



RECTA EN \mathbb{R}^2

I- EJERCITACIÓN BÁSICA

1) Determinar la ecuación de la recta que pasa por $P(5; 9)$ y es paralela al eje de ordenadas. Expresarla en forma general, segmentaria y explícita. Graficar.

2) En cada inciso hallar la ecuación de la recta que cumple las condiciones enunciadas. Graficar:

- a)** Contiene al origen y es paralela a $2x - 3y = 4$.
- b)** Contiene a $P_1(3;0)$ y es perpendicular a $2x + y - 5 = 0$.
- c)** Contiene a $P(-1;-2)$ y forma 45° con la $y = 0$.

3) En cada uno de los siguientes casos, determinar la ecuación de la recta que contiene los puntos dados. Expresarla en forma general, explícita y segmentaria. Graficar.

- a)** $A(2;1); B(-3;2)$
- b)** $A(-1;0); B(0;-3)$

4) Hallar la ecuación de la recta que contiene a $P(1/4; -1/2)$ y es paralela a la recta que pasa por $A(-2; 1/4)$ y $B(1/2; 3)$. Graficar.

5) Determinar las coordenadas de tres puntos de cada recta y verificar.

- a)** $2x - 3y = 6$
- b)** $\frac{x}{3} + \frac{y}{-1} = 7$
- c)** $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{-3}$
- d)** $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3 \end{cases}$

6) Determinar las ecuaciones general, explícita y segmentaria de la recta que contiene al punto $A(-1;-2)$, cuya pendiente es, según el caso dado. Graficar

- a)** $3/4$
- b)** $-4/5$
- c)** 2
- d)** 0
- e)** ∞

7) Hallar la ecuación de la recta cuya abscisa al origen es 3 y cuya ordenada al origen es -2. Expresarla en forma general, explícita y segmentaria. Graficar.

8) Demostrar que $r_1) 3x + 4y - 7 = 0$ y $r_2) 9x + 12y - 8 = 0$ son paralelas y que $r_3) x + 2y + 5 = 0$ y $r_4) 4x - 2y - 7 = 0$ son normales.

9) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2; 3)$ y por la intersección de las rectas: $r_1) x + 5y + 2 = 0$ y $r_2) 3x + 4y - 5 = 0$. Graficar.



RECTA EN \mathbb{R}^2

II- EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

1) Determinar el valor de k para que las rectas $r_1) k^2x + (k+1)y + 3 = 0$ y $r_2) 3x - 2y - 11 = 0$

- a) Sean perpendiculares
- b) Sean paralelas
- c) Se corten en un punto de abscisa 2
- d) Tengan igual ordenada al origen

2) En el triángulo cuyos vértices son $A(-3;2)$; $B(5;6)$; $C(1;-4)$, encontrar las ecuaciones de las rectas a las que pertenecen:

- a) Las medianas.
- b) Las bisectrices.
- c) Las mediatrices.
- d) Hallar el área del triángulo.

3) En cada caso, determinar el o los valores de k para que la recta $r_1) \frac{x-2}{k} + \frac{y+1}{-4} = 0$:

- a) Sea paralela a la $r_2) kx - 3y + 1 = 0$
 - b) Contenga al punto $P(2; 0)$
 - c) Contenga al $O(0; 0)$
 - d) Contenga al punto $P(0; -4)$
 - e) Contenga al punto $P(2; -1)$
 - f) Sea perpendicular a la $r_2) kx - 3y + 1 = 0$
-

RECTA EN \mathbb{R}^2

III- APLICACIONES:

1) A una reunión asisten 20 personas y se recaudan \$104. Calcular la cantidad de hombres y mujeres, si los hombres pagan \$6 cada uno y las mujeres \$3 cada una. Graficar e interpretar el resultado obtenido.

2) A una reunión asisten 20 personas y se recaudan \$105. Calcular la cantidad de hombres y mujeres, si los hombres pagan \$6 cada uno y las mujeres \$3 cada una. Graficar e interpretar el resultado obtenido.



3) Determinar las ecuaciones de las rectas que representan los límites de los terrenos cuadrados mediante los datos dados en cada uno de los siguientes casos:

- a)** Dos postes que se conservan y constituyen vértices opuestos, están determinados en el plano por las coordenadas $A(2; 1)$ y $C(4; 5)$.
- b)** Tres postes que se han conservado; uno en el centro y dos en los vértices de uno de sus lados, están determinados en el plano por las siguientes coordenadas: el del centro $N(1; 6)$ y los laterales $A(5; 9)$ y $B(4; 2)$.

4) En la planimetría de un campo, se observa un acueducto recto que lo atraviesa, pasando por los puntos $A(1200; 5000)$ y $B(-500; 8000)$. Además, existe un tanque en el punto $C(9000; 3000)$ que se debe vincular al acueducto mediante una cañería recta. Se necesita conocer la menor longitud de cañería a utilizar y las coordenadas del punto del acueducto, en donde deberá realizarse el enlace.

5) Un punto se mueve en el plano cartesiano de manera que, sea cual sea la posición en la que se encuentre, siempre equidista de los puntos $A(2; 1)$ y $B(3; -2)$. Determinar el lugar geométrico que recorre. Graficar.

6) La presión p experimentada bajo el agua por un buzo depende de la profundidad d a la que se encuentra éste, de acuerdo con una fórmula de la forma $p = kd + 1$ (k es una constante). Suponiendo que en la superficie, la presión es de 1 atmósfera y a 100 metros de profundidad es de 10,94 atmósferas, aproximadamente. Encontrar la presión a 50 metros de profundidad.

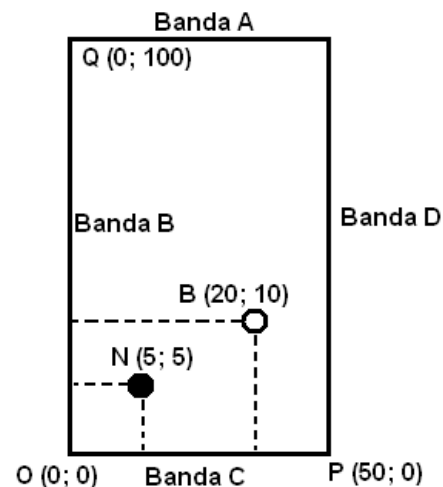
7) La relación entre las escalas *Fahrenheit* y *Celsius* de medición de temperaturas está dada por $C = 5/9 (F - 32)$ ¿Existe una temperatura a la cual un termómetro en grados *Celsius* dé la misma lectura numérica que un termómetro *Fahrenheit*? Si es así, encuéntrala. Graficar.

8) En una mesa de pool, sólo quedaron la bola blanca y la negra en las posiciones indicadas en la gráfica.

El jugador debe golpear la bola negra con la blanca haciendo rebotar, previamente, la bola blanca en la banda (A).

Asumiendo que el golpe se produce sin "efecto", es decir, que el ángulo de rebote es siempre simétrico respecto a la normal a la banda que pasa por el punto del impacto:

- a)** ¿Cuál es la recta que define la dirección de tiro del jugador?
- b)** Intentar obtener una segunda dirección de tiro, pero esta vez haciendo banda en (D) y luego en (A), previo a golpear la bola negra.





PROGRAMACIÓN LINEAL

I. EJERCITACIÓN BÁSICA

a) $Min : x + y$

$$\text{Sujeto } a : \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 5y \geq 15 \\ 8x + 2y \geq 16 \end{cases}$$

b) $Min : 10x + y$

$$\text{Sujeto } a : \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 5y \geq 15 \\ 8x + 2y \geq 16 \end{cases}$$

c) $Max : x + y$

$$\text{Sujeto } a : \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 7y \leq 21 \\ 3x + 2y \leq 18 \end{cases}$$

d) $Max : 2x + y$

$$\text{Sujeto } a : \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 7y \leq 21 \\ 3x + 2y \leq 18 \end{cases}$$

e) $Max : x + 2y$

$$\text{Sujeto } a : \begin{cases} x \geq 4 \\ y \geq 2 \\ x + y \leq 10 \\ 5x + 4y = 40 \end{cases}$$

f) $Min : x + y$

$$\text{Sujeto } a : \begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \geq 6 \\ 7x + 3y \leq 21 \end{cases}$$

g) $Max : x + 7y$

$$\text{Sujeto } a : \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 8x + 5y \geq 40 \\ 5x + 8y \geq 40 \end{cases}$$

h) $Min : x + 7y$

$$\text{Sujeto } a : \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 8x + 5y \geq 40 \\ 5x + 8y \geq 40 \end{cases}$$

i) $Min : 10x + 2y$

$$\text{Sujeto } a : \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x + y \geq 10 \\ x + 5y \geq 15 \\ x + 2y \leq 20 \end{cases}$$

j) $Max : x + y$

$$\text{Sujeto } a : \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x + y \geq 10 \\ x + 5y \geq 15 \\ x + 2y \leq 20 \end{cases}$$



PROGRAMACIÓN LINEAL

II. APLICACIONES:

- 1)** Unos grandes almacenes encargan a un fabricante pantalones y chaquetas deportivas. El fabricante dispone para la confección de 750 m de tejido de algodón y 1000 m de tejido de poliéster. Cada pantalón precisa 1 m de algodón y 2 m de poliéster. Para cada chaqueta se necesitan 1,5 m de algodón y 1 m de poliéster. El precio del pantalón se fija en \$50 y el de la chaqueta en \$40. ¿Qué número de pantalones y chaquetas debe suministrar el fabricante a los almacenes para que éstos consigan una venta máxima en pesos?. Graficar el recinto.
- 2)** El granjero López tiene 480 hectáreas en la que se puede sembrar ya sea trigo o maíz. Él calcula que tiene 800 horas de trabajo disponible durante la estación del verano. Dado que el margen de utilidad del maíz es \$40 por hectárea, el del trigo es de \$30 y los requerimientos laborales son de 2 horas por hectárea para sembrar maíz y sólo 1 hora por cada hectárea de trigo, ¿Cuántas hectáreas de cada uno debe sembrar para maximizar su utilidad?. ¿Cuál es ésta utilidad máxima?. Graficar el recinto.
- 3)** Una compañía fabrica y venden dos modelos de lámpara A y B. Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo A y de 30 minutos para el B; y un trabajo de máquina de 20 minutos para A y de 10 minutos para B. Se dispone para el trabajo manual de 100 horas al mes y para la máquina 80 horas al mes. Sabiendo que el beneficio por unidad es de 15 y 10 euros para A y B, respectivamente, planificar la producción para obtener el máximo beneficio. Graficar el recinto.
- 4)** Una empresa de transportes tiene dos tipos de camiones, los del tipo A con un espacio refrigerado de 20 m³ y un espacio no refrigerado de 40 m³. Los del tipo B, con igual cubillaje total, al 50% de refrigerado y no refrigerado. La contratan para el transporte de 3 000 m³ de producto que necesita refrigeración y 4 000 m³ de otro que no la necesita. El coste por kilómetro de un camión del tipo A es de \$30 y el B de \$40. ¿Cuántos camiones de cada tipo ha de utilizar para que el coste total en pesos sea mínimo?. Graficar el recinto.
- 5)** En una granja de pollos se da una dieta, para engordar, con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia A y otras 15 de una sustancia B. En el mercado sólo se encuentra dos clases de compuestos: el tipo X con una composición de una unidad de A y 5 de B, y el otro tipo, Y, con una composición de cinco unidades de A y una de B. El precio del tipo X es de \$10 y del tipo Y es de \$30. ¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un coste mínimo?. Graficar el recinto.
- 6)** Con el comienzo del período escolar se va a lanzar unas ofertas de material escolar. Unos almacenes quieren ofrecer 600 cuadernos, 500 lápices y 400 bolígrafos para la oferta, empaquetándolo de dos formas distintas; en el primer bloque pondrá 2 cuadernos, 1 lápiz y 2 bolígrafos; en el segundo, pondrán 3 cuadernos, 1 lápiz y 1 bolígrafo. Los precios de cada paquete serán \$6,50 y \$7, respectivamente. ¿Cuántos paquetes le conviene poner de cada tipo para obtener el máximo beneficio en pesos?. Graficar el recinto.



7) Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autobuses de 40 plazas y 10 de 50 plazas, pero sólo dispone de 9 conductores. El alquiler de un autobús grande cuesta \$800 y el de uno pequeño \$600. Calcular cuántos autobuses de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible para la escuela. Graficar el recinto.

8) Un nutricionista asesora a un individuo que sufre una deficiencia de hierro y vitamina B, y le indica que debe ingerir al menos 2400 mg de vitamina B-1 (tiamina) y 1500 mg de vitamina B-2 (riboflavina) durante cierto período de tiempo. Existen dos píldoras de vitaminas disponibles, la marca A y la marca B. Cada píldora de la marca A contiene 40 mg de hierro, 10 mg de vitamina B-1, 5 mg de vitamina B-2 y cuesta 6 centavos. Cada píldora de la marca B contiene 10 mg de hierro, 15 mg de vitamina B-1 y 15 mg de vitamina B-2, y cuesta 8 centavos. ¿Cuáles combinaciones de píldoras debe comprar el paciente para cubrir sus requerimientos de hierro y vitamina al menor costo?. Graficar el recinto.

9) Una empresa fabrica productos de dos tipos: A y B. Ambos productos se fabrican con las mismas materias primas M y N.
El producto A necesita 2 kg. de M y 1 kg. de N por unidad.
El producto B necesita 1 kg. de M y 2 kg. de N por unidad.
La cantidad de materias primas que se deben emplear no debe ser inferior a los 6 kg de cada una.
El reparto lo realiza un camión que debe trabajar como máximo 18 hs. diarias, necesitando 3 hs. para cada unidad de A y 2 hs. para cada unidad de B.
Además, por órdenes de la empresa, la producción diaria de B no debe superar las 6 unidades.
¿Cuál es la combinación de producción que maximiza los beneficios, si la ganancia es de \$6 por cada unidad de A y de \$4 por cada unidad de B?. Graficar el recinto.

10) Unos grandes almacenes desean liquidar 200 camisas y 100 pantalones de la temporada anterior. Para ello lanzan, dos ofertas, A y B. La oferta A consiste en un lote de una camisa y un pantalón, que se venden a 30 €; la oferta B consiste en un lote de tres camisas y un pantalón, que se vende a 50 €. No se desea ofrecer menos de 20 lotes de la oferta A ni menos de 10 de la B. ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar la ganancia?. Graficar el recinto.

11) Se dispone de 600 g de una determinada aleación para elaborar pastillas de freno grandes y pequeñas. Las grandes pesan 40 g y las pequeñas 30 g. Se necesitan al menos tres pastillas grandes, y al menos el doble de pequeñas que de las grandes. Cada pastilla grande proporciona un beneficio de \$2 y la pequeña de \$1. ¿Cuántas pastillas se han de elaborar de cada clase para que el beneficio sea máximo?. Graficar el recinto.



RECTA EN \mathbb{R}^2

I- RESPUESTAS A EJERCITACIÓN BÁSICA:

1) $x - 5 = 0$; no tiene forma segmentaria ni explícita

2.a) $2x - 3y = 0$

2.b) $x - 2y - 3 = 0$

2.c) $r_1) \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 + t \end{cases}; r_2) \begin{cases} x = -1 - t \\ y = -2 + t \end{cases}$

3.a) $x + 5y - 7 = 0$;

$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{7}{5} ; \frac{x}{7} + \frac{y}{7/5} = 1$$

3.b) $3x + y + 3 = 0$;

$$y = -3x - 3 ; \frac{x}{-1} + \frac{y}{-3} = 1$$

4) $44x - 40y - 31 = 0$

6.a) $3x - 4y - 5 = 0$

6.b) $4x + 5y + 14 = 0$

6.c) $y = 2x$

6.d) $y = -2$

6.e) $x = -1$

7.a) $-2x + 3y + 6 = 0$

7.b) $y = \frac{2}{3}x - 2$

9) $4x + 5y - 7 = 0$

RECTA EN \mathbb{R}^2

II- RESPUESTAS A EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

1.a) $k_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}$; $k_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}$

1.b) **1.c)** **1.d)**

2.a) $x + 6y - 9 = 0$

$x = 1$

$7x - 6y + 1 = 0$

2.b) $2x + y + 2 = 0$

$2x - 3y + 8 = 0$

$2x + 5y - 4 = 0$

2.c)

2.d) $S = 32 \text{ u}^2$

3.a) $\pm 2\sqrt{3}$

3.b) \emptyset

3.c) -8

3.d) $k = 8/3$

3.e) $k \in \mathbb{R} - \{0\}$

3.f) \emptyset



RECTA EN \mathbb{R}^2

II- RESPUESTAS A APLICACIONES:

- 1) \emptyset 2) 15 varones y 5 mujeres

| | |
|---|--|
| 3.a) $\overline{AB}) 3x + y - 7 = 0$ | 3.b) $\overline{AB}) 7x - y - 26 = 0$ |
| $\overline{AD}) x - 3y + 1 = 0$ | $\overline{AD}) x + 7y - 68 = 0$ |
| $\overline{BC}) x - 3y + 11 = 0$ | $\overline{BC}) x + 7y - 18 = 0$ |
| $\overline{CD}) 3x + y - 17 = 0$ | $\overline{CD}) 7x - y + 24 = 0$ |

4) $d = 5800,15 \text{ m}$ $E(3953,74; 140,45)$

5) $y = 1/3 x - 4/3$ 6) $P = 5,97$ atmósferas

7) $-40^\circ C = -40^\circ F$

8.a) $37x + 3y - 770 = 0$ 8.b) $37x - 15y - 590 = 0$

PROGRAMACIÓN LINEAL

I. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN BÁSICA:

- | | |
|---|---------------------------|
| a) $x=25/17; y=36/17$ | b) $x=0; y=8$ |
| c) $x=45/19; y=84/19$ | d) $x=6; y=0$ |
| e) $x=4; y=5$ | f) No hay región factible |
| g) Región factible no acotada. Óptimo infinito | h) $x=0; y=8$ |
| i) $0 \leq x \leq 35/24; y=10-5x$ | j) $x=20; y=0$ |
-




PROGRAMACIÓN LINEAL

II. RESPUESTAS A APLICACIONES:

- 1)** La solución óptima es fabricar 375 pantalones y 250 chaquetas para obtener un beneficio de \$28750.
- 2)** El granjero López deberá sembrar 320 hectáreas de maíz y 160 hectáreas de trigo, lo que produce el valor máximo de \$17600.
- 3)** La solución óptima es fabricar 210 del modelo A y 60 del modelo B para obtener un beneficio de \$3750.
- 4)** El coste mínimo es \$4180 con $A = 50$ y $B = 67$.
- 5)** El coste mínimo es \$100 con $X = 5/2$ e $Y = 5/2$.
- 6)** La solución óptima es 150 P_1 y 100 P_2 con la que se obtienen \$1675.
- 7)** El coste mínimo es de \$6200. Se consigue con 4 autobuses grandes y 5 pequeños.
- 8)** El paciente debe adquirir 30 píldoras de la marca A y 120 de la marca B, con un costo mínimo de \$11,40.
- 9)** Soluciones posibles para las cuales se obtiene la misma ganancia máxima (\$36):
 - Producir 2 unidades de A y 6 de B.
 - Producir 4 unidades de A y 3 de B.
 - Producir sólo 6 unidades de A.
- 10)** En este caso todos los pares $(P; C)$, con soluciones enteras del segmento trazado entre $(0; 500)$ y $(375; 250)$ serían máximos con un beneficio de \$15000.
- 11)** El máximo beneficio es de \$24, y se obtiene fabricando 6 pastillas grandes y 12 pequeñas.

Bibliografía Consultada:

 Álgebra Lineal

(S. Grossman)