CONICAS

I. EJERCITACIÓN BÁSICA:

0) Deducir una ecuación para el lugar geométrico de los puntos P(x,y) que equidistan de un punto fijo C(h, k), siendo h y k ϵ R.

1) Determinar y graficar la ecuación de la circunferencia que:

a) Tiene centro $C(-3; 1/2)$ y radio $r=\sqrt{7}$;

b) Tiene centro $C(7; -6)$ y contiene al punto $A(2; 2)$;

c) Tiene centro en el eje x, y pasa por $A(1; 3)$ y $B(4; 6)$;

d) Tiene centro $C(0; -2)$ y es tangente a la recta $5x - 12y + 2 = 0$;

e) Pasa por el punto $A(1; 2)$ y en el origen de coordenadas es tangente al eje x.

2) Identificar el lugar geométrico (LG) que representa en $\Re^2$ la siguiente ecuación: $2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0$

3) En cada caso, determinar una ecuación de la parábola, los elementos principales y graficar:

a) Situada en el semiplano inferior, simétrica respecto al eje y; $V(0; 0)$; y $1=|2p|$ es la longitud de su **lado recto** (Segmento cuyos extremos son los puntos de la parábola de ordenada coincidente con la de su foco: **verificarlo**);

b) Su vértice es $V(4; -1)$; eje focal $y+1=0$; $A(3; -3) \in$ LG;

c) Su foco es $F(3; 4)$ y directriz: $x-1= 0$;

d) Su vértice es $V(2; 0)$; foco $F(0;0)$;

e) Su vértice es $V(0; 0)$; directriz $d: y - 3 = 0$.

4) A partir de la ecuación de la parábola $y + (1/3)\, x^2 = 0$, determinar las coordenadas del vértice y foco; las ecuaciones del eje y directriz; graficar.

5) Individualizar el LG que representa en $\Re^2$ la ecuación $4y^2 - 48x - 20y = 71$. Determinar sus principales elementos característicos. Graficar.

6) En cada caso, determinar una ecuación de la elipse, sus los elementos principales y graficar:

a) Sus vértices son $V(0; \sqrt{7})$ y $V'(0; -\sqrt{7})$; focos $F1(3; 0)$ y $F2(-3; 0)$;

b) Sus focos son $F1(2; 0)$ y $F2(-2; 0)$ y excentricidad $e= 2/3$;

c) Su vértice secundario es $V(3; -1)$; focos ubicados en $r)\ y+6= 0$ y $e= \sqrt{2}/2$;

d) La distancia entre focos es $2c= 4$; excentricidad $e= 2/5$ y centro $C(0; 0)$;

e) Su eje focal coincide con el eje x; pasa por los puntos $A(2; 3)$ y $B(1;3\sqrt{5}/2)$; su centro es $C(0; 0)$;

f) Su centro es $C\ (0; 0)$; eje focal coincidente con el eje y; razón entre las longitudes de ejes menor y mayor $1:2$ y pasa por el punto $A(\sqrt{7}/2; 3)$;

g) Uno de sus vértices es $V\ (0; -7)$; $C\ (0; 0)$ y pasa por el punto $P(\sqrt{5}\ ;14/3)$.

7) Si alguna de las ecuaciones dadas a continuación representa una elipse, determinar sus principales elementos característicos y graficar:

a) $3x^2 + 4y^2 - 12x - 24y + 36 = 0$;

b) $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 9 = 0$.

8) Determinar una ecuación de la hipérbola, los elementos principales y graficar cada caso, si:

a) La distancia entre vértices $\left|\overline{V_1V_2}\right| = 2$ y asíntotas: $y_1 = 3x$; $y_2 = -3x$;

b) Sus focos están ubicados en el eje de abscisas; centro $C(0; 0)$ y pasa por los puntos $A(6; -1)$ y $B(-8; 2\sqrt{2})$;

c) Sus focos se ubican en el eje de abscisas; asíntotas: $y_1=2/3x$; $y_2=-2/3x$ y pasa por el punto $A(9/2; -1)$;

d) Sus vértices son $V1(-1; 3)$; $V2(3; 3)$ y excentricidad $e=3/2$;

e) Su centro es $C(4; 5)$; excentricidad $e=2$ y uno de sus focos es $F(8; 5)$;

f) Su centro es $C(0; 0)$; eje focal contenido en el eje y; $a^2/b = 1/3$ y contiene al punto $A(-1; 2)$;

<u>Nota</u>: Puede demostrarse que $2a^2/b$ es la longitud del llamado **lado recto** de una hipérbola con eje focal paralelo al eje y (segmento cuyos extremos son los puntos de la hipérbola de ordenada coincidente con la de uno de sus focos)

g) Sus focos se encuentran en el eje de abscisas; distancia interfocal=20 y asíntotas: $y_1 = (4/3)x$; $y_2 = -(4/3)x$;

h) Sus focos se encuentran en el eje de abscisas; centro $C(0; 0)$; excentricidad $e=\sqrt{2}$ y pasa por el punto $A(-5; 3)$.

i) Su eje focal es paralelo al eje de abscisas; pasa por el punto $A(4; 6)$ y sus asíntotas son: $2x + y - 3 = 0$; $2x - y - 1 = 0$;

j) Sus vértices son $V_1(0;3)$; $V_2(0;-3)$ y la longitud del lado recto es $2b^2/a = 6$.

9) Determinar y graficar el lugar geométrico que representa cada ecuación, en $\Re^2$:

a) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5 = 0$;
b) $x^2 + 2x + y^2 + 3 = 0$;
c) $x^2 + 2x + 1 = 0$;
d) $4x^2 + 12xy + 9y^2 = 0$;
e) $36x^2 + 36y^2 + 48x - 108y + 97 = 0$;
f) $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$;
g) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 29 = 0$;
h) $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$;
i) $x^2 - 3y^2 + 10x + 22 = 0$;
j) $xy = 1$;
k) $y^2x^2 = 25$;
l) $3x^2 + y^2 - 8x + 6y + (43/3) = 0$;
m) $3x^2 - y^2 - 8x - 6y - (11/3) = 0$;

II. <u>EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:</u>

1) **a)** Determinar analíticamente la longitud del segmento tangente trazado desde el punto $A(-3; 5)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 = 18$.
b) Determinar el o los puntos de tangencia.

2) Determinar analíticamente la posición relativa entre las circunferencias:
$lg_1)$ $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$ y
$lg_2)$ $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 41 = 0$. Graficar.

3) Determinar el valor de k para que el punto $A(-2; k)$ sea interior a la circunferencia:

$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 17$. Verificar y graficar.

4) ¿Qué valores deberá tomar x de los puntos $A(x; y)$ pertenecientes a la recta: $y= -x+1$, que sean exteriores a la circunferencia: $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 17$? Graficar. Verificar.

5) ¿Para qué valores de m, habrá contacto entre la recta $y = mx + 2$ y la parábola $y^2 = 4x$? Graficar

6) Dada la parábola $y^2=9x$ determinar las ecuaciones de las rectas paralelas a: $y= 2x+4$ tales que:
a) No corten a la parábola. Graficar.
b) Sean tangentes a la parábola. Hallar puntos de tangencia. Graficar.

7) Hallar puntos de tangencia entre la recta $y = mx + 2$ y la parábola $y^2 = 4x$. Graficar.

8) Determinar:
a) Las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $P(-3; 3)$ a la parábola $y^2 - 3x - 8y + 10 = 0$
b) Los puntos de tangencia
c) El ángulo formado por dichas tangentes
d) Las ecuaciones de las rectas normales a la parábola en los puntos de tangencia hallados en **b)**
e) La grafica correspondiente.

9) Para cada valor de k, la ecuación $kx^2 + 4y^2 + 6x - 8y = 5$ representará una elipse. Hallar las ecuaciones correspondientes que tengan excentricidad $e = 1/2$. Graficar.

10) Hallar la ecuación de la familia de elipses que tiene: centro $C(2; 3)$, eje focal paralelo al eje x; $e = 1/2$. Graficar.

11) Hallar para qué valores de h, la recta $y= -x+h$:
a) No corta a la elipse $x^2/20 + y^2/5 = 1$
b) Es tangente a ella. Determinar el o los puntos de tangencia.

12) Hallar para qué valores de h, la recta $y= 5/2x+h$:
a) Corta a la hipérbola $x^2/9 - y^2/36 = 1$. Graficar.
b) Es tangente a ella. Determinar los puntos de tangencia. Graficar.

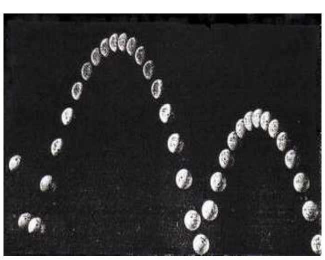
III. APLICACIONES:

Reflexión en la parábola: Todo rayo que se emite desde el foco de una parábola, se reflejarán en las paredes de ésta y emergerá paralelamente a su eje. Recíprocamente, si los rayos incidentes son paralelos al eje de una parábola, entonces los reflejados por ésta se concentra en el foco.

Antenas parabólicas: Al girar una parábola sobre su eje, se obtiene una superficie llamada paraboloide de revolución. Estas superficies tienen muchas aplicaciones, principalmente en óptica y electrónica, ya que si un rayo de luz paralelo al eje choca contra el paraboloide, entonces se refleja hacia su foco, e inversamente, si un rayo de luz sale del foco y choca contra el paraboloide éste se refleja en la dirección de su eje.

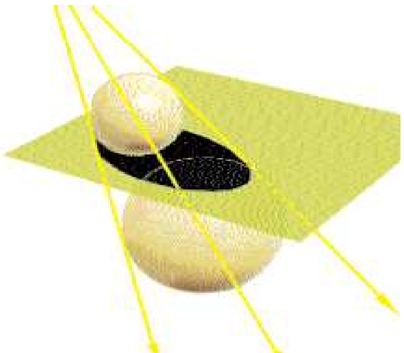
Esta propiedad, conocida como la propiedad de reflexión o propiedad óptica de la parábola, tiene muchas aplicaciones, por ejemplo, en los faros de los automóviles, las antenas parabólicas, los radio telescopios, los micrófonos direccionales, cocinas solares, etc.

Los puentes colgantes: Si un cable sostiene un peso homogéneo mucho mayor que el peso del propio cable, éste toma la forma de una parábola. Esta propiedad se utiliza en los puentes colgantes.



Tiro parabólico: Cualquier cuerpo lanzado al aire de forma oblicua u horizontal describe un movimiento parabólico bajo la acción de la gravedad. Por ejemplo es el caso de una pelota que se desplaza rebotando. También, es caso de los chorros y las gotas de agua que salen de los caños de las numerosas fuentes que podemos encontrar en las ciudades.

Las sombras y la parábola:
También obtenemos formas parabólicas cuando un haz luminoso de forma cónica se proyecta sobre una pared blanca de manera que la pared sea paralela a la generatriz del cono.

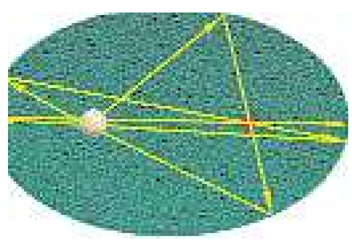


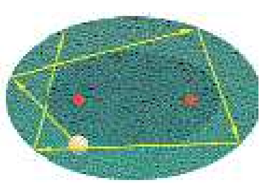
Las sombras y la elipse:
La sombra que arroja una esfera iluminada sobre una superficie plana, es una elipse, obtenida a partir del cono de luz que la envuelve y que tiene su vértice en el punto de luz. La esfera contacta con la sombra en uno de los focos.

Propiedad de reflexión de la elipse: La elipse tiene propiedades de reflexión similares a la de la parábola. Las ondas que se emiten desde un foco, se reflejarán en las paredes de la elipse y convergerán en el otro foco.

El billar elíptico:
Vamos a jugar al billar en una mesa muy especial con forma de elipse, lo que nos proporcionará sorpresas inimaginables.
Nuestra mesa, además, es tan especial que no tiene rozamiento, con lo que la bola no dejará de moverse. Las propiedades especiales de esta mesa de billar proceden de las características de los focos de la elipse.

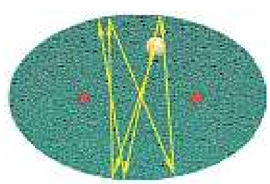
Si la bola se coloca en un foco y se lanza, rebotará y pasará por el otro foco.
Estará eternamente rebotando de un foco al otro. A los pocos rebotes, sin embargo, la trayectoria se confundirá con el eje longitudinal.





Si la bola no se coloca en un foco y se lanza de modo que no pase entre los focos, rebotará dibujando un polígono tangente a otra elipse más pequeña pero con los mismos focos.

Si la bola no se sitúa en un foco y se dispara de forma que pase entre ellos, la bola rebotará eternamente acercándose a los focos.



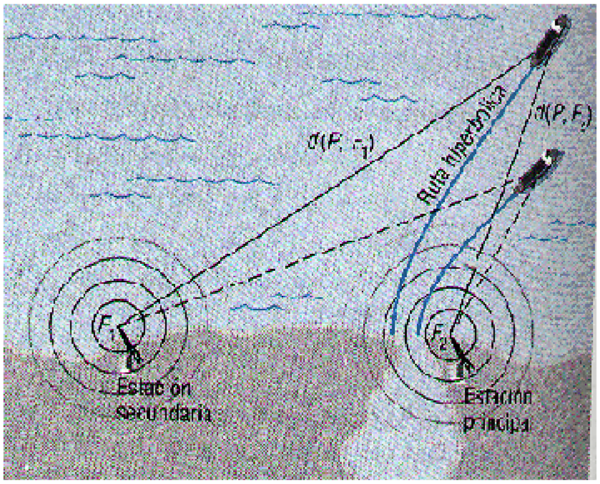
El elipsoide:
- Al girar una elipse sobre cualquiera de sus ejes, se obtiene una superficie llamada elipsoide de revolución. Estas superficies tienen muchas aplicaciones.
- Por ejemplo, se aplica en ciertos hornos de laboratorio para fabricar cristales. En un recipiente en forma de elipsoide de revolución, cuya pared interior sea de un

material altamente reflejante, se coloca una fuente de calor en uno de los focos de la elipse y el objeto que se desea calentar en el otro foco. Como todos los rayos que emanan de un foco se reflejan hacia el otro foco, después de un tiempo, el segundo foco está extremadamente caliente.

- Otra aplicación de esta propiedad es en medicina. Un aparato llamado litotriptor se utiliza para desintegrar cálculos renales por medio de ondas intra-acuáticas de choque. El funcionamiento de este aparato es de la siguiente forma: Por un lado se coloca medio elipsoide lleno de agua con un emisor de ondas ubicado en su foco y por otro, el cuerpo del paciente de tal manera que el otro foco del elipsoide coincida con los "cálculos". Así al reflejarse las ondas en la superficie del medio elipsoide, todas convergerán en el "cálculo" y éste se desintegrará.
- Por otra parte, es interesante contar que existen bóvedas elipsoidales donde dos personas situadas en los focos pueden hablar y escucharse mutuamente, sin que cualquier otra persona puedan oír algo. Son los casos de las llamadas capillas o galerías de los secretos como las que se encuentran el Desierto de los Leones (México DF) o la Statuary Hall del Capitolio (Washington) o en Alambra (Granada).

Movimiento Planetario (KEPLER):
Los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos.

Sistema de navegación de largo alcance (LORAN): En el sistema de navegación de largo alcance (LOng RAdio Navigation), una estación principal de radio y una estación secundaria emiten señales que pueden ser recibidas por un barco en el mar. Aunque un barco recibe las dos señales, por lo regular se halla más cerca de una de las dos estaciones y, por lo tanto, hay cierta diferencia en las distancias que recorren las dos señales, lo cuál se traduce en una pequeña diferencia de tiempo entre las señales registradas. Mientras la diferencia de tiempo permanezca constante, la diferencia de las dos distancias también será constante. Si el barco sigue una ruta que mantenga fija la diferencia de tiempo, seguirá la trayectoria de una hipérbola cuyos focos están localizados en las posiciones de las dos estaciones de radio. Así que para cada diferencia de tiempo se obtiene una trayectoria hiperbólica diferente, cada una llevando al barco a una posición distinta de la costa. Las cartas de navegación muestran las diferentes rutas hiperbólicas correspondientes a diferencias de tiempo distintas.



No tan científicas, parecen ser las preguntas:

- ¿Qué figuras representan las seis curvas que se forman en las respectivas caras de un lápiz al sacarle punta?
- ¿Qué figura describe en el piso, la trayectoria de la sombra del extremo de un reloj de sol?

La respuesta en ambos casos es: hipérbolas.

1) Se encontró parte de una rueda antigua. Fue una rueda sólida sin rayos. Para determinar su tamaño el arqueólogo colocó el pedazo en un sistema de ejes coordenados, con cuadrícula de una pulgada de lados. Localizó 3 puntos del borde, en A(–3,–3) B(–1,11) y C(5,13) ¿Cuál fue la deducción del arqueólogo acerca del radio de la rueda original?

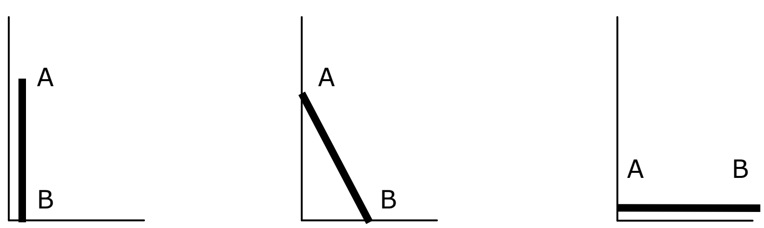
2) Una escalera de 2m de longitud está apoyada por su extremo superior a una pared vertical, y su extremo inferior está situado en el suelo (la pared y el suelo forman un ángulo recto).

a) ¿Cuál es la figura que describe el punto medio de la escalera, el resbalar y caer ésta?

b) ¿Y el punto de la escalera que se encuentra a 1/3 de distancia del borde inferior de la misma?

c) ¿Y el extremo superior?

d) ¿Y un punto cualquiera de la escalera?



Estado Inicial Estado Intermedio Estado Final

3) Un jugador de béisbol lanza una pelota desde una altura de 2 metros sobre el nivel del suelo y ésta cae a una distancia de 50 metros de él, medida horizontalmente. Si el jugador se encuentra en el origen de coordenadas y la altura máxima que alcanza la pelota es de 22 metros, ¿A que distancia del jugador, medida horizontalmente, alcanza dicha altura?.

4) Un jugador de fútbol americano convirtió un gol de campo a una distancia de 40 yardas del arco. Sabiendo, que el balón pasó sobre el arco a una altura de 10 yardas sobre el piso y que alcanzó su altura máxima cuando había recorrido una distancia horizontal de 25 yardas. ¿Cuál es la altura que alcanzó?.

5) Un diseñador de automóviles está proyectando un faro parabólico que tenga 16 centímetro de diámetro. La lámpara que va a utilizar en él, tiene el filamento a 2 centímetros del cuello. ¿Qué profundidad debe tener el faro para que el filamento quede en el foco del faro, si el cuello de la lámpara se coloca a la altura del vértice del faro?.

6) Como el faro del problema anterior resulta demasiado profundo, el diseñador decide recortarlo 2 centímetros, de manera que la profundidad sea de 6 centímetros. ¿Cuál será el diámetro del nuevo diseño del faro?.

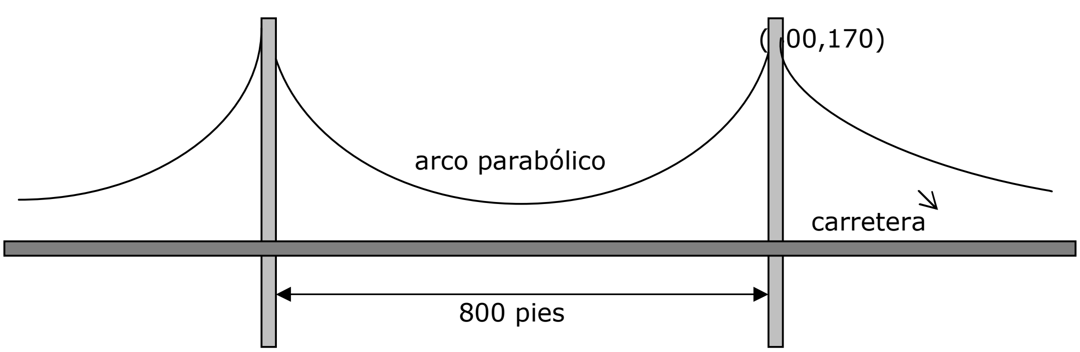
7) La superficie reflectora de una antena de radar es generada girando la parábola y= (2/9) x^2 alrededor de su eje de simetría, siendo $-4 \leq x \leq 4$. Suponiendo que las longitudes se miden en pies:

- **a)** ¿A qué distancia estará ubicado el receptor respecto del fondo del plato de la antena?
- **b)** ¿Cuál es el perímetro de la circunferencia extrema de la antena?.

8) En un triangulo isósceles de base 12 y altura 10, se inscribe un rectángulo de tal manera que uno de sus lados este sobre la base del triangulo y dos de sus vértices toquen cada uno de sus lados iguales. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo que tiene mayor área?.

9) Halla la altura de un punto de un arco parabólico de 18 m de altura y 24m de base, situado a 8m del centro del arco.

10) El cable central de un puente colgante forma un arco parabólico. El cable está colgado de los extremos superiores de las dos torres de soporte, separadas 800 pies entre sí. Esos extremos están a 170 pies sobre la carretera, y el punto del cable cuya altura es mínima está a la mitad del claro entre las torres y 10 pies sobre la carretera. Calcular la altura del cable sobre la carretera a 100 pies de una torre, medidos sobre la carretera.



11) Un señor tiene dos tortugas (A y B) en el punto de partida de una carrera. Se dispone a cronometrar a sus animalitos desde el mismo instante en que éstas comienzan a desplazarse. La siguiente tabla indica los valores obtenidos:

	Tortuga A	Tortuga B
Tiempo (min)	Recorrido (m)	Recorrido (m)
0	0	0
1	1	6
2	4	12
3	9	18

Al llegar a los 3 minutos, el señor se ausentó del lugar porque tuvo que atender una llamada telefónica. Al regresar, las dos tortugas habían llegado a la meta ubicada a 40 m de la largada.
Suponiendo que las mascotas llevaron el mismo ritmo durante toda la carrera:
¿Cuál de las dos habrá sido la vencedora?

12) Una puerta tiene la forma de media elipse. En la base mide 2 metros de ancho y la altura es de 4 metros. A través de ella deseamos pasar una caja de 2 metros de altura. ¿Cuál es la anchura máxima que puede tener la caja?

13) Una galería tiene paredes verticales de 1,5 metros de altura sobre las que apoya un techo abovedado en forma de media elipse. Los focos están separados 4 metros. Si la altura de la construcción en el centro de la bóveda es de 3.5 metros. ¿Cuál es la separación de las paredes?

14) Se desea construir un puente de piedra sobre un río, de manera que el claro debajo de él sea media elipse. El claro debe medir en la base 20 metros y es necesario que pueda pasar debajo del puente una barcaza de 6 metros de ancho y 3 metros de altura sobre el agua. ¿Cuál es la altura mínima sobre el nivel del agua desde el centro del puente?

15) El arco de un puente de mampostería es una semi-elipse de 27,43m. de luz; cuya altura en el centro es de 9,14m. ¿Cuál es la altura del arco a 5,57 m del centro?

16) El ojo de un puente para paso inferior de una carretera de dos carriles tiene la forma de media elipse. El arco elíptico salva 60m en su ancho y la altura en el centro es de 20 m. Las orillas de los carriles están a 10 m de las bases del puente. ¿Cuál es la altura salvada sobre estas líneas?

17) Se desea construir un cantero elíptico de 4m de diámetro menor. El constructor utiliza, para marcar su forma, una cuerda de 5m de largo atada en dos estacas. ¿Dónde debe clavar las estacas?

18) En 1957, los rusos lanzaron el primer satélite fabricado por el hombre, el Sputnik. Su órbita alrededor de la Tierra fue elíptica con el centro de la Tierra en un foco. La altura máxima sobre la superficie terrestre fue, aproximadamente, 580 millas, y la mínima 130 millas. Suponiendo que el radio de la Tierra es 4000 millas, deducir la ecuación de la órbita del Sputnik. (considerar a y b con precisión de una milla).

19) Los planetas se mueven alrededor del sol en órbitas elípticas, con el sol en uno de los focos. Sabiendo que el semieje mayor de la elipse que describe la tierra es de 1.485 x 10^8 km y que la excentricidad es aproximadamente 1/62, hallar la máxima y la mínima distancia de la tierra al Sol.

20) La tierra está representada en un mapa de una parte del sistema solar de modo que su superficie es el círculo de ecuación $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4091 = 0$. Un satélite da vueltas alrededor de la tierra 0,6 unidades por arriba de ella con el centro de su órbita circular en el centro del planeta. Determinar la ecuación para la órbita del satélite en ese mapa.

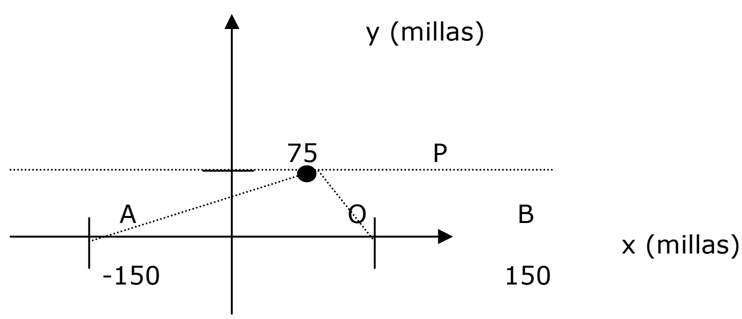
21) Una pieza de alambre de 8 pies de longitud será cortada en dos partes y cada parte se doblará para formar un cuadrado.
¿En dónde debe cortarse el alambre si la suma de las áreas de los cuadrados debe ser de 2 pies cuadrados?

22) Un salón de 100 pies de longitud está diseñado como galería de murmullos. Si los focos están ubicados a 25 pies del centro
¿Cuál es la altura del techo en el centro?

23) El diseño de un edredón está formado por dos elipses congruentes que se intersecan. Determinar la ubicación de los puntos intersección si una de las ecuaciones es $x^2 + 4y^2 = 4$ y la otra es $4x^2 + y^2 = 4$.

24) Un vehículo R sigue determinada trayectoria y emite señales sonoras que viajan a 1100 pies por segundo; llegan a dos receptores colocados a una distancia de 3 millas entre sí.
Suponer que los receptores están en el eje x en los puntos A(-1,5 ; 0) y B(1,5 ; 0) y que las coordenadas del vehículo son (x, y).
Si las señales llegan a A tres segundos antes que a B, deducir la ecuación de la trayectoria del vehículo. (Equivalencias: 1milla = 5280 pies)

25) En el sistema de radionavegación LORAN (LOng RAdio Navigation), dos estaciones de radio, o radiobalizas, situadas en A y en B, simultáneamente emiten sendas señales. La computadora de a bordo de un barco situado en P recibe la señal de B 1000 microsegundos (μs) antes que la de A. Suponiendo que las estaciones están situadas en los puntos de coordenadas cartesianas (-150, 0) y (150, 0), y que el barco está recorriendo una trayectoria de coordenadas (x, 75). Las señales viajan a la velocidad de la luz (186000 millas / s). Hallar la coordenada x de la posición del barco.



26) Un guardabosque (R) se encuentra varado dentro de un camino boscoso que corre paralelo a una carretera, a 2 millas de ella. Hay dos vehículos de rescate (F_1 y F_2) en la carretera, estacionados 3 millas de distancia entre sí. El guardabosque activa una señal de explosión (señal se emergencia) y el sonido llega al vehículo de rescate F_2 (que está al norte) 3 segundos antes que al F_1. Determinar la ubicación del explorador respecto de los vehículos de rescate. La velocidad del sonido es de 1100 pies por segundo (1 milla = 5280 pies)

27) Dos estaciones LORAN están separadas 250 millas a lo largo de una costa recta.

a) Un barco registra una diferencia de tiempo de 0,00086 segundos entre las señales LORAN. Establecer un sistema de coordenadas rectangulares apropiado para determinar donde el barco alcanzará la costa si continúa sobre la trayectoria de la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo.

b) Si el barco debe entrar a un puerto localizado entre las dos estaciones a 25 millas de la estación principal.
¿Qué diferencia de tiempo debe observar?

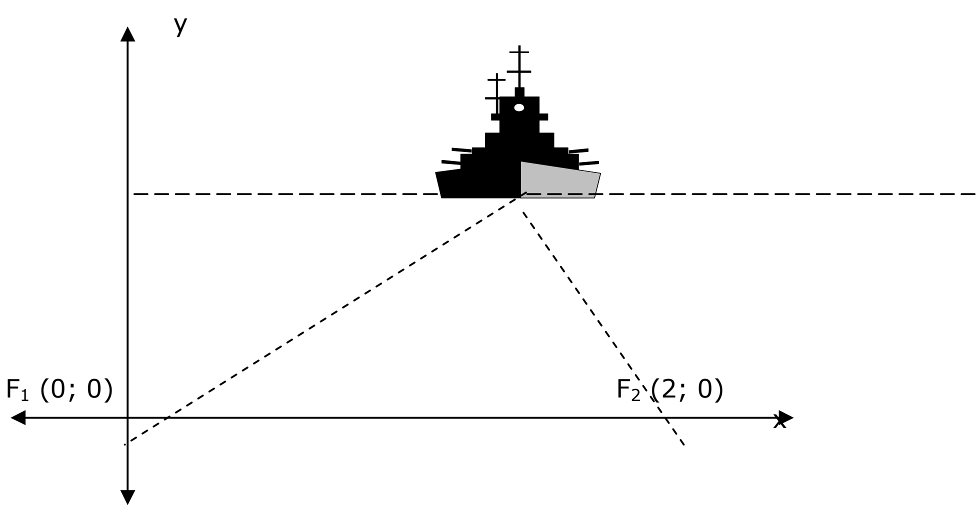
c) Si el barco está a 80 millas de la costa cuándo se obtiene la diferencia de tiempo deseada (obtenida en el apartado anterior).
¿Cuál es su ubicación exacta? (La velocidad de cada señal de radio es de 186.000 millas por segundo)

28) Un crucero sale del puerto de Miami rumbo al este a una velocidad constante de 5 nudos (1 nudo = 1milla náutica). A las 5 de la tarde, el crucero se encuentra a cinco millas náuticas al sur de un yate que se mueve hacia el sur a una velocidad constante de 10 nudos.
¿En qué momento estarán más cercanas las dos embarcaciones?

29) Un bote pequeño se encuentra en el interior de un lago, cuando la niebla es muy densa. El bote manda una fuerte señal sonora con su bocina y la reciben dos estaciones separadas dos millas entre sí, en la orilla recta. El sonido, que viaja a 1100 pies por segundo, tarda 2.7 segundos más en llegar a una estación que a la otra.

a) Usar F_1 (0,0) y F_2 (2,0) como coordenadas de las estaciones y determine los lugares posibles,(x,y) del bote, en relación con las estaciones.

b) Suponer que la costa es recta y que el bote sigue una ruta paralela y a una milla de distancia de ella. Por la niebla, el bote ancló después de haber viajado al este más de una milla después de pasar por la estación en (0,0), y a continuación mandó la señal que se describió en la parte a). Calcular las coordenadas del bote.



30) Salen tres partidas en busca de un cazador perdido en una zona boscosa. Dos de ellas toman posiciones de tal modo que quedan a una milla de distancia entre sí. El cazador dispara su rifle y el sonido llega a una de las partidas 3,6 segundos antes de llegar a la otra.

a) Suponiendo que las coordenadas de las dos partidas de búsqueda son: (0; -0,5) y (0; 0,5), deducir la ecuación de la hipérbola cuyos puntos sean ubicaciones posibles del cazador. (Admitir que la velocidad del sonido es 1100 pies por segundo)

b) Ahora bien, si la tercera partida de búsqueda está en el punto (2; 0,5) cuando el rifle fue disparado, y el sonido llegó a ese punto al mismo tiempo que llegaba a (0; 0,5). Calcular las coordenadas del cazador si el sonido llegó a los puntos (0; 0,5) y (2; 0,5) antes de llegar a (0; -0,5).

31) Un rifle, situado en (-c, 0) se dispara sobre un blanco colocado en (c,0). Una persona oye el sonido del disparo y el del impacto simultáneamente. Probar que esa persona está situada en una rama de la hipérbola $\dfrac{x^2}{c^2 v_s^2 / v_m^2} - \dfrac{y^2}{c^2 (v_m^2 - v_s^2) / v_m^2} = 1$

donde v_m es la velocidad de salida de la bala y v_s la velocidad del sonido.

32) Dos micrófonos (A y B) separados 1 milla graban una explosión E. El sonido llegó al micrófono “A” 2 segundos antes que al “B”. ¿Dónde ocurrió la explosión?
La velocidad del sonido es de 1100 pies por segundo (1 milla = 5280 pies)

I. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN BÁSICA:

1.a) $(x + 3)^2 + (y - ½)^2 = 7$; **1.b)** $(x - 7)^2 + (y + 6)^2 = 89$;

1.c) $(x - 7)^2 + y^2 = 45$; **1.d)** $x^2+(y+2)^2=4$;

1.e) $x^2+(y - 5/4)^2=25/16$;

2) Circunferencia de C (5/2; -3/2) y radio $r = 4$;

3.a) $x^2= -y$; **3.b)** $(y+1)^2= -4 (x-4)$; $lr = 4$; directriz (d): $x = 5$;

3.c) $(y - 4)^2 = 4 (x - 2)$; eje: $y= 4$; $lr= 4$; **3.d)** $y^2= -8(x-2)$; d) $x= 4$; $lr=8$;

3.e) $x^2= -12y$; *ef)* $x= 0$; $lr= 12$;

4) $V(0; 0)$; $F(0; -3/4)$; directriz (d): $y= 3/4$; eje: $x= 0$;

5) Parábola de vértice V (-2; 5/2) ; foco F (1; 5/2) ;

directriz d): $x = -5$; Eje focal o de simetría: $y= 5/2$ Lado recto $lr= |4p|= 12$;

6.a) $x^2/16 + y^2/7 = 1$; V_1 (4 ; 0), V_2 (-4 ; 0); $e = 3/4$;

6.b) $x^2/9 + y^2/5 = 1$; V_1 (-3 ; 0), V_2 (3 ; 0); V_3 $(0 ; \sqrt{5})$, V_4 $(0 ; -\sqrt{5})$;

6.c) $(x-3)^2 / 50 + (y+6)^2 / 25 = 1$; $C(3; -6)$;

$V_1(3; -1)$; $V_2(3; -11)$; $V_3(3+5\sqrt{2} ; -6))$; $V_4(3-5\sqrt{2} ; -6)$;

$F_1(8; -6)$; $F_2(-2; -6)$; $lr= 5\sqrt{2}$;

6.d.1) $x^2/25 + y^2/21 = 1$; V_1 (-5 ; 0), V_3 (5 ; 0); V_2 $(0 ; \sqrt{21})$, V_4 $(0 ; -\sqrt{21})$;

6.d.2) $x^2/21 + y^2/25 = 1$; V_1 (0 ; -5), V_2 (0 ; 5); V_3 $(\sqrt{21} ; 0)$, V_4 $(-\sqrt{21} ; 0)$;

6.e) $x^2/16 + y^2/12= 1$; $V_1(4 ; 0)$, $V_2(-4 ; 0)$; $V_3(0 ; 2\sqrt{3})$, V_4 $(0 ; -2\sqrt{3})$; F_1 (2 ; 0), F_2 (-2 ; 0);

6.f) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$; $lr=2$; V_1 (0; 4); V_2 (0; -4); V_3 (2; 0); V_4 (-2; 0); F_1 $(0; 2\sqrt{3})$; F_2 $(0; -2\sqrt{3})$;

6.g) Opción 1 (considerando a V como vértice principal): *lg)* $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$;

V_1 (0; 7); V_2 (0; -7); V_3 (3; 0); V_4 (-3; 0); F_1 $(0; 2\sqrt{10})$; F_2 $(0; -2\sqrt{10})$; $lr= 18/7$;

7.a) $(x-2)^2/4 + (y-3)^2/3=1$; $C(2 ; 3)$; F_1 (1;3), F_2 (3;3);

V_1 (0;3), V_2 (4;3); V_3 $(2;3-\sqrt{3})$, V_4 $(2;3+\sqrt{3})$; $lr=$;

7.b) No representa lugar geométrico;

8.a) $y^2 - x^2/(1/9) = 1$; $x^2 - y^2/9 = 1$; **8.b)** $x^2/32 - y^2/8 = 1$;

8.c) $x^2/18 - y^2/8 = 1$; **8.d)** $(x - 1)^2/4 - (y - 3)^2/5 = 1$;

8.e) $(x-4)^2/4 - (y-5)^2/12= 1$;

8.f) $y^2 - \frac{x^2}{1/3} = 1$; C (0; 0); *ef*: $x= 0$; asíntotas: $y_1= \sqrt{3}\,x$; $y_2= -\sqrt{3}\,x$;

8.g) C (0; 0); lr= 64/3; lg) $x^2/36 - y^2/64 = 1$; V_1 (-6; 0); V_2 (6; 0); F_1 (-10; 0); F_2 (10; 0);

8.h) $x^2/16 - y^2/16 = 1$; Eje focal $\equiv$ eje x; Eje normal $\equiv$ eje y; Asíntotas: $y= x$; $y= -x$;

Vértices: V_1 (-4; 0); V_2 (4; 0); Focos: F_1 ($-4\sqrt{2}$; 0); F_2 ($4\sqrt{2}$; 0); Lado recto lr= 8;

8.i) lg) $(x-1)^2/(11/4) - (y-1)^2/11 = 1$; C (1; 1); Eje focal: y= 1; Eje normal: x= 1; lr= 8;

Vértices: V_1 ($1-\sqrt{11/4}$; 1); V_2 ($1+\sqrt{11/4}$; 1); Focos: F_1 ($1-\sqrt{55/4}$; 1); F_2 ($1+\sqrt{55/4}$; 1);

8.j) lg) $y^2/9 - x^2/9 = 1$; C (0; 0); Eje focal: x= 0; Eje normal: y= 0; lr= 6;

Vértices: V_1 (0; 3); V_2 (0; -3); Focos: F_1 (0; $3\sqrt{2}$); F_2 (0; $-3\sqrt{2}$);

9.a) punto : P (-2 ; -1) ; **9.b)** No representa lg;

9.c) recta : $x + 1 = 0$; **9.d)** recta : $y + 2/3\,x = 0$; **9.e)** P (-2/3 ; 3/2);

9.f) Si $k > 41 \Rightarrow$ no representa lg;

Si $k = 41 \Rightarrow P$ (4 ; -5);

Si $k < 41 \Rightarrow$ circunferencia de centro C (4 ; -5) y radio $r = \sqrt{41-k}$;

9.g) No representa lg ; **9.h)** rectas: $x - 2y - 1= 0$ v $x + 2y - 1 = 0$;

9.i) hipérbola: $(x+5)^2/3 - y^2 = 1$; **9.j)** hipérbola: $y= 1/x$;

9.k) hipérbolas: $y= 5/x$ v $y= -5/x$; **9.l)** punto : P (4/3; -3);

9.m) rectas : $y= \pm\sqrt{3}\,(x - 4/3) - 3$.

II. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

1.a) L= 4 ; **1.b)** *B1(–4,08; 1,15)* ; *B2(0,91; 4,14)* ; **2)** lg_2 es interior a lg_1 ;

3) $k \in (-3; 5)$; **4)** $x < -4 \vee x > 1$; **5)** $-\infty < m \leq 1/2$;

6.a) $y= 2x + b$ / $b > 9/8$; **6.b)** $y= 2x + 9/8$; P (9/16; 9/4);

7) P_1 (4 ; 4) ; P_2 (0 ; 0) ;

8.a) $y_1 = 3/2\,x + 15/2$; $y_2 = -1/2\,x + 3/2$; **8.b)** P_1 (1 ; 1); P_2 (-5/3 ; 5);

8.c) $\theta_1 = 82^\circ\, 53'$; $\theta_2 = 97^\circ\, 7'$; **8.d)** $y_{N1} = 2x - 1$; $y_{N2} = -2/3\,x + 35/9$;

9) $(x+1)^2 / 4 + (y-1)^2 / 3 = 1$; $(x + 9/16)^2 / (513/256) + (y - 1)^2 / (171 / 64) = 1$;

10) $(x-2)^2/a^2 + (y-3)^2/(3/4)\,a^2 = 1$; con $a>0$;

11.a) $|h|>5$; **11.b)** h= 5; P_1(4; 1); P_2(-4; -1);

12.a) $|h| > 9/2$; **12.b)** $|h| = 9/2$; P_1 (5 ; 8); P_2 (-5 ; -8).

III. RESPUESTAS A APLICACIONES

1) $r= 10\ u$

2.a) $x= 0$; **2.b)** Un cuarto de circunferencia $x^2+y^2= (L/2)^2$;

2.c) Siendo d, la distancia del punto $P(x;\ y)$ al extremo superior: describe un cuarto de la elipse $\frac{x^2}{d^2}+\frac{y^2}{(L-d)^2}=1$;

3) $d= 24{,}4\ m$; **4)** $h= 15{,}6$ *yardas* ; **5)** $x= 8\ cm$; **6)** $D= 13{,}8\ cm$;

7.a) $h= 32/9$ *pies* ; **7.b)** 8π *pies* ; **8)** $a= 5$ m ; $b= 6\ m$; **9)** $8\ m$;

10) $h= 100$ pies ; **11)** La vencedora es la A ; **12)** $a= 1{,}72\ m$;

13) $a= 5{,}64\ m$; **14)** $h= 3{,}14\ m$; **15)** $y= 8{,}35\ m$; **16)** $y=\frac{20}{3}\sqrt{5}\ m$;

17) Entre los vértices principales, a 1,5 *m* de cada uno de ellos ; **18)** $\frac{x^2}{4349^2}+\frac{y^2}{4355^2}=1$;

19) $a-c\approx 1{,}46.10^8\,km$; $a+c\approx 1{,}51.10^8\,km$; **20)** $(x+1)^2+(y+2)^2= 4173{,}6$;

21) $X_1= X_2= 4$ ***pies*** ; **22)** $h= 43{,}3$ *pies*;

23) $(\pm\frac{2}{5}\sqrt{5};\ \pm\frac{2}{5}\sqrt{5})$; **24)** $\frac{x^2}{25/256}-\frac{y^2}{551/256}=1$

25) $x= 110{,}28$ *millas* ; **26)** R se encuentra a 2,85 millas de F_1 y 2,22 millas de F_2;

27.a) Una alternativa es tomar el origen coordenado a 45 *millas* de una estación ;

27.b) $1075\ \mu s$; **27.c)** $x= 146$ *millas;*

28) $t= 17h\ 24'$;

29.a) $\frac{(x-1)^2}{0{,}08}-\frac{y^2}{0{,}92}=1$; **29.b)** (1,41; 1);

30.a) $\frac{y^2}{9/64}-\frac{x^2}{7/64}=1$; **30.b)** P (1; 1,19).

Bibliografía Consultada:

- Geometría Analítica (C. Lehmann)
- Introducción al Algebra Lineal (H. Antón)