SUPERFICIES

I. EJERCITACIÓN BÁSICA:

0) **Definición:** **Superficie esférica** es el lugar geométrico de los puntos P(x,y,z) que equidistan de un punto fijo C(h, k, l), siendo h, k y l ϵ R.
Deducir una ecuación cartesiana para esta superficie llamando **r** a la dist(C,P) >0.

1) Determinar la ecuación de la superficie esférica tal que:

- **a)** Su centro es $C(0; 0; 0)$ y su radio $r = 9$
- **b)** Su centro es $C(5; -3; 7)$ y su radio es $r = \sqrt{2}$
- **c)** Los puntos $A(2; -3; 5)$ y $B(4; 1; -3)$ son extremos de un diámetro;
- **d)** Su centro es $C(-4; -4; -2)$ y además pasa por el origen de coordenadas;
- **e)** Su centro es $C(-4; -2; 3)$ y además es tangente al plano yz;
- **f)** Su centro es $C(0; 0; 0)$ y además es tangente al plano $\pi_1)\ 16x - 15y - 12z + 75 = 0$

2) Hallar la ecuación del plano que es tangente a la superficie $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 24$ en el punto $P(-1; 3; 0)$.

3) **Definición:** se llama **superficie cilíndrica** a la superficie generada una recta (llamada **generatriz)** que se mueve manteniendo su dirección y pasando por una curva dada (llamada **directriz).**

Graficar la superficie generada por una recta paralela al eje z que se mueve manteniendo su dirección y pasando por una circunferencia en el plano xy de ecuación $\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ z = 0 \end{cases}$. ¿Cuál es la ecuación de esta superficie?

4) Determinar la ecuación y graficar la superficie cilíndrica circular recta con generatriz paralela al eje y; y curva directriz: circunferencia ubicada en el plano $y = 2$, con centro $C(0; 2; 1)$ y radio $r = 1$.

5) Determinar la ecuación de la superficie cilíndrica parabólica recta con generatriz paralela al eje y**;** directriz: parábola de vértice $V(0; 0; 0)$; eje de simetría coincidente con el z; longitud de su longitud de su lado = $|2p| = 6$. Graficar.

6) Dada la superficie de ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = cz$ (con $c<0$), determinar:

- **a)** Intersecciones con ejes coordenados
- **b)** Trazas
- **c)** Intersecciones con planos $z = k$ para: $k = 0$; $k>0$; $k<0$
- **d)** Graficar

7) Determinar, describir y graficar el lugar geométrico que representa en $\Re^3$:

- **a)** $x^2 + z^2 - y = 4$
- **b)** $3x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 6x - 6y = 0$
- **c)** $3x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 6x - 6y + 6 = 0$
- **d)** $3x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 6x - 6y + 7 = 0$
- **e)** $xy = 0$ en $\Re^3$
- **f)** $xy = 0$ en $\Re^2$
- **g)** $xyz = 0$

h) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 5 = 0$
i) $4x^2 + y^2 - 4z = 0$
j) $x^2 - 4x = 0$ en $\Re^3$
k) $x^2 - 4x = 0$ en $\Re^2$
l) $xy - y^2 = 0$ en $\Re^3$
m) $xy-y^2 = 0$ en $\Re^2$
n) $4z^2 + 4y^2 - x^2 = 0$
o) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x – 2y + 2z = 18$
p) $x^2 + z^2 = 25$ en $\Re^3$
q) $x^2 + z^2 = 25$ en $\Re^2$
r) $x^2 + z^2 = 2z$ en $\Re^3$
s) $x^2 = 6z$ en $\Re^3$
t) $x^2 = 6z$ en $\Re^2$
u) $y^2 / 25 + z^2 / 16 = 1$ en $\Re^3$
v) $y^2 / 25 + z^2 / 16 = 1$ en $\Re^2$
w) $x^2 + 4y^2 + 4 = 0$ en $\Re^3$
x) $x^2 - z^2 = 0$ en $\Re^3$
y) $x^2 - z^2 = 0$ en $\Re^2$
z) $4z^2 – 16 = 0$ en $\Re^3$
aa) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$
bb) $x^2 – y^2 - z^2 = 1$
cc) $4x^2 + 4y^2 - z^2 – 16x + 8y - 6z = 17$
dd) $2x^2 - 3y^2 - 4z^2 - 12x - 6y = 21$
ee) $16z^2 - 4x^2 - 16y = 0$

8) Realizar la discusión completa, describir el lugar geométrico que representa y graficar cada una de las siguientes ecuaciones:
a) $(x-3)^2 + (y+1)^2 - (z-1)^2 = -9$
b) $2x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6y + 6z + 6 = 0$
c) $2x^2 - 3y^2 + 4z^2 – 8x - 6y + 12z = 10$
d) $9z^2 - 4y^2 - 36x^2 - 36 = 0$

EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

1) Determinar la ecuación de la superficie esférica tal que:

a) Su radio es 3 y, en el pto $P(1; 1; -3)$ es tangente al plano $x + 2y + 2z + 3 = 0$.

b) Sea tangente a los planos: $\pi_1)\ x - 2z - 8 = 0$; $\pi_2)\ 2x - z + 5 = 0$ y su centro se halla en la recta $r) \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$.

2) Hallar las coordenadas del punto de contacto entre la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ y su plano tangente $\pi_1)\ 2x - 6y + 3z = 49$

3) Determinar y describir el lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de sus distancias a los siguientes planos es 10:

$\pi_1)\ x + 4y + 2z = 0$; $\pi_2)\ 2x - y + z = 0$; $\pi_3)\ 2x + y - 3z = 0$

4) Determinar, describir y graficar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al eje y sea el triple de la correspondiente al eje z.

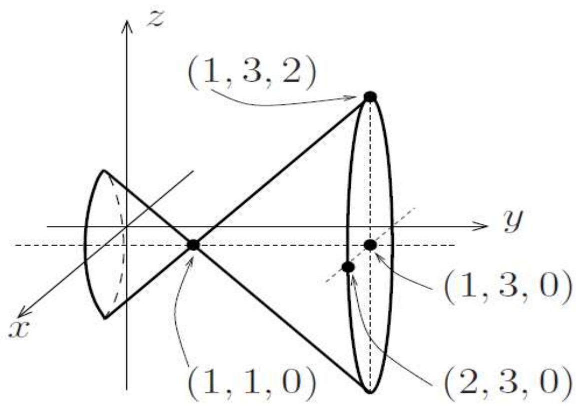
5) Determinar la ecuación de algún lugar geométrico que contenga a las curvas planas:

$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 9z^2 = 9 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 + 4z^2 = 4 \\ x = 0 \end{cases}$ Describir. Graficar.

6) Determinar la ecuación de algún lg que contenga a las curvas planas:

$\begin{cases} x^2/2 + y^2/2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2/2 + z^2/3 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2/2 + z^2/3 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ Describir. Graficar.

7) Determina una ecuación para la siguiente cuádrica:



<u>Definición</u>:

Una superficie cónica es la superficie generada por una recta (llamada **generatriz**) que se mueve pasando por una curva (llamada **directriz**) y por un punto fijo (**vértice**) no contenido en el plano de dicha curva.

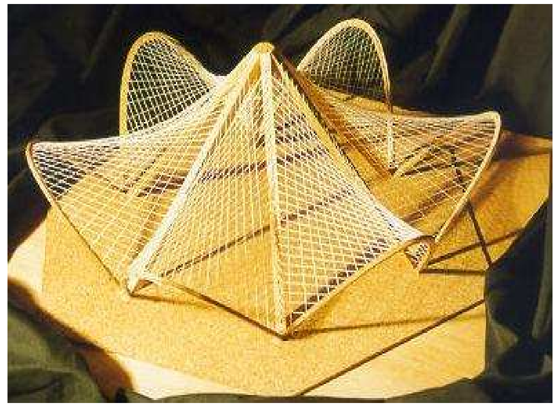
8) Analizar, determinar y describir el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias al plano yz son el doble de la distancia al punto $P_1\ (1; -2; 2)$

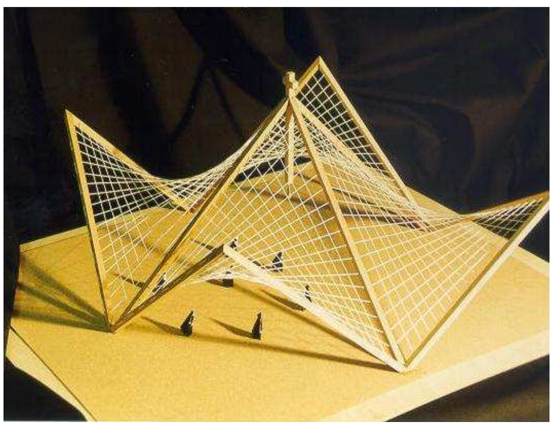
III. APLICACIONES:

Muchas, y muy interesantes aplicaciones de superficies fueron presentadas en el tema correspondiente a Cónicas, no obstante aún tenemos algo por decir:

- Si mueves circularmente un vaso que contiene algún líquido, ¿qué superficie forma la parte superior del líquido?: Un paraboloide elíptico

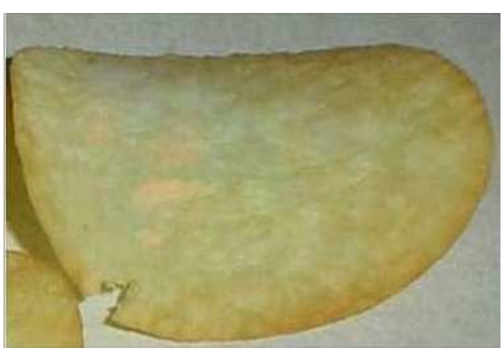
- ¿Sabías que luego de algunos estudios económicos-matemáticos se ha llegado a la conclusión que la forma mas conveniente para la superficie de un exprimidor de cítricos es la del paraboloide?





- Numerosos son los diseños arquitectónicos de techos reproduciendo paraboloides e hiperboloides.

- Tal vez, la superficie más interesante es el "Paraboloide Hiperbólico". También denominado silla de montar por su gráfica; una figura que mezcla parábolas e hipérbolas dependiendo del plano en que se las mire. Tiene la particularidad de contener rectas en su superficie.
Parece imposible que dos funciones tan distintas puedan unirse en una sola superficie que tenga coherencia.
El mismísimo Gaudí hacía uso extensivo del paraboloide hiperbólico para sus cúpulas y techos. El motivo es que esta estructura es óptima para resistir grandes esfuerzos de presión-tensión con una menor superficie.



- La forma particular que las papas adquieren al momento de la cocción, también representa un paraboloide hiperbólico. La rápida entrada en calor provoca tensiones superficiales que deforman la papa. La forma que consume menor energía para soportar dichas tensiones es la del paraboloide hiperbólico. Esta característica de la terna tensión-deformación-energía, es la virtud que también aprovechó Gaudí en sus construcciones.

I. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN BÁSICA:

0) $(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2 = r^2$, superficie esférica de radio $r > 0$ y centro en (h, k, l).

1.a) $x^2 + y^2 + z^2 = 81$;

1.b) $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 + (z - 7)^2 = 2$;

1.c) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 21$;

1.d) $(x + 4)^2 + (y + 4)^2 + (z + 2)^2 = 36$;

1.e) $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 4y - 6z + 13 = 0$;

1.f) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;

2) $\pi)$ $2x - y + z + 5 = 0$;

3) $x^2+y^2=r^2$ es una superficie cilíndrica.

4) $x^2 + z^2 = 2z$;

5) $lg_1)$ $x^2 + 6z = 0$; $lg_2)$ $x^2 - 6z = 0$;

6.a) O (0; 0; 0);

6.b) lg $\cap$ con plano xy $\Rightarrow$ O (0; 0; 0);

lg $\cap$ con plano xz $\Rightarrow \begin{cases} z = x^2/ca^2 \\ y = 0 \end{cases}$ (parábola de C (0; 0; 0) y ef $\equiv$ z);

lg $\cap$ con plano yz $\Rightarrow \begin{cases} z = y^2/cb^2 \\ x = 0 \end{cases}$ (parábola de C (0; 0; 0) y ef $\equiv$ z);

6.c) Si k= 0 $\Rightarrow$ O (0; 0; 0);

Si k>0 $\Rightarrow$ No intersecta;

Si $k<0 \wedge$ si $a^2 = b^2 \Rightarrow$ circunferencias : $\begin{cases} x^2 + y^2 = kca^2 \\ z = k \end{cases}$;

Si $k<0 \wedge$ si $a^2 \neq b^2 \Rightarrow$ elipses : $\begin{cases} x^2/cka^2 + y^2/ckb^2 = 1 \\ z = k \end{cases}$;

7.a) Paraboloide de revolución de vértice V (0; -4; 0) y eje $\equiv$ y;

7.b) Elipsoide de revolución; eje paralelo al x; centro C(-1; 1; 0);

Ecuación $\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{z^2}{3}=1$;

7.c) P(-1; 1; 0);

7.d) No representa lg;

7.e) Plano xz U Plano yz: x=0 v y=0;

7.f) Eje x U eje y: x= 0 v y= 0;

7.g) Plano xy $\vee$ plano xz $\vee$ plano yz;

7.h) No representa lg;

7.i) Paraboloide elíptico de vértice V (0; 0; 0) y eje $\equiv$ z;

7.j) Plano yz $\vee$ plano paralelo al yz de abscisa x=4;

7.k) Eje y $\vee$ recta paralela al eje y de abscisa x**=** 4;

7.l) Plano x = y $\vee$ plano xz;

7.m) Eje x $\vee$ recta x = y;

7.n) Superficie cónica circular de vértice V(0;0;0);
Eje coincidente con el x; una directriz: ($z^2 + y^2 = 1$; x = 2);

7.o) Superficie esférica de centro C (2; 1; -1) y radio r = 2 $\sqrt{6}$;

7.p) Superficie cilíndrica circular recta con eje $\equiv$ y; generatriz paralela al eje y;
Directriz: circunferencia ubicada en un plano paralelo al xz;
con radio r = 5 y centro C (0; y; 0), donde y $\in \Re$;

7.q) Circunferencia ubicada en el plano xz; con centro C (0; 0) y radio r = 5;

7.r) Superficie cilíndrica recta circular con generatriz paralela al eje y;
Directriz paralela al plano xz [una directriz: $x^2+(z-1)^2= 1$; y= 0];

7.s) Superficie cilíndrica parabólica recta con generatriz paralela al eje y;
Directriz: parábola ubicada en un plano paralelo al xz y vértice en el eje y;

7.t) Parábola ubicada en el plano xz; vértice V (0; 0) y eje $\equiv$ z;

7.u) Superficie cilíndrica elíptica recta con generatriz paralela al eje x;
Directriz: elipse ubicada en un plano paralelo al yz y centro ubicado en el eje x;

7.v) Elipse ubicada en el plano yz; centro C (0; 0); y ef $\equiv$ y;

7.w) No representa lg;

7.x) Plano x = z $\vee$ plano x = -z;

7.y) Recta x = z $\vee$ recta x = -z $\vee$ punto P (0; 0);

7.z) Plano paralelo al xy que corta al eje z en z = 2
$\vee$ plano paralelo al xy que corta al eje z en z = -2;

7.aa) Elipsoide con centro C (0; 0; 0) y eje mayor $\equiv$ x;

7.bb) Hiperboloide de revolución de dos hojas con centro C (0; 0; 0) y eje $\equiv$ x;

7.cc) Hiperboloide circular de una hoja con eje paralelo al z;

7.dd) Hiperboloide elíptico de dos hojas con eje $\equiv$ x;

7.ee) Paraboloide hiperbólico de eje $\equiv$ y;

8.a) Hiperboloide circular de dos hojas con eje paralelo al z; centro C(3; -1; 1);

8.b) P(0; 1; -1);

8.c) Hiperboloide elíptico de una hoja con eje coincidente con el eje y;

8.d) Hiperboloide elíptico de dos hojas con eje coincidente con el eje z.

II. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

1.a) $lg_1)$ $x^2 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2 = 9$;

$lg_2)$ $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 9$;

1.b) $lg_1)$ $(x + 2)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 16/5$;

$lg_2)$ $(x + 2)^2 + y^2 + (z + 11)^2 = 144/5$

2) P(2; -6; 3);

3) Superficie esférica con centro C(0; 0; 0) y radio $r=\sqrt{10}$;

lg) $x^2 + y^2 + z^2 = 10$;

4) Superficie cónica elíptica de vértice V (0; 0; 0) y eje ≡ con z;

lg) $8x^2 + 9y^2 - z^2 = 0$;

5) Elipsoide con centro C(0; 0; 0) y eje mayor ≡ x: $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$;

6) Elipsoide de revolución: $3x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 6$;

7) $4(x-1)^2 - (y-1)^2 + z^2 = 0$;

8) $$\frac{(x-4/3)^2}{4/9}+\frac{(y+2)^2}{1/3}+\frac{(z-2)^2}{1/3}=1$$

Elipsoide de Revolución de centro C (4/3; -2; 2).

Bibliografía Consultada:

- Geometría Analítica (C. Lehmann)
- Introducción al Algebra Lineal (H. Antón)