Econometría I
Modelo Lineal de Regresión: Inferencia por MCO

Ramiro de Elejalde

Facultad de Economía y Finanzas
Universidad Alberto Hurtado

Outline

Contraste de una restricción lineal sobre un parámetro

Intervalo de confianza

Una restricción lineal sobre múltiples parámetros

Múltiples restricciones lineales

Restricciones no lineales

Referencias: Cap. 7 y 9 de Hansen, cap. 3.5.2 y 4.2.3 de Wooldridge, y cap. 7 de Stock and Watson.

Estimación MCO: Tamaño de clase y rendimiento académico

Salida de Stata

```
.     reg testscr str  el_pct, robust

Linear regression                                      Number of obs =     420
                                                       F(  2,   417) =  223.82
                                                       Prob > F      =  0.0000
                                                       R-squared     =  0.4264
                                                       Root MSE      =  14.464

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
     testscr |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         str |  -1.101296   .4328472    -2.54   0.011     -1.95213   -.2504616
      el_pct |  -.6497768   .0310318   -20.94   0.000     -.710775   -.5887786
       _cons |   686.0322   8.728224    78.60   0.000     668.8754     703.189
------------------------------------------------------------------------------
```

Contraste de hipótesis e intervalos de confianza

- En esta unidad vamos a estudiar como incorporar la influencia de la aleatoriedad muestral en el análisis de los resultados.

$\Longrightarrow$ Contraste de hipótesis

$\Longrightarrow$ Intervalos de confianza

Contraste de una restricción lineal sobre un parámetro

Contraste de una restricción lineal sobre un parámetro

Hipótesis nula

$$H_0 : \beta_j = \beta_{j,0}.$$

Hipótesis alternativa

$$H_1 : \beta_j \neq \beta_{j,0}.$$

- Regla de decisión: Un estadístico T_N, un valor crítico c_α y una regla de decisión:
    1. No rechazar H_0 si $T_N \leq c_\alpha$,
    2. Rechazar H_0 si $T_N > c_\alpha$.

- Regla de decisión: Un estadístico T_N, un valor crítico c_α y una regla de decisión:
  1. No rechazar H_0 si $T_N \leq c_\alpha$,
  2. Rechazar H_0 si $T_N > c_\alpha$.
- Test estadístico: Estadístico t en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} \right|$$

Error tipo I y tamaño del test

	Decisión en el contraste de hipótesis	
	No rechazar H_0	Rechazar H_0
H_0 es verdadera	Decisión correcta	Error tipo I
H_1 es verdadera	Error tipo II	Decisión correcta

- El tamaño del test es la probabilidad del error tipo I. El tamaño asintótico del test α es dicha probabilidad en el límite:

$$\lim_{N\to\infty} \Pr(\text{Rechazar } H_0|H_0) = \lim_{N\to\infty} \Pr(T_N > c_\alpha|H_0) = \Pr(T > c_\alpha) = \alpha$$

$$\text{donde } T_N \xrightarrow{d} T \text{ bajo } H_0.$$

Error tipo I y tamaño del test

	Decisión en el contraste de hipótesis	
	No rechazar H_0	Rechazar H_0
H_0 es verdadera	Decisión correcta	Error tipo I
H_1 es verdadera	Error tipo II	Decisión correcta

- Clave: Buscar T_N cuya distribución asintótica bajo H_0 sea conocida.
- Si la distribución asintótica de T_N no depende de parámetros desconocidos, el estadístico es asintóticamente pivotal.
- Fijamos α y obtenemos c_α de la distribución asintótica de T_N.

- Test estadístico: Estadístico t en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} \right| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z|,$$

donde $Z \sim \text{Normal}(0,1)$ y $\Pr(|Z| \leq u) = 2\Phi(u) - 1$

- Test estadístico: Estadístico t en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} \right| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z|,$$

donde $Z \sim \text{Normal}(0,1)$ y $\Pr(|Z| \leq u) = 2\Phi(u) - 1$

Demostración:

$$\begin{aligned} t_N &= \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)}, \\ &= \sqrt{N}\frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{\hat{v}_{jj}^{1/2}}, \\ &= \sqrt{N}\frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{v_{jj}^{1/2}}\frac{v_{jj}^{1/2}}{\hat{v}_{jj}^{1/2}} \xrightarrow{d}_{H_0} Z \sim \text{Normal}(0,1), \end{aligned}$$

usando el teorema de Slutsky y la distribución asintótica normal.

- Test estadístico: Estadístico t en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} \right| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z|$$

donde $Z \sim \text{Normal}(0,1)$ y $\Pr(|Z| \leq u) = 2\Phi(u) - 1$.

Demostración:

$$t_N \xrightarrow{d}_{H_0} Z \sim \text{Normal}(0,1),$$

entonces utilizando el TFC

$$|t_N| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z| \quad \text{donde } Z \sim \text{Normal}(0,1).$$

La probabilidad acumulada de $|Z|$ viene dada por

$$\begin{aligned}
\Pr(|Z| \leq u) &= \Pr(-u \leq Z \leq u) \\
&= \Phi(u) - \Phi(-u) = \Phi(u) - (1 - \Phi(u)) \\
&= 2\Phi(u) - 1.
\end{aligned}$$

- Test estadístico: Estadístico t en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} \right| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z|,$$

donde $Z \sim \text{Normal}(0,1)$ y $\Pr(|Z| \leq u) = 2\Phi(u) - 1$.

- Valor crítico $c_\alpha = z_{1-\alpha/2}$ donde α es el tamaño del test y $\Phi(z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.

- Test estadístico: Estadístico t en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} \right| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z|,$$

donde $Z \sim \text{Normal}(0,1)$ y $\Pr(|Z| \leq u) = 2\Phi(u) - 1$.

- Valor crítico $c_\alpha = z_{1-\alpha/2}$ donde α es el tamaño del test y $\Phi(z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.

 Demostración:

$$\lim_{N\to\infty} \Pr(\text{Rechazar } H_0|H_0) = \lim_{N\to\infty} \Pr(|t_N| > c_\alpha|H_0) = \Pr(|Z| > c_\alpha) = \alpha.$$

 Pero

$$\begin{aligned} \Pr(|Z| > c_\alpha) &= 1 - \Pr(|Z| \leq c_\alpha) \\ &= 1 - (2\Phi(c_\alpha) - 1) = 2(1 - \Phi(c_\alpha)) = \alpha \\ &\iff \Phi(c_\alpha) = 1 - \alpha/2 \\ &\iff c_\alpha = z_{1-\alpha/2} \end{aligned}$$

- Test estadístico: Estadístico t en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} \right| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z|,$$

  donde $Z \sim \text{Normal}(0,1)$ y $\Pr(|Z| \leq u) = 2\Phi(u) - 1$.
- Valor crítico $c_\alpha = z_{1-\alpha/2}$ donde α es el tamaño del test.
  Si $\alpha = 0.05$, entonces $c_\alpha = z_{0.975} = 1.96$.
- Regla de decisión: Si $|t_N| > z_{1-\alpha/2}$, rechazamos H_0.
  Cuando rechazamos la hipótesis nula $H_0 : \beta_j = 0$, solemos decir que β_j es estadísticamente significativo.

Ejemplo: Tamaño de clase y rendimiento académico

- Modelo

$$testscr_i = \beta_0 + \beta_1 \, str_i + \beta_2 el\_pct_i + u_i,$$

- Hipótesis nula: El tamaño de clase no tiene efecto sobre el rendimiento académico.
  Formalmente:

$$H_0 : \beta_1 = 0.$$

- Hipótesis alternativa: El tamaño de clase tiene efecto sobre el rendimiento académico.
  Formalmente:

$$H_1 : \beta_1 \neq 0.$$

Tamaño de clase y rendimiento académico

Salida de Stata

```
.     reg testscr str  el_pct, robust

Linear regression                                      Number of obs =     420
                                                       F(  2,   417) =  223.82
                                                       Prob > F      =  0.0000
                                                       R-squared     =  0.4264
                                                       Root MSE      =  14.464

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
     testscr |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         str |  -1.101296   .4328472    -2.54   0.011     -1.95213   -.2504616
      el_pct |  -.6497768   .0310318   -20.94   0.000     -.710775   -.5887786
       _cons |   686.0322   8.728224    78.60   0.000     668.8754     703.189
------------------------------------------------------------------------------
```

- Significancia estadística y significancia económica.

p-valor

El p-valor se define como $p_N = \Pr(T > T_N)$ donde $T_N \xrightarrow{d}_{H_0} T$.

- Intuición: La regla de decisión es rechazar H_0 si $T_N > c_\alpha$ donde $\Pr(T > c_\alpha) = \alpha$. Una regla de decisión equivalente es calcular el p-valor $\Pr(T > T_N) = p_N$ y rechazar si $p_N < \alpha$.

p-valor

El p-valor se define como $p_N = \Pr(T > T_N)$ donde $T_N \xrightarrow{d}_{H_0} T$.

- Intuición: La regla de decisión es rechazar H_0 si $T_N > c_\alpha$ donde $\Pr(T > c_\alpha) = \alpha$. Una regla de decisión equivalente es calcular el p-valor $\Pr(T > T_N) = p_N$ y rechazar si $p_N < \alpha$.
- Dado que $\Pr(T > T_N)$ es decreciente en T_N, el p-valor es una transformación monótona de T_N y por lo tanto es un estadístico equivalente.
- El p-valor es el nivel de significatividad marginal: el mayor valor de α tal que se rechaza H_0.
- Para $H_0 : \beta_j = \beta_{j,0}$ y $H_1 : \beta_j \neq \beta_{j,0}$ con el estadístico t tenemos:

$$p_N = \Pr(T > T_N) = \Pr(|Z| > |t_N|) = 2(1 - \Phi(|t_N|)).$$

Tamaño de clase y rendimiento académico

Salida de Stata

```
.     reg testscr str  el_pct, robust

Linear regression                                      Number of obs =     420
                                                       F(  2,   417) =  223.82
                                                       Prob > F      =  0.0000
                                                       R-squared     =  0.4264
                                                       Root MSE      =  14.464

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
     testscr |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         str |  -1.101296   .4328472    -2.54   0.011     -1.95213   -.2504616
      el_pct |  -.6497768   .0310318   -20.94   0.000     -.710775   -.5887786
       _cons |   686.0322   8.728224    78.60   0.000     668.8754     703.189
------------------------------------------------------------------------------
```

Error tipo II y poder del test

	Decisión en el contraste de hipótesis	
	No rechazar H_0	Rechazar H_0
H_0 es verdadera	Decisión correcta	Error tipo I
H_1 es verdadera	Error tipo II	Decisión correcta

- El poder del test $\pi_N(\beta_j)$ es uno menos la probabilidad del error tipo II:

$$\Pr(\text{Rechazar } H_0 | H_1) = \Pr(T_N > c_\alpha | H_1) = \pi_N(\beta_j).$$

Error tipo II y poder del test

	Decisión en el contraste de hipótesis	
	No rechazar H_0	Rechazar H_0
H_0 es verdadera	Decisión correcta	Error tipo I
H_1 es verdadera	Error tipo II	Decisión correcta

- El poder del test $\pi_N(\beta_j)$ es uno menos la probabilidad del error tipo II:

$$\Pr(\text{Rechazar } H_0 | H_1) = \Pr(T_N > c_\alpha | H_1) = \pi_N(\beta_j).$$

- En general, el poder del test aumenta a medida que β_j se aleja de $\beta_{j,0}$ y a medida que el tamaño de la muestra aumenta.
- El objetivo en la construcción del test es obtener un poder alto sujeto al tamaño del test.
- Si el poder es igual al tamaño del test, el test no provee información sobre la hipótesis de interés.

Consistencia

- Consistencia frente a la alternativa fija H_1: Si rechazamos con probabilidad uno bajo H_1 cuando $N \to \infty$,

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \pi_N(\beta_j) &= \lim_{N\to\infty} \Pr(\text{Rechazar } H_0 | H_1) \\
&= \lim_{N\to\infty} \Pr(T_N > c_\alpha | H_1) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Consistencia

- Test estadístico: Estadístico t en valor absoluto

$$|t_N| = \left|\frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)}\right| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z|,$$

donde $Z \sim \text{Normal}(0,1)$ y $\Pr(|Z| \leq u) = 2\Phi(u) - 1$.

- El contraste con el test estadístico t es consistente.

Consistencia

- Test estadístico: Estadístico t en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} \right| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z|,$$

donde $Z \sim \text{Normal}(0,1)$ y $\Pr(|Z| \leq u) = 2\Phi(u) - 1$.

- El contraste con el test estadístico t es consistente.

Demostración

$$t_N = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{s.e.(\hat{\beta}_j)} + \sqrt{N}\frac{\beta_j - \beta_{j,0}}{\hat{v}_{jj}^{1/2}}$$

$$\xrightarrow{d}_{H_1} \begin{cases} Z + \infty & \text{si } \beta_j > \beta_{j,0}, \\ Z - \infty & \text{si } \beta_j < \beta_{j,0}. \end{cases} \quad \text{donde } Z \sim \text{Normal}(0,1).$$

$$\lim_{N\to\infty} \Pr(|t_N| > z_{1-\alpha/2}|H_1) = \Pr(|Z \pm \infty| > z_{1-\alpha/2}|H_1) = 1$$

Poder asintótico local

- Consistencia es un requisito mínimo para una test, pero no es una buena aproximación al poder del test.
- Una alternativa local es una hipótesis alternativa $H_{1,N}$ que converge a H_0 a cierta velocidad. En este caso, $\beta_{j,N} = \beta_{j,0} + N^{-1/2}h$ donde h es un parámetro.
- El poder asintótico local de un test es el límite cuando $N \to \infty$ del poder del test bajo la alternativa local:

$$\lim_{N\to\infty} \Pr(\text{Rechazar } H_0 | H_{1,N}) = \lim_{N\to\infty} \Pr(T_N > c_\alpha | H_{1,N}).$$

- Poder asintótico local del test es decreciente en v_{jj}

  Dada la alternativa local $H_{1,N} : \beta_{j,N} = \beta_{j,0} + N^{-1/2}h$, el poder asintótico es $\lim_{N\to\infty} \Pr(|t_N| > z_{1-\alpha/2}|H_{1,N}) = \Phi(\delta - c_\alpha) + \Phi(-\delta - c_\alpha)$ donde $\delta = h/v_{jj}^{1/2}$. El poder local es decreciente en v_{jj}(dado h) .

- Poder asintótico local del test es decreciente en v_{jj}

  Dada la alternativa local $H_{1,N} : \beta_{j,N} = \beta_{j,0} + N^{-1/2}h$, el poder asintótico es $\lim_{N\to\infty} \Pr(|t_N| > z_{1-\alpha/2}|H_{1,N}) = \Phi(\delta - c_\alpha) + \Phi(-\delta - c_\alpha)$ donde $\delta = h/v_{jj}^{1/2}$. El poder local es decreciente en v_{jj}(dado h) .

  Demostración

$$
\begin{aligned}
t_N &= \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,N}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} + \sqrt{N}\frac{\beta_{j,N} - \beta_{j,0}}{\hat{v}_{jj}^{1/2}} \\
&= \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,N}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} + \frac{h}{\hat{v}_{jj}^{1/2}} \xrightarrow{d}_{H_{1,N}} Z + \delta \quad \text{donde } Z \sim \text{Normal}(0,1),
\end{aligned}
$$

  utilizando $\beta_{j,N} = \beta_{j,0} + h\,N^{-1/2}$.

- Poder asintótico local del test es decreciente en v_{jj}

  Dada la alternativa local $H_{1,N} : \beta_j = \beta_{j,0} + N^{-1/2}h$, el poder asintótico es $\lim_{N\to\infty} \Pr(|t_N| > z_{1-\alpha/2}|H_{1,N}) = \Phi(\delta - c_\alpha) + \Phi(-\delta - c_\alpha)$ donde $\delta = h/v_{jj}^{1/2}$. El poder local es creciente en δ.

  Demostración

$$t_N \xrightarrow{d}_{H_{1,N}} Z + \delta$$

  donde $Z \sim \text{Normal}(0,1)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \Pr(|t_N| > z_{1-\alpha/2}|H_{1,N}) &= \Pr(|Z+\delta| > c_\alpha) \\
&= 1 - \Pr(|Z+\delta| < c_\alpha) \\
&= 1 - \Pr(-c_\alpha < Z + \delta < c_\alpha) \\
&= 1 - \Pr(-c_\alpha - \delta < Z < c_\alpha - \delta) \\
&= 1 - [\Phi(c_\alpha - \delta) - \Phi(-c_\alpha - \delta)] \\
&= 1 - \Phi(c_\alpha - \delta) + \Phi(-c_\alpha - \delta) \\
&= \Phi(-c_\alpha + \delta) + \Phi(-c_\alpha - \delta).
\end{aligned}$$

Poder asintótico local es decreciente en v_{jj}

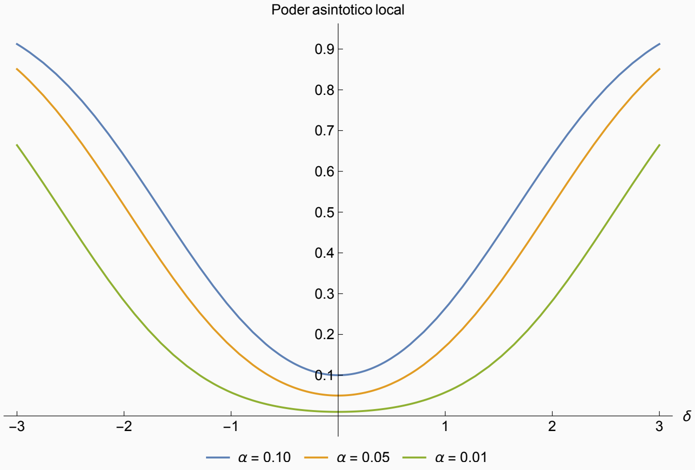

Figure 1: Poder asintótico local t-estadístico.

Hipótesis alternativa de una cola

- Hipótesis nula

$$H_0 : \beta_j = \beta_{j,0}.$$

- Hipótesis alternativa

$$H_1 : \beta_j > \beta_{j,0}.$$

- Test estadístico: Estadístico t

$$t_N = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} \xrightarrow{d}_{H_0} Z \quad \text{donde} \quad Z \sim \text{Normal}(0,1).$$

- Valor crítico $c_\alpha = z_{1-\alpha}$:

$$\lim_{N\to\infty} \Pr(\text{Rechazar } H_0|H_0) = \lim_{N\to\infty} \Pr(t_N > c_\alpha|H_0) = \Pr(Z > c_\alpha) = \alpha \iff c_\alpha = z_{1-\alpha} \quad .$$

  Si $\alpha = 0.05$, entonces $c_\alpha = z_{0.95} = 1.645$.

- Regla de decisión: Si $t_N > c_\alpha$, rechazamos H_0.

Hipótesis alternativa de una cola

- Hipótesis nula

$$H_0 : \beta_j = \beta_{j,0}.$$

- Hipótesis alternativa

$$H_1 : \beta_j < \beta_{j,0}.$$

- Test estadístico: Estadístico t

$$t_N = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} \xrightarrow{d}_{H_0} Z \quad \text{donde} \quad Z \sim \text{Normal}(0,1).$$

- Valor crítico $c_\alpha = z_{1-\alpha}$:

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \Pr(\text{Rechazar } H_0|H_0) &= \lim_{N\to\infty} \Pr(-t_N > c_\alpha|H_0) \\ &= \lim_{N\to\infty} \Pr(t_N \leq -c_\alpha|H_0) = \alpha \\ &\iff \Pr(Z \leq -c_\alpha) = \alpha \iff c_\alpha = z_{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Hipótesis alternativa de una cola

- Hipótesis nula

$$H_0 : \beta_j = \beta_{j,0}.$$

- Hipótesis alternativa

$$H_1 : \beta_j < \beta_{j,0}.$$

- Test estadístico: Estadístico t

$$t_N = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{s.e.(\hat{\beta}_j)} \xrightarrow{d}_{H_0} Z \quad \text{donde} \quad Z \sim \text{Normal}(0,1).$$

- Valor crítico $c_\alpha = z_{1-\alpha}$. Si $\alpha = 0.05$, entonces $c_\alpha = z_{0.95} = 1.645$.
- Regla de decisión: Si $-t_N > c_\alpha$ ó $t_N < -c_\alpha$, rechazamos H_0.

p-valor

- Para $H_0 : \beta_j = \beta_{j,0}$ y $H_1 : \beta_j > \beta_{j,0}$, tenemos:

$$p_N = \Pr(T > T_N) = \Pr(Z > t_N) = 1 - \Phi(t_N).$$

- Para $H_0 : \beta_j = \beta_{j,0}$ y $H_1 : \beta_j < \beta_{j,0}$, tenemos:

$$p_N = \Pr(T > T_N) = \Pr(-Z > -t_N) = \Pr(Z < t_N) = \Phi(t_N)$$

Intervalo de confianza

Intervalo de confianza

- $\hat{\beta}_j$ es una estimación puntual de β_j.
- Un concepto más amplio, es un intervalo de confianza $\hat{C}_N = [L_N, U_N]$ con el objetivo que $(1-\alpha)\%$ de la veces (nivel de cobertura o nivel de confianza) dicho intervalo contenga a β_j: $\lim_{N\to\infty} \Pr(\beta_j \in \hat{C}_N) = 1-\alpha$
- Para un nivel de confianza de $1-\alpha$:

$$\hat{C}_N = [\hat{\beta}_j - c_\alpha\, s.e.(\hat{\beta}_j), \hat{\beta}_j + c_\alpha\, s.e.(\hat{\beta}_j)]$$

Intervalo de confianza

- Para un nivel de confianza de $1-\alpha$:

$$\lim_{N\to\infty} \Pr\left(-c_\alpha < \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{s.e.(\hat{\beta}_j)} < c_\alpha\right) = \Pr\left(-c_\alpha < Z < c_\alpha\right) = 1-\alpha$$

donde $Z \sim \text{Normal}(0,1)$ y $c_\alpha = z_{1-\alpha/2}$. Entonces,

$$\lim_{N\to\infty} \Pr\left(-c_\alpha < \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{s.e.(\hat{\beta}_j)} < c_\alpha\right) =$$
$$\lim_{N\to\infty} \Pr\left(\hat{\beta}_j - c_\alpha\, s.e.(\hat{\beta}_j) < \beta_j < \hat{\beta}_j + c_\alpha\, s.e.(\hat{\beta}_j)\right) = 1-\alpha.$$

Por lo tanto $\hat{C}_N = [\hat{\beta}_j - c_\alpha\, s.e.(\hat{\beta}_j), \hat{\beta}_j + c_\alpha\, s.e.(\hat{\beta}_j)]$

Estimación MCO: Tamaño de clase y rendimiento académico

Salida de Stata

```
.     reg testscr str  el_pct, robust

Linear regression                                      Number of obs =     420
                                                       F(  2,   417) =  223.82
                                                       Prob > F      =  0.0000
                                                       R-squared     =  0.4264
                                                       Root MSE      =  14.464

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
     testscr |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         str |  -1.101296   .4328472    -2.54   0.011     -1.95213   -.2504616
      el_pct |  -.6497768   .0310318   -20.94   0.000     -.710775   -.5887786
       _cons |   686.0322   8.728224    78.60   0.000     668.8754     703.189
------------------------------------------------------------------------------
```

[-1.10 - 1.96 $\times$ .433, -1.10 + 1.96 $\times$ .433] = [-1.950, -.253]

Stata utilizar los valores críticos de la t-student

Una restricción lineal sobre múltiples parámetros

Una restricción lineal sobre múltiples parámetros

- Hipótesis nula

$$H_0 : r'\beta = \theta_0,$$

donde r es un vector de $K \times 1$ y θ_0 es un escalar.

- Hipótesis alternativa

$$H_1 : r'\beta \neq \theta_0.$$

Una restricción lineal sobre múltiples parámetros

- Hipótesis nula

$$H_0 : r'\beta = \theta_0,$$

donde r es un vector de $K \times 1$ y θ_0 es un escalar.

- Hipótesis alternativa

$$H_1 : r'\beta \neq \theta_0.$$

- Regla de decisión: Un estadístico T_N, un valor crítico c_α y una regla de decisión:
  1. No rechazar H_0 si $T_N \leq c_\alpha$,
  2. Rechazar H_0 si $T_N > c_\alpha$.

Una restricción lineal sobre múltiples parámetros

- Test estadístico: Estadístico t en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \sqrt{N} \frac{r'\hat{\beta} - \theta_0}{\sqrt{r'\hat{V}r}} \right| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z| \quad \text{donde} \quad Z \sim \text{Normal}(0, 1).$$

Una restricción lineal sobre múltiples parámetros

- Test estadístico: Estadístico t en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \sqrt{N} \frac{r'\hat{\beta} - \theta_0}{\sqrt{r'\hat{V}r}} \right| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z| \quad \text{donde} \quad Z \sim \text{Normal}(0, 1).$$

Demostración: Utilizando la distribución asintótica normal:

$$\sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, V).$$

Utilizando el método delta para $g(x) = r'x$,

$$\sqrt{N}(r'\hat{\beta} - r'\beta) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, r'Vr),$$

$$\implies \sqrt{N}(r'\hat{\beta} - \theta_0) \xrightarrow{d}_{H_0} \text{Normal}(0, r'Vr).$$

Utilizando el teorema de Slutsky,

$$t_N = \frac{\sqrt{N}(r'\hat{\beta} - \theta_0)}{\sqrt{r'\hat{V}r}} \xrightarrow{d}_{H_0} Z \sim \text{Normal}(0, 1).$$

Una restricción lineal sobre múltiples parámetros

- Test estadístico: Estadístico t en valor absoluto

$$|t_N| = \left| \sqrt{N} \frac{r'\hat{\beta} - \theta_0}{\sqrt{r'\hat{V}r}} \right| \xrightarrow{d}_{H_0} |Z| \quad \text{donde} \quad Z \sim \text{Normal}(0,1).$$

- Valor crítico $c_\alpha = z_{1-\alpha/2}$.
- Regla de decisión: Si $|t_N| > z_{1-\alpha/2}$, rechazamos H_0.

Retornos de la educación (NLSY) (Blackburn and Neumark (QJE, 1992))

- ¿Cuál es el efecto de un año adicional de educación sobre los salarios?
- Datos: Young Men's Cohort of the National Longitudinal Survey (NLSY). 5,225 individuos fueron encuestados por primera vez en 1966 a la edad de 14-24 años y luego en intervalos de uno o dos años. La muestra utilizada incluye solamente hombres que no son de raza negra, entrevistados en 1980 y que respondieron la pregunta sobre ingreso. Tamaño de la muestra $N = 935$.

Retornos de la educación (NLSY) (Blackburn and Neumark (QJE, 1992))

- ¿Cuál es el efecto de un año adicional de educación sobre los salarios?
- Variables:
    - Log del salario en 1980 (*lwage*).
    - Años de educación (*educ*).
    - IQ test score realizado en 1968 (*IQ*).
    - Años de experiencia laboral (*exper*).
    - Años de tenure (trabajando en el mismo lugar) (*tenure*).
    - Dummies de está casado (*married*), vive en el sur de USA (*south*) y vive en un área urbana (*urban*).

Modelo poblacional

$$\log wage_i = \beta_0 + \beta_1\, educ_i + \beta_2 exper_i + \beta_3 tenure_i + \beta_4 IQ_i + x_i'\beta + u_i,$$

donde x_i incluye regresores adicionales.

Estimación MCO: Retornos de la educación (NLSY)

Salida de Stata

```
Linear regression                                      Number of obs =     935
                                                       F(  7,   927) =   52.82
                                                       Prob > F      =  0.0000
                                                       R-squared     =  0.2524
                                                       Root MSE      =  .36552

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
       lwage |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
        educ |   .0542004   .0072877     7.44   0.000     .0398982    .0685027
          IQ |   .0047061   .0009314     5.05   0.000     .0028783     .006534
       exper |   .0141831   .0032564     4.36   0.000     .0077923    .0205739
      tenure |   .0118061   .0025521     4.63   0.000     .0067976    .0168146
     married |   .2082196   .0395385     5.27   0.000     .1306243    .2858149
       south |  -.0974561   .0273761    -3.56   0.000    -.1511823   -.0437299
       urban |   .1714902   .0266955     6.42   0.000     .1190995    .2238809
       _cons |   5.047173   .1158771    43.56   0.000     4.819761    5.274585
------------------------------------------------------------------------------
```

Retornos de la educación (NLSY)

- Modelo poblacional

$$\log wage_i = \beta_0 + \beta_1\, educ_i + \beta_2 exper_i + \beta_3 tenure_i + \beta_4 IQ_i + x_i'\beta + u_i,$$

- Hipótesis nula: Un año adicional de experiencia y un año adicional de tenure tienen el mismo efecto sobre el salario.
  Formalmente:

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 \text{ ó } \beta_2 - \beta_3 = 0.$$

- Hipótesis alternativa: Un año adicional de experiencia y un año adicional de tenure tienen efectos distintos sobre el salario.
  Formalmente:

$$H_1 : \beta_2 \neq \beta_3 \text{ ó } \beta_2 - \beta_3 \neq 0.$$

Estimación MCO: Retornos de la educación (NLSY)

Salida de Stata

```
.       matrix list e(V)

symmetric e(V)[8,8]
               educ          IQ       exper      tenure     married       south       urban       _cons
   educ   .00005311
     IQ  -3.605e-06   8.674e-07
  exper   .00001065  -3.073e-07    .0000106
 tenure  -1.898e-06   4.350e-08  -2.529e-06   6.513e-06
married   1.046e-06  -1.873e-06  -.00001243  -9.007e-06   .00156329
  south  -.00001055   5.755e-06   3.735e-06   7.042e-06   9.887e-06   .00074945
  urban  -.00003273   1.646e-06  -9.453e-06   5.571e-06   .00004269   .00011974   .00071265
  _cons  -.00043456   -.0000368  -.00020062  -2.857e-06  -.00103976  -.00084779  -.00023681    .0134275
```

Retornos de la educación (NLSY)

- Test estadístico

$$
\begin{aligned}
t_N &= \sqrt{N}\frac{\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3}{\sqrt{\hat{V}_{22} + \hat{V}_{33} - 2\hat{V}_{23}}}, \\
&= \frac{\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3}{\sqrt{\widehat{AVar}(\hat{\beta}_2) + \widehat{AVar}(\hat{\beta}_3) - 2\widehat{AVar}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)}}, \\
&= \frac{.0142 - .0118}{[.0000106 + 6.513 \times 10^{-6} - 2(-2.529 \times 10^{-6})]^{\frac{1}{2}}}, \\
&= 0.505.
\end{aligned}
$$

- $|t_N| < 1.96$: No rechazamos H_0.
- pvalor$=$.614

Estimación MCO: Retornos de la educación (NLSY)

Salida de Stata

```
.        test exper-tenure = 0

 ( 1)  exper - tenure = 0

       F(  1,   927) =    0.25
            Prob > F =    0.6138
```

Múltiples restricciones lineales

Múltiples restricciones lineales

- Hipótesis nula

$$H_0 : R'\beta = \theta_0,$$

donde R es una matriz de $K \times q$ con $\text{rango}(R) = q$ y θ_0 es un vector de $q \times 1$.

- Hipótesis alternativa

$$H_1 : R'\beta \neq \theta_0.$$

Múltiples restricciones lineales

- Hipótesis nula

$$H_0 : R'\beta = \theta_0,$$

donde R es una matriz de $K \times q$ con $\text{rango}(R) = q$ y θ_0 es un vector de $q \times 1$.

- Hipótesis alternativa

$$H_1 : R'\beta \neq \theta_0.$$

- Regla de decisión: Un estadístico T_N, un valor crítico c_α y una regla de decisión:
    1. No rechazar H_0 si $T_N \leq c_\alpha$,
    2. Rechazar H_0 si $T_N > c_\alpha$.

- Test estadístico: Estadístico de Wald

$$W_N = N(R'\hat{\beta} - \theta_0)'(R'\hat{V}R)^{-1}(R'\hat{\beta} - \theta_0) \xrightarrow{d}_{H_0} \chi^2_q.$$

- Demostración: Utilizando la distribución asintótica normal y el método delta para $g(x) = R'x$:

$$\sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, V),$$
$$\implies \sqrt{N}(R'\hat{\beta} - R'\beta) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, R'VR),$$
$$\implies \sqrt{N}(R'\hat{\beta} - \theta_0) \xrightarrow{d}_{H_0} \text{Normal}(0, R'VR).$$

Utilizando el teorema de Slutsky,

$$(R'\hat{V}R)^{-1/2}\sqrt{N}(R'\hat{\beta} - R'\beta) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, I_q).$$

Utilizando el TFC y que $\sum_{k=1}^{q} z_k^2 \sim \chi_q^2$ donde $z_k \sim \text{Normal}(0, 1)$ independientes,

$$W_N = N(R'\hat{\beta} - \theta_0)'(R'\hat{V}R)^{-1}(R'\hat{\beta} - \theta_0) \xrightarrow{d}_{H_0} \chi_q^2.$$

- Test estadístico: Estadístico de Wald

$$W_N = N(R'\hat{\beta} - \theta_0)'(R'\hat{V}R)^{-1}(R'\hat{\beta} - \theta_0) \xrightarrow{d}_{H_0} \chi^2_q.$$

- Valor crítico c_α: $\Pr(\chi^2_q > c_\alpha) = \alpha$ ó $\Pr(\chi^2_q \leq c_\alpha) = 1 - \alpha$.
- Regla de decisión: Si $W_N > c_\alpha$, rechazamos H_0.
- p-valor: $\Pr(\chi^2_q > W_N) = 1 - G(W_N)$ donde $G(.)$ es la función de distribución de una χ^2_q.

- Test estadístico: Estadístico de Wald

$$W_N = N(R'\hat{\beta} - \theta_0)'(R'\hat{V}R)^{-1}(R'\hat{\beta} - \theta_0) \xrightarrow{d}_{H_0} \chi^2_q.$$

- El contraste con el test estadístico de Wald es consistente.

- Test estadístico: Estadístico de Wald

$$W_N = N(R'\hat{\beta} - \theta_0)'(R'\hat{V}R)^{-1}(R'\hat{\beta} - \theta_0) \xrightarrow{d}_{H_0} \chi^2_q.$$

- El contraste con el test estadístico de Wald es consistente.

  Demostración

$$\begin{aligned}
W_N &= N(R'\hat{\beta} - \theta_0)'(R'\hat{V}R)^{-1}(R'\hat{\beta} - \theta_0), \\
&= N(R'\hat{\beta} - R'\beta)'(R'\hat{V}R)^{-1}(R'\hat{\beta} - R'\beta) \\
&+ N(R'\beta - \theta_0)'(R'\hat{V}R)^{-1}(R'\beta - \theta_0) + \\
&+ 2N^{1/2}(R'\beta - \theta_0)'(R'\hat{V}R)^{-1/2}N^{1/2}(R'\hat{V}R)^{-1/2}(R'\hat{\beta} - R'\beta), \\
&\xrightarrow{d}_{H_1} \chi^2_q + \infty.
\end{aligned}$$

  El segundo término domina ($N \times$ positivo) al tercer termino ($N^{1/2} \times$ positivo ó negativo $\times N(0, I)$)

Retornos de la educación (NLSY)

- Modelo poblacional

$$\log wage_i = \beta_0 + \beta_1\, educ_i + \beta_2 exper_i + \beta_3 tenure_i + \beta_4 IQ_i + x_i'\beta + u_i,$$

- Hipótesis nula: Ni la educación ni IQ tienen efecto sobre el salario.

  Formalmente:

$$H_0 : \beta_1 = 0 \text{ y } \beta_4 = 0.$$

- Hipótesis alternativa: Educación ó IQ tienen efecto sobre el salario (al menos uno de los dos).

  Formalmente:

$$H_1 : \beta_1 \neq 0 \text{ ó } \beta_4 \neq 0.$$

Estimación MCO: Retornos de la educación (NLSY)

Salida de Stata

```
Linear regression                               Number of obs =     935
                                                F(  7,   927) =   52.82
                                                Prob > F      =  0.0000
                                                R-squared     =  0.2524
                                                Root MSE      =  .36552

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
       lwage |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
        educ |   .0542004   .0072877     7.44   0.000     .0398982    .0685027
          IQ |   .0047061   .0009314     5.05   0.000     .0028783     .006534
       exper |   .0141831   .0032564     4.36   0.000     .0077923    .0205739
      tenure |   .0118061   .0025521     4.63   0.000     .0067976    .0168146
     married |   .2082196   .0395385     5.27   0.000     .1306243    .2858149
       south |  -.0974561   .0273761    -3.56   0.000    -.1511823   -.0437299
       urban |   .1714902   .0266955     6.42   0.000     .1190995    .2238809
       _cons |   5.047173   .1158771    43.56   0.000     4.819761    5.274585
------------------------------------------------------------------------------
```

Estimación MCO: Retornos de la educación (NLSY)

$$\frac{R'\hat{V}R}{N} = \begin{pmatrix} \widehat{\text{AVar}}(\hat{\beta}_{educ}) & \widehat{\text{AVar}}(\hat{\beta}_{educ}, \hat{\beta}_{IQ}) \\ \widehat{\text{AVar}}(\hat{\beta}_{educ}, \hat{\beta}_{IQ}) & \widehat{\text{AVar}}(\hat{\beta}_{IQ}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} .00005311 & -3.605 \times 10^{-6} \\ -3.605 \times 10^{-6} & 8.674 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$\left[\frac{R'\hat{V}R}{N}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 26228 & 109005 \\ 109005 & 1605875 \end{pmatrix}$$

$$W_N = (.054\ .0047) \begin{pmatrix} 26228 & 109005 \\ 109005 & 1605875 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} .054 \\ .0047 \end{pmatrix} = 168.22$$

Estimación MCO: Retornos de la educación (NLSY)

Salida de Stata

```
    .      test educ IQ

 ( 1)  educ = 0
 ( 2)  IQ = 0

       F(  2,   927) =   84.11
            Prob > F =    0.0000
```

Resultados reportados por Stata

- Límite de la distribución t y la distribución F: Se puede demostrar que

$$t_{N-K} \xrightarrow{d} Z \sim \mathrm{Normal}(0,1),$$
$$F_{q,N-K} \xrightarrow{d} \chi^2_q/q \implies q\,F_{q,N-K} \xrightarrow{d} \chi^2_q,$$

donde t_{N-K} es una variable aleatoria con distribución t de Student con $N-K$ grados de libertad; $F_{q,N-K}$ es una variable aleatoria con distribución F de Fischer-Snedecor con q grados de libertad en el numerador y $N-K$ grados de libertad en el denominador.

Resultados reportados por Stata

- Stata reporta en la salida de reg el p-valor de una t de Student para el estadístico t; y reporta en la salida de test un estadístico $F_N = W_N/q$ con el p-valor de una F de Fischer-Snedecor. Estos ajustes son irrelevantes en muestras grandes.

Relación entre el estadístico F y el estadístico de Wald

- Estadístico F:

$$F_N = \frac{(SSR_N^r - SSR_N^u)/q}{SSR_N^u/N}$$

donde SSR_N^u es la suma de los residuos al cuadrado del modelo no restringido y SSR_N^r es la suma de los residuos al cuadrado del modelo restringido.

- Únicamente bajo homoscedastidad se cumple que

$$F_N = W_N/q.$$

Test de significatividad global

- Hipótesis nula: El modelo no tiene poder explicativo.

$$H_0 : \beta_1 = ... = \beta_K = 0,$$

  Hipótesis alternativa

$$H_1 : \text{ Al menos un coeficiente es distinto de cero.}$$

  Test de Wald con $R = I_K$ y θ_0 un vector de ceros de $K \times 1$.

- Es un test irrelevante con los tamaños de muestra actuales.

Estimación MCO: Retornos de la educación (NLSY)

Salida de Stata

```
Linear regression                                      Number of obs =     935
                                                       F(  7,   927) =   52.82
                                                       Prob > F      =  0.0000
                                                       R-squared     =  0.2524
                                                       Root MSE      =  .36552

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
       lwage |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
        educ |   .0542004   .0072877     7.44   0.000     .0398982    .0685027
          IQ |   .0047061   .0009314     5.05   0.000     .0028783     .006534
       exper |   .0141831   .0032564     4.36   0.000     .0077923    .0205739
      tenure |   .0118061   .0025521     4.63   0.000     .0067976    .0168146
     married |   .2082196   .0395385     5.27   0.000     .1306243    .2858149
       south |  -.0974561   .0273761    -3.56   0.000    -.1511823   -.0437299
       urban |   .1714902   .0266955     6.42   0.000     .1190995    .2238809
       _cons |   5.047173   .1158771    43.56   0.000     4.819761    5.274585
------------------------------------------------------------------------------
```

Restricciones no lineales

Restricciones no lineales

- Hipótesis nula

$$H_0 : r(\beta) = \theta_0,$$

donde r es un vector de q funciones reales $r_j : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$ y θ_0 es un vector de $q \times 1$.

- Hipótesis alternativa

$$H_1 : r(\beta) \neq \theta_0.$$

Restricciones no lineales

- Hipótesis nula

$$H_0 : r(\beta) = \theta_0,$$

donde r es un vector de q funciones reales $r_j : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$ y θ_0 es un vector de $q \times 1$.

- Hipótesis alternativa

$$H_1 : r(\beta) \neq \theta_0.$$

- Regla de decisión: Un estadístico T_N, un valor crítico c_α y una regla de decisión:
  1. No rechazar H_0 si $T_N \leq c_\alpha$,
  2. Rechazar H_0 si $T_N > c_\alpha$.

Restricciones no lineales

- Test estadístico: Estadístico de Wald

$$W_N = N\,(r(\hat{\beta}) - \theta_0)'(\hat{R}'\hat{V}\hat{R})^{-1}(r(\hat{\beta}) - \theta_0) \xrightarrow{d}_{H_0} \chi^2_q,$$

donde $\hat{R} = \frac{\partial}{\partial \beta} r(\hat{\beta})'$.

Restricciones no lineales

- Test estadístico: Estadístico de Wald

$$W_N = N\,(r(\hat{\beta}) - \theta_0)'(\hat{R}'\hat{V}\hat{R})^{-1}(r(\hat{\beta}) - \theta_0) \xrightarrow{d}_{H_0} \chi^2_q,$$

donde $\hat{R} = \frac{\partial}{\partial \beta} r(\hat{\beta})'$.

Demostración: Utilizando la distribución asintótica normal y el método delta para $r(x)$:

$$\begin{aligned} \sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta) &\xrightarrow{d} \text{Normal}(0, V), \\ \implies \sqrt{N}(r(\hat{\beta}) - r(\beta)) &\xrightarrow{d} \text{Normal}(0, R'VR), \\ \implies \sqrt{N}(r(\hat{\beta}) - \theta_0) &\xrightarrow{d}_{H_0} \text{Normal}(0, R'VR). \end{aligned}$$

Luego seguimos los mismos pasos que con restricciones lineales.

Restricciones no lineales

- Test estadístico: Estadístico de Wald

$$W_N = N\,(r(\hat{\beta}) - \theta_0)'(\hat{R}'\hat{V}\hat{R})^{-1}(r(\hat{\beta}) - \theta_0) \xrightarrow{d}_{H_0} \chi^2_q,$$

  donde $\hat{R} = \frac{\partial}{\partial \beta} r(\hat{\beta})'$.
- Valor crítico c_α: $\Pr(\chi^2_q > c_\alpha) = \alpha$ ó $\Pr(\chi^2_q \leq c_\alpha) = 1 - \alpha$.
- Regla de decisión: Si $W_N > c_\alpha$, rechazamos H_0.

Restricciones no lineales

- El test t y el test de Wald funcionan bien para hipótesis lineales pero tienen problemas para hipótesis no lineales

  Ambos tests no son invariantes a cómo formulamos H_0

  Ejemplo: Podemos formular H_0 como $\beta_1 = 1$; $(\beta_1 - 1)^2 = 0$;$(\beta_1 - 1)^3 = 0$, y obtener conclusiones distintas.

Efectos de la contaminación en los precios de las viviendas (Harrison and Rubinfeld (JEEM, 1978))

- ¿Cuál es el efecto de una mayor concentración óxido nitroso en el aire en el precio de las viviendas?
- Modelo

$$\log(price) = \beta_0 + \beta_{lnox} \log(nox) + \beta_{rooms}\, rooms + \beta_{stratio}\, stratio + u_i,$$

donde *price* es el precio de la vivienda, *nox* es la cantidad de óxido nitroso en el aire (contaminación), *rooms* es el número de habitaciones y *stratio* es el ratio estudiante/profesor en la comuna.

Estimación MCO: Efectos de la contaminación en los precios de las viviendas

Salida de Stata

```
.         reg lprice lnox rooms stratio, robust

Linear regression                                      Number of obs =     506
                                                       F(  3,   502) =  143.33
                                                       Prob > F      =  0.0000
                                                       R-squared     =  0.5760
                                                       Root MSE      =  .26729

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
      lprice |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
        lnox | -.6453292    .0601569   -10.73   0.000    -.7635195   -.5271389
       rooms |    .256727   .0253943    10.11   0.000     .2068348    .3066192
     stratio | -.0508733    .0047898   -10.62   0.000     -.060284   -.0414627
       _cons |  10.35946    .2627574    39.43   0.000     9.843218     10.8757
------------------------------------------------------------------------------
```

Cambios grandes con logaritmo

- Cuando los efectos marginales son grandes, $\frac{\partial \log y}{\partial x}$ puede que no sea una buena aproximación a $\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\Delta x}$. Podemos calcular el cambio exacto.

Cambios grandes con logaritmo

- Cuando los efectos marginales son grandes, $\frac{\partial \log y}{\partial x}$ puede que no sea una buena aproximación a $\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\Delta x}$. Podemos calcular el cambio exacto.
- Dado el modelo $\log y = \beta_0 + \beta_1 x + u$, donde $u \perp\!\!\!\perp x$. Podemos escribir

$$\mathbb{E}(y|x) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x)\,\mathbb{E}(\exp(u)),$$

de donde

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}(y|x = \bar{x} + 1) - \mathbb{E}(y|x = \bar{x})}{\mathbb{E}(y|x = \bar{x})} \times 100 &= \left(\frac{\exp(\beta_0 + \beta_1(\bar{x} + 1))}{\exp(\beta_0 + \beta_1(\bar{x}))} - 1\right) \times 100 \\ &= (\exp(\beta_1) - 1) \times 100.\end{aligned}$$

Efectos de la contaminación en los precios de las viviendas (Harrison and Rubinfeld (JEEM, 1978))

- Hipótesis nula

$$H_0 : (\exp(\beta_{rooms}) - 1) \times 100 = 0.$$

- Hipótesis alternativa

$$H_1 : (\exp(\beta_{rooms}) - 1) \times 100 \neq 0.$$

- $r(\hat{\beta}) = (\exp(\hat{\beta}_{rooms}) - 1) \times 100 = 29.3$
- $\hat{R} = \exp(\hat{\beta}_{rooms}) \times 100$
- $\frac{1}{N}\hat{R}'\hat{V}\hat{R} = \exp(\hat{\beta}_{rooms})100 \times \widehat{AVar}(\hat{\beta}_{rooms}) \times \exp(\hat{\beta}_{rooms})100 = 10.8$
- $W_N = N\frac{r(\hat{\beta})^2}{\hat{R}'\hat{V}\hat{R}} = \frac{29.3^2}{10.8} = 79.5$

Estimación MCO: Efectos de la contaminación en los precios de las viviendas

Salida de Stata

```
.        nlcom (exp(_b[rooms]) -1)*100

_nl_1:  (exp(_b[rooms]) -1)*100

------------------------------------------------------------------------------
      lprice |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       _nl_1 |   29.26922   3.282702     8.92   0.000     22.81969    35.71875
------------------------------------------------------------------------------

.        testnl  (exp(_b[rooms]) -1)*100 = 0

(1)  (exp(_b[rooms]) -1)*100 = 0

F(1, 502) =       79.50
 Prob > F =        0.0000
```