in F_n^\tau$, $g \in F_m^\tau$, $t_1, \dots, t_n \in T^\tau$ y $s_1, \dots, s_m \in T^\tau$.

Claramente $f = g$. Osea que $n = m$.

Notar que si t_1 es tramo inicial de s_1 o s_1 es tramo inicial de t_1 el Lema (Mordisqueo de términos) nos dice que $t_1 = s_1$. Con el mismo razonamiento, podemos probar que $t_i = s_i$ para cada $i = 1, \dots, n$. ■

2. Lema. Supongamos que $F : A \rightarrow B$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F^\tau$. Entonces

$$A \models \varphi[(a_1, a_2, \dots)] \text{ sii } B \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), \dots)]$$

para cada $(a_1, a_2, \dots) \in A^N$. En particular A y B satisfacen las mismas sentencias de tipo τ .

Demostración:

Para $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$, denotaremos $(F(a_1), F(a_2), \dots)$ con $F(\vec{a})$. Vamos a probar por inducción k :

- **Teo_k**: Supongamos que $F : A \rightarrow B$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F_k^\tau$. Entonces

$$A \models \varphi[(a_1, a_2, \dots)] \text{ sii } B \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), \dots)] \text{ para cada } (a_1, a_2, \dots) \in A^N$$

Caso Base Teo₀: Es decir para $\varphi \in F_0^\tau$. Sea $\vec{a} \in A^N$ arbitraria. Tenemos dos casos para φ

- $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T^\tau$.

$$\begin{aligned} A \models \varphi[\vec{a}] &\text{ sii } t^A[\vec{a}] = s^A[\vec{a}] && (\text{def. de } \models) \\ &\text{sii } F(t^A[\vec{a}]) = F(s^A[\vec{a}]) && (F \text{ un iso}) \\ &\text{sii } t^B[F(\vec{a})] = s^B[F(\vec{a})] && (\underline{\text{Lema análogo para términos}}) \\ &\text{sii } B \models (t \equiv s)[F(\vec{a})] && (\text{def. de } \models) \end{aligned}$$

- $\varphi = r(t_1, \dots, t_n)$, con $r \in R_n^\tau$ y $t_1, \dots, t_n \in T^\tau$.

$$\begin{aligned} A \models \varphi[\vec{a}] &\text{ sii } (t_1^A[\vec{a}], \dots, t_n^A[\vec{a}]) \in r^A && (\text{def. de } \models) \\ &\text{sii } (F(t_1^A[\vec{a}]), \dots, F(t_n^A[\vec{a}])) \in r^B && (F \text{ un iso}) \\ &\text{sii } (t_1^B[F(\vec{a})], \dots, t_n^B[F(\vec{a})]) \in r^B && (\underline{\text{Lema análogo para términos}}) \\ &\text{sii } B \models r(t_1, \dots, t_n)[F(\vec{a})] && (\text{def. de } \models) \end{aligned}$$

Caso Inductivo Teo_k implica Teo_{k+1}: Supongamos que vale Teo_k y probaremos que vale Teo_{k+1}.

Sea $\varphi \in F_{k+1}^\tau - F_k^\tau$, ya que si $\varphi \in F_k^\tau$ sale directo. Por Teorema de lectura única de formulas hay varios casos

- Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ con $\varphi_1, \varphi_2 \in F_k^\tau$. Entonces

$$\begin{aligned} A \models \varphi[\vec{a}] &\text{ sii } A \models \varphi_1[\vec{a}] \text{ y } A \models \varphi_2[\vec{a}] && (\text{def. de } \models) \\ &\text{sii } B \models \varphi_1[F(\vec{a})] \text{ y } B \models \varphi_2[F(\vec{a})] && (\text{Teo}_k) \\ &\text{sii } B \models \varphi[F(\vec{a})] && (\text{def. de } \models) \end{aligned}$$

- Los casos para $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ y $\varphi = \neg\varphi_1$ son análogos.

- Si $\varphi = \forall x_j \varphi_1$ con $\varphi_1 \in F_k^\tau$. Sea $\vec{a} \in A^N$ arbitraria. Tenemos que

$$\begin{aligned} A \models \varphi[\vec{a}] &\text{ sii para todo } a \in A, \text{ se da } A \models \varphi_1[\downarrow_j^a(\vec{a})] && (\text{def. de } \models) \\ &\text{sii para todo } a \in A, \text{ se da } B \models \varphi_1[F(\downarrow_j^a(\vec{a}))] && (\text{Teo}_k) \\ &\text{sii para todo } a \in A, \text{ se da } B \models \varphi_1[\downarrow_j^{F(a)}(F(\vec{a}))] && (\text{deducción inteligente}) \\ &\text{sii para todo } a \in A, \text{ se da } B \models \varphi_1[\downarrow_j^{F(a)}(F(\vec{a}))] && (\text{F sobre ya que es iso}) \\ &\text{sii } B \models \varphi[F(\vec{a})] && (\text{def. de } \models) \end{aligned}$$

- El caso para $\varphi = \exists x_j \varphi_1$ con $\varphi_1 \in F_k^\tau$ es análogo.

Finalmente probamos Teo_k por inducción. ■

Lema análogo para términos: Sea $F : A \rightarrow B$ un isomorfismo. Entonces

$$F(t^A[\vec{a}]) = t^B[F(\vec{a})] \text{ para cada } t \in T^\tau \text{ y cada } \vec{a} \in A^N.$$

Teorema de lectura única de formulas: Dado $\varphi \in F^\tau$ se da una y solo una de las siguientes:

- 1) $\varphi = (t \equiv s)$ con $t, s \in T^\tau$, únicos.
- 2) $\varphi = r(t_1, \dots, t_n)$ con $r \in R_n^\tau$, $t_1, \dots, t_n \in T^\tau$, únicos.
- 3) $\varphi = \neg\varphi_1$ con $\varphi_1 \in F_k^\tau$, único.
- 4) $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$ con $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in F_k^\tau$, únicos.
- 5) $\varphi = Qv\varphi_1$ con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $\varphi_1 \in F_k^\tau$ y $v \in \text{Var}$, únicos.

3. Teorema. Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría. Entonces $(S^\tau / \dashv_T, s^T, i^T, c^T, 0^T, 1^T)$ es un álgebra de Boole.

Nota: Pruebe solo el ítem (6).

Demostración:

Por definición de álgebra de Boole, debemos probar que valen varias propiedades. En total (13), pero solo veremos la (6). Para cualquier $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S^\tau$ debe cumplirse la siguiente igualdad

$$[\varphi_1]_T s^T ([\varphi_2]_T s^T [\varphi_3]_T) = ([\varphi_1]_T s^T [\varphi_2]_T) s^T [\varphi_3]_T$$

Aplicando la definición de s^T , básicamente tenemos que ver

$$[\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)]_T = [(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3]_T$$

Es decir, debemos probar que $T \vdash ((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \leftrightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$. Su prueba formal es

1.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	HIPOTESIS $\bar{1}$
2.	φ_1	HIPOTESIS $\bar{2}$
3.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(3)
4.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS $\bar{2}$ DISJUNCIONINTRODUCCION(3)
5.	$(\varphi_1 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$	CONCLUSION
6.	$(\varphi_2 \vee \varphi_3)$	HIPOTESIS $\bar{3}$
7.	φ_2	HIPOTESIS $\bar{4}$
8.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(7)
9.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS $\bar{4}$ DISJUNCIONINTRODUCCION(8)
10.	$(\varphi_2 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$	CONCLUSION
11.	φ_3	HIPOTESIS $\bar{5}$
12.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS $\bar{5}$ DISJUNCIONINTRODUCCION(11)
13.	$(\varphi_3 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$	CONCLUSION
14.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS $\bar{3}$ DIVISIONPORCASOS(6, 10, 13)
15.	$((\varphi_2 \vee \varphi_3) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$	CONCLUSION
16.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS $\bar{1}$ DIVISIONPORCASOS(1, 5, 15)
17.	$((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$	CONCLUSION
18.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	HIPOTESIS $\bar{6}$
19.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	HIPOTESIS $\bar{7}$
20.	φ_1	HIPOTESIS $\bar{8}$
21.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	TESIS $\bar{8}$ DISJUNCIONINTRODUCCION(19)
22.	$(\varphi_1 \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)))$	CONCLUSION
23.	φ_2	HIPOTESIS $\bar{9}$
24.	$(\varphi_2 \vee \varphi_3)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(23)
25.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	TESIS $\bar{9}$ DISJUNCIONINTRODUCCION(24)
26.	$(\varphi_2 \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)))$	CONCLUSION
27.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	TESIS $\bar{7}$ DIVISIONPORCASOS(19, 22, 16)
28.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)))$	CONCLUSION
29.	φ_3	HIPOTESIS $\bar{10}$
30.	$(\varphi_2 \vee \varphi_3)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(29)
31.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	TESIS $\bar{10}$ DISJUNCIONINTRODUCCION(30)
32.	$(\varphi_3 \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)))$	CONCLUSION
33.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	TESIS $\bar{6}$ DIVISIONPORCASOS(18, 28, 32)
34.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	CONCLUSION
35.	$((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \leftrightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$	EQUIVALENCIAINTRODUCCION(17, 34)



Resultados Muy Usados en las Demostraciones

Las (\star) indican que son un combo y el [n] es la cantidad de veces que se mencionó el resultado (incluso en una misma demo).

Lema (Propiedades básicas de \vdash) [3]

Sea (Σ, τ) una teoría.

- (1) (Uso de Teoremas) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.
- (2) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$. Si \mathbf{R} es una regla distinta de GENERALIZACION y ELECCION y φ se deduce de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ por la regla \mathbf{R} , entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.
- (3) $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.

Lema de Zorn [1]

Sea (P, \leq) un poset y supongamos que toda cadena en P tiene al menos una cota superior.

Entonces hay un elemento maximal en (P, \leq) .

Lema (Igualdad de valor en términos para asignaciones compartidas) [2]

Sea A una estructura de tipo τ y sea $t \in T^\tau$. Supongamos que \vec{a}, \vec{b} son asignaciones tales que $a_i = b_i$, cada vez que x_i ocurre en t . Entonces $t^A[\vec{a}] = t^A[\vec{b}]$.

Lema (Menú para Términos) [1]

Supongamos $t \in T_{k+1}^\tau$, con $k \geq 0$. Entonces se da alguna de las siguientes:

- (1) $t \in \text{Var} \cup \mathcal{C}$.
- (2) $t = f(t_1, \dots, t_n)$, con $n \geq 1$, $f \in F_n^\tau$ y $t_1, \dots, t_n \in T_k^\tau$.

Lema (Mordisqueo de Términos) [1]

Sean $s, t \in T^\tau$ y supongamos que hay palabras x, y, z , con $y \neq \varepsilon$ tales que $s = xy$ y $t = yz$. Entonces $x = z = \varepsilon$ o $s, t \in \mathcal{C}$. “En particular si un término es tramo inicial o final de otro término, entonces dichos términos son iguales”.