# EL PLANO

## I. EJERCITACIÓN BÁSICA:

**1)** Determinar la ecuación general y la segmentaria del plano obtenido en cada caso:

**a)** Pasa por el punto $A\ (3; -6; 1)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = 2\vec{i}$ ;

**b)** Pasa por el punto $A\ (3; -6; 1)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$;

**c)** Contiene al punto $A\ (3;-6;1)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$;

**d)** Contiene al origen y es normal al vector $\vec{n} = -2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ .

**2)** Con los planos hallados en los ejercicios 1, determinar las trazas e intersecciones con los ejes coordenados. Graficar

**3)** Determinar la ecuación general y segmentaria del plano obtenido en cada caso. Graficar.

**a)** Pasa por $A\ (3; –6; 1)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$

**b)** Contiene al punto $A\ (3; –6; 1)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = -3\vec{k}$

**4)** Determinar la ecuación del plano obtenido en cada caso:

**a)** Pasa por $P_1\ (–1; 2; 4)$ y es paralelo a $\pi_1)\ 2x – 3y – 5z + 6 = 0$;

**b)** Pasa por los puntos $P_1\ (2; 3; 5)$, $P_2\ (6; 4; 3)$ y $P_3\ (4; 6; 3)$.
Determinar sus trazas.

**c)** Pasa por $P_1\ (-2; –1; 5)$ y es perpendicular a la recta determinada por $P_2\ (2; –1; 2)$ y $P_3\ (3; 1; –2)$

**d)** Es perpendicular en el punto medio al segmento que une los puntos $A\ (–2; 2; –3)$ y $B\ (6; 4; 5)$

**e)** Contiene los puntos $P_1\ (2; 3; 5)$, $P_2\ (6; 4; 15)$ y $P_3\ (0; 0; 0)$.

**5)** Hallar la distancia entre:

**a)** $A\ (1; –2; 3)$ y $\pi)\ 2x – 3y + 2z – 14 = 0$

**b)** El punto de intersección de $\pi_1)\ 2x – y + 3z – 4 = 0$ con el eje *y* y el plano $\pi_2)\ \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-2} = 1$

**c)** $\pi_1)\ 8x – 4y + z + 9 = 0$ y $\pi_2)\ 8x–- 4y + z - 36 = 0$.

**6)** Calcular el ángulo que forman $\pi_1)\ x – y + z = 1$ y $\pi_2)\ 2x + 3y – z = 2$.

**7)** Demostrar que los planos $\pi_1) 3x + 2y - z - 3 = 0$, $\pi_2)\ 2x - 3y - 3z = 4$ y $\pi_3) x + 7y - 2z + 7 = 0$ tienen sólo un punto común. Hallarlo.

## II. EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

**1)** Determinar la ecuación del plano obtenido en cada caso:

**a)** Pasa por $A$ (3; -2; 4) y es perpendicular a $\pi_1)\ 7x - 3y + z = 5$ y $\pi_2)\ 4x - y - z + 9 = 0$

**b)** Contiene al eje $z$ y al punto $A$ (3; 1; 5)

**c)** Es perpendicular al plano $xy$ y contiene a $A$ (2; –2; 11) y $B$ (–7; –8; –3). Graficar.

**d)** Pasa por la intersección de $\pi_1)\ 3x + y - 2z + 2 = 0$ y $\pi_2)\ x - 3y - z + 3 = 0$ y es perpendicular al plano $xz$

**e)** Es paralelo a $\pi_1)\ 4x - 4y + 7z - 3 = 0$ y dista 4 unidades de $A$ (4; 1; –2)

**f)** Es paralelo a los vectores $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j}$ y pasa por $P$ (2; 5; 6)

**g)** Pasa por $A$ (1; –1; 1) y por la recta de intersección de $\pi_1)\ x + 2y - z = 4$ y $\pi_2)\ 2x - 3y + z = 6$

**2)** Hallar la ecuación del plano cuya intersección con el eje $x$ es $L$ (2; 0; 0) y con el eje $y$ es $M$ (0; 3; 0) y dista del origen 6/7.

**3)** Hallar los valores de $k$ si:

**a)** $\pi_1)\ 2x + 3y + z = 1$ y $\pi_2)\ 4x + k_1 y + k_2 z = 8$ son paralelos

**b)** $\pi_1)\ 2x + 3y + z = 1$ y $\pi_2)\ x - 4y + kz = 20$ son perpendiculares

**c)** La distancia del origen al $\pi)\ 3x - 6y + kz + 14 = 0$ es 2

**d)** $\pi)\ kx - 3y + kz = 22$ pasa por $A$ (3; –4; 2)

**e)** $\pi_1)\ 2x + ky - kz + 7 = 0$ es perpendicular a $\pi_2)\ 3x + 6y = 12$

**4)** Hallar la ecuación del plano que pasa por $A$ (1; 3; 0) y $B$ (4; 0; 0) y forma un ángulo de $30^\circ$ con $\pi_1)\ x + y + z = 1$

**5)** Determinar la ecuación del plano que pasa por $A$ (0; 0; 1) y es perpendicular al plano $xz$, y forma un ángulo cuyo coseno es 1/3 con el plano $x + 2y + 2z = 5$.

**6)** Hallar la ecuación del plano que pasa por la intersección de $\pi_1)\ 2x - y + 3z = 2$ y $\pi_2)\ 4x + 3y - z = 1$, y es perpendicular a $\pi_3)\ 3x - 4y - 2z = 9$

**7)** Hallar la ecuación del plano que sea paralelo al $\pi_1)\ 6x + 3y - 2z = 14$ y equidistante de él y del origen.

**8)** Determinar un plano paralelo al $\pi_1)\ x + 2y - 3z = 4$, que se encuentre a 2 unidades de él.

**9)** Determinar los puntos ubicados sobre el eje y, que equidisten de los planos $\pi_1)\ 3x - 4y + 5 = 0$ y $\pi_2)\ 2x - y + z + 9 = 0$.

**10)** Hallar la ecuación del plano que pasa por $A$ (3; 1; –1), es perpendicular a $\pi_1)\ 2x - 2y + z + 4 = 0$ e intersecta al eje $z$ en B(0; 0; –3).

**11)** Determinar la relación que existe entre las componentes de un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que sea coplanar con $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ¿Qué conclusión se puede obtener de la relación encontrada?

**12)** Determinar un vector que sea coplanar con $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

**13)** Sea $\pi$ ) $2x + y - z + d = 0$

Obtenga el valor de $d \in \Re$ para que la proyección ortogonal del punto $M$ (2; 4; 6) sobre el plano $\pi$ sea un punto $M'$ perteneciente al plano $yz$. Halle dicho punto $M'$.

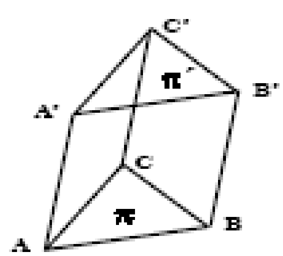
**14)** Dados los planos $\pi_1$) $x + y - 1 = 0$ y $\pi_2$) $2x - z = 0$ y los puntos $A(1; 1; 1)$ y $B(1; 2; c)$ determinar los valores de $c$ para los cuales existe un plano que contiene a la recta $AB$ y a la recta de intersección entre $\pi_1$ y $\pi_2$. Indicar la ecuación de dicho plano.

**15)** Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos) de la figura, con $A(-1; 1;0)$, $B(1; 0; -1)$, $C(0; 1; -1)$ y $A'(1; -1; \alpha)$. Calcula:

**a)** La ecuación del plano $\pi$ que pasa por los puntos $A$, $B$ y $C$.

**b)** El valor de $\alpha$ para que el plano $\pi'$, que contiene los puntos $A'$, $B'$ y $C'$, diste una unidad del plano $\pi$.

**c)** Para $\alpha = 1$ el plano $\pi'$ y el volumen del prisma.




## III. APLICACIONES:

El contenido de este apartado se encuentra incluido en Aplicaciones del tema "Rectas en $R^3$".

# I. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN BÁSICA:

**1) a)** $x = 3;\quad \frac{x}{3} = 1$

**1) b)** $x - 2y - 15 = 0;\quad \frac{x}{15} + \frac{y}{-15/2} = 1$

**1) c)** $x - 2y + 3z - 18 = 0;\quad \frac{x}{18} + \frac{y}{-9} + \frac{z}{6} = 1$

**1) d)** $2x - 5y - z = 0$
No puede expresarse en forma segmentaria

**2) a)** $\pi \cap xy : x=3; z=0$
$\pi \cap xz : x=3; y=0$
$\pi \cap yz : \nexists$
$\pi \cap x : L(3; 0; 0)$
$\pi \cap y : \nexists$
$\pi \cap z : \nexists$

**2) b)** $\pi \cap xy : x - 2y - 15 = 0; z = 0$
$\pi \cap xz : x = 15; y=0$
$\pi \cap yz : y= -15/2; x = 0$
$\pi \cap x : L(15; 0; 0)$
$\pi \cap y : M(0; -15/2; 0)$
$\pi \cap z : \nexists$

**2) c)** $\pi \cap xy : x - 2y - 18 = 0; z=0$
$\pi \cap xz : x + 3z - 18 = 0; y=0$
$\pi \cap yz : -2y + 3z - 18 = 0; x = 0$
$\pi \cap x : L(18; 0; 0)$
$\pi \cap y : M(0; 9; 0)$
$\pi \cap z : N(0; 0; 6)$

**2) d)** $\pi \cap xy : 2x - 5y = 0; z=0$
$\pi \cap xz : 2x - z =0; y=0$
$\pi \cap yz : 5y + z = 0; x= 0$
$\pi \cap x : L(0; 0; 0)$
$\pi \cap y : M(0; 0; 0)$
$\pi \cap z : N(0; 0; 0)$

**3) a)** $6x + 3y + 2z - 2 = 0$
$\frac{x}{1/3} + \frac{y}{2/3} + \frac{z}{1} = 1$

**3) b)** $-3z+3 = 0 \Rightarrow z-1 = 0$
$\frac{z}{1} = 1$

**4) a)** $2x - 3y - 5z + 28 = 0$
**b)** $2x + 2y + 5z - 35 = 0$
**c)** $x + 2y - 4z + 24 = 0$
**d)** $4x + y + 4z - 15 = 0$
**e)** $5x - 2z = 0$

**5) a)** $0$
**b)** $\frac{14}{17} \cdot \sqrt{17}$
**c)** $5$

**6)** 107º 59'; 72º 1'

**7)** $P(2; -1; 1)$

## II. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

**1)** **a)** $4x + 11y + 5z = 10$
**b)** $x - 3y = 0$
**c)** $2x - 3y - 10 = 0$
**d)** $10x - 7z + 9 = 0$
**e)** $4x - 4y + 7z + 38 = 0$
$4x - 4y + 7z - 34 = 0$
**f)** $2x + y - 9z + 45 = 0$
**g)** $2x - 3y + z - 6 = 0$

**2)** $\pi_1$) $3x + 2y + 6z - 6 = 0$
$\pi_2$) $3x + 2y - 6z - 6 = 0$

**3)** **a)** 2; 6
**b)** 10
**c)** $\pm 2$
**d)** 2
**e)** -1

**4)** $5x + 5y + (8 \pm 3\sqrt{6})z = 20$

**5)** $3x - 4z + 4 = 0$ ; $x = 0$

**6)** $6x + 7y - 5z = 0$

**7)** $6x + 3y - 2z - 7 = 0$

**10)** $5x + y - 8z - 24 = 0$

**11)** $x + y - z = 0$

**13)** d= 4 ; M' (0; 3; 7)

**14)** c= 0 **;** $\pi$) $x - y - z + 1 = 0$

**15)** **a)** $x + y + z = 0$
**b)** $\alpha = \pm\sqrt{3}$
**c)** π') $x + y + z - 1 = 0$; $V = 1/2$.

**Bibliografía Consultada:**

- Geometría Analítica (C. Lehmann)