# VALORES Y VECTORES PROPIOS, MATRICES SIMILARES y DIAGONALIZACION

## I. EJERCITACIÓN BÁSICA:

**1)** Determinar, en cada caso, si los pares de matrices son similares. Justificar.

**a)** $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

**b)** $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**c)** $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

**2)** Si $\lambda$ (escalar) es un valor propio de $A_{nxn}$, demostrar que:

**a)** $\lambda$ es un valor propio de $A^t$.

**b)** $k\lambda$ es un valor propio de $kA$, donde $k$ es un real no nulo.

**c)** $\lambda^n$ es un valor propio de $A^n$.

**d)** Para $\lambda \neq 0$, $1/\lambda$ es valor propio de $A^{-1}$.

**3)** Determinar los valores propios (o característicos) de cada matriz, sus multiplicidades algebraicas y geométricas. Decidir si la matriz es diagonalizable. En caso de serlo verificar que la matriz dada es semejante (similar) a la correspondiente matriz diagonal.

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad C=\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ $\qquad D=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

$E=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad F=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad H=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

**4)** Sabiendo que si existe P invertible tal que $P^{-1}A\,P = D$, siendo D es una matriz diagonal, entonces A es una matriz diagonalizable y $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$. Calcular $A^{20}$; $A^{49}$ y $B^6$

$A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

**5)** Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de una transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ respecto a la base canónica de $R^2$.

**a)** Halla la matriz $B$, que representa a $T$ respecto a las bases:

$$B_1 = B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

**b)** ¿La matriz A es diagonalizable? ¿Qué nombre reciben los vectores de $B_1$ y los elementos diagonales de la matriz $B$ hallada? Justifica cada respuesta a partir de las definiciones correspondientes.

**c)** Calcular $A^6$.

---

## II. EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

**1)** Dadas las matrices A, B y C, donde A es similar a B, y B es similar a C. demostrar que A es similar a C.

**2)** Verificar usando la definición de valor y vector propio, que la matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$ tiene al vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ como vector propio correspondiente al valor propio $d$.

**3)** Determinar **a)** los escalares $a_1$ y $a_2$ para que $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ sean autovectores de la matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & a_1 \\ -5 & a_2 \end{bmatrix}$ ; **b)** Los autovalores correspondientes a los autovectores dados.

**4)** Demostrar que los autovectores de una matriz simétrica asociados a autovalores distintos son ortogonales.

**5)** Sea $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, con \;\; b \neq 0$.

**a)** Hallar los valores propios y sus multiplicidades algebraicas y geométricas. ¿Es $A$ diagonalizable? Justificar la respuesta.

**b)** Hallar el polinomio característico de $B = \begin{bmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ y decidir si $B$ es semejante a $A$.

**6)** Sea $T: R^3 \to R^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**a)** Determinar, si es posible:

**i.** Una representación matricial para $T$ que sea diagonal.

**ii.** Una matriz ortogonal ($Q^{-1} = Q^t$) que diagonalice a $A$.

**b)** ¿Qué relación existe entre la matriz diagonal asociada a $T$ y la matriz en la base canónica, $A$? Verificar.

**7)** Sea $T$: $R^2 \to R^2$ la transformación definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -x + y \end{pmatrix}$, determinar:

**a)** La matriz $A_T$ de $T$ respecto a la base canónica y explicar, usando algún teorema, por qué el cero es un autovalor de $T$;

**b)** Los autovalores de $A_T$ y decidir si la matriz de $T$ es diagonalizable. Si lo es, escribir la matriz diagonal $D$ asociada a $T$;

**c)** Los autovectores de $A_T$ y mostrar que son ortogonales;

**d)** Una base ortonormal de $R^2$ formada por autovectores de $T$. ¿Qué ventaja presenta tomar esta base como columnas de $P$ al momento de usar la relación de similaridad $D = P^{-1} A_T P$?

**8)** Sea $H = \{t\vec{k} : t \in R\}$

**a)** Verificar que $H$ es un subespacio de $R^3$ y que $\dim H = 1$.

**b)** Hallar la transformación lineal $T$: $R^3 \to R^3$ que satisface las siguientes condiciones:

**i)** El subespacio $H$ es el núcleo de $T$.

**ii)** El escalar $\lambda = 2$ es un valor propio de $T$ cuyo espacio propio es:

$E_2 = gen\{\vec{i}\ ,\ \vec{i} + \vec{j}\}$

**c)** Describir la imagen de $T$. Hallar una base y el rango de $T$.

**d)** Verificar que $T$ es un operador diagonalizable.

**9)** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix}$, **a)** calcular los valores de $a$, $b$, y $c$ para que $\lambda=1$ sea un autovalor de $A$ que tiene como autovector correspondiente el vector $v=[1; 1; 1]$.

**b)** Para los valores de $a$, $b$ y $c$ obtenidos, calcular los autovalores y espacios propios correspondientes.

**10)** Determinar para que valor o valores de $a$ la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ tiene entre sus valores propios, alguno de multiplicidad algebraica mayor a 1(uno).

**11)** Responder verdadero o falso según corresponda. Justificar.

**a)** Si los vectores columna de una matriz $A_{nxn}$ forman una base de $R^n$ entonces 0 es un valor propio de $A$.

**b)** Sea $I$ la matriz identidad de orden 4x4, la multiplicidad geométrica de su valor propio 1 es 4.

**c)** Si $A_{nxn}$ es diagonalizable ortogonalmente (o sea la matriz P invertible que la diagonaliza es ortogonal) entonces A es simétrica.

**12)** Determinar las condiciones que deben cumplir $a$, $b$, $c$ para que las siguientes matrices no sean diagonalizables: **a)** $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ; **b)** $B=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

**13)** En cada caso determinar el/los valores de $a$, $b$ (según corresponda), los autovectores y espacios característicos, si:

**a)** La matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & b \end{pmatrix}$ admite como autovalores a:

$\lambda_1=1$; $ma_{(1)}=1$ $\lambda_2=-1$; $ma_{(-1)}=2$

**b)** La matriz $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ admite como autovalores a:

$\lambda_1=1$; $ma_{(1)}=2$ $\lambda_2=2$; $ma_{(-1)}=1$

---

## I. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN BÁSICA:

**1)** **a)** Si ; **b)** No ; **c)** Si

**3)** **A)** 2; 2; 3 ; $E_2=gen\{i\}$ ; $E_3 = gen\{(-1;\ 1;\ 1)\}$ ; No diagonalizable

**B)** -2; 7 ; $E_{\,2}=gen\ \{(2\ ;\ -1)\}$ ; $E_7 = gen\{(1;\ 1)\}$ ; Diagonalizable

**C)** -3; -3 ; $E_{-3}$=gen $\{(1;\ 0)\}$ ; No diagonalizable

**D)** –3; -3 ; $E_{-3}= R^2$ ; Diagonalizable (diagonal)

**E)** 0; 1; 3 ; $E_0=gen\{(1;\ 1;\ 1)\}$ ; $E_1=gen\{(-1;\ 0;\ 1)\}$ ; $E_3=gen\{(1;\ -2;\ 1)\}$ ; Diagonaliz.

**F)** 1; 1; 10 ; $E_1= gen\ \{(0;1;-2),(1;0;-2)\}$ ; $E_{10}= gen\ \{(2;\ 2;\ 1)\}$ ; Diagonalizable

**G)** 1; 1; 1 ; $E_1= gen\ \{(1;\ 1;\ 1)\}$ ; No diagonalizable

**H)** 2, 2, 2, 2 ; $E_2= gen\ \{(0;\ 0;\ 0;\ 1)\ ,\ (1;\ 0;\ 0;\ 0)\}$ ; No diagonalizable

**4)** **a)** $A^{20} = I$ ; **b)** $B^6 = \begin{pmatrix} 122 & -243 & 121 \\ -243 & 486 & -243 \\ 121 & -243 & 122 \end{pmatrix}$

**5)** **a)** $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ; **b)** Si. Vectores propios y valores propios. $A\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ = -4$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ ;

**c)** $A^6 = \begin{pmatrix} 3134 & 962 \\ 2405 & 1691 \end{pmatrix}$

## II. RESPUESTAS A EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA:

**1)** Existen P y Q invertibles tal que $A = P^{-1}BP$ y $B = Q^{-1}CQ$. Reemplazando B en la primera igualdad $A = P^{-1}(Q^{-1}CQ)P = (QP)^{-1}C(QP)$. Por lo tanto A y C son similares ya que existe R= QP invertible tal que $A=R^{-1}CR$ (todas son matrices nxn)

**3)** $\lambda_1=-4$ $\lambda_2=3$ $a_1=-2$ $a_2=1$

**4)** Sean $u$ y $v$ los autovectores asociados a los autovalores distintos $\lambda_1$ y $\lambda_2$ de $A_{nxn}$. Entonces $\lambda_1 u.v = \lambda_1 u^t v = (\lambda_1 u)^t v = (Au)^t v = u^t A^t v = u^t (A v) = u^t (\lambda_2 v) = \lambda_2 u.v$. Por lo tanto se tiene que $(\lambda_1 - \lambda_2)\, u.v = 0$ y como por hipótesis $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , resulta que $u.v = 0$ . O sea $u$ **y** $v$ son ortogonales.

**5)** **a)** No, pues $E_a = gen\ \{i, k\}$
**b)** No, pues no tienen el mismo polinomio característico.

**6)** **a)** $D = diag\ (0, 1, 3)$
**c)** Son semejantes, $Q^{-1}.A.Q=D$

**7)** **a)** $A_T$ no es invertible ≡ 0 es valor propio de $A_T$
**b)** 0; 2. Diagonalizable. $D = diag\ (0; 2)$
**c)** (1; 1).( 1; -1) = 0
**d)** $\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1; 1), \frac{\sqrt{2}}{2}(1; -1)\}$. P sería ortogonal, $P^{-1} = P^t$.

**8)** **b) i)** $T(x; y; z) = (x; y; 0)$ **ii)** $T(x; y; z) = (2x; 2y; 0)$
**c)** $Im = gen\{i; j\}$

**9)** $a = -2$; $b = -2$; $c = -3$ ; $\lambda_2 = -1$ ; $E_{(-1)} = gen\{(-1; 1, 0) ; (1; 0, 1)\}$

**10)** Si $a=1 \Rightarrow \lambda=1$ ; Si $a=2 \Rightarrow \lambda=2$

**11)** **a)** F (enunciar correctamente y demostrar); **b)** V(demostrar); **c)** V (demostrar)

**12)** **a)** **a= 2** ; **b)** $a=c \wedge b\neq 0$

**13)** **a)** $a = -2$ ; $b = -3$ ; $E_{(1)}=gen\{[1; 1, 1]\}$ ; $E_{(-1)}= gen\{[-1; 1, 0]; [1; 0, 1]\}$
**b)** $a = 1$ ; $E_{(1)}=gen\{[1; 0, 0]\}$ ; $E_{(2)}= gen\{[0; -1, 1]\}$
Si $\lambda_3 = 1 \Rightarrow a = 1$ ; Si $\lambda_3 = 2 \Rightarrow a = 2$

**Bibliografía Consultada:**

- Algebra Lineal. (S. Grossman)
- Introducción al Algebra Lineal (H. Anton)
- Teoría y Problemas de Algebra Lineal (S. Lipschutz – S. Schaum)