

Econometría I

Teoría Asintótica

Ramiro de Elejalde

Facultad de Economía y Finanzas
Universidad Alberto Hurtado

Propiedades en muestras pequeñas de los estimadores

Propiedades asintóticas de los estimadores

Convergencia en probabilidad

Consistencia.

Ley (débil) de los grandes números (LGN)

Teorema de la función continua

Diferencias entre insesgadez y consistencia

Convergencia en distribución

Distribución asintótica normal.

Teorema de Slutsky

Teorema de la función continua (para \xrightarrow{d} .)

Método delta

Referencias: Cap. 7 y 8 Hansen (Introduction to Econometrics), y cap. 3 de Wooldridge.

- Dada una muestra aleatoria podemos calcular un estimador para “aproximar” los parámetros poblacionales de interés.
- Nos interesa que el estimador tenga “buenas” propiedades.
- En este curso nos enfocamos en las propiedades del estimador cuando $N \rightarrow \infty$, las **propiedades asintóticas**.
 1. Cuando N crece, la distribución del estimador se concentra alrededor del parámetro (**consistencia**)
 2. Cuando N crece la distribución del estimador (estandarizada) se acerca a una distribución normal (**distribución asintótica normal**)
- En esta unidad vamos a estudiar teoremas que nos permitan obtener las propiedades asintóticas de los estimadores que vamos a estudiar durante el curso.

Propiedades en muestras pequeñas de los estimadores

- **Parámetro:** Característica de la población de interés. Ejemplo: $\mu = \mathbb{E}(y)$

Repaso de estadística

- **Parámetro:** Característica de la población de interés. Ejemplo: $\mu = \mathbb{E}(y)$
- **Muestra aleatoria:** Muestra de tamaño N de la población obtenida en forma aleatoria y con reemplazo $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$.

El muestreo aleatorio nos asegura que y_1, y_2, \dots, y_N se distribuyen i.i.d.

Repaso de estadística

- **Parámetro:** Característica de la población de interés. Ejemplo: $\mu = \mathbb{E}(y)$
- **Muestra aleatoria:** Muestra de tamaño N de la población obtenida en forma aleatoria y con reemplazo $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$.
El muestreo aleatorio nos asegura que y_1, y_2, \dots, y_N se distribuyen i.i.d.
- **Estimador:** Un estadístico (función de las variables muestrales) que se utiliza para estimar un parámetro de interés. Ejemplo: Media muestral $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$.

Repaso de estadística

- **Parámetro:** Característica de la población de interés. Ejemplo: $\mu = \mathbb{E}(y)$
- **Muestra aleatoria:** Muestra de tamaño N de la población obtenida en forma aleatoria y con reemplazo $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$.
El muestreo aleatorio nos asegura que y_1, y_2, \dots, y_N se distribuyen i.i.d.
- **Estimador:** Un estadístico (función de las variables muestrales) que se utiliza para estimar un parámetro de interés. Ejemplo: Media muestral $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$.
- Recordar las propiedades de la varianza $\text{Var}(y)$
 - $\text{Var}(a + bx) = b^2 \text{Var}(x)$
 - $\text{Var}(bx + cy) = b^2 \text{Var}(x) + c^2 \text{Var}(y) + 2bc \text{Cov}(x, y)$

Propiedades en muestras pequeñas de los estimadores

- **Insesgadez:** Un estimador $\hat{\theta}_N$ de un parámetro θ es **insesgado** si,

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_N) = \theta \text{ para todo } N.$$

Propiedades en muestras pequeñas de los estimadores

- **Eficiencia:** Un estimador $\hat{\theta}_N$ de un parámetro θ es **eficiente** si,

$$\text{Var}(\hat{\theta}_N) \leq \text{Var}(\tilde{\theta}_N),$$

para todo $\tilde{\theta}_N$ en una familia de estimadores de θ con ciertas propiedades (por ejemplo, insesgados y lineales).

Ejemplo: Media muestral

- Dada una muestra i.i.d. $\{y_1, \dots, y_N\}$ con $\mathbb{E}(y_i) = \mu$ y $\text{Var}(y_i) = \sigma^2$
- Parámetro: μ .
- Estimador: **media muestral**

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_i y_i.$$

Ejemplo: Media muestral

- Insesgadez: $\mathbb{E}(\bar{y}) = \mu$

Ejemplo: Media muestral

- Eficiencia: $\text{Var}(\bar{y}) = \frac{\sigma^2}{N}$

Propiedades asintóticas de los estimadores

Convergencia de variables aleatorias

- El análisis asintótico se ocupa de estudiar la **convergencia de una secuencia de variables aleatorias**.
- Cuando aplicamos estos conceptos a econometría, las variables aleatorias son estimadores cuya distribución depende del tamaño de la muestra N y buscamos la distribución del estimador cuando $N \rightarrow \infty$.

- Una secuencia determinística puede ser $\{a_N\}_{N=1}^{\infty}$ donde $a_N = \{2 + \frac{1}{N}\}$.

- Una secuencia de variables aleatorias puede ser

$$z_N = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1 - \frac{1}{N}, \\ N & \text{con probabilidad } \frac{1}{N}, \end{cases}$$

- La media muestral para una muestra de tamaño N : \bar{y}_N . La secuencia es $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots\}$.

Convergencia para secuencias determinísticas

- Una secuencia determinística a_N **converge** a a cuando $N \rightarrow \infty$ si para todo $\delta > 0$ existe $N_\delta < \infty$ tal que,

$$|a_N - a| \leq \delta \quad \text{para todo } N \geq N_\delta.$$

- Notación: $a_N \rightarrow a$ ó $\lim a_N = a$

Convergencia para secuencias determinísticas

- **Ejemplo:** La secuencia determinística $\{a_N\}_{N=1}^{\infty}$ donde $a_N = \{2 + \frac{1}{N}\}$ converge a $\lim_{N \rightarrow \infty} a_N = 2$.

Convergencia en probabilidad

- Una variable aleatoria z_N **converge en probabilidad** a una constante c cuando $N \rightarrow \infty$ si para todo $\delta > 0$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(|z_N - c| \leq \delta) = 1$$

- Notación: $z_N \xrightarrow{p} c$ ó $\text{plim } z_N = c$

- **Ejemplo:** Calcule la convergencia en probabilidad de z_N

$$z_N = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1 - \frac{1}{N}, \\ N & \text{con probabilidad } \frac{1}{N}, \end{cases}$$

- **Ejemplo:** Calcule la convergencia en probabilidad de z_N

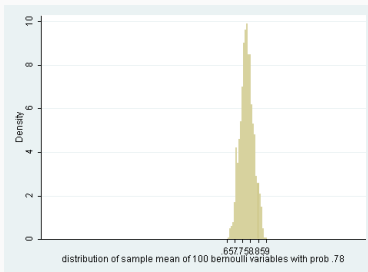
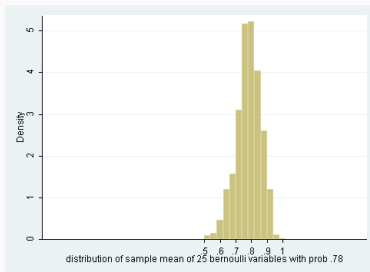
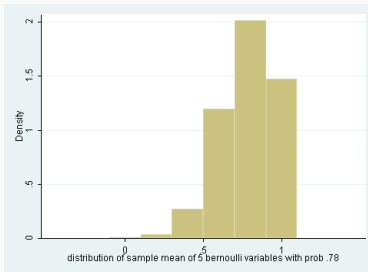
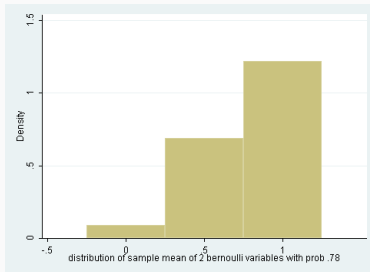
$$z_N = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1 - \frac{1}{N}, \\ N & \text{con probabilidad } \frac{1}{N}, \end{cases}$$

- Respuesta: $z_N \xrightarrow{p} 0$.

- **Consistencia:** Un estimador $\hat{\theta}_N$ de un parámetro θ es **consistente** si,

$$\hat{\theta}_N \xrightarrow{p} \theta \text{ cuando } N \rightarrow \infty.$$

Ejemplo: Bernoulli con $p=0.78$



Ley (débil) de los grandes números (LGN)

- Dada una muestra i.i.d. de tamaño N , si $\mathbb{E}|y| < \infty$, entonces cuando $N \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \xrightarrow{p} \mathbb{E}(y).$$

Ley (débil) de los grandes números (LGN)

- Dada una muestra i.i.d. de tamaño N , si $\mathbb{E}|y| < \infty$, entonces cuando $N \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \xrightarrow{p} \mathbb{E}(y).$$

- Extensión para vectores aleatorios. Definimos a $\mathbf{y} : \mathbb{R}^m \times 1$. Dada una muestra i.i.d. de tamaño N , si $\mathbb{E}|\mathbf{y}| < \infty$, entonces cuando $N \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{y}_i \xrightarrow{p} \mathbb{E}(\mathbf{y}).$$

- Media muestral

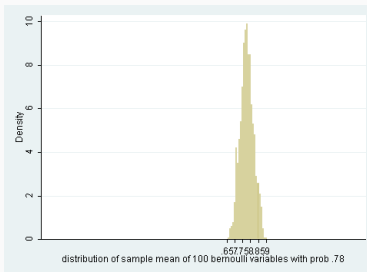
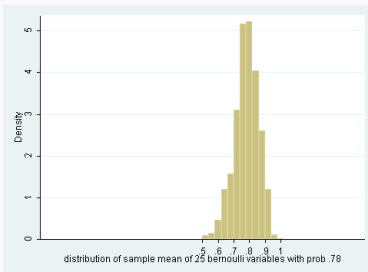
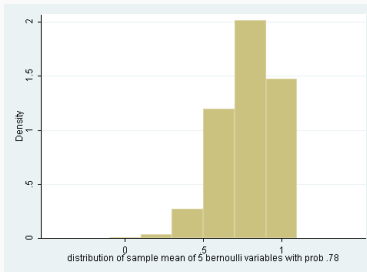
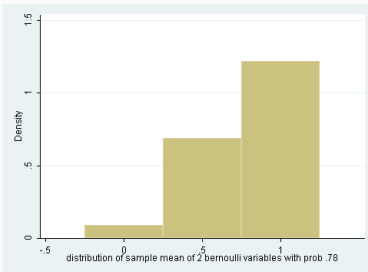
$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \xrightarrow{p} \mu$$

donde $\mu = \mathbb{E}(y)$.

- Media muestral de y_i^2

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2 \xrightarrow{p} \mathbb{E}(y^2)$$

Ejemplo: Distribución muestral para \bar{y}_N de Bernoulli con $p=0.78$



Teorema de la función continua

- Si $z_N \xrightarrow{p} c$ cuando $N \rightarrow \infty$, y $g(\cdot)$ es continua en c , entonces

$$g(z_N) \xrightarrow{p} g(c) \text{ cuando } N \rightarrow \infty.$$

- Varianza muestral

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2 - \bar{y}^2 \xrightarrow{p} \sigma^2, \end{aligned}$$

donde $\sigma^2 = \text{Var}(y)$.

- Desviación estándar muestral: $S \xrightarrow{p} \sigma$

Diferencias entre insesgadez y consistencia

- Insesgadez no implica consistencia.

Ejemplo: $\tilde{y} = y_1$

Diferencias entre insesgadez y consistencia

- Insesgadez no implica consistencia.

Ejemplo: $\tilde{y} = y_1$

- Consistencia no implica insesgadez.

Ejemplo: Varianza muestral S^2

Diferencias entre insesgadez y consistencia

- Insesgadez no implica consistencia.

Ejemplo: $\tilde{y} = y_1$

- Consistencia no implica insesgadez.

Ejemplo: Varianza muestral S^2

- Teorema: Si $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\hat{\theta}_N) = \theta$ y $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_N) = 0$, entonces $\hat{\theta}_N \xrightarrow{p} \theta$ cuando $N \rightarrow \infty$.

Diferencias entre insesgadez y consistencia

- Insesgadez no implica consistencia.

Ejemplo: $\tilde{y} = y_1$

- Consistencia no implica insesgadez.

Ejemplo: Varianza muestral S^2

- Teorema: Si $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\hat{\theta}_N) = \theta$ y $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_N) = 0$, entonces

$\hat{\theta}_N \xrightarrow{p} \theta$ cuando $N \rightarrow \infty$.

- Insesgadez asintótica no implica consistencia, y consistencia no implica insesgadez asintótica.

Diferencias entre insesgadez y consistencia

- Insesgadez no implica consistencia.

Ejemplo: $\tilde{y} = y_1$

- Consistencia no implica insesgadez.

Ejemplo: Varianza muestral S^2

- Teorema: Si $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\hat{\theta}_N) = \theta$ y $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_N) = 0$, entonces $\hat{\theta}_N \xrightarrow{P} \theta$ cuando $N \rightarrow \infty$.

- Insesgadez asintótica no implica consistencia, y consistencia no implica insesgadez asintótica.

Ejemplo donde consistencia no implica insesgadez asintótica: $z_N = 0$ con probabilidad $1 - 1/N$, y $z_N = N$ con probabilidad $1/N$.

- Dada una variable aleatoria con función de distribución $F_N(u) = \Pr(z_N \leq u)$. z_N converge en distribución a z cuando $N \rightarrow \infty$ si para todo u en donde $F(u) = \Pr(z \leq u)$ es continua,

$$F_N(u) \rightarrow F(u) \text{ cuando } N \rightarrow \infty.$$

- Ejemplo: Demuestre que

$$F_N(u) = \frac{\exp(Nu)}{1 + \exp(Nu)} \rightarrow F(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0, \\ 1 & \text{si } u \geq 0. \end{cases}$$

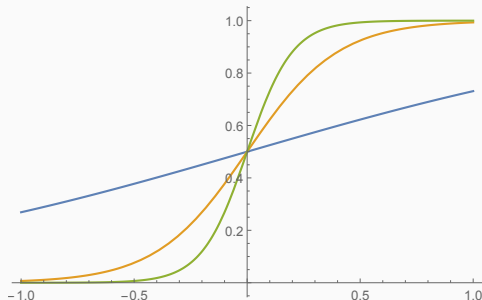


Figure 1: $N=1$ (azul), $N=5$ (naranja), $N=10$ (verde)

- Dada una variable aleatoria con función de distribución $F_N(u) = \Pr(z_N \leq u)$. z_N converge en distribución a z cuando $N \rightarrow \infty$ si para todo u en donde $F(u) = \Pr(z \leq u)$ es continua,

$$F_N(u) \rightarrow F(u) \text{ cuando } N \rightarrow \infty.$$

- Notación: $z_N \xrightarrow{d} z$.

Convergencia en distribución

- Dada una variable aleatoria con función de distribución $F_N(u) = \Pr(z_N \leq u)$. z_N **converge en distribución** a z cuando $N \rightarrow \infty$ si para todo u en donde $F(u) = \Pr(z \leq u)$ es continua,

$$F_N(u) \rightarrow F(u) \text{ cuando } N \rightarrow \infty.$$

- Notación: $z_N \xrightarrow{d} z$.
- Convergencia en probabilidad implica convergencia en distribución:
 $z_N \xrightarrow{p} z \implies z_N \xrightarrow{d} z$.

Convergencia en distribución

- Dada una variable aleatoria con función de distribución $F_N(u) = \Pr(z_N \leq u)$. z_N **converge en distribución** a z cuando $N \rightarrow \infty$ si para todo u en donde $F(u) = \Pr(z \leq u)$ es continua,

$$F_N(u) \rightarrow F(u) \text{ cuando } N \rightarrow \infty.$$

- Notación: $z_N \xrightarrow{d} z$.
- Convergencia en probabilidad implica convergencia en distribución:
 $z_N \xrightarrow{p} z \implies z_N \xrightarrow{d} z$.
- Si z_N converge en distribución a una constante entonces z_N converge en probabilidad a dicha constante: $z_N \xrightarrow{d} c \implies z_N \xrightarrow{p} c$

Distribución asintótica normal

- Un estimador $\hat{\theta}_N$ de un parámetro θ se distribuye \sqrt{N} -asintóticamente normal si,

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, V),$$

donde V es la varianza asintótica de $\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta)$ y se denota $\text{AVar}(\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta)) = V$.

- Decimos $\hat{\theta}_N \overset{a}{\sim} \text{Normal}(\theta, V/N)$ donde $\text{AVar}(\hat{\theta}_N) = V/N$ es la **varianza asintótica de $\hat{\theta}_N$** y $\text{sd}(\hat{\theta}_N) = V^{1/2}/\sqrt{N}$ es la **desviación estandar asintótica de $\hat{\theta}_N$** .

Distribución asintótica normal

- Un estimador $\hat{\theta}_N$ de un parámetro θ se distribuye \sqrt{N} -asintóticamente normal si,

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, V),$$

donde V es la varianza asintótica de $\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta)$ y se denota $\text{AVar}(\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta)) = V$.

- Si no conocemos V ¿cómo calculamos el $sd(\hat{\theta}_N)$?

Distribución asintótica normal

- Un estimador $\hat{\theta}_N$ de un parámetro θ se distribuye \sqrt{N} -asintóticamente normal si,

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, V),$$

donde V es la varianza asintótica de $\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta)$ y se denota $\text{AVar}(\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta)) = V$.

- Si no conocemos V ¿cómo calculamos el $sd(\hat{\theta}_N)$?
- Si tenemos un estimador consistente de V , $\hat{V}_N \xrightarrow{p} V$, utilizamos $se(\hat{\theta}_N) = \hat{V}_N^{1/2} / \sqrt{N}$ y lo llamamos **error estándar asintótico de $\hat{\theta}_N$**

Lindeberg-Lévy Teorema Central del límite (TCL)

- Dada una muestra i.i.d. de tamaño N , si $\text{Var}(y) < \infty$, entonces cuando $N \rightarrow \infty$,

$$\sqrt{N} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \mathbb{E}(y)) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, \text{Var}(y)).$$

Lindeberg-Lévy Teorema Central del límite (TCL)

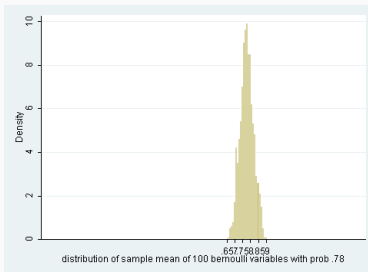
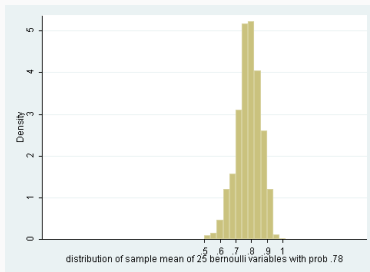
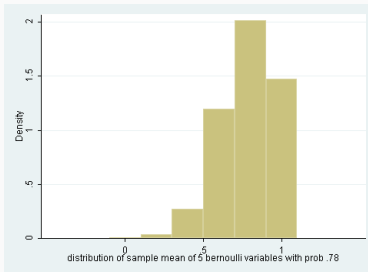
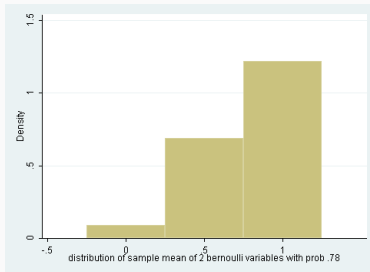
- Dada una muestra i.i.d. de tamaño N , si $\text{Var}(y) < \infty$, entonces cuando $N \rightarrow \infty$,

$$\sqrt{N} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \mathbb{E}(y)) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, \text{Var}(y)).$$

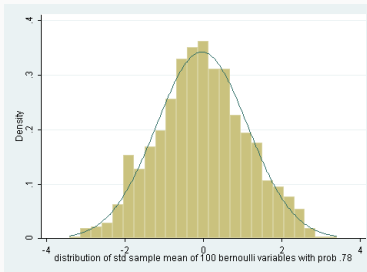
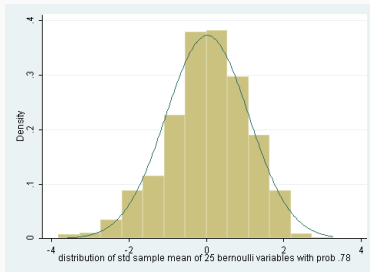
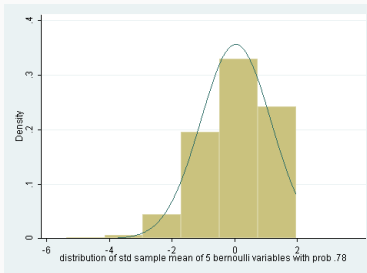
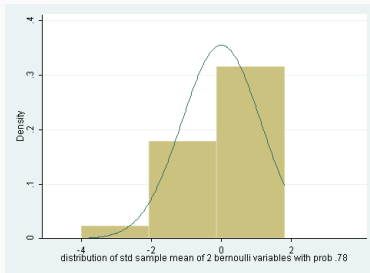
- También se suele escribir:

$$\sqrt{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i - \mathbb{E}(y) \right) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, \text{Var}(y)).$$

Ejemplo: Bernoulli con $p=0.78$



Ejemplo: Distribución muestral de $\sqrt{N}(\hat{p} - p)$ para Bernoulli con $p=0.78$



Lindeberg-Lévy Teorema Central del límite (TCL)

- Extensión para vectores aleatorios. Definimos a $\mathbf{y} : \mathbb{R}^m \times 1$ y $\text{Var}(\mathbf{y}) = \mathbb{E}[(\mathbf{y} - \mu)(\mathbf{y} - \mu)']$. Dada una muestra i.i.d. de tamaño N , si $\mathbb{E}|\mathbf{y}| < \infty$, entonces cuando $N \rightarrow \infty$,

$$\sqrt{N} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{y}_i - \mathbb{E}(\mathbf{y})) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, \text{Var}(\mathbf{y})).$$

- Media muestral

$$\sqrt{N}(\bar{y} - \mu) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, \sigma^2).$$

Ejemplo

- Media muestral

$$\sqrt{N}(\bar{y} - \mu) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, \sigma^2).$$

- Decimos

$$\bar{y} \overset{a}{\sim} \text{Normal}(\mu, \sigma^2/N),$$

$$sd(\bar{y}) = \sigma/\sqrt{N}.$$

Ejemplo

- Media muestral

$$\sqrt{N}(\bar{y} - \mu) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, \sigma^2).$$

- Decimos

$$\bar{y} \overset{a}{\sim} \text{Normal}(\mu, \sigma^2/N),$$

$$sd(\bar{y}) = \sigma/\sqrt{N}.$$

- Para vectores tenemos un resultado similar

$$\sqrt{N}(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, \boldsymbol{\Sigma}),$$

Teorema de Slutsky

- Si $z_N \xrightarrow{d} z$ y $c_N \xrightarrow{p} c$ donde c es una constante, cuando $N \rightarrow \infty$, entonces
 1. $c_N + z_N \xrightarrow{d} c + z$,
 2. $c_N z_N \xrightarrow{d} c z$,
 3. $\frac{z_N}{c_N} \xrightarrow{d} \frac{z}{c}$ si $c \neq 0$.

Teorema de Slutsky

- **Ejemplos:** Suponga que $z_N \xrightarrow{d} z \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$. Encuentre la distribución de asintótica de
 1. $c_N + z_N$,
 2. $c_N z_N$,
 3. $\frac{z_N}{c_N}$.

Teorema de Slutsky

- **Ejemplos:** Suponga que $z_N \xrightarrow{d} z \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ entonces
 1. $c_N + z_N \xrightarrow{d} c + z \sim \text{Normal}(c + \mu, \sigma^2),$
 2. $c_N z_N \xrightarrow{d} cz \sim \text{Normal}(c\mu, c^2\sigma^2),$
 3. $\frac{z_N}{c_N} \xrightarrow{d} \frac{z}{c} \sim \text{Normal}\left(\frac{\mu}{c}, \frac{\sigma^2}{c^2}\right).$

Ejemplo: Media muestral con varianza muestral

- Para y escalar

$$\sqrt{N} \frac{(\bar{y} - \mu)}{\sqrt{S^2}} \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, 1).$$

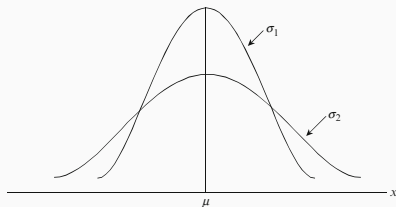
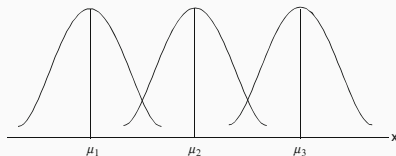
- Varianza muestral

$$\sqrt{N}(S^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, \mu_4 - (\sigma^2)^2)$$

donde $\mu_4 = \mathbb{E}[(y - \mathbb{E}(y))^4]$.

Repaso de estadística: Funciones de distribución

- **Normal univariante:** $x \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$; normal estandarizada: $z \sim \text{Normal}(0, 1)$
- **Normal multivariante:** $\mathbf{x} \sim \text{Normal}(\mu, \Sigma)$ donde $\mathbf{x} : K \times 1$, $\mu : K \times 1$ y $\Sigma : K \times K$.



Repaso de estadística: Funciones de distribución

- **Normal univariante:** $x \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$; normal estandarizada: $z \sim \text{Normal}(0, 1)$
- **Normal multivariante:** $\mathbf{x} \sim \text{Normal}(\mu, \Sigma)$ donde $\mathbf{x} : K \times 1$, $\mu : K \times 1$ y $\Sigma : K \times K$.

Propiedades:

- Dada $\mathbf{x} \sim \text{Normal}(\mu, \Sigma)$ y $a : K \times 1$ entonces $a'\mathbf{x} \sim \text{Normal}(a'\mu, a'\Sigma a)$.
- Dada $\mathbf{x} \sim \text{Normal}(\mu, \Sigma)$ y $A : Q \times K$ entonces $A\mathbf{x} \sim \text{Normal}(A\mu, A\Sigma A')$.
- Dada $\mathbf{x} \sim \text{Normal}(\mu, \Sigma)$. Entonces $\{x_1, \dots, x_K\}$ son independientes si y sólo si Σ es diagonal.

- Ejemplo: Normal bivalente. Obtener función de distribución de $x + y$.

Repaso de álgebra de matrices

- Dado $A \geq 0$ (semidefinida positiva) podemos encontrar B tal que $A = BB'$. Llamamos a $B = A^{1/2}$ (por razones obvias).
- Propiedad: $B^{-1}AB'^{-1} = B^{-1}BB'B'^{-1} = I$. Llamamos a $B^{-1} = A^{-1/2}$.
- Para resumir: dado $A \geq 0$ siempre podemos definir una matriz $A^{-1/2}$ que verifica $A^{-1/2}AA'^{-1/2} = I$.

Ejemplo

- Ejemplo: Si $\mathbf{x} \sim \text{Normal}(0, \Sigma)$ entonces $\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x} \sim \text{Normal}(0, I_K)$.

Ejemplo: Media muestral con varianza muestral

- Para $\mathbf{y} : K \times 1$

$$\sqrt{N}\hat{\Sigma}^{-1/2}(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, I_K).$$

donde $\text{Var}(\mathbf{y}) = \Sigma$ y $\hat{\Sigma} \xrightarrow{p} \Sigma$.

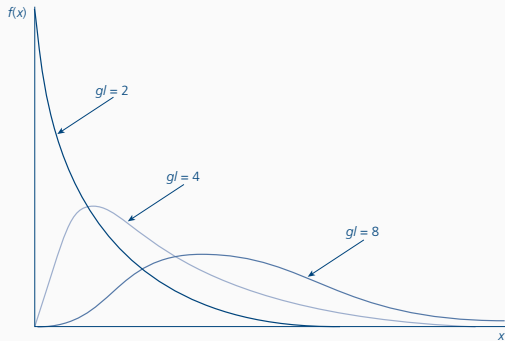
Teorema de la función continua (para \xrightarrow{d})

- Si $z_N \xrightarrow{d} z$ cuando $N \rightarrow \infty$ y $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ tiene un conjunto de puntos de discontinuidad D_g tales que $\Pr(z \in D_g) = 0$, entonces

$$g(z_N) \xrightarrow{d} g(z) \text{ cuando } N \rightarrow \infty.$$

Repaso de estadística: Funciones de distribución

- Chi-cuadrado χ_Q^2
- Dadas $\{z_1, \dots, z_Q\}$ independientes y $z_j \sim \text{Normal}(0, 1)$ entonces $y = \sum_{j=1}^Q z_j^2$ se distribuye como una χ_Q^2 .



Ejemplo

- Para y escalar

$$N \frac{(\bar{y} - \mu)^2}{S^2} \xrightarrow{d} \chi_1^2.$$

Ejemplo

- Para $\mathbf{y} : K \times 1$

$$N(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu})' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{d} \chi_K^2.$$

Método delta

- Si $\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, V)$ donde θ es $m \times 1$, y $g(\theta) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ es continuamente diferenciable en la vecindad de θ , entonces cuando $N \rightarrow \infty$

$$\sqrt{N}(g(\hat{\theta}_N) - g(\theta)) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, G'VG),$$

donde $G(z) = \frac{\partial}{\partial z}g(z)'$ y $G = G(\theta)$.

- Media muestral al cuadrado: \bar{y}^2

$$\sqrt{N}(\bar{y}^2 - \mu^2) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, 4\mu^2\sigma^2).$$

Nota: Diferencia con la distribución asintótica de $N(\bar{y} - \mu)^2$.

- Dado el vector aleatorio (x_1, x_2) con

$$\mathbb{E} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

y

$$\text{Var} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es la distribución asintótica de $z_N = \log(\bar{x}_1) + \log(\bar{x}_2)$

Ejemplos

- Dado el vector aleatorio (x_1, x_2) con

$$\mathbb{E} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

y

$$\text{Var} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es la distribución asintótica de $z_N = \log(\bar{x}_1) + \log(\bar{x}_2)$

- Respuesta

$$\begin{aligned} & \sqrt{N}((\log(\bar{x}_1) + \log(\bar{x}_2)) - (\log \mu_1 + \log \mu_2)) \\ & \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, \frac{\sigma_1^2}{\mu_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{\mu_2^2} + 2 \frac{\sigma_{12}}{\mu_1 \mu_2}) \end{aligned}$$