TRANSFORMACIONES LINEALES

I. EJERCITACIÓN BÁSICA:

1) Determinar si la transformación de V en W dada es lineal:

a) $T:\Re^3 \to \Re^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$

b) $T:\Re^2 \to \Re^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$

c) $T:R^4 \to R^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix}$

2) Siendo T una transformación lineal de:

a) $\Re^2 \to \Re^3$ tal que $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$; hallar $T\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

¿Cuál es el valor de la nulidad de T? Justificar.

b) $\Re^2 \to \Re^2$ tal que $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$; hallar $T\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Interpretar geométricamente el Nu (T) y el Rec(T).

3) Sea T: $R^3 \to R^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ y-3z \end{pmatrix}$.

a) ¿Es T una transformación lineal? Justificar.

b) Hallar el núcleo y la imagen de T, determina una base y la dimensión de cada uno de ellos.

c) Determinar $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ directamente y mediante la matriz estándar asociada a la transformación.

4) Encontrar una representación matricial y determinar núcleo, imagen (o recorrido), nulidad y rango de cada una de las transformación lineales siguientes:

a) $T:\Re^2 \to \Re;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$. Interpretar geométricamente el Nu (T).	**b)** $T:\Re^2 \to \Re^3;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x+3y \end{pmatrix}$. Interpretar geométricamente el Nu (T).
c) $T:R^4 \to R^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix}$.	**d)** $T:\Re^3 \to \Re^3;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+2z \\ 3x-y+4z \\ 5x-y+8z \end{pmatrix}$.
e) $T:\Re^3 \to \Re^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$. Interpretar geométricamente el Nu (T).	**f)** $T:\Re^3 \to \Re^2;\ T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b-c \\ 2a-b+3c \end{pmatrix}$.
g) $T:\Re^3 \to \Re^3;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+3z \\ 5x-4y-4z \\ 7x-6y+2z \end{pmatrix}$. Interpretar geométricamente el Nu(T) y el Rec(T).	**h)** $T:\Re^3 \to \Re^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix}$. Interpretar geométricamente el Nu(T) y el Rec(T).

5) Siendo $T:\Re^2 \to \Re^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$

a) ¿Es T una transformación lineal? Justificar.

b) Hallar el núcleo y la imagen de T, determina una base y la dimensión de cada uno de ellos.

c) Determinar $T\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ directamente y mediante la matriz estándar asociada a la transformación.

6) Sea la transformación lineal $T:\Re^2 \to \Re^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ 2x+y \end{pmatrix}$.

a) ¿Cuál es la representación matricial de T respecto de la base canónica de R^2 tanto para el dominio como codominio? (O sea la matriz estándar de T)

b) ¿Es una matriz invertible? Justificar. A partir de esta respuesta, determinar: nulidad, rango, núcleo e imagen de T. Justificar

II. EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

1) Determinar si la transformación de V en W, dada en cada caso, es lineal:

a) $T:\Re^n \to \Re;\ T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + ... + x_n$ **b)** $T:\Re^2 \to \Re^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ y \end{pmatrix}$

c) $T:\Re^2 \to \Re^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$

2) Encontrar una representación matricial y determinar núcleo, imagen (o recorrido), nulidad y rango de la siguiente transformación lineal:

$$T:\Re^2 \to \Re^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

3) Determinar genéricamente, cuáles pueden ser los subespacios y dimensiones de:

a) La imagen de cualquier transformación lineal $T:V \to \Re^2$

b) El núcleo de cualquier transformación lineal $T:\Re^3 \to V$

c) La imagen de cualquier transformación lineal $T:\Re^3 \to \Re^2$

d) El núcleo de cualquier transformación lineal $T:\Re^3 \to \Re^2$

e) El núcleo y recorrido de $T:\Re^3 \to \Re^2 / T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix}$

4) **a)** Hallar una transformación lineal T: $\Re^3 \to \Re^2$ tal que
$NuT = \{(x,y,z) \in R^3 : x - 2y + 3z = 0\}$

b) Hallar una transformación lineal T: $\Re^3 \to \Re^3$ tal que
$NuT = \{(x,y,z) \in R^3 : \frac{x}{16} = \frac{y}{19} = z\}$.

c) Hallar una transformación lineal T: $\Re^3 \to \Re^2$ tal que $NuT = \{\vec{o}\}$.

d) Hallar una transformación lineal T: $\Re^3 \to \Re^2$ tal que $NuT = \Re^3$.

5) **a)** Hallar una transformación lineal T: $\Re^3 \to \Re^3$ tal que su recorrido (o imagen)sea
$\mathrm{Rec}T = \{(x,y,z) \in \Re^3 : x - 2y + 3z = 0\}$

b) Hallar una transformación lineal T: $\Re^3 \to \Re^3$ tal que
$\mathrm{Rec}T = \{(x,y,z) \in R^3 : \frac{x}{16} = \frac{y}{19} = z\}$

c) Hallar una transformación lineal T: $R^3 \to R^2$ tal que simultáneamente su núcleo sea Nu T = $\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} / x-2y+3z=0\right\}$ y su imagen sea ImT = $\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} / y-2x=0\right\}$ y justificar. Proponer una base ortonormal para la Im T.

6) Encontrar todas las transformaciones lineales $T\colon \Re^2 \to \Re^2$ tales que la recta $y = 0$ se transforma en la recta $x = 0$. Indicar la matriz correspondiente.

7) Demostrar que si u y v son vectores paralelos en R^2 y $T\colon R^2 \to R^2$ es una transformación lineal, entonces $T(u)$ y $T(v)$ también son vectores paralelos en R^2.

8) Responder con V (verdadero) o F (Falso) y justificar:

a) Si T es tranf. lineal y A_{nxn} es su matriz estándar, entonces T(A.v) = A . T(v).

b) El vector nulo del Rec (T) se obtiene solamente como imagen del vector nulo del Dom (T).

c) Si $T\colon \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ es una tranf lineal entonces $T(0_v) = 0_w$.

d) Si $T\colon \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ es una tranf lineal entonces el conjunto G formado por los vectores imagen de los vectores de una base del Dom (T) constituyen una base del Rec (T).

e) Si $T\colon \Re^n \to \Re^m$ es tranf lineal entonces su matriz estándar es única.

f) Si $T\colon \Re^2 \to \Re^2$ es tranf lineal tal que $NuT = \{\vec{o}\} \Rightarrow \mathrm{Re}\,c(T) = \Re^2$

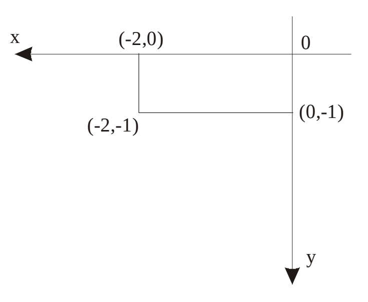
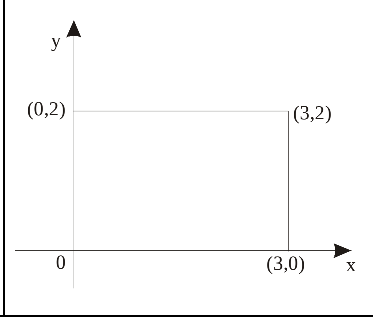
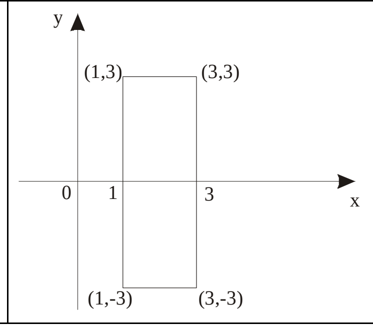
III. <u>APLICACIONES:</u>

1) Mostrar que $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ es la matriz estándar de la transformación lineal $T\colon \Re^2 \to \Re^2$ que produce una reflexión respecto de la recta y=x.

2) En cada caso, describir verbalmente la transformación lineal $T\colon R^2 \to R^2$ que tiene la representación matricial A_T:

a) $A_T = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$	**b)** $A_T = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$	**c)** $A_T = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1/3\end{pmatrix}$	**d)** $A_T = \begin{pmatrix}5 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

3) El rectángulo de cada caso sufre una transformación lineal dada. Determinar la ley de la TL y la representación matricial de dicha transformación. Graficar la región que se obtiene finalmente:

a) Compresión a lo largo del eje x (c = ½)	**b)** Expansión a lo largo del eje y (c = 3)	**c)** Reflexión con respecto al eje y
		

4) En los siguientes casos escribe la representación matricial estándar de la transformación lineal dada y bosqueja la región obtenida al aplicar la transformación al polígono dado:

a) Corte o deslizamiento a lo largo del eje x con c=–2. Rectángulo de vértices:(-2,2), (3,2),(3,-1) y (-2,-1)

b)Reflexión respecto a la recta y=x. Cuadrado de vértices:(-2,-2), (2,-2),(2,2) y (-2,2).

c) Expansión a lo largo del eje x con c = 2 y luego una reflexión respecto del eje y. Triángulo de vértices: (0,0), (2,0) y (1,2).

5) La matriz $A_T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ representa una reflexión respecto al eje x seguida de una...

a) Reflexión respecto al eje y.
b) Corte a lo largo de x con c = 3
c) Compresión a lo largo de x con c = 3.
d) Expansión a lo largo de x con c = 3.

6) Encontrar la matriz de las siguientes rotaciones y decir si se pueden expresar como producto de extensiones, compresiones, cortes y reflexiones.
a) θ = 180°
b) θ = 270°

7) Verificar que la transformación lineal T: $\Re^3 \rightarrow \Re^3$ definida por $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

efectúa en R^3 una rotación de θ° (en sentido antihorario) alrededor del eje x.

Cuáles son las matrices que efectúan rotaciones alrededor de los ejes coordenados y;z?

8) Una fábrica de juguetes prepara camiones de 2 y 3 ejes con 2 ruedas por eje delantero y 2 o 4 ruedas por eje trasero. También acoplados con 2 ejes y 2 o 4 ruedas por eje. Determinar la matriz T de materia prima en producto elaborado.

I. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN BÁSICA:

1) a) SI ; **1) b)** NO ; **1) c)** SI

2) a) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-4y \\ 2x \\ 3x+5y \end{pmatrix}$; $T\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 4 \\ 26 \end{pmatrix}$; la nulidad ν = 0 ya que ν + ρ =2 y ρ =2

pues $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de Im T.

2) b) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x+5y \\ x-3y \end{pmatrix}$; $T\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -10 \end{pmatrix}$; Nu T= $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e Im T = R^2 pues $\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ es invertible.

3) a) SI, *T(X)=A* ; **3) b)** $Nu\ T = gen\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $Im\ T = R^2$; **3) c)** $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$;

4) a) $M_T = (1 \quad 1); Nu(T) = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}; \mathrm{Im}(T) = \Re; \nu = 1; \rho = 1;$

4) b) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; Nu(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathrm{Im}(T) = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}; \nu = 0; \rho = 2;$

4) c) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; Nu(T) = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}; \mathrm{Im}(T) = \Re^2; \nu = 2; \rho = 2;$

4) d) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}; Nu(T) = gen\{0\}; \mathrm{Im}(T) = \Re^3; \nu = 0; \rho = 3;$

4) e) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; Nu(T) = gen\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \mathrm{Im}(T) = \Re^2; \nu = 1; \rho = 2;$

4) f) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}; Nu(T) = gen\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \mathrm{Im}(T) = \Re^2; \nu = 1; \rho = 2;$

4) g) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{pmatrix}; \quad Nu(T) = gen\left\{ \begin{matrix} 16 \\ 19 \\ 1 \end{matrix} \right\} (recta: x/16 = y/19 = z)$

$$\operatorname{Im}(T) = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\ plano\ \ \pi)2x+y-z=0\ ;\ \ \nu=1\ ;\ \rho=2;$$

5) $M_T=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ $\qquad T\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix};$

6) a) $M(T)=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}$;

6) b) Si $|M_T|\neq 0 \Rightarrow \exists[M(T)]^{-1}$ $por\ \ ser\ \ M(T)\, cuadrada\ y\ \ |M_T|\neq 0$,
$Nu(T)=\{0\};\ \ \operatorname{Re}c(T)=\Re^2 \qquad \nu=0;\rho=2$

II. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

1) a) SI ; **1) b)** NO

2) $M_T=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix};$

$$Si\ \ ad-bc\neq 0 \Rightarrow Nu(T)=gen\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\};\nu(T)=0;\operatorname{Re}c(T)=\left\{\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix};\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}\right\};\rho(T)=2$$

$$Si\ \ ad-bc=0 \Rightarrow Nu(T)=gen\left\{\begin{pmatrix}-b/a\\1\end{pmatrix}\right\};\nu(T)=1;\operatorname{Re}c(T)=gen\left\{\begin{pmatrix}1\\c/a\end{pmatrix}\right\};\rho(T)=1$$

3) a) i) $Rec1(T)=\{0\}$ **ii)** $Rec2(T)=gen\{(1,m), m\in R\}$ **iii)** $Rec3(T)=R^2$

b) i) $Rec1(T)=\{0\}$ **ii)** Rectas por el origen **iii)** Planos por el origen

4) $a)T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2y+3z\\kx-2ky+3kz\end{pmatrix}\ \ \forall k;\qquad b)T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19x-16y\\x-16z\\0\end{pmatrix}.$ etc.

5) a) $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y-3z\\y\\z\end{pmatrix};\ T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-3y\\x\\y\end{pmatrix};$ **b)** $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16x\\19x\\x\end{pmatrix}$, **c)** $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2y+3z\\2x-4y+6z\end{pmatrix}$

6) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}by\\cx+dy\end{pmatrix}$**;** $\qquad A_T=\begin{pmatrix}0&b\\c&d\end{pmatrix}\ \ c\neq 0$

8) a) V demostrar; **10. b)** F, pues 0 es imagen de Nu (T) y existen tranf lineales con NuT≠{0} (puede dar un contraejemplo); **10. c)** V demostrar ; **10. d)** F pues G puede ser ld (dar un contraejemplo); **10. e)** V demostrar ; **10. f)** V demostrar

---

III. RESPUESTAS A APLICACIONES

1) T(x; y) = (y; x) y representar gráficamente.

2 a) Reflexión respecto de la recta $y=x$; **2) b)** Reflexión respecto al eje x

2) c) Comprensión a lo largo del eje y ; **2) d)** Expansión a lo largo del eje x;

3 a) $A_T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; Cuadrado :(-1,0),(0,0),(0,-1),(-1,-1)

b) $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; Rectángulo (0,0),(0,6),(3,6),(3,0)

c) $A_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; Rectáng: (-1,3),(-1,-3),(-3,3),(-3,-3)

4)a) $A_T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; Paralelogra (-6,2),(-1,2),(0,-1),(5,-1)

b) $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; Rectángulo (0,0),(0,6),(3,6),(3,0)

c) $A_T = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; Triáng:(0,0),(2,2),(-4,0)

5) (d)

6) a) reflexión respecto del eje x, por uma reflexión respecto del eje y
b) reflexión respecto de la recta y=x, por uma reflexión respecto del eje y.

7) T(i)=i (el eje x queda fijo) T(j) = (0; cos θ; sen θ) T(k) =(0, -sen θ; cos θ)

Bibliografía Consultada:

- Algebra Lineal. (S. Grossman)
- Introducción al Algebra Lineal (H. Anton)
- Teoría y Problemas de Algebra Lineal (S. Lipschutz – S. Schaum)