VECTORES

I. EJERCITACIÓN BÁSICA

1) Los vértices de un triángulo son $A(1;3);\ B(-1;5)\ y\ C(6;-2)$. Hallar analíticamente el vector $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ Verificar gráficamente. Interpretar el resultado.

2) Determinar gráfica y analíticamente con $O(0;0)$; $P_1(0;1)$; $P_2(6;-3)$; $P_3(-2;-3)$ el vector resultante de $\overrightarrow{OP_1}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OP_2}+2\overrightarrow{OP_3}$, su módulo y dirección.

3) Con los vectores $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ si\ A(-3;4)\ y\ B(-1;-2)$ y $\vec{c}=2\vec{j}$, determinar el versor que tiene la misma dirección que el vector ($\vec{a}-\vec{c}$). Graficar.

4) Dado $\overrightarrow{OP_1} = 3\vec{i}-2\vec{j}$ y $\overrightarrow{OP_2} = -\vec{j}+\vec{k}$, siendo $O(0;0;0)$, determinar la distancia entre ***P₁*** y ***P₂***.

5) Siendo $\vec{d}=-\vec{i}+2\vec{j}$ y $\vec{e}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$, determinar el ángulo entre $\vec{d}$ y $\vec{e}$.

6) Determinar las componentes del vector de $\Re^2$ de módulo 6 y ángulo director $\alpha = 60^{\circ}$

7) Mostrar que no existe un vector unitario cuyos ángulos directores sean π/6, π/3 y π/4.

8) Hallar las componentes del vector $\vec{b}$ de módulo 5 que tenga dirección contraria al $\vec{a}=\begin{bmatrix}1/3\\-2/3\end{bmatrix}$.

9) Hallar las componentes de un vector $\vec{a}$ de módulo igual a 5, que forma con las direcciones positivas de los tres ejes coordenados, ángulos iguales.

10) Hallar los cosenos directores de los vectores pertenecientes a $\Re^3$ situados en el plano ***xy***, que tienen ángulo director $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

11) Dados los vectores $\vec{a}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$; $\vec{b}=\begin{bmatrix}1\\-5\end{bmatrix}$; $\vec{c}=-\vec{3}i+2\vec{j}$, se pide:

a) Hallar los escalares x e y tal que: $x.\vec{a} - y\vec{b}=\vec{c}$. Graficar.

b) Calcular el vector proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{c}$. Graficar.

12) Un vector de módulo 8 tiene sus dos componentes iguales. Hallarlas analíticamente. Graficar.

13) **a)** Hallar gráfica y analíticamente la proyección de un vector $\bar{a}$ paralelo al eje positivo de y sobre:

a1) $\vec{i}$; **a2)** $\vec{j}$

b) ¿La respuesta de lo solicitado precedentemente variará sea que el problema estuviese planteado en $\Re^2$ o en $\Re^3$?.

14) Dados los vectores $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$; hallar $proy_{\vec{b}}\vec{a}$ y $proy_{\vec{b}}\vec{c}$. Graficar.

15) Determinar si los siguientes vectores son paralelos o perpendiculares:

a) $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$;

b) $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$;

c) $\vec{u}_1 = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$; $\vec{u}_2 = 4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

16) Dado $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$; $\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, calcular e interpretar:

a) $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

b) $\left|\vec{b} \times \vec{a}\right|$

c) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$

d) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

e) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

f) $(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$

g) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

17) El módulo de $\vec{c}$ es $\left|\vec{c}\right| = \sqrt{20}$. Determinar sus componentes, si $\vec{c}$ es perpendicular a $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

18) Calcular vectorialmente el área del triángulo que tiene por vértices $A(2;\ 5;\ 3);\ B(0;\ 0;\ 2);\ C(0;\ -3;\ 0)$. ¿Cuál es el área del paralelogramo que tiene a estos puntos como vértices adyacentes?

19) Verificar analítica y vectorialmente si los puntos dados a continuación están alineados:
a) $P(1;\ -2;\ 3)$; $Q(2;\ 1;\ 0)$ y $R(4;\ 7;\ -6)$; **b)** $A(1;\ 0;\ 1);\ B(1;\ 2;\ 1)$ y $C(1;\ 1;\ 2)$.

20) Verificar analíticamente que los vectores dados no son coplanares:
$\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix};\ \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix};\ \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

21) Determinar analíticamente si los puntos dados son coplanares: $A(1;\ 1;\ 6);\ B(2;\ 3;\ 5);\ C(8;\ 4;\ 6);\ D(2;\ 1;\ 3)$

II. <u>EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:</u>

1) Dados: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ con $A(2;\ 0;\ 0);\ B(2;\ 1;\ 3)$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\vec{d} = \vec{k}$

- **a)** Representar gráficamente.
- **b)** Calcular $-2\vec{b} + \vec{a} + \vec{c} + \vec{d}$.
- **c)** Calcular módulos y cosenos directores de: $\vec{a}\ y\ \vec{d}$.
- **d)** Calcular la proyección y el módulo de la proyección de $\vec{d}$ sobre $\left(-\vec{b} + \vec{c}\right)$.

2) Si $\overrightarrow{CA} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ y $\overrightarrow{CB} = -\vec{i} + \vec{j}$, calcular $\overrightarrow{AB}$. Graficar.

3) Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos $A(-1;\ 1)$ y $B(3;\ 1)$. Hallar las coordenadas del tercer vértice, el área y graficar.

4) El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene módulo $\left|\overline{AB}\right| = 5$. Si es $A(3;-2)$ y $B(6;y)$, hallar vectorialmente y en forma analítica el valor de y. Graficar.

5) Hallar los vectores $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$ de módulo 2 y que forman un ángulo de 30º con el eje positivo de x.

6) Dado $\vec{a}$ en $\Re^3$ tal que $|\vec{a}|$=4, y los ángulos directores α=30º; β=60º; hallar las componentes de otro $\vec{b}$ / $|\vec{b}| = 9$ y $\vec{b} // \vec{a}$, pero de dirección contraria a $\vec{a}$.

7) Un vector $\vec{a}$ (perteneciente a $\Re^3$) de módulo 4 forma un ángulo $\alpha = 60^{\circ}$ con el eje positivo de x y un ángulo $\beta = 45^{\circ}$ con el eje positivo de y.

- **a)** Hallar el valor del ángulo γ que forma con el eje z.
- **b)** Determinar las componentes de $\vec{a}$.

8) Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ dos vectores (pertenecientes a $\Re^3$) que forman entre sí un ángulo de 60º y tienen por módulos 2 y 3 respectivamente. Hallar el módulo del vector que une los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

9) Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman entre sí un ángulo de 45º y el módulo de $\vec{a}$ vale 3. ¿Cuál debe ser el módulo de $\vec{b}$ para que $\vec{a} - \vec{b} \perp \vec{a}$?. Verificar gráficamente. ¿La respuesta de lo solicitado precedentemente variará sea que el problema estuviese planteado en $\Re^2$ o en $\Re^3$?.

10) Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, determinar una condición necesaria y una suficiente para que ($\vec{a} + \vec{b}$) $\perp$ ($\vec{a} - \vec{b}$).

11) Dado el vector $\vec{b} = -\vec{i} + b_2 \vec{j}$, hallar b_2 de tal manera que $\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ sea:

- **a)** Perpendicular a $\vec{b}$
- **b)** Paralelo a $\vec{b}$
- **c)** Tal que, forme con $\vec{b}$ un ángulo de $\pi/4$.
- **d)** Graficar en cada caso.

12) Dado $\vec{a}$ de módulo 4 y ángulo director $\alpha = 30^{\circ}$. Hallar las componentes del vector $\vec{b}$ de módulo 9 y dirección contraria a la de $\vec{a}$. ¿La respuesta de lo solicitado precedentemente variará sea que el problema estuviese planteado en $\Re^2$ o en $\Re^3$?.

13) Comprobar analíticamente que cualquier vector paralelo al eje positivo de y es perpendicular a cualquier vector paralelo al plano xz.

14) Determinar si el siguiente enunciado es verdadero o falso: "la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados". Justificar vectorialmente.

15) Si $\vec{a} . \vec{b} = \vec{a} . \vec{c} \Rightarrow$ ¿$\vec{b} = \vec{c}$?. Interpretar la respuesta.

16) Hallar las componentes del versor que sea perpendicular a $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$. Graficar.

17) Sean $\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j}$ y $\vec{v} = \vec{i} + b\vec{j}$. Determinar el valor de b de tal manera que el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea $\theta = \frac{\pi}{4}$. Graficar. ¿La respuesta de lo solicitado precedentemente variará sea que el problema estuviese planteado en $\Re^2$ o en $\Re^3$?.

18) Dados los vectores $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, hallar el vector múltiplo de $\vec{b}$ que hay que sustraerle al $\vec{a}$ para obtener un vector perpendicular al $\vec{b}$. Graficar.

19) Hallar $\vec{b}$ tal que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ con :

a) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}; \vec{c} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}$; **b)** $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}; \vec{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; **c)** $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}; \vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

20) Determinar un vector $\vec{b}$ normal al $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y que además forme con el eje positivo de **z** un ángulo de 30º.

21) Calcular vectorialmente el ángulo determinado por los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ de un paralelogramo de 12 unidades cuadradas de área, siendo $|\overline{AB}| = 3 \quad y \quad |\overline{AC}| = 4\sqrt{5}$.

22) Un triángulo de vértices $A(x;\ 2;\ -5);\ B(6;\ 3;\ 5);\ C(2;\ 3;\ -3)$ tiene 6 unidades cuadradas de área. Determinar vectorialmente el valor de x.

23) Calcular el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los 3 vértices adyacentes son $A(1;\ 0;\ 0);\ B(3;\ 2;\ 9);\ C(5;\ 2;\ -3)$.

24) Hallar vectorialmente el cuarto vértice de un rectángulo de vértices $O(0;\ 0;\ 0);\ A(4;\ 3;\ 0);\ B(-6;\ 8;\ 0)$.

25) Determinar los ángulos que forman las diagonales de un cubo respecto de los ejes coordenados.

26) Determinar el ángulo director γ de un vector con ángulos directores $\alpha = 45^{\circ};\ \ \beta = 30^{\circ}$.

27) Un vector tiene sus ángulos directores iguales. ¿Cuál es el mayor valor que pueden tomar éstos?.

28) Determinar el vector $\vec{c}$ de módulo 7, que sea coplanar con los vectores $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

29) Determinar la ecuación de la recta con dirección $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ y que pase por $P(2;\ 0)$.
Expresarla de todas las maneras posibles. Graficar.

30) Determinar la ecuación de la recta que pasa por $P(5;\ 9)$ y es paralela al eje de ordenadas. Expresarla en forma paramétrica. Graficar.

31) Determinar dos vectores normales y dos vectores dirección de la recta dada mediante su forma implícita $-\sqrt{3}x + y - 2 = 0$. Graficar.

32) En cada uno de los siguientes casos, determinar la ecuación de la recta que contiene los puntos dados. Expresarla en forma paramétrica. Graficar.

a) $A(2;1);\ B(-3;2)$

b) $A(-1;0);\ B(0;-3)$

33) Determinar el ángulo de inclinación de la recta dada en cada caso:

a) $y = x$

b) $y = -x$

c) $x - \sqrt{3}y = -2\sqrt{3}$

d) $-\sqrt{3}x + y - 2 = 0$

34) Determinar la ecuación paramétrica de la recta que contiene al punto $A(-1;-2)$, cuya pendiente es, según el caso indicado. Graficar.

a) $3/4$

b) $-4/5$

c) 2

d) 0

e) ∞

35) Expresar a cada una de las rectas dadas, en forma paramétrica y cartesiana. Hallar intersecciones con ejes coordenados. Hallar un vector normal $\vec{n}$ y uno paralelo $\vec{u}$. Graficar.

a) $2x+4y=3$

b) $y=-\frac{2}{3}x-2$

c) $\frac{x}{-1}+\frac{y}{5}=1$

36) Hallar la ecuación paramétrica de la recta cuya abscisa al origen es 3 y cuya ordenada al origen es -2. Graficar.

37) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas:

a) $3x-y+2=0$ $\quad 2x+y-2=0$

b) $y=2x+5$ $\quad 2x-y=1$

c) $y=-x$ $\quad x-y=0$

38) Demostrar vectorialmente que $r_1)\,3x+4y-7=0$ y $r_2)\,9x+12y-8=0$ son paralelas.

39) Demostrar vectorialmente que $r_1)\,x+2y+5=0$ y $r_2)\,4x-2y-7=0$ son normales.

40) Determinar si las rectas $r_1)\begin{cases} x=-2+t \\ y=3-t \end{cases}$ y $r_2)\,\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$ se intersectan o son paralelas.
Hallar el punto de intersección o la distancia que las separa, según corresponda.

41) Calcular las distancias:

a) Desde $P\,(1;0)$ a la recta $\frac{x}{2}-\frac{y}{1}=2$

b) Entre las rectas $r_1)\ y=-3x+1$ y $r_2)\ y+3x-4=0$

c) Desde el origen coordenado a la recta $r_1)\,5\mathrm{x}-y=10$

42) Desde el punto $P_1\,(2;-3)$ se traza una perpendicular a la recta $3x-4y+6=0$
¿A qué distancia se halla dicha perpendicular del punto $P\,(0;8)$?

43) En cada caso determinar la ecuación de la recta que pasa por $P(3; -4)$ y además:

a) dista 6 unidades del origen coordenado
b) dista 4 unidades del origen coordenado
c) dista 5 unidades del origen coordenado
d) dista 2 unidades del origen coordenado

44) En cada inciso hallar la ecuación de la recta que cumple las condiciones enunciadas y graficar.

a) Es perpendicular a $r_1)\ y = x - 1$ y además pasa por el punto de abscisa 5 que cual además pertenece a $r_2)\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -\frac{1}{3}t \end{cases}$

b) Pasa por el punto de intersección de las rectas $r_1)\ x - 2y - 4 = 0$ y $r_2)\ 4x - y - 4 = 0$ y forma un ángulo de 45º con la recta de ecuación $r_3)\ 9x - 5y - 12 = 0$

45) Determinar el valor de k para que las rectas $r_1)\ k^2x + (k+1)y + 3 = 0$ y $r_2)\ 3x - 2y - 11 = 0$ formen un ángulo de 45º

46) Determinar el o los valores de k para que distancia del punto $P_1(4;\ 5)$ a la recta $r_1)\ \frac{x-2}{k} + \frac{y+1}{-4} = 0$ sea de 3 unidades.

47) Los lados del triángulo ABC están contenidos en las rectas de ecuaciones

$r_1)\ x + y - 1 = 0$; $r_2)\ x - y + k_1 = 0$; $r_3)\ k_2x - y + 2 = 0.$

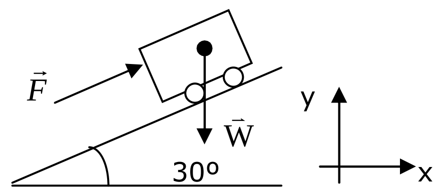
Si $\overline{AB} \in r_1;\ \overline{BC} \in r_2;\ \overline{AC} \in r_3$ y el vértice C está dado mediante su vector posición $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Determinar las ecuaciones de las rectas r_2 y r_3. Graficar.

48) Determinar la relación que existe entre las componentes de un vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que siendo paralelo al $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ pase además por el punto P(3; 5). Graficar.

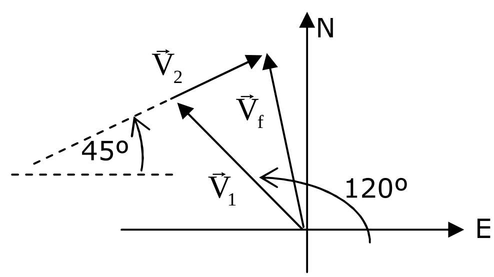
49) Determinar el lugar geométrico de los puntos de $\Re^2$ que sean colineales con A(1; 2) y B(3; 4).

III. APLICACIONES:

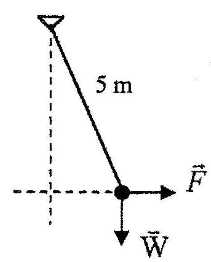
1) Un auto de $\vec{W} = 600N$ se sostiene sobre una rampa a 30º. ¿Cuál es la magnitud (módulo) de la fuerza requerida para evitar que el auto ruede por la rampa (supuesta sin rozamiento)?



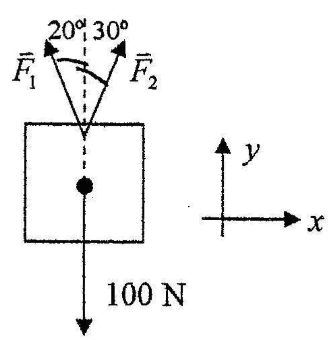
2) Un avión vuela a una velocidad de $500\,km/h$ $(\vec{V}_1)$ en dirección NO, hasta que se encuentra con un viento de dirección NE a $70\,km/h$ $(\vec{V}_2)$. ¿Cuál es la dirección final en que vuela ahora y con qué velocidad?



3) Un peso $\vec{W} = 25N$ está suspendido de una cuerda de $5m$ de largo. Calcular la fuerza horizontal requerida para mantener el peso a $1m$ de la vertical.

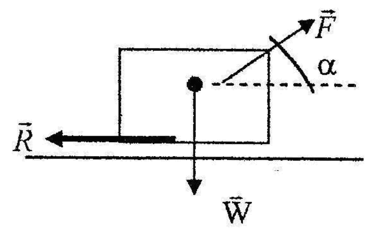


4) Calcular las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ que ejercen dos hombres para sostener un peso de $100N$. Verificar.

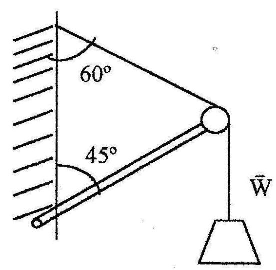


5) Determinar el trabajo (W) realizado por una fuerza de magnitud F= 50N que actúa en la dirección $\vec{i} + \vec{j}$ al mover un objeto desde A(0; 0) hasta B(1; 0).

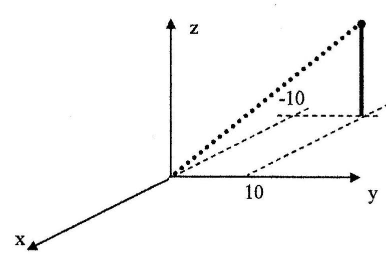
6) Un objeto de $100N$ es arrastrado a velocidad constante, mediante una soga. Al movimiento se le opone una fuerza de rozamiento de $173{,}21N$. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ aplicada en la soga? Resolver utilizando proyección de vectores.



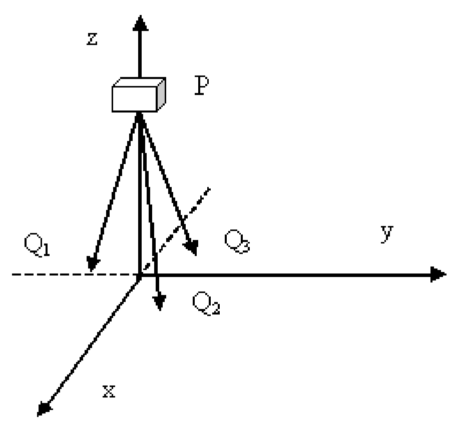
7) Calcular el peso $\vec{W}$ que puede soportar la estructura, si el puntal es capaz de resistir una compresión máxima de $500N$.



8) Un tensor (de peso despreciable) tiene una tensión de $300N$ y está sostenido por uno de sus extremos al suelo y por el otro a la punta de una torre de $5m$ de altura. Expresar las componentes de la tensión.



9) Un objeto ejerce un peso de $120N$ sobre la cabeza de un trípode, correspondiente al punto $P(0;\ 0;\ 4)$; cuyas patas apoyan sobre un plano horizontal en $Q_1(0;-1;0)$; $Q_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$; $Q_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$ Hallar la fuerza que ejerce cada pata en el suelo.



10) El tramo recto de un río tiene dirección N-S. Paralelamente a una de sus orillas, se desplaza un bote en cuyo mástil principal flamea una bandera formando un ángulo de 45º respecto al N, pero la bandera situada en una casa de la costa se extiende a 30º respecto a misma dirección. Si la velocidad del bote es de 10 km/h, calcular a) vectorialmente la velocidad del viento. Determinar, además, b) la velocidad aparente del viento respecto a un observador situado sobre el bote. C) ¿Hacia adonde se dirige el bote?. Graficar.

I. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN BÁSICA:

1) $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **2)** $\vec{r} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$**;** $|\vec{r}| = 2\sqrt{13}$ **;** $\alpha = 146^\circ \ 18' \ 35{,}7''$**;** $\beta = 123^\circ \ 41' \ 24{,}12''$

3) $\frac{1}{17}\sqrt{17}\vec{i} - \frac{4}{17}\sqrt{17}\vec{j}$ **4)** $\sqrt{11}$

5) *18º 26' 6"* **6)** $3\vec{i} \pm 3\sqrt{3}\,\vec{j}$

8) $-\sqrt{5}\,\vec{i} + 2\sqrt{5}\,\vec{j}$ **9)** $\vec{a}_1 = \frac{5}{3}\sqrt{3}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$; $\vec{a}_2 = -\frac{5}{3}\sqrt{3}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

10) $\cos\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\beta_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\gamma_1 = 0$**;** $\cos\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\gamma_2 = 0$

11) a) $x = -13/4$; $y = -1/4$ **b)** $-\vec{c}$ **12)** $\begin{bmatrix} 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} \end{bmatrix}$

13) a1) $\vec{0}$**; a2)** $\vec{a}$**; b)** La respuesta es la misma, excepto que los vectores se expresen en función de sus componentes **;** **14) a)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

15) a) *Paralelos;* **b)** *No paralelos y no perpendiculares;* **c)** *Perpendiculares.*

16) a) $\sqrt{230}$ **b)** $\sqrt{230}$ **c)** $-20\vec{i} - 6\vec{j} - 22\vec{k}$
d) 49 **e)** 49 **f) -**49 **g)**

17) $\vec{c}_1 = 2\sqrt{5/19}(3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k})$; $\vec{c}_2 = -2\sqrt{5/19}(3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k})$

18) $\frac{\sqrt{101}}{2}$; $\sqrt{101}$ **;** **19.a)** *Si* ; **19.b)** *No* ; **21)** *No son coplanares.*

II. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

1) **b)** $-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ **c)** $\begin{cases}\cos\alpha = 0\\ \cos\beta = (1/10)\sqrt{10}\\ \cos\gamma = (3/10)\sqrt{10}\end{cases}$; $\begin{cases}\cos\alpha = 0\\ \cos\beta = 0\\ \cos\gamma = 1\end{cases}$; **d)** $-3/11(\ i - j - 3\ k)$

2) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}-4\\-1\end{bmatrix}$

3) $C_1(1;\ 1+2\sqrt{3});\ C_2(1;\ 1-2\sqrt{3});\ S = 4\sqrt{3}$

4) $y_1 = 2;\ \ y_2 = -6$

5) $\vec{a}_1 = \sqrt{3}\vec{i} + \vec{j};\ \ \vec{a}_2 = \sqrt{3}\vec{i} - \vec{j}$

6) $-9/2\left(\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}\right)$

7) **a)** $\gamma_1 = 60^\circ;\ \ \gamma_2 = 120^\circ$

b) $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix}2\\2\sqrt{2}\\2\end{bmatrix};\ \ \vec{a}_2 = \begin{bmatrix}2\\2\sqrt{2}\\-2\end{bmatrix}$

8) $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{7}$

9) $3\sqrt{2}$

10) $C.N: |\vec{a}| = |\vec{b}|;$

$C.S: \begin{cases}|\vec{a}| = |\vec{b}|\\ \vec{a} \neq \vec{b}\\ \vec{a} \neq -\vec{b}\end{cases}$

11) **a)** 4/3 **b)** -3/4 **c)** *No existe*

12) $\vec{b}_1 = -\frac{9}{2}\sqrt{3}\vec{i} + \frac{9}{2}\vec{j};\ \ \vec{b}_2 = -\frac{9}{2}\sqrt{3}\vec{i} - \frac{9}{2}\vec{j}$

14) *Verdadero.*

15) *No*

16) $\vec{v}_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j};\ \ \vec{v}_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$

17) *No existe*

18) $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$

19) a) $\vec{b} = \begin{bmatrix}-2t-3\\3t+10\\t\end{bmatrix}\ \ t \in \Re$ **;** **19) b)** $\vec{b} = \begin{bmatrix}\frac{1-2t}{3}\\t\\\frac{2t-4}{3}\end{bmatrix}\ \ t \in \Re$ **;** **19) c)** *No existe*

20) Sistema Incompatible $\Rightarrow S = \phi$ **;** **21)** 26º 34’ ; **22)** $x_1 = 0; x_2 = 2$

23) 4 ; **24)** (-2; 11; 0) ; **25)** ; **26)** ; **27)** ; **28)** ;

29) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4t \end{cases}$; $y = -4x + 8$; $4x + y - 8 = 0$; **30)** $\begin{cases} x = 5 \\ y = t \end{cases}$;

31) $\vec{n}_1 = (-\sqrt{3}\,; 1)$ $\vec{n}_2 = (3; -\sqrt{3}\,)$ $\vec{u}_1 = (-1; -\sqrt{3}\,)$ $\vec{u}_2 = (1; \sqrt{3}\,)$

32) a) $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + t \end{cases}$ **32) b)** $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -3t \end{cases}$

33) a) 45º **33) b)** 135º **33) c)** *30º* **33) d)** 60º

34) a) $3x - 4y - 5 = 0$ **34) b)** $4x + 5y + 14 = 0$ **34) c)** $y = 2x$

34) d) $y = -2$ **34) e)** $x = -1$

35) a) $\begin{cases} y = t \\ x = \frac{3}{2} - 2t \end{cases}$; $\frac{x - 3/2}{-2} = y$ **35) b)** $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{2}{3}t - 2 \end{cases}$; $x = \frac{y + 2}{-2/3}$

35) c) $\begin{cases} x = -\frac{1}{5}t \\ y = 5 - t \end{cases}$ $x = \frac{y-5}{5}$ **36)** $\begin{cases} x = 3t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$

37) a) 45º **37) b)** 0º **37) c)** 90º **40)** $d(r_1; r_2) = \sqrt{2}$

41) a) $d = \frac{3}{5}\sqrt{5}$ **41) b)** $d = (3/10)\sqrt{10}$ **41) c)** $d = (5/13)\sqrt{26}$

42) $d = 5$

43) a) ϕ **43) b)** $y = -4$; $y = \frac{24}{7}x - \frac{100}{7}$ **43) c)** $3x - 4y - 25 = 0$ **43) d)**

44) a) $x + y - 4 = 0$ **44) b)** $14x - 49y - 92 = 0$ $49x + 14y - 4 = 0$

46) $k_1 = -0{,}7$; $k_2 = 4{,}25$ **47)** $r_2)\ x - y + 1 = 0$ $r_3)\ y - 2 = 0$

48) **49)**

III. RESPUESTAS A LAS APLICACIONES:

1) $\vec{F} = \begin{bmatrix} -150\sqrt{3} \\ -150 \end{bmatrix}$

2) $112{,}6^{\circ}$; $522{,}5\ km/h$

3) $F \cong 5{,}1N$

4) $T_1 \cong 65{,}27N$; $T_2 \cong 44{,}65N$

5) W= $25\sqrt{2}$ (J)

6) $F \cong 200N$

7) $W \cong 557{,}68N$

8) (-200; 200; 100)

9) $10\sqrt{17}$

10) a) vBC= 27,32 km/h **10) b)** vBB= 19,32 km/h **10) c)** hacia El N

Bibliografía Consultada:

- Algebra Lineal (S. Grossman)
- Algebra y Cálculo Numérico (A. Sagastume – V. Berra – G. Fernandez)
- Introducción al Algebra Lineal (H. Anton)
- Geometría Analítica (C. Lehmann)
- Cálculo y Geometría Analítica – T1 (R. Larson–R. Hostetler–B. Edwards)