SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES, MATRICES Y DETERMINANTES

I. EJERCITACIÓN BÁSICA

1) **¿**Cuál/es de las siguientes afirmaciones sobre la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede ser cierta?

a) Es un par ordenado que satisface ambas ecuaciones.
b) Su solución consiste en infinitos puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones
c) Si el sistema es indeterminado, no tiene solución.
d) Si el sistema es inconsistente, existen infinitas soluciones.
e) Si el sistema es indeterminado, tiene dos soluciones.
f) Si el sistema es indeterminado, no tiene una única solución.

2) ¿Cuál de las afirmaciones **es cierta** para el siguiente sistema de ecuaciones?

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$$

a) El sistema es inconsistente.
b) La solución es (-1, 2).
c) La solución se encuentra sobre la recta x = 2.
d) Las ecuaciones son equivalentes.

3) ¿Cuál de las siguientes es una segunda ecuación para el sistema cuya primera ecuación es $x - 2y = -5$, si debe tener un número infinito de soluciones?

a) $6y = 3x + 15$
b) $6x - 3y = -15$
c) $y = -1/2\, x + 5/2$
d) $3/2\, x = 3y + 15/2$

… y si tiene dos soluciones? … y si tiene una única solución? … y si no tiene solución?
… y si tiene más de dos soluciones? … y si no tiene una única solución?

4) ¿Cuál de las gráficas de los siguientes sistemas es un par de rectas paralelas en $\Re^2$?

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 4y = 6x - 14 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 3x = 4 + 6y \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 5x + y = 1 \\ 7y = 3x \end{cases}$

5) Clasificar los sistemas dados. Utilizar el método de eliminación de Gauss o Gauss-Jordan para resolverlos. Verificar el resultado obtenido, en caso de ser posible.

a) $\begin{cases} 6x - 12y = -22 \\ 2x - 3y + z = -8 \\ 2x - 6y - 2z = -6 \\ -3x + y - 2z = 14 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 3y = 7 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - 2y + 3z = 11 \\ 4x + y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 10 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + z + w = 0 \\ y + z = 1 \\ x - y + w = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + u + v = 0 \\ y + u = 1 \\ x + v - y = -1 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ 2x + 5y - 6z = 0 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 = 0 \\ 3X_1 - X_2 - X_3 = 0 \\ 2X_1 + 3X_2 - 4X_3 = 0 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} 2x + y + z - w = 0 \\ x + y + 3z - w = 0 \\ x + 2y + 4z - w = 0 \\ 3x + y - z - w = 0 \end{cases}$

6) ¿Cuál de las siguientes es una operación elemental con renglones?

- **a)** Reemplazar un renglón con un múltiplo diferente de cero de ese renglón.
- **b)** Sumar una constante diferente de cero a cada elemento en un renglón.
- **c)** Intercambiar dos columnas.
- **d)** Reemplazar un renglón con la suma de otros renglones.

7) ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones **es cierta** sobre la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

- **a)** Está en la forma escalonada por renglón.
- **b)** No está en la forma escalonada por renglón porque el cuarto número en el renglón 1 no es 1.
- **c)** No está en la forma escalonada por renglón porque el primer elemento diferente de cero en el renglón 3 es 3.
- **d)** No está en la forma escalonada por renglón porque la última columna contiene un 0.
- **e)** Estaría en forma escalonada reducida si la cuarta columna fuese: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t$

8) Dada la ecuación: $\begin{bmatrix} x+y & 3x+y \\ x+z & x+y-2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 9 & -17 \end{bmatrix}$. Plantear el sistema de ecuaciones lineales correspondiente, resolverlo y clasificar según el número de soluciones.

9) Dadas:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad E=\begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad N=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Efectuar, si es posible, las operaciones indicadas:

- **a)** $A \cdot E$
- **b)** $A \cdot E^t$
- **c)** $A^2.B^3$
- **d)** $B^3.A^2$
- **e)** $N \cdot B$
- **f)** $[(2A\ \ B).C]^t$
- **g)** $E \cdot D$
- **h)** $(A - 2I).D$
- **i)** $C.E$
- **j)** $E.C$

10) Calcular los siguientes determinantes mediante distintos métodos:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $|C| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

d) $|D| = \begin{vmatrix} x+y & 1 \\ 1 & x-y \end{vmatrix}$ **e)** $|E| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$ **f)** $|F| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

g) $|G| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

11) Plantear un ejemplo de:
- **a)** Un sistema con menos ecuaciones que incógnitas pero sin solución;
- **b)** Un sistema con menos ecuaciones que incógnitas y con infinitas soluciones;
- **c)** Un sistema homogéneo con infinitas soluciones;
- **d)** Un sistema homogéneo sin solución.

12) **a)** ¿Cómo será el valor del determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas para cada sistema según su conjunto solución? Tachar lo que no corresponda.

Sistema Normal		Determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas	
1) HOMOGENEO	1) Sistema Compatible Determinado	=0	≠0
	2) Sistema Compatible Indeterminado	=0	≠0
2) INHOMOGENEO	1) Sistema Compatible Determinado	=0	≠0
	2) Sistema Compatible Indeterminado	=0	≠0
	3) Sistema Incompatible	=0	≠0

b) ¿Cómo será el valor del determinante de la matriz ampliada para cada sistema según su conjunto solución? Tachar lo que no corresponda.

Sistema 3x2		Determinante de la matriz ampliada	
1) HOMOGENEO	1) Sistema Compatible Determinado	=0	≠0
	2) Sistema Compatible Indeterminado	=0	≠0
2) INHOMOGENEO	1) Sistema Compatible Determinado	=0	≠0
	2) Sistema Compatible Indeterminado	=0	≠0
	3) Sistema Incompatible	=0	≠0

II. EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

1) Analizar los siguientes sistemas según los valores de los parámetros t, p y q determinando cuando son compatibles (determinados o indeterminados) y cuando incompatibles:

a) $\begin{cases} x+(t+1)y+tz=t+1 \\ x+(t+1)y+z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y=4 \\ y+3z=1 \\ 2x+y+pz=q \end{cases}$

2) Hallar el valor de α para que cada sistema dado admita infinitas soluciones. Escribir todas las soluciones posibles para el valor de α hallado.

a) $\begin{cases} x+\alpha y-z=0 \\ 12x-3y-2z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+\alpha y+z=1 \\ 2x+2y+2z=1 \\ 3x+3y+3z=\alpha \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-y+z+w=1 \\ x+2y-z+4w=2 \\ x+7y-4z+11w=\alpha \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x+2y-z=2 \\ x+7y-\alpha z=5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=\alpha \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=1 \\ 3x+3y+3z=\alpha \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+\alpha y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=\alpha \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x-\alpha y+z=0 \\ x+y-z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y+z=\alpha \end{cases}$

i) $\begin{cases} x-2y+z+w=0 \\ -2z+w=0 \\ w=1 \end{cases}$

j)

3) Escribir explícitamente las matrices definidas a continuación, clasificándolas según su “forma” en diagonal, triangular superior o inferior, simétrica, antisimétrica, etc., si fuera posible:

a) $A_{nxn}=\{(a_{ij})/a_{ij}=0 \;\; si \;\; i\geq j\}$ **b)** $B_{3x3}=\{(b_{ij})/b_{ij}=i-j\}$

c) $C_{3x3}=\{(c_{ij})/c_{ij}=i+j\}$ **d)** $\mathrm{D}_{4x4}=\{(\mathrm{d}_{ij})/\mathrm{d}_{ij}=0 \text{ si } \mathrm{i}\neq \mathrm{j} \vee \mathrm{d}_{ij}=\mathrm{k}, \text{si } \mathrm{i}=\mathrm{j}\}$

e) $E_{nxm}=\{(e_{ij})/e_{ij}=0 \;\; si \;\; i\neq j \;\; \vee e_{ij}=1 \;\; si \;\; i=j\}$

4) Dadas las matrices A_{2x2}; B_{2x3}; C_{3x3}; D_{3x2}, determinar qué orden deberán tener X e Y para que las ecuaciones siguientes tengan sentido, siendo N la matriz nula conformable para operar:

- **a)** $(D + 2 \cdot X) \cdot Y \cdot C = N$
- **b)** $C \cdot X + D \cdot Y = N$
- **c)** $A \cdot X = Y \cdot C$
- **d)** $A \cdot X = C \cdot Y$
- **e)** $A . X = B + Y$
- **f)** $A . X = Y . D$

5) Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; verificar si se cumplen las ecuaciones indicadas. Caso contrario expresar el desarrollo correcto del segundo miembro:

a) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$; **b)** $(A - B)^2 = A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2$;
c) $(A + B)^t = A^t + B^t$; **d)** $(A . B)^2 = A^2 . B^2$

6) Sea G la forma escalonada reducida de la matriz de coeficientes un sistema de ecuaciones lineales $GX = B$:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **a)** ¿Cuántas ecuaciones y cuántas incógnitas tiene?
- **b)** ¿Cuáles son las variables principales y cuáles las que asumen valores arbitrarios cualesquiera? Escribir las soluciones del sistema homogéneo $GX = 0$
- **c)** Proponer una matriz B, si existe, que satisfaga las siguientes condiciones:
  - **c1)** $GX = B$ incompatible.
  - **c2)** $GX = B$ compatible determinado.
  - **c3)** $GX = B$ compatible indeterminado.

7) Determinar la solución de los siguientes sistemas, resolviéndolos mediante la ecuación matricial $A.x=b$. Obtener A^{-1} mediante la forma escalonada reducida (método del espejo)

a) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -4x + 5y = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -4x + 5y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 3y + 4z = 0 \\ 2x - 5y + 7z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x - 3y + 4z = 1 \\ 2x - 5y + 7z = 1 \\ -y + z = 1 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x - 3y + 4z = 1 \\ 2x - 5y + 7z = 1 \\ -y + 2z = 1 \end{cases}$

8) Aplicando propiedades de los determinantes, calcular:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix}$ **b)** $|B| = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $|C| = \begin{vmatrix} a+b & a \\ a & a \end{vmatrix}$ **d)** $|D| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

e) $|E| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & d & 0 & 0 \end{vmatrix}$

9) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} x+2 & x & x \\ x & x+3 & x \\ x & x & x+4 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 2-x & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1+x & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

10) Si $\begin{vmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ = 4 ; calcular los siguientes determinantes (mediante propiedades):

a) $\begin{vmatrix} -3a+2b & -3c+2d & -3e+2f \\ 1 & 5 & -2 \\ b & d & f \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3e & 3c & 2a \\ 3f & 3d & 2b \\ -6 & 15 & 2 \end{vmatrix}$

11) Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ = -2 ; calcular los siguientes determinantes (mediante propiedades):

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3c & 3b & 3a \\ 3f & 3e & 3d \\ 3i & 3h & 3g \end{vmatrix}$ **b)** $|B| = \begin{vmatrix} d & e & f \\ g+2d & h+2e & i+2f \\ a & b & c \end{vmatrix}$

12) A partir de cada determinante, obtener otro de igual valor al dado, pero de un orden menor, haciendo nulos los elementos de una línea, excepto uno de ellos. Verificar:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

13) Determinar analíticamente los puntos de intersección entre las rectas dadas en cada caso. Verificar y graficar:

a) $r_1)\begin{cases} x = 4+3t \\ y = 2-t \end{cases}$ y $r_2)\ x+y=7$;

b) $r_3)\ \dfrac{x}{-1}+\dfrac{y}{3}=1$ y $r_4)\ x+5y=3$

c) $r_5)\ 1 = y-3x$ y $r_6)\ 2y=6x+2$;

d) $r_7)\ y=3x+1$ y $r_8)\ 2y-6x-6=0$

14) ¿Para qué valores de x, no son invertibles las siguientes matrices?

a) $\begin{pmatrix} x & -3 \\ 4 & 1-x \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & x-1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 \end{pmatrix}$

15) Si A y B son matrices 3x3 cuyos determinantes valen 1 y -2 respectivamente, determinar, si es posible, el valor de los siguientes determinantes:

a) $Det\ (A.B)$
b) $Det\ (B^3)$
c) $Det\ (2A^t)$
d) $Det\ (3B^{-1})$
e) $Det\ (A+B)$

16) Si $E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es una forma escalonada para una matriz A, **a)** ¿Será cierto que $Det(A) = 1$? Justificar; **b)** ¿Cuál es el valor del $Det(\ E\ )$?.

17) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, determinar el valor de $Det\ (A^n)$

18) Demostrar que para cualquier matriz A_{3x3} y B_{3x3}, invertibles, el sistema homogéneo (B.A).X=0 tiene las mismas soluciones que A.X=0. ¿Esto es válido para toda A_{nxn} y B_{nxn} ?

19) Determinar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justificar:

a) Si A y B son matrices tales que $|A| = |B|$, entonces $A=B$.

b) Si A es una matriz tal que $A^2=0$ (0: matriz nula), entonces $A=0$.

c) Si A es una matriz que satisface $A^2=I$ (I: matriz identidad), entonces A=I.

d) Sea A_{nxn} y $a_{ij}=i+1$, entonces $|A| = 0, \forall n > 1$

e) Si A es una matriz antisimétrica ($A^t=-A$) entonces $|A^t| = (-1)^n |A|$

f) Si A es una matriz antisimétrica ($A^t=-A$) y n es impar, entonces $|A| = 0$

g) Si A es una matriz ortogonal ($A^t=A^{-1}$) y n es impar, entonces $|A| = 1$

h) Si A es una matriz idempotente ($A^2=A$) y n es impar, entonces $|A| = 1$

20) Demostrar que si A es una matriz cuadrada y además:

a) $(I - A)^{-1} = A^2 + A + I$, entonces $A^3 = 0$.

b) $A^3 - 3A + I = 0$, entonces $A^{-1} = 3I - A^2$

21) Demostrar que si B es invertible, entonces $A.B^{-1} = B^{-1}.A$ si y sólo si $A.B = B.A$

22) Si A es una matriz que satisface $A^2 = I$ (I: matriz identidad). ¿Cuáles son los valores posibles para el determinante de A?

23) **A)** Siendo A, B y C matrices invertibles, resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $A.X.B = C$ **b)** $A.X + B = C$ **c)** $A.X - 2X = B$
d) $X^{-1} = C$ **e)** $(I + 2X^{-1}) = B$ **f)** $(X^t)^{-1}=(A^{-1})^t$
g) $X^2=X$

B) Con las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; hallar la solución particular de las ecuaciones matriciales resueltas en el inciso anterior. Verificar.

24) Dada $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, encontrar todas las matrices columnas b, de orden 3x1 para las que exista al menos una solución de $A.X = b$

25) Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & -5 \end{pmatrix}$, resolver el sistema homogéneo $A.X=0$;

26) **a)** Proponer un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas cuya solución sea $S=\{1;-1\}$

b) Cambiando una ecuación haga que el sistema propuesto sea incompatible.
c) Representar gráficamente ambos sistemas.

27) Determinar la ecuación de la recta cuya pendiente es $m=-4$ y pasa por el punto de intersección de $r_1)\ 2x+y-8=0$ y $r_2)\ 3x-2y+9=0$

28) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas: $r_1)\ 6x-2y+8=0$ y $r_2)\ 4x-6y+3=0$ y es perpendicular a: $r)\ 5x+2y+6=0$

29) Demostrar que las tres rectas:
$r_1)\ 3x+4y+14=0$; $r_2)\ 2x-y-9=0$ y $r_3)\ 7x+3y+1=0$ son concurrentes. Graficar.

30) Determinar el valor de la constante k para que las tres rectas

$$r_1)\quad 8x+3y-1=0\ ;\ r_2)\quad 3x+ky-3=0\ ;\ r_3)\quad x-5y+16=0$$

sean concurrentes. Graficar.

31) ¿ Las ecuaciones:

$$\alpha(-2x+3y-2)+\beta(3x-y+1)=0 \text{ con } \alpha\in\Re;\beta\in\Re \quad \text{y}$$

$$(-2x+3y-2)+\mu(3x-y+1)=0 \text{ con } \mu\in\Re$$

representan gráficamente los mismos lugares geométricos?. Justificar.

32) Decir en cada caso si la matriz A es invertible. Considerar en los incisos c y d que las matrices B y C son invertibles.

a) $A.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=0$ **b)** $\begin{cases} A.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \\ A.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \end{cases}$ **c)** A = B . C **d)** A = B + C

III. APLICACIONES:

❖ Modelo económico de Leontief

1) Considerar dos industrias en las que se producen respectivamente dos artículos: vehículos (camiones, automóviles, etc.) y acero.
Cada año se da una **demanda externa** (proveniente de otras industrias, empresas privadas o de otros países) de 360 000 toneladas de acero y 110 000 vehículos.
La demanda externa no es la única que se da en las dos industrias consideradas. Se requiere acero para producir vehículos. También se requieren vehículos para producir vehículos, porque las plantas manufactureras de esos vehículos requieren autos y camiones para transportar los materiales y los empleados. De igual manera, la industria del acero requiere acero (para su maquinaria) y vehículos (para el transporte del producto y de los trabajadores) en su operación. Así, cada una de las dos industrias impone demandas a si misma y a la otra industria. Estas acciones se llaman **demandas internas.**
Suponer que la industria del acero requiere 1/4 de tonelada de acero y 1/12 de vehículo para producir 1 tonelada de acero (es decir, se usa 1 vehículo en la producción de 12 toneladas de acero). También la industria automotriz requiere de 1/2 tonelada de acero y de 1/9 de vehículo para producir un vehículo.
¿Cuántas toneladas de acero y cuántos vehículos se deben producir cada año para que la disponibilidad de cada uno sea igual a la **demanda total** (externa + interna)?

2) Un sistema económico tiene dos industrias. El vector de demandas externas es (30; 40). Se requieren 0,5 y 0,8 unidades de producción de la industria 1 para producir una unidad de la industria 1 y de la industria 2 respectivamente. Se requieren 0,2 y 0,3 unidades de producción de la industria 2 para producir una unidad de la industria 1 y 2 respectivamente.
Sea $(x_1;\ x_2)$ el vector de producciones de la industria 1 y de la industria 2. Calcular las producciones de cada industria de manera que la oferta sea igual a la demanda.

3) Las demandas internas y externas de las industrias I y II están dadas a continuación; siendo x e y las producciones de cada industria, respectivamente:

I) $1/2\ x + 1/4\ y$; 300
II) $1/10\ x + 1/5\ y$; 512

a) Escribir el sistema de ecuaciones que modela la situación: *"demanda total = producción".*
b) Expresar el sistema en forma matricial haciendo uso del producto entre matrices.
c) Mostrar que la matriz de coeficientes del sistema es invertible y usarla para determinar la producción de cada industria: x, y.

4) Una ciudad tiene una compañía maderera A, una compañía constructora B y una compañía ferroviaria C.
La compañía A utiliza 1/4 de su propia producción (en unidades monetarias) para construir almacenes destinados a guardar su madera.
La compañía B necesita maderas de A equivalentes a 1/5 de la producción (en unidades monetarias) de B.
La compañía C necesita maderas para durmientes equivalentes a 1/8 de la producción (en unidades monetarias) de C.
La compañía A vende $10 000 a otras industrias, que no son la B ni la C.
La compañía B vende $8 000 a otras industrias, que no son la A ni la C.
La compañía C vende $12 000 a otras industrias, que no son la A ni la B.
Si se representa con x, y, z la producción total, en unidades monetarias de A, B y C respectivamente, las demandas inter-industriales totales sobre la B y la C están dadas por: $0{,}1x+0{,}3y+0{,}04z$ (sobre la B); $0{,}01x+0{,}21y+0{,}33z$ (sobre la C).
Determinar la producción (en unidades monetarias) de las industrias A, B y C considerando que las ofertas sean iguales a las demandas sobre cada empresa.

5) Una compañía siderúrgica A emplea 40% de su propia producción para comprar carbón, el cual adquiere de una compañía B, y para pagar cuotas de ferrocarril a la compañía C. Se tiene que B necesita una cantidad de acero de A equivalente al 20% de la propia producción de B. También C requiere acero de A equivalente al 18% de la propia producción de C. Supóngase además que A vende $1020 fuera de las industrias A, B y C.
Las demandas interindustriales totales sobre B y C son:
(sobre B) 0,25A+0,15B+0,12C
(sobre C) 0,30A+0,20B+0,25C
Determinar la producción (en $) si las demandas finales de consumo local sobre B y C son de $8390 y $2250 respectivamente. Suponer que la oferta es igual a la demanda.

❖ <u>Cadenas de Markov</u>

6) Cada año 2/10 de la gente que vive fuera de la ciudad, se muda dentro y 1/10 de la gente que vive dentro se muda fuera.
Escribir una ecuación matricial que describa la distribución de gente fuera y dentro de la ciudad al cabo de n años en términos de una distribución inicial conocida.
Utilizar la fórmula anterior para determinar cuál será la población dentro de la ciudad a fines del año 2009, si a fines del 2006 había 20 000 fuera y 3 000 dentro.

7) En un día determinado una persona está sana o enferma. Si la persona está sana hoy, la probabilidad de que esté enferma mañana se estima en un 2%. Si la persona está enferma hoy, la probabilidad de que esté sana mañana es de un 30%. Dibujar el grafo asociado.
Recordando que la suma de las probabilidades de un evento es igual a uno, se pide:
a) Si la persona está enferma hoy, ¿cuál es la probabilidad de que se recupere dentro de dos días?.
b) Si la persona está enferma hoy, ¿cuál es la probabilidad de que se recupere dentro de tres días?.

8) Dos negocios (A y B) surten de un producto a cierta población. Con el tiempo algunos clientes cambian de repartidor por diferentes razones (publicidad, costo, conveniencia, etc.). Se desea modelar y analizar el movimiento de los clientes entre los dos negocios suponiendo, por simplicidad, que la misma fracción de clientes cambiará de un negocio a otro durante cada período de tiempo.
Suponga que después de un mes el negocio A ha logrado mantener el 80% de sus propios clientes y además ha atraído el 30% de los clientes del negocio B.
Si el negocio A cuenta actualmente con 30 000 clientes y el número total de clientes es de 100 000,

- **a)** ¿Con qué cantidad de clientes contará cada negocio después de un mes?
- **b)** ¿Y al cabo de dos meses?
- **c)** ¿Cuál será la fórmula que permite conocer la distribución de clientes al cabo de n meses?
- **d)** ¿Cómo podría determinar si en algún momento la distribución del mercado se estabiliza?

9) Suponga que toda la industria de refrescos produce dos colas: Coca Cola y Pepsi Cola. Cuando una persona ha comprado Coca Cola hay una probabilidad de 90% de que siga comprándola la vez siguiente. Si una persona compró Pepsi, hay 80% de que repita la vez siguiente. Dibujar el grafo asociado.
Recordando que la suma de las probabilidades de un evento es igual a uno, se pide:
a) Si una persona actualmente es comprador de Pepsi. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas dos compras a partir de hoy?
b) Si en la actualidad una persona es comprador de Coca Cola. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas tres compras a partir de ahora?
c) Supongamos que el 60% de toda la gente toma hoy Coca Cola y el 40% Pepsi. A tres compras a partir de ahora, ¿Qué fracción de los compradores estará tomando Coca Cola?.
d) Determinar el estado estable.

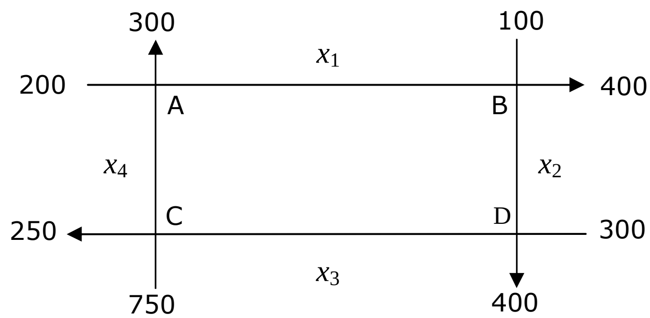
10) Suponga que en cierta actividad laboral, cada persona está calificada en uno solo de los tres siguientes estados:
Estado 1: Trabajador Profesional
Estado 2: Trabajador No Calificado
Estado 3: Trabajador Calificado
Asumir que cada persona tiene un hijo y que las probabilidades de que la próxima generación pase de un estado a otro son las siguientes:

Profesional a No Calificado: 10%	Profesional a Calificado: 30%
No Calificado a Profesional 20%	No Calificado a Calificado: 20%
Calificado a Profesional 20%	Calificado a No Calificado 30%

Dibujar el grafo asociado.
Recordando que la suma de las probabilidades de un evento es igual a uno, se pide:
Si el 20% de los trabajadores son Profesionales, el 50% No Calificados y los restantes son Calificados, encontrar las probabilidades respectivas de que el nieto de un trabajador sea Profesional, No Calificado o Calificado.

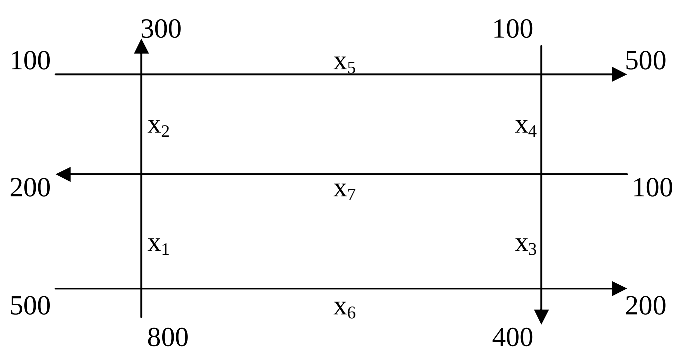
❖ **Redes**

11) Considerar el siguiente diagrama que reproduce una red de calles de una sola vía con el flujo de tráfico promedio que entra o sale de cada calle en unidades de vehículos por hora a la hora de máximo tráfico.



Asumiendo que la cantidad de vehículos que llegan a una intersección es igual a la que sale de ella, construir un modelo matemático para el estudio del tránsito de la zona diagramada.
Suponer que la calle que va de C a A debe ser reparada, por lo cual interesa que el tráfico en este tramo sea mínimo sin ocasionar congestionamientos en las otras calles.
Determinar cuál sería el mínimo tráfico que se podría permitir en ese tramo a reparar y describa cómo obtendría ese mínimo.

12) El siguiente diagrama reproduce una red de calles y el tránsito de vehículos como un promedio horario. Construir el modelo matemático que represente el movimiento vehicular y determinar cuál es el valor mínimo de x_5 para que no exista posibilidades de congestión.



❖ Varios

13) La Empresa Electrocalculadoras S.A. puede producir una calculadora con un costo de materiales de $12. Los costos fijos diarios ascienden a $720 y planean vender cada calculadora en $20. Elaborar las graficas de las ecuaciones de costos y de ingresos en el mismo sistema de coordenadas cartesianas ortogonales y encontrar la cantidad de calculadoras por día que deben vender para que las finanzas se encuentren en equilibrio.

14) La Empresa Juguetes S.A. produce tres tipos de aeromodelos. Los principales materiales necesarios son metal (m), plástico (p) y tela (t). El esquema, que puede ser representado mediante una matriz M_{3x3}, indica la cantidad de material necesario para cada modelo.
La Empresa vende directamente a una cadena de tiendas que le ha hecho un pedido de 700 unidades del modelo a, 800 del modelo b y 500 del c. El pedido esta representado mediante la matriz P_{1x3}=(700 ; 800 ; 500).

m	P	t	
2	4	5	Modelo a
3	5	3	Modelo b
3	6	4	Modelo c

a) Formar la matriz de 1x3 que exprese la cantidad total de cada material necesaria para satisfacer el pedido.
b) La Empresa juguetera compra todos sus materiales en dos proveedores. Los precios unitarios del proveedor s1 son $1,50 el metal, $0,85 el plástico y $1,15 la tela. El proveedor s2 cobra $1,65 el metal, $0,80 el plástico y $1,10 la tela. Formar la matriz de costo (C_{3x2}) cuyas columnas muestren los precios unitarios de cada proveedor, y determinar la matriz que muestre el costo de los materiales para cada modelo basados en los dos conjuntos de precios de proveedor.
c) Determinar la matriz de 1x2 que muestra el costo total de materiales para completar el pedido, para cada conjunto de precios de proveedor. Solo con base en costos, ¿a qué proveedor debe comprar sus materiales la Empresa?

15) Una firma de transporte posee tres tipos de camiones A, B y C. Los camiones están equipados para dos clases de maquinaria pesada. El número de máquinas de cada clase que puede transportar cada camión es :

Maquinaria	A	B	C
Clase 1	2	1	1
Clase 2	0	1	2

La firma consigue una orden para 32 máquinas de clase 1 y 10 de clase 2. Si la operación de cada tipo de camión tiene el mismo costo para la firma, determinar la solución más económica para cumplir la orden asumiendo que cada camión debe estar totalmente cargado.

16) Un inversionista le afirma a su corredor de bolsa que todas sus acciones son de tres compañías, A, B y C, y que hace dos días su valor bajó $350,00 pero que ayer aumentó $600,00. El corredor recuerda que hace dos días el precio de las acciones de A bajó $1,00 por acción y el de las de B bajaron $1,50, pero que el precio de las acciones de C subió $0,50. También, recordar que ayer el precio de las acciones de A subió $1,50 por acción, el de las de B bajó otros $0,50 por acción y las de C subieron $1,00. Demostrar que el corredor no tiene suficiente información para calcular el número de acciones que posee el inversionista en cada compañía, pero que si tuviese 200 acciones de C, el corredor puede calcular el número de acciones que tiene en A y B.

17) Un fabricante produce cuatro artículos diferentes, cada uno de los cuales requiere para su elaboración de tres materias primas. Los cuatro productos se denotan pero p_1; p_2; p_3 y p_4 y las tres materias primas se denotan por r_1, r_2 y r_3. En la tabla se indica el número de unidades que se requiere de cada materia prima para elaborar una unidad de cada producto.

	p_1	**p_2**	**p_3**	**p_4**
r_1	2	1	3	4
r_2	4	2	2	1
r_3	3	3	1	2

a) Si $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$ es el vector producción, y $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ es el vector de materia prima, escribe la ecuación matricial que permite determinar el vector de materia prima en función del vector de producción.

b) Suponiendo que $p = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix}$ ¿cuántas unidades se requieren de cada materia prima?

18) Un fabricante produce juguetes que tienen tres partes: ruedas, ejes y cuerpos que son hechos de acero y plástico. Las partes y los materiales están dados por las siguientes tablas:

	Juguete 1	**Juguete 2**	**Juguete 3**
Parte 1 (ruedas)	4	3	2
Parte 2 (eje)	2	2	1
Parte 3 (cuerpo)	1	1	1

Material (gramos)	**Parte 1**	**Parte 2**	**Parte 3**
1 (acero)	0	1	4
2 (plástico)	0,6	0	1

a) Si la orden de venta pide 8 juguetes del tipo 1, 12 del tipo 2 y 10 del tipo 3. ¿Cuántas ruedas, ejes y cuerpos debe producir la compañía para satisfacer la orden?
b) ¿Qué cantidad de material se requiere para cumplir con la orden de venta?

19) En una reciente competición de precios, la compañía de alquiler de automóviles B elimina el cobro inicial por alquilar un automóvil, pero aumenta el costo por kilometraje a $\$0,30$ el kilómetro. Para poder competir, la compañía A reduce su tarifa inicial a $\$15$ y aumenta el costo por kilometraje a $\$0,20$ el kilómetro. ¿Cuál compañía es más conveniente? Realizar gráfica de análisis.

20) Dos líneas aéreas ofrecen las siguientes promociones:

PROMOCIÓN ANUAL **Ud. gana volando por A LINE**	**¡Este año B LINE premia A TODOS SUS CLIENTES!**
El costo de su pasaje le acreditará automáticamente el 75% de su valor en millas. Así, si el 75% de su pasaje es de $300, se le acreditarán 300 millas. Cuando Ud. lo desee, podrá canjear (total o parcialmente) su puntaje actual por un pasaje cuyo destino resulte, en millas, menor o igual que la cifra acumulada.	Al comprar su primer pasaje, usted gana 500 millas, y además, le sumaremos una cantidad de millas igual a la mitad del costo de todos los pasajes que compre durante la promoción.

El señor RR es cliente de la compañía A Line y MM es cliente de la B Line. RR le propone a MM que cambie de compañía, ya que ambos programan la realización de un viaje juntos. Pero MM le asegura que no le conviene la promoción de la A Line. Interpretar el problema y obtener conclusiones.

21) La compañía Zuco está planeando producir pizzas cuadradas. Los gastos fijos diarios son de $\$100$. Para hacer cada pizza le cuesta $\$2$. Las venderá a $\$5$ cada una.

- **a)** ¿Cuánto gana en un día con la venta de 50 pizzas?
- **b)** ¿Cuántas pizzas deberán vender en un día para tener una ganancia de $\$100$?
- **c)** ¿Qué cantidad mínima de pizzas deberán ser vendidas en un día para no obtener pérdidas?

22) Supongamos que uno quiere comparar el costo de ciertos comestibles. La siguiente matriz M_{3x5} indica el costo de un kilogramo de cada uno de los productos en tres supermercados.

$$M=\begin{pmatrix} 70 & 40 & 13 & 30 & 330 \\ 85 & 38 & 10 & 28 & 310 \\ 75 & 42 & 12 & 30 & 325 \end{pmatrix}$$

Las primera fila indica el precio de cada producto en el supermercado 1, la segunda corresponde al supermercado 2 y la tercera al 3.
Las columnas indican los precios de carne, pan, papas, manzanas, y café, respectivamente.
Si se desea comprar 5 kg de carne, 3 kg de pan, 10 kg de papas, 4 kg de manzanas y 2 kg de café. ¿Determinar matricialmente en qué supermercado conviene comprar?.

23) Un veterinario desea controlar la dieta de un animal de modo que, mensualmente, el animal consuma como mínimo 960 kg de avena, 1200 kg de maíz y 880 kg de soja. Tiene tres alimentos (A, B y C) disponibles con contenidos según se muestra en la siguiente tabla.
¿Determinar matricialmente cuál es la menor cantidad de bolsas de cada alimento que debe comprar para obtener la dieta deseada?

	Avena	Maíz	Soja
1 bolsa de alimento A (15 kg)	6 partes	5 partes	5 partes
1 bolsa de alimento B (18 kg)	6 partes	6 partes	4 partes
1 bolsa de alimento C (19 kg)	4 partes	7 partes	5 partes

24) Un empresario tiene tres máquinas que son empleadas en al fabricación de cuatro productos diferentes.
Para utilizar plenamente las máquinas, éstas estarán en operación 8 horas diarias. El número de horas que cada máquina es usada en la producción de una unidad de cada uno de los productos está dada por

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Las filas corresponden a las máquinas 1, 2 y 3.

Encontrar matricialmente el número de unidades que se deben producir de cada uno de los cuatro productos en una jornada de 8 horas bajo el supuesto que cada máquina se usa las 8 horas completas.

25) La economía mensual de cierta familia está basada en los ingresos y en la ayuda mutua de tres personas: padre, madre e hijo.
El padre gana (o produce) \$2000 y les da a su esposa e hijo \$100 a cada uno, además gasta el mismo \$200.
La madre gana \$2000 y le da a \$200 su hijo y gasta \$100 ella misma.
El hijo gana \$1000 y no le da nada a sus padres, pero gasta el mismo \$100.
Determinar matricialmente cuánto tendrían que ganar (o producir) padre, madre e hijo para tener un excedente de \$1800, \$1900 y \$1000 respectivamente.

I. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN BÁSICA:

1) c **2)** c

3) a **4)** b

5) **a)** Sistema no normal, inhomogeneo, compatible determinado.
S=$\{(x; y; z)\}=\{(-43/9;-5/9;-1/9)\}$

5) **b)** Sistema no normal, inhomogeneo, incompatible.

5) **c)** Sistema normal, inhomogeneo, compatible determinado.
S=$\{(x; y; z)\}=\{(2;-3;1)\}$

5) **d)** Sistema no normal, inhomogeneo, incompatible;

5) **e)** Sistema no normal, inhomogeneo, compatible indeterminado.
S=$\{(x; y; u; v)\}=\{(-u-v;\ 1-u;\ u;\ v)\}$;

5) **f)** Sistema normal, homogeneo, compatible indeterminado.
S=$\{(x; y; z)\}=\{(8t;\ 10t;\ 11t)\}$;

5) **g)** Sistema normal, homogeneo, compatible determinado.
S=$\{(x_1; x_2; x_3)\}=\{(0;\ 0;\ 0)\}$;

5) **h)** Sistema normal, homogeneo, compatible indeterminado.
S=$\{(x; y; z; w)\}=\{(2t;\ -t;\ t;\ 4t)\}$;

6) a; d

7) c; e

8) Compatible Determinado. S= $(1; -2; 8)$;

9) **a)** No compatibles para el producto indicado.

9) **b)** $(8; 2)$

9) **c)** $\begin{pmatrix} 438 & 653 \\ -1183 & -1396 \end{pmatrix}$

9) **d)** $\begin{pmatrix} -662 & 2053 \\ 17 & -296 \end{pmatrix}$

9) **e)** No compatibles para el producto indicado.

9) **f)** $(-5\ \ 9)$

9) **g)** $(18\ \ 4\ \ 16)$

9) h)

9) **i)** $\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

9) **j)** (14)

10) **a)** -26

10) **b)** -10

10) **c)** 56

10) **d)** x^2-y^2-1

10) **e)** 3

10) **f)** 59

10) **g)** -10

12) a) 1.1) $\neq 0$ **12 a) 1.2)** $=0$

12) a) 2.1) $\neq 0$ **12 a) 2.2)** $=0$ **12 a) 2.3)** $=0$

12) b) 1.1) $=0$ **12 b) 1.2)** $=0$

12) b) 2.1) $=0$ **12 b) 2.2)** $=0$ **12 b) 2.3)** $\neq 0$

II. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

1) a) Incompatible: si t= 1; Determinado: si $t \neq 1$ y $t \neq 0$; Indeterminado: si t= 0;

1) b) Incompatible: si $p=9$, $q \neq 11$; Determinado: si $p \neq 9$; Indeterminado: si $p=9$ y $q=11$;

2) a) Si $\alpha = 1 \Rightarrow S = \{(x;\ y;\ z)\} = \left\{\left(\frac{1}{3}t;\ \frac{2}{3}t;\ t\right)\right\}$

2) b) Incompatible: $\alpha \neq 3/2$; Nunca será Determinado; Indeterminado: $\alpha = 3/2$

2) c) Si $\alpha = 5 \Rightarrow S = \{(x;\ y;\ z;\ w)\} = \left\{\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}z - \frac{6}{5}w;\ \frac{3}{5} + \frac{3}{5}z - \frac{7}{5}w;\ z;\ w\right)\right\}$

2) d) Si $\alpha = 4 \Rightarrow S = \{(x;\ y;\ z)\} = \left\{\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}t;\ \frac{3}{5} + \frac{3}{5}t;\ t\right)\right\}$

2) e) Incompatible : $\forall \alpha \Rightarrow S = \phi$

2) f) Incompatible : $\forall \alpha \Rightarrow S = \phi$

2) g) Si $\alpha = 3 \Rightarrow SCI$; Si $\alpha \neq 3 \Rightarrow SI$; Nunca será Compatible Determinado

2) h) Si $\alpha = 0 \Rightarrow SCD \Rightarrow S = \{(0;0;0)\}$; Si $\alpha = \frac{5}{2} \Rightarrow S = \{(x;\ y;\ z)\} = \left\{\left(\frac{5}{12};\frac{5}{6};\frac{5}{4}\right)\right\}$;

Si $\alpha \in \Re \neq \left\{0;\ \frac{5}{2}\right\} \Rightarrow SI$

2) i) $SCI \Rightarrow S = \{(x;\ y;\ z;\ w)\} = \left\{\left(2t - \frac{3}{2};\ t;\ \frac{1}{2};\ 1\right)\right\}$ **2) j)**

3) a) $A=\begin{bmatrix}0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}$

3) b) $B=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$

3) c) $C=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$

3) d) $D=\begin{bmatrix}k & 0 & 0 & 0\\ 0 & k & 0 & 0\\ 0 & 0 & k & 0\\ 0 & 0 & 0 & k\end{bmatrix}$

3) e) $E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}$

4) a) X_{3x2}; Y_{2x3}

4) b) X_{3xm}; Y_{2xm}

4) c) X_{2x3}; Y_{2x3}

4) d) Incompatible para la operación indicada

4) e) X_{2x3}; Y_{2x3}

4) f) X_{2x2}; Y_{2x3}

5a) Correcta

5 b) Falso. (A-B)²=A²-B.A-A.B+B²

5 c) Correcta

5 d) Falso. (A.B)²=A.B.A.B

6) a) 4 ecuaciones y 7 incógnitas

6) c1) $B=(b_1; b_2; b_3; b_4)$ Con $b_4 \neq 0$

6) c2) Nunca

6) c3) $B=(b_1; b_2; b_3; 0)$

7) a) No es posible por ser sistema no normal;

7) b) $A^{-1}=\begin{bmatrix}-5/2 & -3/2\\ -2 & -1\end{bmatrix}$; $S=\{(x;y)\}=\{(-4;-3)\}$;

7) c) $A^{-1}=\begin{bmatrix}-5/2 & -3/2\\ -2 & -1\end{bmatrix}$; $S=\{(x;y)\}=\{(0;0)\}$;

7) d) No es posible hallar A^{-1}; Det (A)= 0;

7) e) No es posible hallar A^{-1}; Det (A)= 0;

7) f) $A^{-1}=\begin{bmatrix}-3 & 2 & -1\\ -4 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix}$; $S=\{(x;y;z)\}=\{(-2;-1;0)\}$

8) a) 0

8) b) 0

8) c) ab

8) d) 0

8) e) $abcd$

9) a) $-12/13$ **9) b)** 11

10) a) 12 **10) b)** -72

11) a) 54 **11) b)** -2

12) a) -13 **12) b)** -5 **12) c)** 10

13. a) $P_1(11/2; 3/2)$ **13. b)** $P_2(-3/4; 3/4)$;

13. c) rectas coincidentes **13. d)** $\nexists P_4$ (rectas paralelas)

14) a) 4 y -3 **14) b)** 0 y 3

15) a) -2 **15) b)** -8 **15) c)** 8

15) d) $-27/2$ **15) e)** Con los datos dados no es posible obtener una respuesta a lo solicitado **15) f)**

16) a) No. Se desconocen las operaciones elementales aplicadas;

16) b) $Det(E) = 1$.

17) $(1/2)^n$

19) a) Falso **19) b)** Falso **19) c)** Falso **19) d)** Verdadero

19) e) Verdadero **19) f)** Verdadero **19) g)** Falso **19) h)** Falso

22) $S = \{-1; 1\}$

23) A.a) $X = A^{-1}.C.B^{-1}$ **23) A.b)** $X = A^{-1}.(C-B)$ **23) A.c)** $X = (A-2I)^{-1}.B$

23) A.d) $X = C^{-1}$ **23) A.e)** $X = 2.(B-I)^{-1}$ **23) A.f)** $X = A$

23) B.a) $X=$ **23) B.b)** $X=$ **23) B.c)** $X=$

23) B.d) $X=$ **23) B.e)** $X=$ **23) B.f)** $X=$

24) $b = (b_1; b_2; b_3)$; $b = (b_1; b_2; b_1 + b_2)$

27) $y + 4x - 10 = 0$ **28)** $4x - 10y + 1 = 0$; $P(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$ **30)** $k = 2$

31) No, la segunda ecuación nunca representará la recta $3x - y + 1 = 0$

32)

III. RESPUESTAS A APLICACIONES:

1) 600 000*tn* acero/año; 180 000 vehículos/año

2) $(x_1; x_2) = (278{,}95; 136{,}84)$

3) $(x; y) = (981{,}33; 762{,}66)$

4) $x = \$21\,414{,}40$; $y = \$15\,812{,}70$; $z = \$23\,186{,}30$

5) A: $9625,.92 B: $14203,60 C: 10638,00

6) 11103 personas

7) a) 50,4% b) 64,27%

8) **a)** $x_1 = (A; B)_1 = (45000;\ 55000)$

8) **b)** $x_2 = (A; B)_2 = (52500;\ 47500)$; $x_3 = (A; B)_3 = (56250;\ 43750)$

8) **c)** $X_n = M^n X_0$

8) **d)** $X = (A; B) = (60000;\ 40000)$

9) a) 0,34 b) 0,781 c) 64,38% d) C= 2/3 ; P= 1/3

10) 31,2% 36,7% 32,1%

11) 500 vehículos/hora (400 en AB, 100 en BD, 0 en DC)

12) $x_5 \geq 400$

13) 90

14) **a)** $\begin{pmatrix} 5300 & 9800 & 7900 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 12{,}15 & 12{,}00 \\ 12{,}20 & 12{,}25 \\ 14{,}20 & 14{,}15 \end{pmatrix}$ **c)** $(25\,365 \quad 25\,275)$

15) $S = \{(A; B; C)\} = \{\ (13, \quad 2, \quad 4)\ \}$

16) Sistema indeterminado, pero si C= 200, entonces A= 300 y B= 100

17) b) $r = \begin{pmatrix} 310 \\ 190 \\ 240 \end{pmatrix}$

18) **a)** Partes= $\begin{pmatrix} 88 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$; **b)** Material= $\begin{pmatrix} 170 \\ 82{,}80 \end{pmatrix}$

19) Si recorro menos de $150km$, $conviene\ B$. Si recorro más de $150km$, $conviene\ A$

20) Si el viaje cuesta más de $\$2000$, conviene A Line. Si cuesta menos de $\$2000$, conviene B Line

21) a) Ganancia = $\$50$ **21) b)** 67 pizzas **21) c)** 34 pizzas

22) En el supermercado 2

23) A: 15, B: 144, C: 19.

24) Soluciones posibles (4, 2, 0, 0), (3, 1, 1, 1), (2, 0, 2, 2).

25) $2247,60 $2233,90 $1111,11.

<u>Bibliografía consultada:</u>

- Geometría Analítica (C. Lehmann)
- Algebra Lineal (S. Grossman)
- Algebra y Cálculo Numérico (A. Sagastume Berra – G. Fernández)
- Teoría y Problemas de Algebra Superior (M. Spiegel – Serie Schawm)
- Introducción al Algebra Lineal (H. Anton)
- Cálculo y Geometría Analítica – T1 (R. Larson–R. Hostetler–B. Edwards)