



## **RECTAS EN $\mathbb{R}^3$**

### **I. EJERCITACIÓN BÁSICA:**

- 1) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto  $P(0; 1; 2)$  y es paralela al

vector  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ .

- 2) Determinar la ecuación de la recta que contiene los puntos  $A(2; -3; 1)$  y  $B(0; 1; -1)$ . Expresarla de todas las maneras posibles.

- 3) Determinar analíticamente la ecuación de la recta que pasa por  $P(2; -1; 3)$  y es paralela al eje  $x$ . Expresarla de todas las maneras posibles.

- 4) Determinar la ecuación de la recta que contiene a  $P(0; 1; -3)$  y es paralela a

$$r) \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

- 5) Determinar la ecuación de la recta que contiene al origen y es paralela a

$$r) \frac{x-1}{-2} = z-3 = \frac{y+2}{-1}.$$

- 6) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto  $A(1; -2; -3)$  y es perpendicular al plano  $\pi) x - 3y + 2z + 4 = 0$ . Expresarla de todas las maneras posibles.

- 7) Dada la recta  $r) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$ , determinar:

- a) Planos proyectantes.
- b) Puntos de penetración.
- c) Ecuación de la recta en forma canónica o simétrica.

- 8) Dadas las siguientes ecuaciones

A)  $r) \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -3 \\ z = -4t \end{cases}$

B)  $r) \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -3 \\ z = -4 \end{cases}$

C)  $r) \begin{cases} y = -x \\ z = 4 \end{cases}$

- a) Expresarlas en forma vectorial, simétrica, general.
- b) Determinar las coordenadas de dos puntos pertenecientes a cada una.
- c) Hallar las componentes de dos vectores dirección de cada recta.
- d) Determinar las ecuaciones de los planos proyectantes en todos los casos.
- e) Hallar todos los puntos de penetración.
- f) Graficar.
- g) Describir la posición y características principales de cada recta.

- 9) Calcular la distancia entre el punto  $P(1; 0; -1)$  y la recta  $r) \frac{1-x}{-2} = y+1 = \frac{z}{-3}$ .



**10)** Calcular la distancia entre el origen de coordenadas y la recta  $r) \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$ .

**11)** Calcular la distancia entre  $r_1) \frac{2-x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{z-1}{-3}$  y  $r_2) \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-2}{4}$ .

**12)** Determinar el ángulo que forman las rectas

$$r_1) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad y \quad r_2) \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}.$$

**13)** Determinar el ángulo que forman la recta

$$r) \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ x = 2 \end{cases} \quad \text{con el plano } \pi) z - x + 3y = 0.$$

**14)** Determinar el ángulo agudo que forma la recta que pasa por los puntos  $A(3; 4; 2)$  y  $B(2; 3; -1)$  con la que une  $C(1; -2; 3)$  y  $D(-2; -3; 1)$ .

**15)** Determinar el ángulo entre la recta intersección de  $\pi_1) 3x + 4y = 12$  y  $\pi_2) 2x + z = 2$  con la normal al plano  $\pi_3) x + y + 2z = 2$ .

**16)** Determinar el ángulo entre la recta intersección de los planos:  $\pi_1) 3x + y + 3z = -5$  con:  $\pi_2) x - y + z = 2$  y la recta intersección de  $\pi_3) 8x - y + 7z = 3$  con  $\pi_4) x - y + z = 2$ .

**17)** Verificar que la recta  $r_1) \begin{cases} x = \frac{2}{7}z + \frac{15}{7} \\ y = -\frac{5}{7}z - \frac{34}{7} \end{cases}$  es perpendicular a la recta

$$r_2) \begin{cases} x - y - z - 7 = 0 \\ 3x - 4y - 11 = 0 \end{cases}.$$

**18)** Verificar que las rectas  $r_1) \frac{x-1}{2} = y-4 = \frac{z-5}{2}$  y  $r_2) \frac{x-2}{-1} = \frac{y-8}{3} = \frac{z-11}{4}$  son coplanares. Determinar la ecuación del plano al que pertenecen y el punto de intersección entre ambas.

**19)** Verificar que las rectas  $r_1) \begin{cases} x - 2y + 2z - 4 = 0 \\ x + 4y + 8z + 8 = 0 \end{cases}$  y  $r_2) \begin{cases} x + y + 5z - 5 = 0 \\ x + 8y + 12z - 12 = 0 \end{cases}$  son paralelas. Determinar la ecuación del plano al que pertenecen.

**20)** Demostrar que la recta  $r) \begin{cases} 5x - 2y + 3z = 5 \\ x + 4y + 5z = -15 \end{cases}$  es paralela al plano  $\pi) x + y + 2z = 4$ . Determinar la distancia entre estos  $lg$ .

**21)** Demostrar que la recta  $r) \begin{cases} 5x - 2y + 3z = 5 \\ x + 4y + 5z = -15 \end{cases}$  es normal al plano  $\pi) x + y - z = 7$ .



## II. EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

- 1) Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto  $P(3; -3; 4)$  y además es perpendicular a las rectas  $r_1) \frac{2x+4}{4} = \frac{y-3}{-1} = z$  y  $r_2) x-3 = \frac{2y-3}{2} = -z$ .
- 2) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto  $P(1; 4; -2)$  y es paralela a los planos  $\pi_1) 6x + 2y + 2z + 3 = 0$  y  $\pi_2) 3x - 5y - 2z - 1 = 0$ .
- 3) Hallar la ecuación de la recta situada en el plano:  $\pi) x + 3y - z + 4 = 0$  y que es perpendicular a la recta  $r_1) \begin{cases} x - 3z = 3 \\ y = 2z \end{cases}$  en el punto en que ésta corta al plano dado.
- 4) Determinar la ec. del plano que contiene al punto  $P(0; 1; 0)$  y a la recta  $r) \begin{cases} 4x + 3y + 2z = 4 \\ 2x - 11y - 4z = 12 \end{cases}$ .
- 5) Calcular la longitud del segmento de la recta  $r) \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ 3y + x + z = 1 \end{cases}$  determinado entre los planos  $xy$  y  $xz$ .
- 6) Dada la recta  $r) \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{-z+2}{-1}$ , calcular la distancia de su punto de penetración con el plano  $yz$ , al plano:  $\pi) 3x + 2y - z - 1 = 0$ .
- 7) Determinar el punto de intersección de la recta  $r) \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = -\frac{z}{4}$  con el plano  $\pi) 3x + y - z = -1$ . Resolverlo mediante la forma general y paramétrica.
- 8) Determinar si las rectas  $r_1) \frac{x}{1} = \frac{4-y}{3} = \frac{4-z}{3}$ ;  $r_2) x-1 = \frac{y+1}{5} = z$  se interceptan o no. Hallar el punto de intersección o la distancia que las separa, según corresponda.
- 9) Determinar la ecuación del plano que pasa por la recta intersección de los planos  $\pi_1) x - y + 2z + 4 = 0$  y  $\pi_2) 2x + y + 3z - 9 = 0$  y es paralelo a la recta cuyos números directores son  $[1; 3; -1]$ .
- 10) Dada la recta  $r) \frac{x-2}{6} = \frac{3y+1}{-6} = \frac{1-z}{3}$  y el plano:  $\pi) 2x - 3y + 6z = -3$ , determinar, si existe, el punto de intersección. Caso contrario, la distancia entre la recta y el plano.
- 11) Demostrar que la recta  $r) \begin{cases} 5x - 2y + 3z = 5 \\ x + 4y + 5z = -15 \end{cases}$  está en el plano:  $\pi) 2x - 3y - z = 10$ .
- 12) Determinar la ecuación del plano que pasa por la recta intersección de los planos  $\pi_1) 2x - y + 3z = 2$  y  $\pi_2) 2x + 3y - z = 2$  y es perpendicular al plano  $\pi_3) 3x - 4y - 2z = 9$ .



**13)** Resolver los siguientes incisos:

- a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por  $P(1, 2, 3)$  y  $O(0, 0, 0)$ .
- b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto  $P(1, 2, 3)$ , es perpendicular al eje  $x$ , y además lo corta.
- c) En ambos casos, determinar los correspondientes planos proyectantes.
- d) Hallar la ecuación del plano determinado por ambas rectas.

**14)** Determinar la ecuación de la recta de ángulos directores:  $\alpha = 60^\circ$ ;  $\beta = 45^\circ$  y contiene al punto  $P(1; 2; 3)$ .

**15)** Determinar, describir y graficar el  $lg$  que representa:

- a)  $xy = 0$  en  $\mathbb{R}^3$
- b)  $xyz = 0$  en  $\mathbb{R}^3$
- c)  $4z^2 - 16 = 0$  en  $\mathbb{R}^3$
- d)  $xy - y^2 = 0$  en  $\mathbb{R}^3$
- e)  $x^2 - z^2 = 0$  en  $\mathbb{R}^3$
- f)  $\begin{cases} y = -x \\ z = 4 \end{cases}$  en  $\mathbb{R}^3$

**16)** Obtener la ecuación correspondiente al lugar geométrico de los puntos de  $\mathbb{R}^3$  que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones: **i)** El valor de la abscisa es igual al de la ordenada; **ii)** La cota se mantiene igual a cualquiera de las otras coordenadas. Graficar.

**17)** Dada la recta  $r) \frac{x-1}{2} = \frac{-y-2}{-3} = \frac{2z+6}{4}$  y el punto  $A(2; -1; 3)$ :

- a) Hallar el plano que contenga a  $A$  y sea perpendicular a la recta  $r)$
- b) Hallar la ecuación de la recta que pase por  $A$  y sea perpendicular al plano  $(xoz)$
- c) Determinar el ángulo entre la recta  $r)$  y el plano  $x+3y+2z-4=0$ .

**18)** La recta  $R_1$  coincide con el eje  $z$ .

La recta  $R_2$  está determinada por la intersección de los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , donde:

$\pi_1$  es paralelo al plano coordenado  $(yoz)$  y pasa por el punto  $A(2; 3; 4)$ , además  $\pi_2$

es paralelo al eje  $x$  y tiene por traza a la recta  $R_3) \begin{cases} y+z=4 \\ x=0 \end{cases}$

Determinar y justificar:

- a) Las ecuaciones de  $\pi_1$ ;  $\pi_2$ ;  $R_1$  y  $R_2$
- b) El punto de intersección o la distancia entre las rectas  $R_1$  y  $R_2$
- c) Gráfico.

**19)** Determinar la ecuación de la recta  $r)$  tal que sea perpendicular a  $r_1) \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y-z=1 \end{cases}$  y  $r_2) x=2y=3z-3$  y corte a ambas.

**20)** Determinar los posibles ángulos respecto del eje  $z$  que formarán las rectas

perpendiculares al vector  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .



### III. APLICACIONES:

**1)** El Circo "El Vector Loco" está instalando su carpa en la ciudad. Para ello, lograron plantar tres mástiles de 8m; 7m y 6m de altura, en los puntos  $P1(0; 0; 0)$ ,  $P2(20; 0; 0)$  y  $P3(15; 20; 0)$ .

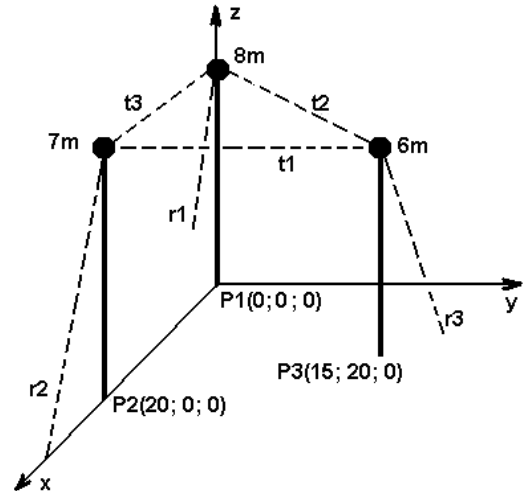
Uniendo sus puntas, están tensando cables reforzados para sostener la estructura de la carpa.

**a)** ¿Puede Ud. calcular la ecuación de las rectas que contienen a los tensores ( $t1$ ;  $t2$ ;  $t3$ ) en el espacio?

**b)** ¿Puede Ud. deducir la fórmula del plano que corresponderá al techo de la carpa?

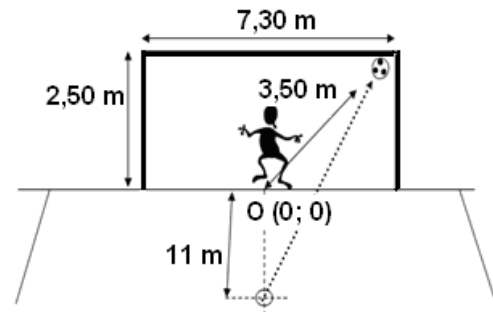
A su vez, y para que los mástiles no tiendan a derrumbarse hacia adentro, los amarran desde sus puntas con riendas ( $r1$ ;  $r2$ ;  $r3$ ) hacia estacas clavadas en el suelo, de modo que cada una de las riendas forme un ángulo de  $30^\circ$  con el mástil correspondiente y, además, sea perpendicular al tensor opuesto.

**c)** ¿Puede obtener la ecuación de la rienda  $r1$  y su longitud?



**2)** En cierto partido correspondiente a la primera división del fútbol argentino, juegan Colón y Boca. Faltando un minuto para que termine el encuentro hay penal a favor de Colón. Esteban Fuertes acomoda la pelota en el punto de ejecución, a 11 metros de la línea de gol, y dispara, como lo muestra la figura. El arquero adivina la dirección de balón y se tira, cubriendo con su volada, desde el origen hasta 3,50m hacia el ángulo superior derecho.

Si el arco mide 7,30 metros de ancho por 2,50 de alto y se asume que la trayectoria que describe la pelota es una recta; calcule su ecuación, de modo tal que el punto de ingreso al arco equidiste de su vértice superior y de las manos del arquero.

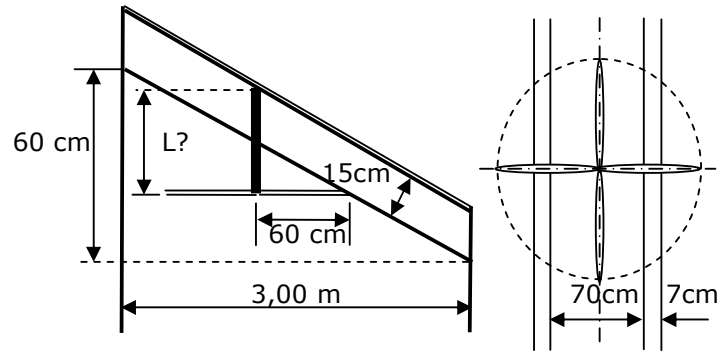


Tome como origen de coordenadas en  $R^3$  al punto medio de la línea de gol, que es donde se para originalmente el N°1 de Boca.

Nota: \* Los nombres de los equipos intervinientes en el problema, así como también el del shoteador, son meramente ilustrativos.



**3)** Deseo colgar un ventilador en un techo plano inclinado que tiene un desnivel de 60 cm en un largo de 3 m. El caño del ventilador estará ubicado en el medio de dos tirantes de sección rectangular de 15 cm de alto y 7 cm de ancho que, además, están separados 70 cm. Los extremos de las palas del ventilador están a 60 cm del eje del caño.

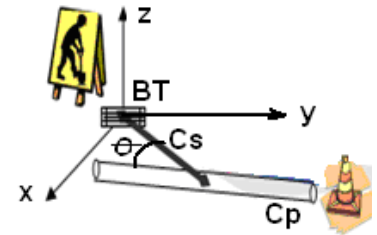


¿Cuál es el largo mínimo de caño necesario suponiendo que el plano de giro de las palas está ubicado en el extremo inferior del caño?.

**4)** En una esquina de la ciudad se desea construir una boca de tormenta (BT). De acuerdo a planos catastrales, el caño principal de desagüe (Cp) se ubica bajo el centro de la calzada según la siguiente recta  $r) \frac{x-5}{100} = \frac{z+1}{-1}; y=4$ .

Si el conducto secundario (Cs) que unirá la boca de tormenta (ubicada en el origen de coordenadas) con el desagüe principal, debe tener una pendiente de 2 cm por cada metro de longitud:

- ¿Cuál será la ecuación correspondiente a dicho conducto secundario (Cs)?
- ¿Cuál es el ángulo  $\theta$  de acometida en el empalme de ambos caños?.



**5)** El techo de cierta casa puede representarse mediante el siguiente plano:  $\pi) -\frac{1}{5}x + z - 5 = 0$ .

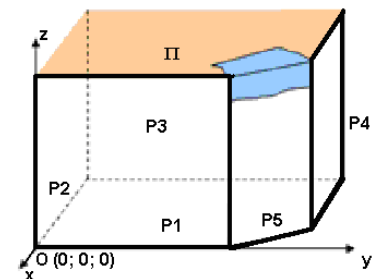
Y las paredes exteriores se modelan así:

$$P1) x = 0; \quad P2) y = 0; \quad P3) x = -10;$$

$$P4) y = 8; \quad P5) -2x - y + 6 = 0.$$

Esta última pared (P5) forma una especie de "ochava" por la cual, en su intersección con el techo filtra agua cada vez que llueve. Para reparar dicha filtración se desea comprar una cenefa de protección (plancha de metal plegado en ángulo que se coloca adherida a la pared en uno de sus laterales y al techo en el otro).

- ¿Con qué ángulo encargáramos el plegado de la chapa?
- ¿Cuál es la longitud de cenefa necesaria?
- ¿Cuál es la ecuación correspondiente al encuentro entre el techo y la pared P5?
- ¿Cuál es el ángulo entre la pared P2 y el techo?
- ¿Cuál es el ángulo entre la pared P3 y el techo?.





## I. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN BÁSICA:

$$1) \frac{x}{3} = y - 1 = \frac{z - 2}{5};$$

$$2) a) \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$2) c) x = \frac{y-1}{-2} = z+1$$

$$3) \begin{cases} y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$5) \frac{x}{-2} = \frac{y}{-1} = z$$

$$7) a) \pi \cap xy: 5x + 2y - 1 = 0 \\ \pi \cap xz: 3x + 2z + 1 = 0 \\ \pi \cap yz: 3y - 5z - 4 = 0$$

$$7) c) \frac{x-1/5}{-2/5} = y = \frac{z+4/5}{3/5}$$

$$8) a) \vec{r} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot t \text{ (Ec. Vectorial)}$$

No se puede en forma simétrica

$$\vec{r} = \begin{cases} 4x + 5z - 8 = 0 \\ y = -3 \end{cases} \text{ (Ec. General)}$$

$$8) e) r \cap xy (z=0) \Rightarrow P(2; -3; 0) \\ r \cap yz (x=0) \Rightarrow Q(0; -3; 8/5) \\ r \cap xz (y=0) \Rightarrow \bar{A}$$

$$9) d = \sqrt{6/7}$$

$$11) d = \frac{3}{89} \sqrt{89}$$

$$12) \theta_1 = 60^\circ; \theta_2 = 120^\circ$$

$$14) \theta = 36^\circ 18' 36,7''$$

$$16) \theta = 7^\circ 35' 20''$$

$$19) \pi) 3x - 4y + 8z - 8 = 0$$

$$2) b) \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

$$2) d) \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + 3t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$$

$$6) x - 1 = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+3}{2}$$

$$7) b) P_1(-1/3; 4/3; 0) \\ P_2(1/5; 0; -4/5) \\ P_3(0; 1/2; -1/2)$$

$$8) d) \pi_{xy}) y = -3 \\ \pi_{xz}) 4x + 5z - 8 = 0 \\ \pi_{yz}) y = -3$$

$$10) d = \frac{5}{26} \sqrt{26}$$

$$13) \theta = 58^\circ 31'$$

$$15) \theta = 49^\circ 31' 30''$$

$$18) \pi) 2x + 10y - 7z - 7 = 0 \quad P(3; 5; 7)$$

$$20) d = \frac{89}{66} \sqrt{6}$$



## II. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

$$1) \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 + t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

$$3) r) \frac{x-3/8}{-5} = \frac{y+7/4}{4} = \frac{z+7/8}{7}$$

$$5) \text{ long} = \sqrt{27/2}$$

$$7) P(-8/3; 13/3; -8/3)$$

$$9) \pi) 5x + y + 8z - 14 = 0$$

$$12) 2x + y + z = 2$$

$$13) a) \begin{cases} x = 1 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\pi \cap xy : x = 1$$

$$13) c) \pi \cap xz : x = 1$$

$$\pi \cap yz : 3y - 2z = 0$$

$$13) d) \pi) 3y - 2z = 0$$

$$15) a) \text{ Dos planos coordenados: } x=0 \cup y=0$$

$$15) c) \text{ Plano paralelo al } xy \text{ que corta al eje } z \text{ en } z = 2 \cup \text{ plano paralelo al } xy \text{ que corta al eje } z \text{ en } z = -2$$

$$15) e) x = z \cup x = -z$$

$$16) x = y = z$$

$$18) a) \pi_1) x - 2 = 0 ; \pi_2) y + z - 4 = 0$$

$$r_1) \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad r_2) \begin{cases} x = 2 \\ y = -4z \end{cases} \quad b) d = 2$$

$$2) x - 1 = \frac{y-4}{3} = \frac{z+2}{-6}$$

$$4) \pi) 9x + 8y + 5z - 8 = 0$$

$$6) d = \frac{13}{28} \cdot \sqrt{14}$$

$$8) P(5/4; 1/4; 1/4)$$

$$10) d(r; \pi) = 2;$$

$$13) b) x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

$$\pi \cap xy : 2x - y = 0$$

$$\pi \cap xz : 3x - z = 0$$

$$\pi \cap yz : 3y - 2z = 0$$

$$14) x - 1 = \frac{y-2}{\sqrt{2}} = \pm(z-3)$$

$$15) b) \text{ Los tres planos coordenados: } \text{plano } xy \cup \text{ plano } xz \cup \text{ plano } yz$$

$$15) d) x = y \cup y = 0$$

$$15) f) \text{ Recta en plano paralelo al coordenado } xy, \text{ tal que cada punto de ella cumple que el valor de la abscisa es opuesto al de la ordenada y la cota se mantiene constantemente igual a 4}$$

$$17) a) 2x + 3y + 2z - 7 = 0$$

$$b) \begin{cases} x = 2 \\ z = 3 \end{cases} \quad c) \begin{cases} \theta_1 = 13^\circ 30' 57'' \\ \theta_2 = 76^\circ 29' 3'' \end{cases}$$





### III. RESPUESTAS A LAS APLICACIONES:

**1) a)** Tensores:

$$\frac{x}{20} = \frac{z-8}{-1}; y = 0$$

$$\frac{x-20}{-5} = \frac{y}{20} = \frac{z-7}{-1}$$

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z-8}{-2}$$

**2) r)**  $\frac{x-11}{-11} = \frac{y}{3,27} = \frac{z}{2,24}$

**4) a)**  $\frac{x}{4,99} = \frac{y}{99,88} = \frac{z}{-2}$

**5)**  $\theta \approx 79^\circ 53' 51''$

**1) b)** Techo:

$$\pi) 4x + 5y + 80z - 640 = 0$$

**1) c)** Rienda  $t_1$ :

$$\frac{x}{3.618} = \frac{y}{2.872} = \frac{z-8}{8}; \text{ longitud: } \frac{16}{3} \cdot \sqrt{3}$$

**3)** 25,04 cm

**4) b)**  $\theta \approx 3^\circ$

### Bibliografía Consultada:

 Geometría Analítica

(C. Lehmann)