ESPACIOS VECTORIALES : Cap 5 y 6

- ESPACIOS Y SUBESPACIOS VECTORIALES
- COMBINACIÓN LINEAL, CONJUNTO GENERADOR Y ESPACIO GENERADO
- DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL
- BASES
- BASES ORTONORMALES
- PSEUDOINVERSA Y MÍNIMOS CUADRADOS

ESPACIOS Y SUBESPACIOS VECTORIALES

I. EJERCITACIÓN BÁSICA:

1) Demostrar analíticamente que el conjunto H= $\begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix}$ con $x \in \Re$, es un espacio vectorial.

2) Comprobar analíticamente que los siguientes subconjuntos de R^2 no son espacios vectoriales:

a) Los vectores localizados en el primer cuadrante.

b) H= $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / y = 1 \right\}$

3) Demostrar que el conjunto H es un subespacio de V:

a) $V = \Re^3$; H= el plano xy.

b) $V = \Re^2$; $H = \{(x;\ y) \ : \ x = y\}$

c) $V = \Re^3$; $H = \{(x;\ y;\ z) \ : \ x = y\}$

d) $V = \Re^3$; $H = \{(x;\ y;\ z) \ : \ x + 2y + 3z = 0\}$

4) En cada caso, describir geométricamente el conjunto dado y determinar si es o no un subespacio vectorial justificando adecuadamente:

a) El conjunto de los vectores en $\Re^3$ de la forma (x; x; x) con $x \in R$.

b) Los puntos $(x; y; z) \in \Re^3$ tales que x = t+1; y = 2t; z = t-1 $\forall t \in R$.

c) El conjunto H formado por los vectores de R^3 ubicados en el primer, segundo y tercer cuadrante del plano xy.

d) El conjunto constituido por los vectores de la forma (0; y; z) para $y, z \in R$.

e) El lugar geométrico determinado por la unión de dos SEV cualesquiera de R^3 .

f) El lugar geométrico determinado por la intersección de dos SEV de R^3.

5) Determinar en cada caso, si el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales dado, es un subespacio de R^3. En caso afirmativo verificar el cumplimiento de los axiomas correspondientes:

a) S_1: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ **b) S_2:** $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ **c) S_3:** $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$ **d) S_4:** $\begin{cases} x = y = z \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

6) Hallar, al menos dos subespacios de R^3 perpendiculares al subespacio x = y = z.

II. EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

1) Mostrar que los siguientes subconjuntos no son espacios vectoriales:

a) H= {(x; y) : $x^2 + y^2 \leq 1$}
b) H= {(1; y) : y $\in$ R}
c) H= {(x; y) : y = x^2}

2) Demostrar que el conjunto H es un subespacio de V:

a) Si V= $\Re^m$ y A es matriz de orden (nxm) ; H={X $\in$ $\Re^m$ / A X=0}. Interpretar H.
b) Si H_1, H_2 son SEV de V $\quad y \quad v^{(1)} \in H_1 \quad y \quad v^{(2)} \in H_2$; $H = \{v = v^{(1)} + v^{(2)}\}$.
c) Si $v_1 \;;...; v_n \in V$; $H = \{u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \quad con \quad \alpha_i \in \Re\}$. Interpretar H
d) Si V= $\Re^3$; H={(x; y; z) / x+y-z= 0}.
e) Si V= $\Re^4$; H={(x; y; z; w) / x+y-z= 0}.
f) Si V= $\Re^3$; H={(x; y; z) / x=y=z}.
g) Si V= $\Re^4$; H={(x; y; z; w) / x=y=z}.
h) Si V= $\Re^3$; **n** vector fijo de $\Re^3$; $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$; H={**x** $\in$ $\Re^3$ / **x**.**n**= 0}. Interpretar H.

3) En cada caso, describir geométricamente el conjunto dado y determinar si es o no un subespacio vectorial justificando adecuadamente:

a) El conjunto de puntos en $\Re^3$ que satisface la ecuación x + z = 1.
b) El conjunto de puntos en $\Re^3$ que satisface la ecuación x + z = 0.
c) Los puntos de $\Re^3$ que satisfacen simultáneamente las ecuaciones x + z = 0; x – z = 0.
d) Conjunto H formado por los puntos de $\Re^3$ que pertenecen a la intersección de los planos coordenados xy y xz.
e) H = {(x; y; z) / $x^2+y^2-z = 0$}
f) H = {(x; y; z) / x = z, 2x+y = 0 }
g) el conjunto formado por los vectores (0; 0; 0) ; (1; 0; 0).
h) El conjunto de puntos en $\Re^3$ que satisface la ecuación $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+3}{6}$

4) Determine en cada caso, si el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales dado, es un subespacio de V En caso afirmativo verifique el cumplimiento de los axiomas correspondientes:

V= R^3 **a)** **S₁:** $\begin{cases} x+y+z=0 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{-1} = z \end{cases}$ V= R^4 **b)** **S₂:** $\begin{cases} x+y+z=0 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{-1} = z \end{cases}$

V= R^3 **c)** **S₃:** $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-1 = y = z \end{cases}$ V= R^2 **d)** **S₄:** $\begin{cases} x = y \\ y = 1 \end{cases}$

COMBINACIÓN LINEAL, CONJUNTO GENERADOR Y ESPACIO GENERADO

I. EJERCITACIÓN BÁSICA:

1) Determinar si los vectores $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ generan el espacio vectorial $\Re^3$.

Si la respuesta es negativa, describir geométricamente el espacio que generan y expresar tres conjuntos generadores diferentes de este espacio.

2) Determinar en cada caso el espacio vectorial generado por los vectores dados

a) $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$;

b) $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$;

c) $v_1 =$ (1; 1; 1);

d) $v_1 =$ (1; -1; 1) y $v_2 =$ (-1; 1; -1);

e) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}7\\3\\5\end{pmatrix}$;

f) $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}$

3) ¿Verdadero o falso? Justificar.

a) Los vectores $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ generan el plano $\pi)$ $x + y - z = 0$.

b) El vector (6; 2) pertenece al espacio generado por {(2; 3); (4; -5)}

c) Un conjunto de tres vectores de $\Re^2$ siempre genera a $\Re^2$

d) El espacio generado por un vector no nulo de $\Re^3$ es un plano perpendicular a ese vector y que pasa por el origen.

e) El espacio que generan tres o más vectores en $\Re^3$, es todo $\Re^3$.

f) $\Re^3$ siempre estará generado por un conjunto de 3 vectores.

g) Si un vector de $\Re^3$ es combinación lineal de otros dos, entonces el producto mixto entre los tres vectores es igual a cero.

h) Si un vector de $\Re^3$ es combinación lineal de otros dos, entonces los tres vectores generan un plano.

i) El vector $\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ puede expresarse como una única combinación lineal entre $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$.

j) El vector $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ puede expresarse como una única combinación lineal entre $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$.

k) El vector $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ puede expresarse como una única combinación lineal entre $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$.

l) El vector $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ puede expresarse como una única combinación lineal entre $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$.

II. EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

1) Determinar (x; y) tal que el vector v_1= (1; 1):

a) no sea combinación lineal de los vectores v_2= (4; 3) y v_3= (x; y);
b) sea combinación lineal de los vectores v_2= (4; 3) y v_3= (x; y).
c) sea combinación lineal de los vectores v_2= (0; 0) y v_3= (x; y).

2) ¿Verdadero o falso?. Justificar:

a) Sean los vectores u,v, w de $\Re^3$ / v ≠ w, entonces gen {u; v} ≠ gen {u; w}
b) Si un conjunto de vectores no nulos es Ld, al menos uno de ellos es combinación lineal de los otros
c) Si un conjunto de vectores no nulos es Ld, cualquiera de ellos es combinación lineal de los otros
d) El vector nulo, solamente es combinación lineal de un conjunto de vectores nulos,
e) El vector nulo puede escribirse como combinación lineal de vectores sin que todos los coeficientes sean nulos.

3) Verificar analíticamente que el vector $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ no es combinación lineal de los vectores $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Justificar geométricamente.

4) Hallar $u \in \Re^3 / gen\{u\} = U \cap W$, siendo U = plano xy; W = gen{ (1; 0; 1) ; (0; 1; 1)}.

5) Determinar un conjunto generador de x+y-z= 0 en $\Re^4$.

6) Determinar $\alpha /\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ v_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ generen:

a) *x+y+z= 0* ; **b)** $\Re^3$; **c)** *x+y-z= 0*

III. APLICACIONES:

1) Una compañía almacena tres mezclas básicas (A, B y C), cada una formada con cuatro compuestos diferentes:

	A	B	C
I	20	18	12
II	10	10	10
III	20	10	8
IV	0	12	20

Las cantidades se miden en gramos y cada unidad de mezcla pesa 50 gramos.
Se formulan mezclas especiales combinando las tres mezclas básicas.
¿Se puede hacer una mezcla que consiste en 210g de I, 130g de II, 150g de III y 160g de IV?
Si se puede, ¿qué cantidad de cada mezcla básica se necesita para formular la mezcla especial?.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

I. EJERCITACIÓN BÁSICA:

1) Determinar en cada caso, si el conjunto H es linealmente independiente (Li):

a) $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

b) $H = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$

c) $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

d) $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$

e) $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

f) $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

II. EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

1) Determinar un conjunto generador de $H=\{(x; y; z) \in \Re^3 / x - z = 0\}$ que contenga tres vectores. ¿Es Li o Ld? ¿Por qué?

2) Responder verdadero o falso según corresponda. Justificar la respuesta.

a) En un espacio vectorial, cualquier conjunto constituido por un solo vector es Li.
b) Si en $\Re^3$, tres vectores son Ld, entonces el producto mixto es igual a cero.
c) Si {u; v; w} es un conjunto Li incluido en $\Re^3$ y z € $\Re^3$ entonces {u; v; w; z} es Ld.
d) Sabiendo que u_1; u_2; u_3 son Li, entonces el conjunto $\{w_1; w_2; w_3\}$ donde $w_1=u_1+u_2$; $w_2=u_1-u_2$; $w_3=u_1-2u_2+u_3$, es Ld.
e) Si u; v; w son vectores de linealmente independientes, entonces el conjunto {u, v, u+v+w} es Li.
f) Si u; v; w, son vectores Li, entonces el conjunto {u+v, u+w, v+w} también es Li.
g) Si {u; v} es un conjunto de vectores de $\Re^3$ linealmente independientes y sea $w \in \Re^3$ / $w \notin$ gen {u; v}, entonces el conjunto {u; v; w} es Ld.
h) Si u; v; w, son vectores Li, entonces el conjunto {u+v, v+w, 2u+v-w} también es Li.
i) n vectores Li en $\Re^n$ no siempre genera $\Re^n$.
j) En $\Re^3$, el conjunto compuesto por el vector nulo y dos vectores que son Li entre sí, constituyen un conjunto Li.
k) En todo conjunto H Ld, algún vector de H puede expresarse como CL de los restantes.

3) Determinar el valor de α, para que los vectores dados sean linealmente dependientes. ¿Cuándo serán una base de $\Re^3$?

a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} ; v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 4 \end{pmatrix}$; **b)** $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} ; v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} ; v_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

BASES

I. EJERCITACIÓN BÁSICA:

1) Determinar en cada caso, si el conjunto H es base del espacio vectorial V:

a) $H=\{(1;\ 0;\ 1);\ (0;\ 1;\ 1)\};\ V=\{(x;\ y;\ z)/x+y-z=0\}$

b) $H=\{(1;\ 0;\ 1);\ (0;\ 1;\ 1);\ (2;\ 3;\ 5)\};\ V=\Re^3$

2) Determinar una base y la dimensión del espacio dado en cada caso:

a) $V=\begin{cases} x-y=0 \\ -2x+2y=0 \end{cases}$ **i)** En $\Re^2$ **ii)** En $\Re^3$

b) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}$, en $\Re^3$

c) lg) x + y – z =0 en $\Re^3$

d) S: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ en $\Re^3$

e) $V=\begin{cases} x-y=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$ en $\Re^2$

f) S: $\begin{cases} x=y=z \\ x+y-2z=0 \end{cases}$ en $\Re^3$

g) S: $\begin{cases} x=y=z \\ x+y+z=0 \end{cases}$ en $\Re^3$

3) Cuando sea posible, determinar una base del espacio x + y – z = 0 que contenga:

a) Al vector nulo **b)** Al vector $u=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **c)** Al vector $v=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

II. EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

1) Determinar una base y la dimensión del espacio dado en cada caso:

a) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}$ en $\Re^4$

b) $gen\ \{(1;\ 2;\ 3);\ (4;\ 5;\ 6)\}$

c) S: $\begin{cases} x-y=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$ en $\Re^3$

2) **a)** ¿De qué espacio vectorial es base $H=\{(1;\ 2;\ 0)\ ;\ (0;\ 3;\ 1)\}$?

b) ¿De qué espacio vectorial es base $H=\{(1;\ 2;\ 0)\ ;\ (0;\ 3;\ 1)\ ;\ (1;\ 5;\ 1)\}$?

3) Determinar una base de $\Re^3$ que contenga los vectores (-1, 3, 4) y (2, 1, 2)

4) Determinar el valor que debe adoptar ***k*** de tal manera que $H = \{(k;\ 0;\ 2);\ (1;\ 2;\ 3);\ (0;\ 1;\ 1)\}$ constituya una base de $\Re^3$.

5) Verdadero o falso (justificar) eliminé los otros porque “se parte” de algo falso

a) Si V= $\{0\}$, entonces dimV= 1,

b) Si n vectores generan $\Re^n$, entonces constituyen una base de $\Re^n$,

c) Si n vectores constituyen una base de $\Re^n$, entonces cualquiera de estos vectores puede expresarse como combinación lineal de los restantes n-1 vectores,

6) ¿Es posible determinar una base y la dimensión? de $H = \{(x;\ y;\ z)\ /\ x = 1\ ;\ y = 2\}$.

7) Determinar una base y dimensión de dos espacios vectoriales que contengan al conjuto H del ejercicio anterior.

8) Determinar α y β tal que los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 - \beta \\ 2\alpha \\ -2 \end{pmatrix}$ constituyan una base del conjunto $H = \{(x;\ y;\ z)\ /\ x - y + z = 0\}$

9) Determinar una base del espacio generado por los vectores dados en cada caso. Interpretar el resultado. Sugerencia: los pivotes de la forma escalonada indican los vectores li

a) (-1, 1, 4) ; (2, 0, 2) (-5, 1, 4) ; (-2, 1, -2)

b) (-1, 1, 4; 0) ; (2, 0, 2; 1) (-5, 1, 4; 2)

10) **a)** Si $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ está expresado según la base canónica de $\Re^3$, hallar el vector de coordenadas $(v)_B$ con B= $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

b) Si $(v)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, hallar el vector de coordenadas de v en la base canónica.

11) Sean los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (expresados en la base estándar), determinar la base B de $\Re^2$ sabiendo que $(v_1)_B = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $(v_2)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

12) Si $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right\}$ y $B=\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ son bases de $\Re^2$

Si $(v)_A = (2; 1)$ hallar v en la base canónica y $(v)_B$

13) Sea $(v)=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ el vector de coordenadas de cualquier vector de $\Re^2$ respecto de la base estándar. Expresar este vector *v* en términos de B = $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ y escribir $(v)_B$.

14) **a)** Verificar que B = $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ es una base de $\Re^3$.

b) Escribir el vector v= $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ dado en la base estándar, como combinación lineal de los vectores de B y determinar el vector de coordenadas $(v)_B$.

15) Demostrar que $Q=\begin{pmatrix}2/3 & 1/3 & 2/3\\ 1/3 & 2/3 & -2/3\\ -2/3 & 2/3 & 1/3\end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal.

16) Determinar, si es posible, dos bases ortonormales para cada uno de los siguientes subespacios y verificar los resultados obtenidos:

a) H={(x, y) : x + y = 0}
b) H= {(x, y, z, w) : x − z =0 y w − y = 0}
c) H= { (x, y, z) : x = y = z }
d) H= {(x, y, z) : x + y = 0}

17) Determinar si los conjuntos dados a continuación constituyen bases ortonormales:

a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$; **b)** $\left\{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\right\}$

18) Demostrar que:
a) Si P y Q son matrices ortogonales de nxn, entonces PQ es una matriz ortogonal.
b) Si P es una matriz ortogonal y simétrica, entonces $P^2 = I$.
c) Si Q es una matriz ortogonal, entonces det (Q) = ± 1.
d) La matriz $\begin{pmatrix}sen(t) & \cos(t)\\ \cos(t) & -sen(t)\end{pmatrix}$ es ortogonal $\forall t$.

19) Proponer matrices 2x2 para verificar las respuestas del ejercicio anterior.

ESPACIOS VECTORIALES de MATRICES: Cáp. 5

Subespacios, conjunto generador, conj.linealmente independientes y bases.

EJERCITACIÓN EXTRA:

1) Demostrar que los siguientes subconjuntos de matrices son subespacios vectoriales con la suma y multiplicación por un escalar usuales:

a) El conjunto de todas las matrices 2x2 de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ siendo $a, b \in R$.

b) Las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{pmatrix}$ siendo $a, b \in R$.

c) Las matrices A de tamaño nxn antisimétricas (es decir: $A^t = -A$)

d) Las matrices A de tamaño nxn tales que tr(A) = 0. (La traza de A = $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$)

2) Explicar por qué los siguientes subconjuntos no son espacios vectoriales:

a) Las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ siendo $a, b \in R$.

b) Las matrices A_{nxn} invertibles.

c) Las matrices A_{nxn} tales que det(A) =0

d) Las matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ siendo a, b números enteros no negativos.

3) ¿Es la matriz $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ combinación lineal de $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$?

4) Demostrar que el siguiente conjunto de matrices es una base para R^{2x2} (matrices de 2x2):

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5) Hallar UNA base y la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales de R^{2x2} y R^{3x3}:

a) H_1={matrices simétricas 2x2}

b) H_2={matrices antisimétricas 2x2}

c) $H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} ; a, b \in R \right\}$.

d) $H_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} ; a, b \in R \right\}$.

Respuestas Ejercitación extra:

2) a) y b) no contienen la matriz cero; c) + no es cerrada; d) la mult.por un escalar no es cerrada.

3) Sí. La matriz dada es combinación lineal de las otras tres con escalares 1, 2 y 1.

4) Como $\dim(R^{2x2}) = 4$, alcanza con mostrar que las 4 matrices son li.

5) a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$; $\dim(H_1) = 3$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$; $\dim(H_2) = 1$. Nota: $R^{2x2} = H_1 + H_2$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$; $\dim(H_3) = 2$

d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$; $\dim(H_4) = 2$

PSEUDOINVERSA Y MÍNIMOS CUADRADOS

1) Encontrar la solución óptima en término de mínimos cuadrados para los siguientes sistemas incompatibles y calcular el error que se comete en cada caso:

a) $\begin{cases} 3x+2y=-1 \\ y=5 \\ 2x=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x=2 \\ 2x+y=0 \\ -x+5y=1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=0 \\ y=1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x-y=-1 \\ x-3y=2 \\ 2x+y=3 \end{cases}$

2) Sabiendo que $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ se llama pseudoinversa de la matriz Amxn, se pide:

a) A si A es 4x7 ¿Cuál es el orden de A^+?

b) Demostrar que si A es invertible, entonces $A^+ = A^{-1}$.

c) Demostrar que $(A A^+)^T = A A^+$

3) a) Demostrar que para cualquier matriz A de tamaño mxn, entonces $A^+ A = I_{nxn}$.

b) Determinar el valor de $A^+ A A^+$ y $A A^+ A$.

4) Se ha medido la posición **y** de un cuerpo en cinco momentos **t** diferentes de tiempo, obteniendo los siguientes datos:

$$\begin{array}{cccccc} t & 0 & 3 & 5 & 8 & 10 (\text{min}) \\ y & 2 & 5 & 6 & 9 & 11\,(km) \end{array}$$

a) Representar gráficamente los datos en un sistema cartesiano de ejes **t** e **y.**

b) Proponer la ecuación general más apropiada para describir la relación entre las variables **t** e **y**.

c) Obtener los parámetros de la ecuación propuesta que mejor ajusten dicha curva a los datos.

5) Encontrar la recta que mejor se ajuste a los puntos dados:

a) (5; -3) ; (2; -4) ; (-3; 6) ; b) (-1; 10) ; (-2; 6) ; (-6; 6) ; (2; -2) ;
c) 2; 5) ; (-1; -3) ; (1; 4) ; (3; 4) ; (-2; -5)

6) a) Representar gráficamente los puntos (1,4) , (-2,5), (3,-1) y (4,1) en un sistema cartesiano de ejes **x** e **y**. **b)**Determinar la recta que da el mejor ajuste para los puntos dados.

7) La fuerza **F** de tracción sobre un resorte y el alargamiento **L** que experimenta éste están ligadas a través de una ley lineal: **L = (1/K).F** con ordenada en el origen cero y donde el inverso de la pendiente (**K**) es una característica propia de cada resorte: llamada constante elástica del mismo.

Mediante un dispositivo se obtuvo una serie de puntos, expresados en la tabla adjunta, que, representados gráficamente, deberían caer sobre una línea recta. Sin embargo, los errores experimentales siempre presentes hacen que no se hallen perfectamente alineados.

Cargas sucesivas F(y_i) gramos	Lecturas sucesivas (x_i) L mm
200	60
400	120
500	150
700	210
900	260
1000	290

Determinar la recta *y= ax+b* que mejor se aproxime a los datos dados.

ESPACIOS Y SUBESPACIOS VECTORIALES

I. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN BÁSICA:

4) a) Es subespacio pues es una recta que pasa por el origen.

4) b) No es subespacio pues es una recta que no pasa por el origen.

4) c) No es subespacio pues no verifica, en algunos casos, la existencia de vector opuesto.

4) d) Es subespacio pues es un plano que pasa por el origen.

4) e) No es subespacio. Ver desarrollo en parte teórica.

5) a) Es subespacio. Es una recta que pasa por el origen. Se trata de la intersección de dos subespacios.

5) b) Es subespacio. Es una recta que pasa por el origen. Se trata de la intersección de dos subespacios.

5) c) No es subespacio. Es una recta que no pasa por el origen.

6) x+y+z= 0 ; $\frac{x}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$; etc.

II. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

3) a) No es subespacio - es un plano que no pasa por el origen.

3) b) Es subespacio - es un plano que pasa por el origen.

3) c) Es subespacio - es una recta que pasa por el origen.

3) d) Es subespacio - es una recta que pasa por el origen.

3) e) No es subespacio pues es un paraboloide. No verifica ninguno de los axiomas.

3) f) Es subespacio - es una recta que pasa por el origen.

3) g) No es subespacio. No verifica ninguno de los axiomas.

4) a) y b) son subespacios, por ser intersecciones de dos subespacios. No ocurre lo mismo en c) ; d) y e).

COMBINACIÓN LINEAL, CONJUNTO GENERADOR Y ESPACIO GENERADO

I. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN BÁSICA:

1) Generan el plano π) $x + y - z = 0$; por ejemplo $H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}; H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

2) Los vectores dados en cada caso, sólo pueden generar un espacio vectorial ;

2) a) π) $x + y - z = 0$; **2) b)** $\Re^3$; **2) c)** r) $x = y = z$;

2) d) r) $x = -y = z$; **2) e)** π) $x + y - 2z = 0$; **2) f)** $\Re^2$

3) a) Verdadero ; **3) b)** Verdadero ; **3) c)** Falso ; **3) d)** Falso ; **3) e)** Falso ; **3) f)** Falso ;

3) g) Verdadero ; **3) h)** F ; **3) i)V** ; **3) j)** F ; **3) k) V ; l) V**

II. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

1) a) $v_3 = t \,.\, (4; 3)$; **1) b)** $v_3 \neq t \,.\, (4; 3) \quad \forall\, t \neq 0$; **1) c)** $v_3 = t.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \forall t \neq 0$

2) a) Falso ; **2) b)** Verdadero ; **2) c)** Falso ; **2) d)** Falso ; **2) e)** Verdadero ;

4) (1; -1; 0) ; **5)** $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; **6) a)** no existe α; **2) b)** $\alpha \neq 1$; **2) c)** $\alpha = 1$.

III. RESPUESTAS A APLICACIONES:

1) 3 de A, 5 de B y 5 de C.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

I. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN BÁSICA:

1) a) Li ; **1) b)** Ld ; **1) c)** Ld

1) d) Li ; **1) e)** Li ; **1) f)** Li

II. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

1) Por ejemplo: H={(1; 0; 1); (0; 1; 0); (1; 1; 1)}; es Ld;
2) a) Falso ; **2) b)** Verdadero ; **2) c)** Falso ; **2) d)** Falso ; **2) e)** Verdadero

2) f) Verdadero ; **2) g)** Falso ; **2) h)** Falso ; **2) i)** Falso ; **2) j)** Falso ; **2) k)**

3 a) $\alpha = -13/2$; **3 b)** $\alpha \in \Re$;

BASES

I. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN BÁSICA:

1) a) H es base de V ; dim V= 2 ; **1) b)** H no es base de V

2) a) i) B**=** {(1; 1)} , dim V= 1 ; **2) a) ii)** B= {(1; 1; 0); (0; 0; 1)} ; dim V= 2 ;
2) b) B**=** {(2; 3; 4)} , dim V= 1 ; **2) c)** B= {(1; 0; 1), (0; 1; 1)} , dim V= 2 ;
2) d) B= {(0; -1; 1)} , dim S= 1 ; **2) e)** No tiene base, dim V= 0;
2) f) ; **2) g)**

3) a) no es posible ; **3) b)** no es posible ;
3) c) B= {(2; 1; 3); (1; 0; 1)} ; dim V= 2

II. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

1) a) B= {(2; 3; 4; 0); (0; 0; 0; 1)} ; dim V= 2 ;
1) b) B= {(1; 2; 3); (4; 5; 6)} ; dim V= 2 ;
1) c) B= {(0; 0; t)} ; dim V= 1 $\forall t \neq 0$;

2) a) π) 2x − y + 3z = 0 **2) b)**

3) Por ejemplo B= {(-1; 3; 4); (2; 1; 2); (1; 4; z)} con $z \neq 6$;

4) $k \neq 2$;

5) a) Falso dim V= 0 ; **5) b)** Verdadero ; **5) c)** Falso

6) No pues H no es SEV ;

7) {(1; 2; 0), (0; 0; 1)} base del plano 2x-y =0 y la base estándar para R^3 ;

8) no existen ; **9)** los 3 primeros son una base ; **10)** los tres dados son base

10.a) $(v)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

11) B= {(1; 1); (1; -1)};

12) v= (3; 1); v_B= (4; 5)

13) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x-y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $(v)_B = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{pmatrix}$

14) a) det ≠0 **b)** $(v)_B$ = (-2; 2; 1)

15) verificar que sus columnas son vectores ortonormales

16) b) {(1/√2; 0; 1/√2; 0), (0; 1/√2; 0; 1/√2)}

17) a) F ; 17**) b)** V.

PSEUDOINVERSA Y MÍNIMOS CUADRADOS

RESPUESTAS A EJERCITACIÓN PROPUESTA:

1) a) x= -23/29 ; y= 45/29 ; E= 4,64 ; c) x= 0 , y= 1/3 ; E≈ 0,27 ;
d) x= 73/62 ; y= 1/31

2) a) 7x4 ; **3)** b) A^+, A ; **4)** b) y = a + bt ; c) a = 2,013 b = 0,882

5) a) y=(-17/14)x+(9/7) b) y= (108/131)x+(466/131) c) y= (90/43)x - (11/43)

6) y = 3,57 – 0,88 x El error de mínimos cuadrados es ≈ 2,58

7) b = -18,4153; a =3,4959 ; No se debe olvidar que se persigue el valor de la constante elástica del muelle: K= a= f / L

Bibliografía consultada:

- Algebra Lineal (S. Grossman)
- Introducción al Algebra Lineal (H. Anton)
- Teoría y Problemas de Algebra Lineal (S. Lipschutz – S. Schaum)