

# PS Echtzeitsysteme – Regelungstechnik

**Eric Lenz**

zum internen Gebrauch im Rahmen des Projektseminars



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

PS Echtzeitsysteme  
FG Echtzeitsysteme  
FG Regelungstechnik und Mechatronik



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Fahrbahnerkennung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Ackermannmodell</b>	<b>5</b>
2.1	Modellgleichungen . . . . .	6
2.2	Weitere Modelle . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Fahrzeugführung</b>	<b>10</b>
3.1	Querführung auf geraden Fahrbahnen . . . . .	11
3.2	Steuerung einer gegebenen Kurve . . . . .	13
3.2.1	Beschreibung parametrischer Kurven in der Ebene . . . . .	13
3.2.2	Berechnung der Steuerung . . . . .	18
3.3	Gekrümmte Fahrbahnen . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Kinematisches Kalmanfilter</b>	<b>27</b>
	<b>Literatur</b>	<b>31</b>

# 1 Fahrbahnerkennung

Ein wesentlicher und nicht unbedingt einfacher Schritt ist die (sichere) Erkennung der Fahrbahn sowie die darauf aufbauende Spurführung. Im Folgenden werden hierzu ein paar Hinweise und Anregungen zur Erkennung der Fahrbahn gegeben.

## Gestaltung und Erkennung der Markierung

Um sich dem Problem schrittweise zu nähern, sind die Markierungen aktuell in hervorstechenden Neonfarben erstellt. Dies dient dazu, diese einfach vom Boden und anderen Gegenständen im Raum unterscheiden zu können. Bei einer weißen Markierung entsteht auch das Problem, dass „weiß“ auch alle die Stellen sind, an denen sich die Sonne auf dem Boden spiegelt. Auch erlauben es die Neonfarben, Markierungen auch direkt auf den Boden der Räume und des Flurs zu kleben, um so Alternativen zur Fahrbahn zu haben.

Durch die gewählten Markierungen sollte es möglich sein, über eine Filterung im HSV-Farbraum relativ einfach ein sw-Bild zu erhalten, in dem (fast) nur noch die Markierungen vorhanden sind. Im einfachsten Fall reicht eine Filterung über eine untere und obere Grenze. D. h. um ein Bild mit allen Punkten zu erhalten, die zu der grünen Markierung gehören, werden alle Punkte auf weiß gesetzt, die die Bedingung

$$\begin{bmatrix} 50 \\ 20 \\ 100 \end{bmatrix} \preceq^! \begin{bmatrix} H_{u8}(p) \\ S_{u8}(p) \\ V_{u8}(p) \end{bmatrix} \preceq^! \begin{bmatrix} 70 \\ 255 \\ 255 \end{bmatrix}$$

erfüllen („ $\preceq$ “ steht dabei für einen elementweisen Vergleich: es müssen jeweils alle drei sich daraus ergebenden Bedingungen erfüllt sein). Alle anderen Punkte werden auf schwarz gesetzt.

Der Index „u8“ steht für die Darstellung als uint8\_t-Wert in OpenCV. Dabei gilt  $H_{u8}(p) \in [0, 179]$  (also „Winkel in Grad / 2“) sowie  $S_{u8}(p)$  und  $V_{u8}(p) \in [0, 255]$ . Für andere Darstellungen können sich die Werte unterscheiden.

Vorversuche zeigen, dass sich die grüne und – in etwas geringerem Maße – die pinke Markierung sehr gut voneinander und von der Umgebung trennen lassen sollten. Bei der orangenen Markierung wird es ein wenig kritischer, diese von braunen Farbtönen (z. B. Stühle) abzugrenzen, zumindest wenn man einen weiten Helligkeitsbereich abdecken möchte.<sup>1</sup>

Folgende Grenzen können als Startwerte eigener Optimierungen verwendet werden<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \text{grün: } & \begin{bmatrix} 50 & 20 & 100 \end{bmatrix}^T \preceq^! HSV_{u8}(p) \preceq^! \begin{bmatrix} 70 & 255 & 255 \end{bmatrix}^T \\ \text{orange: } & \begin{bmatrix} 0 & 100 & 100 \end{bmatrix}^T \preceq^! HSV_{u8}(p) \preceq^! \begin{bmatrix} 30 & 255 & 255 \end{bmatrix}^T \\ \text{pink: } & \begin{bmatrix} 155 & 50 & 100 \end{bmatrix}^T \preceq^! HSV_{u8}(p) \preceq^! \begin{bmatrix} 175 & 255 & 255 \end{bmatrix}^T \\ \text{gelb: } & \begin{bmatrix} 30 & 20 & 100 \end{bmatrix}^T \preceq^! HSV_{u8}(p) \preceq^! \begin{bmatrix} 35 & 255 & 255 \end{bmatrix}^T . \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Hier wäre eine Adaption der Sättigungs- und Helligkeitsgrenze S bzw. V in Abhängigkeit der lokalen Helligkeit im Bild möglicherweise hilfreich.

<sup>2</sup> Die Vorversuche wurden mit einer anderen Kamera durchgeführt, als die die in dem Projektseminar verwendet werden. Auch sind die hier angegebenen Werte noch nicht optimiert und beruhen auf noch relativ geringen Datenmengen.

---

Die Fahrbahn­ränder sind in Grün geklebt, die Mittelmarkierung in Pink. Damit steht es den Gruppen auch frei, sich stückweise dem Problem zu nähern. So könnte auch zunächst versucht werden, nur der Mittelmarkierung zu folgen. (Diese ist zwar unterbrochen, sollte sich aber relativ einfach interpolieren lassen.) Dann könnte innerhalb einer begrenzten Fahrbahn ohne Mittelmarkierung gefahren werden und zuletzt auf der vollständigen Fahrbahn.

Die verbleibenden Markierungsfarben können für individuelle Hilfsmarken verwendet werden.

Um gute Ergebnisse zu erhalten, darf die Kamera nicht zu hell eingestellt sein, da ansonsten die Markierungen schnell „weiß“ werden. Auch sollte daher zu starke direkte Sonneneinstrahlung vermieden werden.

Begrenzt man noch den Horizont, so dass keine Bildpunkte von Gegenständen oberhalb der Fahrzeughöhe berücksichtigt werden – was auch aus Gründen der Rechenzeit anzuraten wäre – sollten sich die Fehlerkennungen auf ein akzeptables geringes Niveau drücken lassen.

### Erkennung der Fahrbahn­ränder

Die notwendige mathematische Beschreibung der erkannten Fahrbahn­ränder hängt vom gewählten Konzept der Spurführung ab. Wenn im einfachsten Fall nur der Abstand des Fahrzeuges zum Fahrbahnrand in einem gewissen Abstand vor dem Fahrzeug benötigt wird, kann dieser unter Umständen einfach aus dem (transformierten) Bild ausgelesen werden. Ist der Abstand des Fahrzeuges zur Seite nötig, so wird eine mathematische Beschreibung benötigt, die eine sinnvolle Extrapolation des Markierungsstreifens zulässt. Sollen Steuerungen anhand eines gegebenen Verlaufes der Fahrspur berechnet werden, muss die Markierung auch als mathematische Kurve beschreibbar sein. Dabei ist es in der Regel günstig bzw. notwendig, dass die beschriebenen Kurven ausreichend „glatt“ sind.

Beachten Sie, dass eine einfache Interpolation einer  $x(y)$ - oder einer  $y(x)$ -Kurve kritisch ist, wenn die Markierungen bezüglich der gewählten Richtung sehr steil verlaufen!

### Geometrie der Fahrbahn

Die Fahrbahn besteht aus Geradenstücken und Viertelkreisen. Der Radius der inneren Begrenzung beträgt 1 m, der der äußeren Begrenzung 1,8 m. Die Mittelmarkierung verläuft zwischen beiden Begrenzungen, so dass sich eine Fahrspurbreite von jeweils 40 cm ergibt. (Alle Maße auf die Mitten der Bänder bezogen.) Die Mittelmarkierung besteht aus 20 cm langen Strichen, die meist in einem Abstand von ebenfalls 20 cm geklebt sind. (An einer Stelle ist der Abstand an drei aufeinanderfolgenden Lücken etwas verringert, um eine extreme Abweichung beim Schließen des Rundkurses zu vermeiden.)

### Studentische Arbeiten

Bisher hat die Erkennung der Fahrbahnmarkierungen im Projektseminar noch keine große Rolle gespielt. Im letzten Jahr hat sich eine Gruppe damit befasst.

Es wurden drei studentische Arbeiten am FG Echtzeitsysteme bzw. FG rtm durchgeführt, die sich ganz oder teilweise mit der Erkennung der Fahrbahn befassen haben:

- [Sepulveda Acero 2016]: Weiße Markierungen, Erkennung über Kanten, Betrachtung des kompletten (sinnvollen) Bildausschnittes in einem Schritt, Approximation eines Polynoms über RANSAC (etwas rechenzeitintensiver, dafür robuster gegen Ausreißer)
- [Demirtel 2017]: Weiße Markierungen, Erkennung über Kanten, Sukzessives Verfolgen der Markierungen über kleine rechteckige Ausschnitte, Approximation eines Polynoms über Methode der kleinsten Quadrate

- 
- [Wassermann 2018]: Orangene Markierungen, Erkennung über Pixel, Sukzessives Verfolgen der Markierungen über kleine rechteckige Ausschnitte, Approximation eines Polynoms über Methode der kleinsten Quadrate

## 2 Ackermannmodell

Zur systematischen Reglerauslegung zur Seitenführung (Abstand zur Wand) bzw. zur Diskussion des prinzipiellen Verhaltens des Fahrzeuges ist ein mathematisches Modell notwendig. Ein einfaches Modell soll hier vorgestellt werden.

Zur Beschreibung der Bewegung eines Fahrzeuges existieren verschiedene Modelle, die unterschiedliche Annahmen bzw. Vereinfachungen treffen. Eines der einfachsten Modelle ist das Ackermannmodell, welches ein rein kinematisches Modell darstellt. D. h. die Fahrzeuggeschwindigkeit (hier als Geschwindigkeit an der Hinterachse definiert) ist eine Eingangsgröße des Modells. (Ein Modell, welches die Kinetik/Dynamik berücksichtigen würde, würde als Eingangsgrößen Kräfte bzw. Momente besitzen, und die Geschwindigkeit würde daraus folgen.) Entsprechend kommen keine Parameter wie Massen oder Trägheiten, sondern nur geometrische Größen in dem Modell vor.

Das Ackermannmodell ist desweiteren ein Einspurmodell, d. h. die Räder einer Achse werden zu einem gemeinsamen Rad zusammengefasst. Die wesentliche Annahme des Ackermannmodells ist, dass die Räder nicht über die Seite „schieben“. D. h. zu jedem Zeitpunkt zeigt der Geschwindigkeitsvektor an den Rädern in die Richtung des jeweiligen Rades. Es wird also davon ausgegangen, dass die Räder jederzeit genügend Seitenkraft aufbringen können, eine Bewegung senkrecht zur Abrollrichtung zu vermeiden.

Ein anderes Modell wäre beispielsweise das „Einspurmodell“, welches einen gewissen Schräglauf der Reifen zulässt (bzw. erfordert).

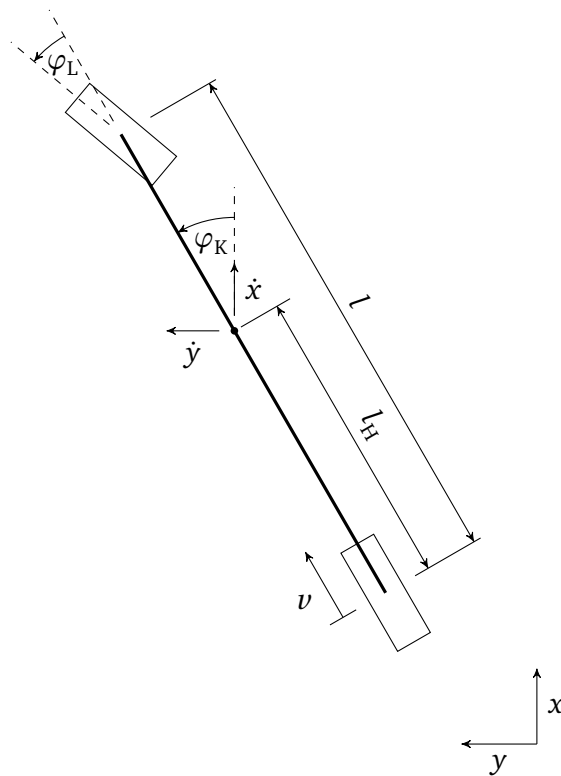
Das Ackermannmodell ist dann zulässig, wenn der Schräglauf oder das „Schieben“ über die Räder vernachlässigt werden kann. Dies ist bei kleinen Geschwindigkeiten, steifen Rädern (niedriger Querschnitt), einer guten Haftung zwischen Rad und Boden und nicht zu großen Lenkwinkeln der Fall und sollte hier angenommen werden können.

Hier wird das Ackermannmodell eines Fahrzeugs mit ungelenkter Hinterachse betrachtet. Die Größen des Ackermannmodells sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst und in Abbildung 2.1 dargestellt. Dabei sind  $l$ ,  $l_H$  und die Geschwindigkeit  $v$  an der Hinterachse Parameter des Modells, der Lenkwinkel  $\varphi_L$  ist die Eingangsgröße und der Kurswinkel  $\varphi_K$  sowie die Positionen  $x$  und  $y$  in einem weltfesten Koordinatensystem sind Zustände. (Die Geschwindigkeit könnte auch als Eingangsgröße gezählt werden.) Dabei sind  $x$  und  $y$  bezogen auf einen Referenzpunkt angegeben, der über den Parameter  $l_H$  (Abstand zur Hinterachse) festgelegt ist.

Ziel ist es zunächst, einen Zusammenhang zwischen der Eingangsgröße Lenkwinkel  $\varphi_L$  und der Position  $(x, y)$  aufzustellen.

**Tabelle 2.1:** Größen des Ackermannmodells

$\varphi_L$	Lenkwinkel
$\varphi_K$	Kurswinkel
$v$	Geschwindigkeit an ungelenkter Hinterachse
$x, y$	Position Referenzpunkt
$l_H$	Abstand Referenzpunkt zur Hinterachse
$l$	Achsstand



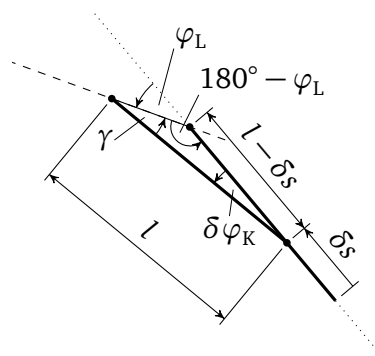
**Abbildung 2.1:** Größen des Ackermannmodells

## 2.1 Modellgleichungen

Für die Geschwindigkeiten  $\dot{x}$  und  $\dot{y}$  des Referenzpunktes in Fahrbahnrichtung bzw. senkrecht dazu gilt

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cdot \cos \varphi_K - l_H \dot{\varphi}_K \cdot \sin \varphi_K \\ \dot{y} &= v \cdot \sin \varphi_K + l_H \dot{\varphi}_K \cdot \cos \varphi_K.\end{aligned}$$

Die wesentlichen Größen zur Bestimmung der Geschwindigkeiten sind der Kurswinkel  $\varphi_K$  und dessen Ableitung. Um die Abhängigkeit des Kurswinkels vom Lenkwinkel und anderen Größen zu beschreiben, wird Abbildung 2.2 betrachtet.<sup>1</sup>



**Abbildung 2.2:** Zur Bestimmung der Änderung des Kurswinkels

<sup>1</sup> Weiter hinten wird eine alternative Herleitung angegeben, die etwas verbreiteter ist, jedoch mit dem Begriff der „Krümmung“ arbeitet.



Dort ist der Fall dargestellt, dass sich die Hinterachse um die kleine Strecke  $\delta s$  fortbewegt. Diese Bewegung muss aufgrund der Grundannahme des Ackermannmodells in die Richtung der Hinterachse erfolgen, also entlang einer Gerade mit dem Winkel  $\varphi_K$ , die als gepunktete Linie eingezeichnet ist. Die Vorderachse muss sich entsprechend auf einer Gerade bewegen, die mit dem Lenkwinkel gegenüber der „Kursgeraden“ geneigt ist. Diese Gerade ist in Abbildung 2.2 gestrichelt eingezeichnet. Die Länge  $l$  des Fahrzeuges ändert sich natürlich nicht, womit sich die in der Abbildung eingezeichneten Längen ergeben. Es ergibt sich damit eine Änderung des Kurswinkels von  $\delta \varphi_K$ .

Für den in Abbildung 2.2 mit  $\gamma$  bezeichneten Winkel gilt

$$\gamma = 180^\circ - \delta \varphi_K - (180^\circ - \varphi_L) = \varphi_L - \delta \varphi_K .$$

Wendet man den Sinussatz auf das durch die Punkte markierte Dreieck an, so erhält man zunächst

$$\frac{\sin(180^\circ - \varphi_L)}{l} = \frac{\sin \gamma}{l - \delta s} ,$$

bzw. mit

$$\sin(180^\circ - \varphi_L) = \sin \varphi_L$$

auch

$$\frac{\sin \varphi_L}{l} = \frac{\sin(\varphi_L - \delta \varphi_K)}{l - \delta s} . \quad (2.1)$$

Mit dem Additionstheorem

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

ergibt sich weiter

$$\frac{\sin \varphi_L}{l} = \frac{\sin \varphi_L \cdot \cos \delta \varphi_K - \cos \varphi_L \cdot \sin \delta \varphi_K}{l - \delta s} .$$

Für kleine Änderungen  $\delta \varphi_K$  des Kurswinkels gilt  $\cos \delta \varphi_K \approx 1$  und  $\sin \delta \varphi_K \approx \delta \varphi_K$ . Da später ohnehin noch der Grenzübergang  $\delta \varphi_K \rightarrow 0$  ausgeführt wird, ist dies nicht nur eine Näherung, sondern führt zu einem exakten Ergebnis. Es ergibt sich zunächst

$$\frac{\sin \varphi_L}{l} = \frac{\sin \varphi_L - \cos \varphi_L \cdot \delta \varphi_K}{l - \delta s}$$

was über

$$\begin{aligned} \frac{l - \delta s}{l} &= \frac{\sin \varphi_L - \cos \varphi_L \cdot \delta \varphi_K}{\sin \varphi_L} \\ 1 - \frac{\delta s}{l} &= 1 - \frac{1}{\tan \varphi_L} \cdot \delta \varphi_K \end{aligned}$$

zu

$$\delta \varphi_K = \frac{\tan \varphi_L}{l} \cdot \delta s$$

umgeformt werden kann.<sup>2</sup>

Dividiert man diese Gleichung noch durch die Dauer  $\delta t$ , in der die Strecke  $\delta s$  zurückgelegt wurde, erhält man

$$\frac{\delta \varphi_K}{\delta t} = \frac{\tan \varphi_L}{l} \cdot \frac{\delta s}{\delta t},$$

und letztlich durch  $\delta t \rightarrow 0$  den gesuchten Zusammenhang

$$\dot{\varphi}_K = \frac{v}{l} \cdot \tan \varphi_L$$

zwischen dem Lenkwinkel und der Änderung des Kurswinkels.

Diese Differentialgleichung bildet zusammen mit der Differentialgleichungen für die  $x$  und  $y$  das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\varphi}_K = \frac{v}{l} \cdot \tan \varphi_L \quad (2.2)$$

$$\dot{x} = v \cdot \cos \varphi_K - v \cdot \frac{l_H}{l} \cdot \sin \varphi_K \cdot \tan \varphi_L \quad (2.3)$$

$$\dot{y} = v \cdot \sin \varphi_K + v \cdot \frac{l_H}{l} \cdot \cos \varphi_K \cdot \tan \varphi_L, \quad (2.4)$$

welches die Kinematik beschreibt. Diese Gleichungen sind für alle Lenkwinkel ungleich  $90^\circ$  exakt.<sup>3</sup> Die Darstellung der Position in Weltkoordinaten ist meist nicht zielführend, so dass für die beiden unteren Gleichungen später noch Alternativen betrachtet werden.

---

## 2.2 Weitere Modelle

---

### (Kinematischer) „Punkt“ in der Ebene

Diese sehr einfache Betrachtung betrachtet weder die dynamischen noch die über die Lenkgeometrie gegebenen kinematischen Möglichkeiten des Fahrzeugs. Dennoch kann dieses Modell aufgrund der Einfachheit auf einer übergeordneten Ebene durchaus nützlich sein. So kann dies beispielsweise genutzt werden, um Trajektorien zu planen, die dann unterlagert geregelt werden. Die durch das Fahrzeug gegebene Bedingungen sind dabei durch geeignete Randbedingungen einzuhalten.

Für Einparkvorgänge und die Planung „enger“ oder sehr dynamischer Trajektorien ist dieses Modell zu einfach.

### Einspurmodelle

Hier werden die Räder einer Achse zu einem Rad zusammengefasst. Im Unterschied zum Ackermannmodell werden die Räder aber nicht mehr mit idealer Seitenführung modelliert, sondern es findet in Abhängigkeit der Radkräfte auch eine Bewegung quer zur Laufrichtung statt.

Für den Zusammenhang zwischen Reifenkräften und Schräglaufwinkel gibt es verschiedene Modelle unterschiedlicher Komplexität.

Es gibt unterschiedliche Modellierungsgrade der Einspurmodelle:

- Lineare oder nichtlineare Modellierung
- Berücksichtigung dynamischer Radlasten

---

<sup>2</sup> Aus Gl. (2.1) ergibt sich als exakter Ausdruck für die Änderung des Kurswinkels, d. h. ohne die Annahme kleiner Änderungen, die Gleichung  $\delta \varphi_K = \varphi_L - \sin^{-1} \left( \left( 1 - \frac{\delta s}{l} \right) \cdot \sin \varphi_L \right)$ .

<sup>3</sup> Mathematisch gesehen. Praktisch ist für zu große Lenkwinkel die Ackermannannahme (kein Schieben über die Räder) nicht einzuhalten.

---

## **Zweispurmodelle**

Bei diesen Modellen werden die Räder einer Achse nicht mehr zusammengefasst. Zudem wird die Aufhängung (ohne oder mit deren Kinematik) in die Modellierung mit einbezogen. Damit wird auch die Wankdynamik berücksichtigt.

### 3 Fahrzeugführung

Ziel der Querführung ist es, mit dem Fahrzeug einen bestimmten Abstand zur Fahrbahnbegrenzung einzuhalten bzw. einem vorgegebenen Verlauf des Fahrzeuges relativ zur Fahrbahnbegrenzung zu folgen, um z. B. Manöver wie Spurwechsel durchzuführen. Bei der Längsführung geht es darum, die Geschwindigkeit des Fahrzeuges geeignet vorzugeben, um beispielsweise einen gewissen Abstand zum vorausfahrenden Fahrzeug einzuhalten. Bei Manövern wie Überholvorgängen oder dynamischeren Fahren ist eine mehr oder weniger enge Koordination von Längs- und Querführung erforderlich.

Im Rahmen des Projektseminars kann für die meisten Aufgaben einfach eine konstante Geschwindigkeit vorgegeben werden und sich auf die Querführung beschränkt werden.

In diesem Kapitel werden ein paar Ansätze vorgestellt bzw. ein paar Grundlagen gegeben.

#### Ansätze zur Querführung

Grundsätzlich kann man zwischen Ansätzen einer „klassischen“ Regelung, die auf der Messung des Abstandes eines Referenzpunktes zur Fahrbahnbegrenzung beruht, und steuerungsbasierten Ansätze, die ausgehend von einem bekannten Straßenverlauf eine günstige Trajektorie berechnen, unterscheiden. D. h. im zweiten Fall wird nicht nur die Stellgröße (z. B. Lenkwinkel) für den aktuellen Zeitpunkt, sondern auch für eine Reihe von zukünftigen Zeitpunkten bestimmt.

Eine reine Steuerung reicht jedoch nicht aus, da Fehler (z. B. auch ein ungenaues Modell der Lenkung) nicht ausgeglichen werden können. Somit kann entweder die Berechnung einer Trajektorie mit einer Regelung, die Abweichungen um diese Trajektorie ausregelt, kombiniert werden (Trajektorienfolgeregelung) oder die Berechnung der Trajektorie erfolgt ständig, so dass die Trajektorie immer wieder angepasst wird (modellprädikative Regelung, MPC).

Zuletzt können auch diese beiden Ansätze, Trajektorienfolgeregelung und MPC, kombiniert werden. Dabei werden in gewissen Abständen anhand der gegebenen Situation und Lage des Fahrzeuges neue Trajektorien berechnet (MPC-Ansatz) und zwischen diesen Neuberechnungen wird die Abweichung um die aktuell gültige Trajektorie über eine Regelung möglichst gering gehalten (Trajektorienfolgeregelung).

Zur Trajektorienfolgeregelung ist zu beachten, dass dazu eine einigermaßen sichere Bestimmung der Eigenposition auf der zu Beginn der Trajektorie gültigen Karte erforderlich ist. Dies ist mit der vorhandenen Sensorik jedoch nicht einfach durchzuführen. (Man könnte mit der Intertialsensorik arbeiten, die jedoch auf jeden Fall gestützt werden müsste. Dies ist wiederum ein sehr umfangreiches Thema. Was bei den gegebenen Fahrzeugen direkt unterlagert geregelt werden könnte, ist die Gierrate, da diese über einen Drehratensensor gemessen wird. Dies könnte sogar sinnvoll sein, jedoch ersetzt dies nicht eine Regelung der Position.)

Man könnte zwar auch versuchen, die Kamerabilder zu verwenden, um die eigene Position bezüglich der Ausgangslage zu bestimmen. Wenn dies aber mehr Zeit als die Neuberechnung einer Trajektorie in Anspruch nimmt, wäre es an dieser Stelle wenig sinnvoll.

Wahrscheinlich wäre es bei den steuerungsbasierten Ansätzen hier zunächst erfolgsversprechender, wenn diese in MPC-Form durchgeführt wird, und dabei zu versuchen, die Berechnungsdauer für eine Trajektorie zu optimieren. Dabei kann durchaus bei sehr langsamen Geschwindigkeiten begonnen werden.

---

## Klassische Regelung

In Abschnitt 3.1 wird das Ackermannmodell verwendet, um die Fahrt auf einer geraden Fahrbahn zu beschreiben. Ausgehend davon wird das Modell linearisiert. Dabei wird als Ausgangsgröße die Ablage eines Referenzpunktes des Fahrzeuges (welcher aber auch vor dem Fahrzeug liegen könnte) zur Fahrbahnbegrenzung betrachtet. Dies kann für den Entwurf einer klassischen Regelung verwendet werden, jedoch eignet sich dieses einfache Modell nur für Geraden bzw. Fahrbahnen mit geringen Krümmungen.

Ein Ansatz, der auf Messung des Abstandes eines Referenzpunktes beruht, dabei aber auch gekrümmte Straßen berücksichtigt, ist in [Trächtler, Lohmann und Struck 1992] beschrieben. Dieser wurde auch im Rahmen der studentischen Arbeit [Wassermann 2018] implementiert. (Wobei es dabei noch zu Problemen bei höheren Geschwindigkeiten gekommen ist. Dies liegt auch daran, dass die Messung über die Kamera mit einer Abtastfrequenz von 10 Hz und einer gewissen Totzeit durch die Bildverarbeitung erfolgt. Bei höheren Geschwindigkeiten, die bei den geringen Kurvenradien – auch im Vergleich zum Maßstab – sehr groß sind, wird die Regelung dann problematisch.)

## Steuerungsbasierte Ansätze

Beim steuerungsbasierten Ansatz kann z. B. versucht werden, den Sollpfad des Fahrzeuges einfach über Polynome (mit passenden Anfangs- und Endbedingungen) vorzugeben („Punkt“-Modell des Fahrzeuges) und dann die Ansteuerung der Lenkung zu berechnen, um dieser Kurve zu folgen. Dabei muss die Kurve ausreichend „weich“ verlaufen, damit das Fahrzeug dieser auch folgen kann und keine Überschreitungen des maximalen Lenkwinkels oder der maximalen Lenkwinkeländerung auftreten.

Dazu muss betrachtet werden, wie eine ebene Kurve mathematisch beschrieben werden kann und wie dann daraus eine Steuerung des Lenkwinkels oder der Ableitung des Lenkwinkels erfolgen kann. Hierzu ist in Abschnitt 3.2 eine Möglichkeit beschrieben.

Um die Sollkurve zu bestimmen, ist es wahrscheinlich günstig, in einem Bahnkoordinatensystem relativ zur erkannten Fahrbahnbegrenzung zu arbeiten. Dies wird in Abschnitt 3.3 erläutert. In diesem Abschnitt wird dann auch das Ackermannmodell in dem Bahnkoordinatensystem beschrieben. Dies stellt beispielsweise in [Gutjahr und Werling 2015] die Grundlage einer MPC dar, die das Ackermannmodell direkt im Entwurf der Steuerung berücksichtigt.

---

## 3.1 Querführung auf geraden Fahrbahnen

---

In den vergangenen Jahren des Projektseminars bestand der Kurs immer aus stückweise geraden Teilstücken. Betrachtet man jedes der Teilstücke für sich, bietet es sich an, die  $x$ -Richtung als Fahrbahnrichtung und die  $y$ -Richtung als Abstand zur Wand (welche den Fahrbahnrand darstellte) zu wählen. Als den über  $l_H$  gegebenen Referenzpunkt bietet sich die Position des seitlichen Ultraschallsensors an, der als wesentlicher Sensor verwendet wurde.

Auch wenn in diesem Jahr die Fahrt in Fahrbahnen mit relativ engen Kurven erfolgt, so lassen sich an diesem einfachen Modell grundsätzliche Erkenntnisse ableiten, so dass dieses hier kurz besprochen wird.

Geht man von normaler Geradeausfahrt aus, so können kleine Kurswinkel  $\varphi_K$  angenommen werden. Die  $x$ -Position spielt für die Aufgabe, die Spur, d. h. den Abstand zur Wand, zu halten keine Rolle, und so verbleiben die Differentialgleichungen

$$\dot{\varphi}_K = \frac{v}{l} \cdot \tan \varphi_L$$
$$\dot{y} = v \cdot \sin \varphi_K + v \cdot \frac{l_H}{l} \cdot \cos \varphi_K \cdot \tan \varphi_L.$$

## Linearisierung

Für kleine Kurswinkel gilt  $\sin \varphi_K \approx \varphi_K$  und  $\cos \varphi_K \approx 1$ , womit man

$$\dot{\varphi}_K = \frac{v}{l} \cdot \tan \varphi_L$$
$$\dot{y} = v \cdot \varphi_K + v \cdot \frac{l_H}{l} \cdot \tan \varphi_L$$

erhält. (Für die nicht mehr betrachtete  $x$ -Richtung ergäbe sich  $\dot{x} = v$ .)

Nimmt man zusätzlich kleine Lenkwinkel an, so kann  $\tan \varphi_L \approx \varphi_L$  gesetzt werden, womit sich

$$\dot{\varphi}_K = \frac{v}{l} \cdot \varphi_L$$
$$\dot{y} = v \cdot \varphi_K + v \cdot \frac{l_H}{l} \cdot \varphi_L$$

ergibt.

Allgemeiner kann die Nichtlinearität der Eingangsgröße über ein „Vorfilter“  $\varphi_L^* = \tan \varphi_L$  berücksichtigt werden. D. h. das System lautet bezüglich der neuen Eingangsgröße  $\varphi_L^*$

$$\dot{\varphi}_K = \frac{v}{l} \cdot \varphi_L^*$$
$$\dot{y} = v \cdot \varphi_K + v \cdot \frac{l_H}{l} \cdot \varphi_L^*.$$

Nun liese sich ein linearer Regler auslegen, der die Eingangsgröße  $\varphi_L^*$  fordert. Diese kann dann über  $\varphi_L = \tan^{-1} \varphi_L^*$  in die tatsächliche Eingangsgröße umgerechnet werden.

## Systemdarstellung

Mit der Eingangsgröße  $\varphi_L^*$  und der Ausgangsgröße  $y$  ergibt sich die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\varphi}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ \varphi_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \cdot \frac{l_H}{l} \\ \frac{v}{l} \end{bmatrix} \cdot \varphi_L^*$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ \varphi_K \end{bmatrix}$$

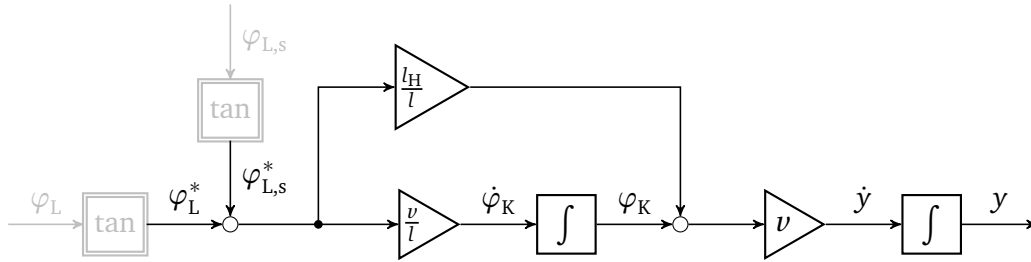
bzw. die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{v \cdot l_H}{l} \cdot \frac{\frac{v}{l_H} + s}{s^2}.$$

Eine Blockschaltdarstellung ist in Abbildung 3.1 gezeigt.

## Diskussion

Das System besitzt zwei Pole in Null (Integratoren) und eine Nullstelle. Für negative Geschwindigkeiten ( $v < 0$ ) ist die Nullstelle positiv und das System damit nicht minimalphasig. Dies weist aus regelungstechnischer Sicht darauf hin, dass das rückwärtsfahrende Fahrzeug deutlicher schwieriger zu regeln ist. (Anschaulich schlägt der Referenzpunkt zunächst immer gegen die eigentlich gesteuerte Richtung aus. Dies ist ein für nicht minimalphasige Systeme charakteristisches Verhalten.)



**Abbildung 3.1:** Ackermannmodell in Blockschaltbilddarstellung (für kleine Kurswinkel  $\varphi_K$ )

Die beiden Integratoren und der damit einhergehende Phasenabfall sind kritisch für die Regelung. So muss der Regler einen D-Anteil besitzen. Ein reiner P-Regler würde praktisch zu einem sehr schwach gedämpften Systemverhalten führen.

Die wesentliche Störung ist ein Fehler in der Lenkung (Spiel, nicht exakt arbeitende Servos, Fehler in der Nulllage). Dieser ist in Abbildung 3.1 als Störgröße  $\varphi_{L,s}$  bzw.  $\varphi_{L,s}^*$  dargestellt. Diese Störung wirkt direkt am Streckeneingang, so dass für eine stationär genaue Regelung trotz der beiden I-Anteile der Strecke ein I-Anteil im Regler notwendig ist. (Das vereinfachte Nyquistkriterium, d. h. das Kriterium über Amplituden- bzw. Phasenreserve ist für ein System mit drei Integratoren nicht mehr anwendbar. D. h. eine stabilisierende Regelung ist prinzipiell auch hier möglich, wobei diese praktisch relativ langsam werden wird.)

### 3.2 Steuerung einer gegebenen Kurve

In diesem Abschnitt soll die Steuerung zu einer gegebenen Kurve berechnet werden. D. h. es ist eine ebene Kurve gegeben, und es soll angegeben werden, wie die Lenkung zu steuern ist, damit das Fahrzeug dieser Kurve folgt. Dabei wird als Referenzpunkt der Mittelpunkt der Hinterachse betrachtet.

#### 3.2.1 Beschreibung parametrischer Kurven in der Ebene

Es bietet sich hier eine parametrische Darstellung der Kurve an. D. h. die Kurve wird nicht in der expliziten Form  $y(x)$ , sondern die  $x$ - und  $y$ -Koordinate getrennt in Abhängigkeit einer Unabhängigen  $p$  beschrieben,

$$\begin{bmatrix} x(p) \\ y(p) \end{bmatrix}.$$

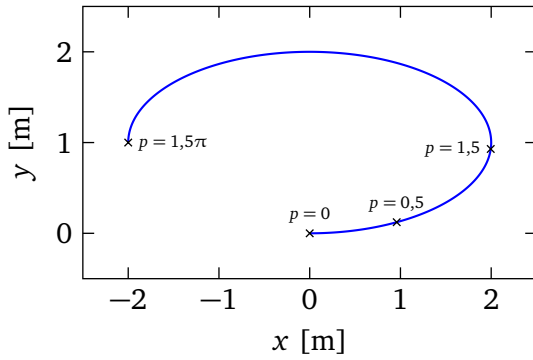
Diese Darstellung hat unter Anderem den Vorteil, dass damit auch Kurven wie in Abbildung 3.2a gezeigt darstellbar sind, die überhaupt nicht in der Form  $y(x)$  oder  $x(y)$  darstellbar sind. Das gezeigte Beispiel zeigt eine Drei-Viertel-Ellipse,

$$\begin{bmatrix} 2 \sin p \\ 1 - \cos p \end{bmatrix} \cdot 1 \text{ m}, \quad p \in [0, \frac{3}{2}\pi].$$

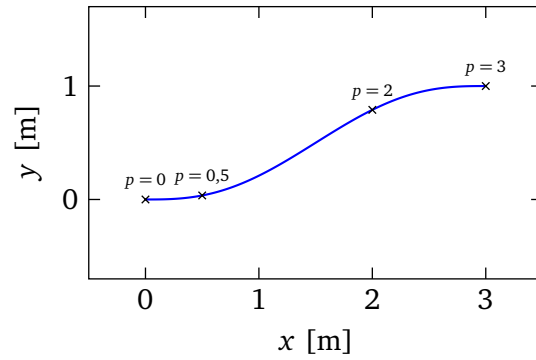
Das Beispiel in Abbildung 3.2b, ein S-förmiger Verlauf, ist über

$$\begin{bmatrix} a_5 p^5 + a_4 p^4 + a_3 p^3 \end{bmatrix} \cdot 1 \text{ m}, \quad p \in [0, 3]$$

gegeben, wobei die Koeffizienten  $a_5$ ,  $a_4$  und  $a_3$  so gewählt sind, dass für  $p = 3$  die seitliche Ablage  $y = 1 \text{ m}$  beträgt und, wie für  $p = 0$ , die ersten beiden Ableitungen Null sind,  $y'(3) = 0$  und  $y''(3) = 0$ .



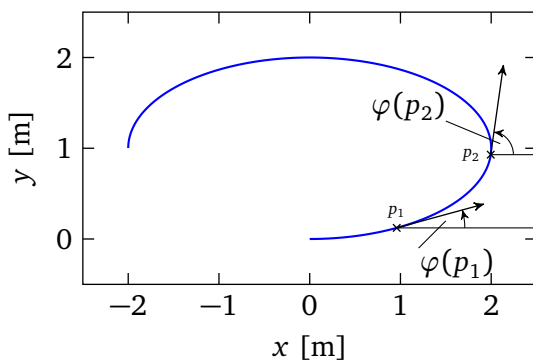
(a) Beispiel 1: Drei-Viertel-Ellipse



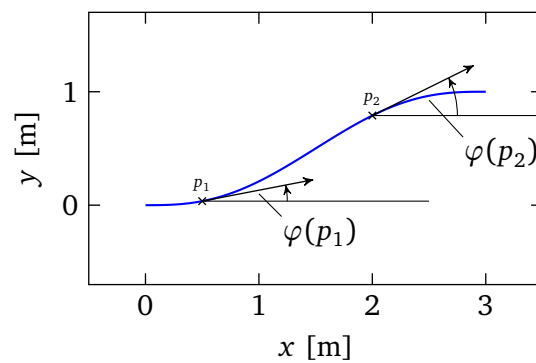
(b) Beispiel 2: S-Kurve

**Abbildung 3.2:** Beispiele für parametrische Kurven

An jedem Punkt dieser Kurve, d. h. für jedes  $p$  lässt sich ein Tangentenvektor anzeichnen. Der Winkel, der dieser mit der positiven  $x$ -Achse bildet, wird hier mit  $\varphi$  bezeichnet, und hängt von dem betrachteten Punkt auf der Kurve ab,  $\varphi(p)$ . Dies ist für die Beispiele in Abbildung 3.3 für jeweils zwei Punkte dargestellt.



(a) Beispiel 1: Drei-Viertel-Ellipse



(b) Beispiel 2: S-Kurve

**Abbildung 3.3:** Winkel der Tangenten

Die Krümmung der Kurve kann über die parametrische Darstellung der Kurve über

$$\kappa = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

berechnet werden, wobei die Striche hier für die Ableitung nach dem Parameter  $p$  stehen. Für das Beispiel 1 gilt also (die Einheit Meter ist hier der Übersichtlichkeit halber nicht angegeben)

$$x(p) = 2 \sin p$$

$$x'(p) = 2 \cos p$$

$$x''(p) = -2 \sin p$$

$$y(p) = 1 - \cos p$$

$$y'(p) = \sin p$$

$$y''(p) = \cos p$$

und für das Beispiel 2

$$x(p) = p$$

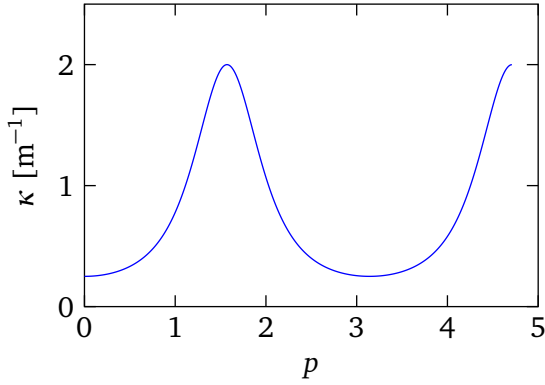
$$x'(p) = 1$$

$$x''(p) = 0$$

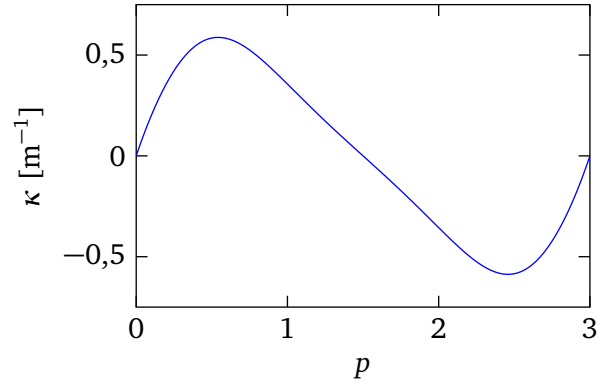
$$y(p) = a_5 p^5 + a_4 p^4 + a_3 p^3 \quad y'(p) = 5a_5 p^4 + 4a_4 p^3 + 3a_3 p^2 \quad y''(p) = 20a_5 p^3 + 12a_4 p^2 + 6a_3 p.$$

Der Verlauf der Krümmung ist für die beiden Beispiele in Abbildung 3.4 gezeigt.



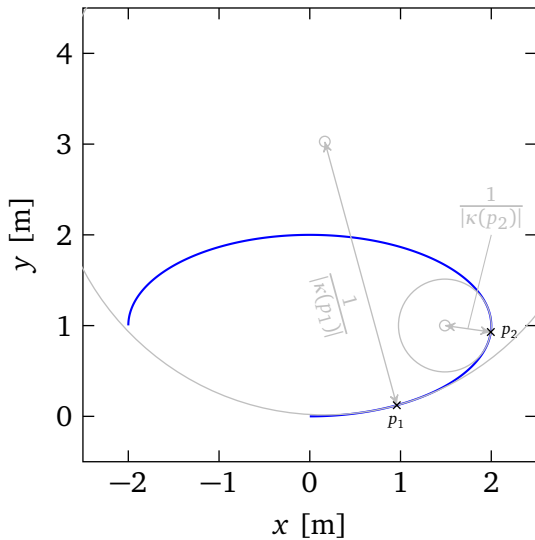


(a) Beispiel 1: Drei-Viertel-Ellipse

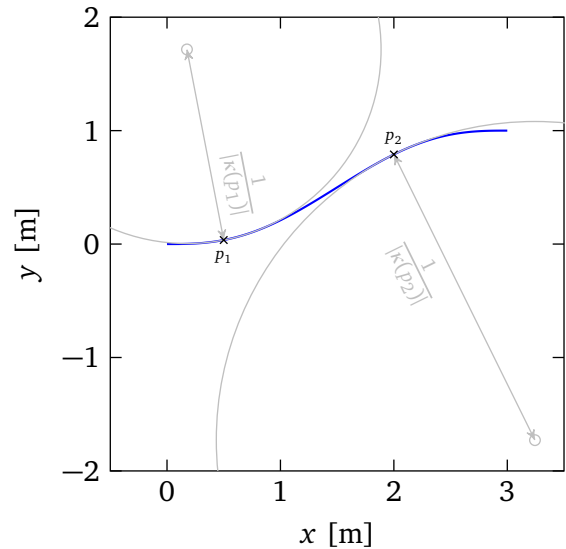


(b) Beispiel 2: S-Kurve

**Abbildung 3.4:** Krümmungen der Beispielkurven



(a) Beispiel 1: Drei-Viertel-Ellipse



(b) Beispiel 2: S-Kurve

**Abbildung 3.5:** Zur Bedeutung der Krümmung

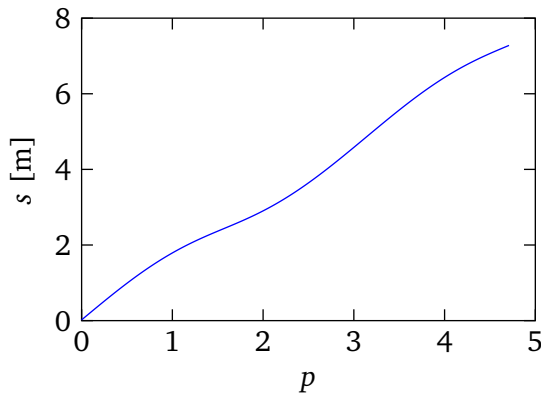
Der Kehrwert des Betrages der Krümmung  $\kappa(p)$  gibt den Radius des Kreises an, der sich an der „Stelle“  $p$  an die Kurve anschmiegt, wie in Abbildung 3.5 dargestellt.

Für das Beispiel wurde die Unabhängige  $p$  der Parametrierung willkürlich gewählt, bzw. ist es die naheliegende Parametrierung des gewünschten Kurvenverlaufes. Wenn jedoch später die Position auf der Kurve bzw. parameterabhängige Werte wie  $\varphi_L(t)$  oder  $\dot{\varphi}_L(t)$  zusammenkommen, ist es günstiger, die Kurve über deren Bogenlänge  $s$  zu parametrieren.

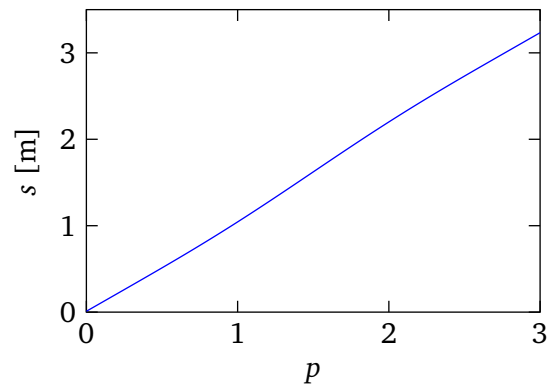
Die Bogenlänge ausgehend von  $p_0$  zu  $p$  beträgt

$$s(p) = \int_{p_0}^p \sqrt{x'(\tilde{p})^2 + y'(\tilde{p})^2} \cdot d\tilde{p}.$$

Dies ist meist gar nicht oder nur sehr aufwändig analytisch zu berechnen. Für diese Beispiele ist es daher numerisch gelöst.



(a) Beispiel 1: Drei-Viertel-Ellipse



(b) Beispiel 2: S-Kurve

**Abbildung 3.6:** Bogenlänge in Abhängigkeit der Parametrierung

Damit gilt auch

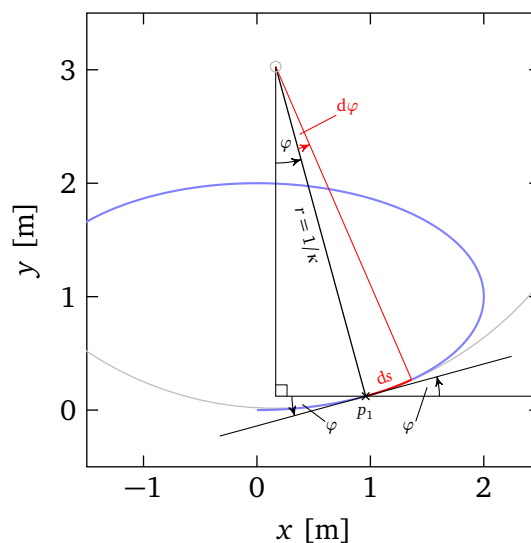
$$\frac{ds}{dp} = \sqrt{x'(p)^2 + y'(p)^2}.$$

Ist ein Zusammenhang  $p = p(s)$  gefunden (analytisch oder numerisch), kann die Kurve entsprechend umparametrisiert werden,

$$\begin{bmatrix} x(p(s)) \\ y(p(s)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s(s) \\ y_s(s) \end{bmatrix}.$$

Analog lassen sich auch alle weiteren Größen wie z. B. die Krümmung dann über  $\kappa(p(s)) = \kappa_s(s)$  oder der Tangentenwinkel  $\varphi(p(s)) = \varphi_s(s)$  in Abhängigkeit der Bogenlänge angeben.

Wird eine Kurve über die Bogenlänge parametrisiert, gilt ein wesentlicher Zusammenhang zwischen der Krümmung  $\kappa$  der Kurve und die Ableitung des Tangentenwinkels  $\varphi$  nach der Bogenlänge. Dieser lässt sich aus Abbildung 3.7 ableiten.



**Abbildung 3.7:** Zum Zusammenhang zwischen Krümmung und Ableitung des Tangentenwinkels nach der Bogenlänge

Dort ist der Zusammenhang zwischen einer infinitesimalen Änderung des Tangentenwinkels,  $d\varphi$ , der sich damit ergebenden Änderung der Bogenlänge,  $ds$ , und dem Radius  $r = 1/\kappa$  des sich in dem betrachteten Punkt an die Kurve anschmiegenden Kreis. Es gilt

$$ds = r \cdot d\varphi$$

woraus

$$\kappa = \frac{d\varphi|_s}{ds} \quad (3.1)$$

folgt. Die hierbei auftretende Ableitung muss – wie hier deutlich gemacht – nach der Bogenlänge (und nicht nach einem beliebigen Parameter  $p$ ) erfolgen.

Eine positive Krümmung entspricht demnach einem im mathematischen Sinne zunehmenden Winkel (d. h. eine Linkskurve, wenn die Kurve wie üblich mit steigenden Werten von  $p$  durchfahren wird) und eine negative Krümmung entsprechend einer Rechtskurve.

Geht man davon aus, dass auch ein Zusammenhang zwischen der Bogenlänge  $s$  und der Zeit  $t$  besteht, also z. B.  $t = t(s)$  geschrieben werden kann, dann kann entsprechend  $\varphi|_s(s) = \varphi|_t(t(s))$  geschrieben werden.

Hieraus folgt ein weiterer, wesentlicher Zusammenhang mit den zeitabhängigen Größen, indem mit der Kettenregel

$$\kappa = \frac{d\varphi|_s}{ds} = \frac{d\varphi|_t}{dt} \frac{dt}{ds}$$

geschrieben wird. Da  $\frac{ds}{dt} = v$ , also die „Geschwindigkeit“ der Kurve ist, erhält man weiter

$$\kappa = \dot{\varphi} \cdot \frac{1}{v} . \quad (3.2)$$

Streng genommen müssten die Funktionen in Abhängigkeit ihrer Unabhängigen unterschieden werden. Bezeichnet  $\kappa(p)$  die Krümmung bezüglich der ursprünglichen Parametrierung, so wäre

$$\kappa|_s(s) = \kappa(p(s))$$

die Krümmung bezüglich der Bogenlänge  $s$  und

$$\kappa|_t(t) = \kappa|_s(s(t)) = \kappa(p(t))$$

die Krümmung bezüglich der Zeit.

Die Gleichungen sind immer gültig, solange alle abhängigen Größen bezüglich der gleichen Unabhängigen gegeben sind, d. h. z. B.

$$\kappa(p) = \dot{\varphi}|_p \cdot \frac{1}{v(p)}$$

$$\kappa|_s(s) = \dot{\varphi}|_s \cdot \frac{1}{v|_s(s)}$$

$$\kappa|_t(t) = \dot{\varphi}|_t \cdot \frac{1}{v|_t(t)} ,$$

wobei hier wichtig ist, dass  $\dot{\varphi}$  immer die Zeitableitung der – natürlich – zeitabhängigen Funktion bezeichnet,  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi|_t}{dt}$ ! Das Ergebnis der Ableitung kann dann aber bezüglich  $p$ ,  $s$  oder  $t$  angegeben sein.

Ebenso kann die Gleichung (3.1) bezüglich  $p$ ,  $s$  oder  $t$  als Unabhängigen angegebenen werden, jedoch ist dort auftretende Ableitung immer nach der Bogenlänge  $s$  zu bilden.

Da die Gleichungen in diesem Sinne „universell“ sind, werden hier wie in Gl. (3.2) meist gar keine Unabhängigen explizit angegeben.

### 3.2.2 Berechnung der Steuerung

Die Differentialgleichung für den Kurswinkel wurde als

$$\dot{\varphi}_K = \frac{v}{l} \cdot \tan \varphi_L \quad (3.3)$$

hergeleitet (Gl. (2.2)), wobei die Geschwindigkeit  $v$  nicht konstant sein muss.

Der Mittelpunkt der Hinterachse soll der Kurve folgen. Da hier davon ausgegangen wird, dass die Geschwindigkeit an der Hinterachse immer in Fahrzeugrichtung zeigt (Annahme des Ackermannmodells), bedeutet das, dass der Kurswinkel des Fahrzeugs immer tangential auf der abzufahrenden Kurve steht, und damit

$$\kappa = \frac{d\varphi_K}{ds}$$

gelten muss.

Da die kinematische Differentialgleichung bezüglich der Zeit gegeben ist, wird die Ableitung  $\frac{d\varphi_K}{ds}$  über die Kettenregel als

$$\frac{d\varphi_K}{ds} = \frac{d\varphi_K}{dt} \frac{dt}{ds} = \dot{\varphi}_K \cdot \frac{1}{v(t)}$$

geschrieben (siehe auch Gl. (3.2)). Damit erhält man über

$$\dot{\varphi}_K = \kappa \cdot v$$

den Zusammenhang

$$\kappa \cdot l = \tan \varphi_L \quad (3.4)$$

zwischen Krümmung und Lenkwinkel. Somit kann über

$$\varphi_L = \tan^{-1}(\kappa \cdot l) \quad (3.5)$$

der notwendige Lenkwinkel berechnet werden.

Da der Lenkwinkel jedoch nicht beliebig schnell gestellt werden kann, wird in der Regel die Steuerung bezüglich der zeitlichen Ableitung des Lenkwinkels,  $\dot{\varphi}_L$ , angegeben.

Ableiten des Zusammenhangs (3.4) nach der Zeit ergibt

$$\dot{\kappa} \cdot l = \frac{1}{\cos^2 \varphi_L} \dot{\varphi}_L \cdot$$

Mit

$$\dot{\kappa} = \frac{d\kappa}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\kappa}{ds} \cdot v$$

erhält man daraus

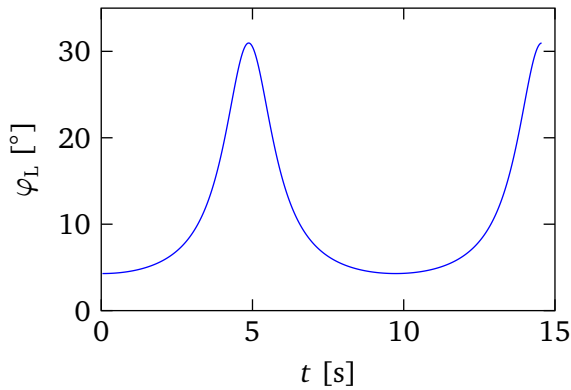
$$\dot{\varphi}_L = \frac{d\kappa}{ds} \cdot v \cdot l \cdot \cos^2 \varphi_L. \quad (3.6)$$

Für eine gegebene Kurve und einen gegebenen Geschwindigkeitsverlauf kann anhand dieser Gleichung die notwendige Steuerung der Lenkwinkelableitung berechnet werden. Für kleine Lenkwinkel kann dabei die Näherung

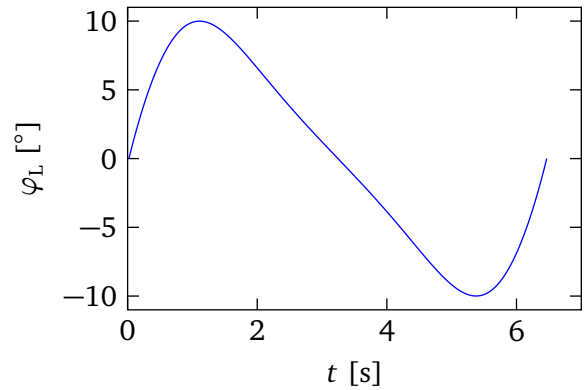
$$\dot{\varphi}_L \approx \frac{d\kappa}{ds} \cdot v \cdot l \quad (3.7)$$

verwendet werden, für größere Lenkwinkel muss die Integralgleichung integriert werden. Alternativ zu der Integration der DGL kann auch zunächst der Verlauf des Lenkwinkels über Gl. (3.5) berechnet und dieser dann bezüglich der Zeit abgeleitet werden.

Für die beiden Beispielkurven sind die nach Gl. (3.5) numerisch berechneten Lenkwinkelverläufe in Abbildung 3.8 gezeigt, wobei in beiden Fällen die Fahrzeuggeschwindigkeit konstant  $v = 0,5 \text{ m/s}$  beträgt. Diese beeinflusst hier aber auch nur die Skalierung der Abszissenachse. Würde man den Verlauf des Lenkwinkels über der Bogenlänge auftragen, so würde sich kein Unterschied bei verschiedenen Geschwindigkeiten zeigen. Dies liegt daran, dass hier ein rein kinematisches Modell zugrunde gelegt ist. (Die hier nicht gezeigte Zeitableitung des Lenkwinkels skaliert mit der Geschwindigkeit. Je schneller gefahren wird, desto schneller muss gelenkt werden.)



(a) Beispiel 1: Drei-Viertel-Ellipse

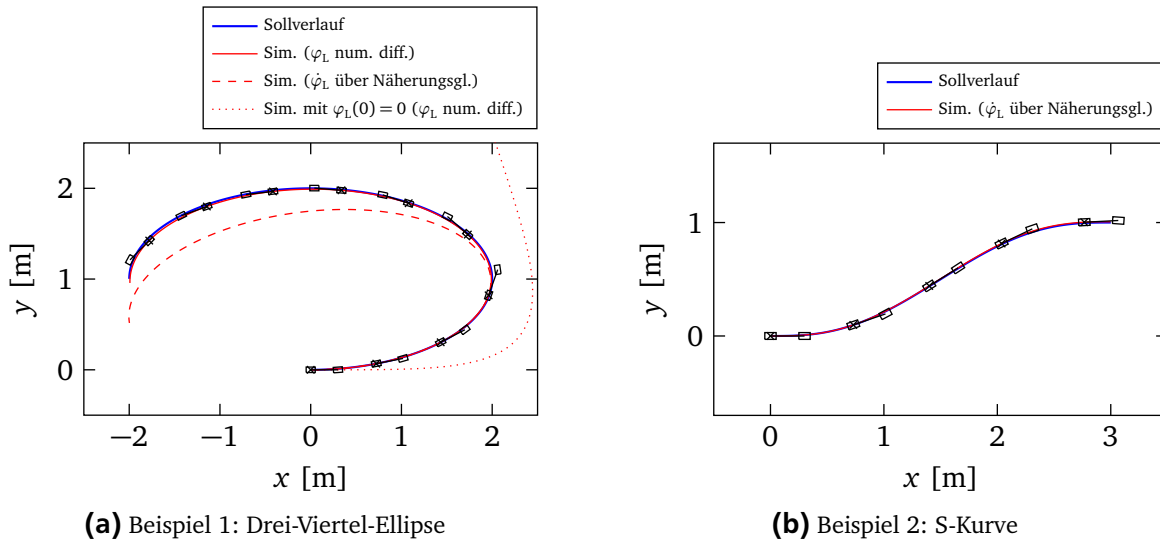


(b) Beispiel 2: S-Kurve

**Abbildung 3.8:** Berechnete notwendigen Lenkwinkel

In Abbildung 3.9 ist das Ackermannmodell mit der Lenkwinkeldynamik  $\dot{\varphi}_L = u$  für die berechneten Stellgrößen simuliert. Für das zweite Beispiel, Abbildung 3.9b, ist zur Berechnung der Stellgröße nur der vereinfachte Zusammenhang (3.7) verwendet. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung der simulierten Kurve (rot) mit dem Sollverlauf (blau). An verschiedenen Stellen ist zur Orientierung noch das Einspurfahrzeug dargestellt.

Für das erste Beispiel zeigt in Abbildung 3.9a die rote Strichlinie das Ergebnis, wenn auch hier der vereinfachte Zusammenhang (3.7) verwendet wird. Durch den großen Lenkwinkel in den engen Teilstücken (siehe Abbildung 3.8a) ist die Näherung hier nicht mehr ausreichend. Berechnet man die Ableitung des



**Abbildung 3.9:** Simulierte Steuerungen (Ackermannmodell, Eingangsgröße  $\dot{\varphi}_L$ )

Lenkwinkels über die numerische Ableitung des Ergebnisses von Gl. (3.5) ergibt sich hier (472 Stützstellen, äquidistant bezüglich  $p$ ) das mit der roten Volllinie gezeigte Ergebnis. Am Ende der Kurve liegt eine sichtbare, aber noch geringe Abweichung vor. Die rote Punktlinie verdeutlicht nochmal, dass es wesentlich ist, vom richtigen Anfangswert auszugehen. Hier ist als Anfangswert des Lenkwinkels Null gewählt, und es ergibt sich ein ganz anderer Verlauf. In den beiden anderen Fällen ist der Anfangswert über Gl. (3.5) basierend auf  $\kappa(0)$  berechnet.

Die vorgegebene Fahrbahn besteht aus Geraden- und Kreissegmenten und ist damit nicht glatt im Sinne, dass eine Unstetigkeit in der zweiten Ableitung auftritt. D. h. die Krümmung  $\kappa$  ändert sich sprunghaft<sup>a</sup> und es muss anschaulich mit dem Lenkrad ruckartig eingelenkt werden. In der Realität sind die Kurven daher aus Klothoiden aufgebaut, bei denen sich die Krümmung stetig ändert.

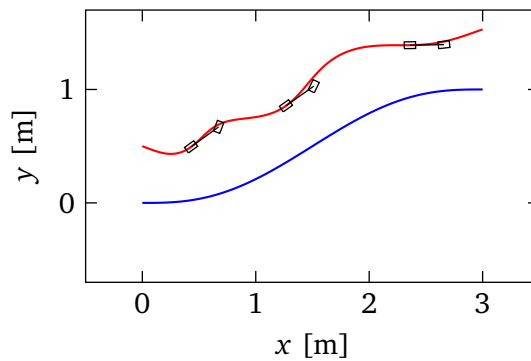
Dies sollte im Grunde bei der Generierung einer Solltrajektorie beachtet werden. Andererseits wird diese Problematik ohnehin nicht auftreten, wenn die Fahrbahnmarkierungen nicht explizit mit Geraden- und Kreissegmenten, sondern mit ausreichend glatten Kurven gefittet werden. Eher wird dabei das Problem auftreten, dass eine optisch noch sehr glatte Kurve (z. B. ein Spline) in der zweiten Ableitung doch noch zu wellig verläuft, und eine auf einer solchen Kurve basierenden Steuerung ein sehr unruhiges Lenkverhalten aufweist.

<sup>a</sup> Auf den Geraden ist die Krümmung Null, auf den Kreissegmenten entspricht die Krümmung gerade dem Kehrwert des Radius, der gefahren werden soll.

### 3.3 Gekrümmte Fahrbahnen

Es kann sinnvoll sein, die Bewegung des Fahrzeuges bezüglich einer Referenzkurve zu beschreiben. Diese könnte durch eine Fahrbahnbegrenzung gegeben sein oder – für eine Trajektorienfolgeregelung – einer durch eine Steuerung berechneten Kurve entsprechen.

In Abbildung 3.10 ist die Kurve des zweiten Beispiels als Referenzkurve eingezeichnet, die hier eine Fahrbahnbegrenzung darstellt. Zusätzlich ist ein – etwas unruhiger – Verlauf des Fahrzeugpfades, d. h. des Mittelpunktes der Hinterachse, eingezeichnet.



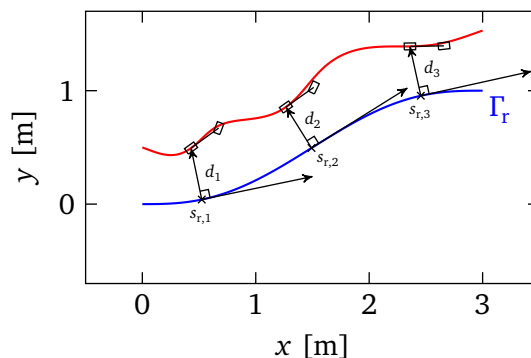
**Abbildung 3.10:** Fahrzeugpfad und Referenzkurve

In diesem Fall wäre es sinnvoll, die Bewegung des Fahrzeuges bezüglich der Referenzkurve zu beschreiben. Zu diesem Zweck werden über die Referenzkurve Bahnkoordinaten eingeführt.

### Beschreibung eines Pfades in Bahnkoordinaten

Die Referenzkurve ist mit  $\Gamma_r$  bezeichnet. Deren Bahnlängenparameter ist  $s_r$  und die Krümmung ist  $\kappa_r$ . Der Winkel der Tangenten ist  $\varphi_r$ .

Die Angabe der Position des Fahrzeuges erfolgt dann in Bahnkoordinaten bezüglich  $\Gamma_r$ . D. h. die Position des Fahrzeuges wird nicht mehr durch  $x$  und  $y$ , sondern durch die Stelle  $s_r$  der Referenzkurve, deren Lot das Fahrzeug trifft, und den Abstand  $d$  des Fahrzeuges (Hinterachse) zu dieser Kurve beschrieben. Dies ist in Abbildung 3.11 dargestellt.



**Abbildung 3.11:** Beschreibung des Fahrzeugpfades in Bahnkoordinaten der Referenzkurve

Die Zuordnung des aktuellen (Start-)Punktes des Fahrzeuges zu dem passenden  $s_r$  der Referenzkurve ist ein wesentlicher Schritt.

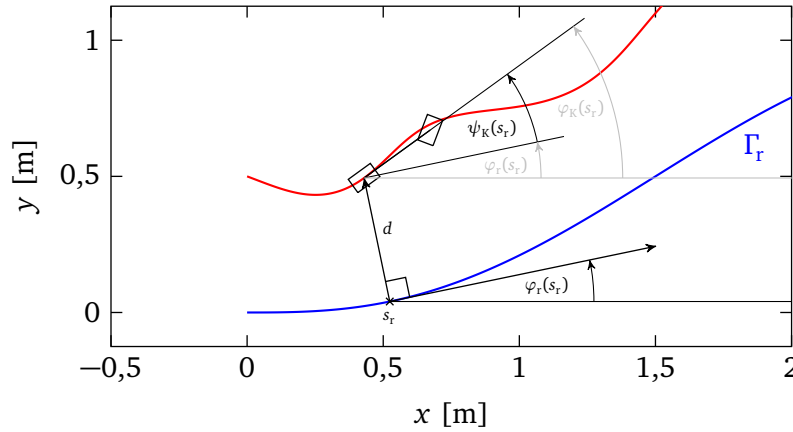
Es ist im Allgemeinen nicht eindeutig, einem gegebenen Punkt  $(x, y)$  in der Ebene den Bahnkoordinaten zuzuordnen. Auf einem Rundkurs wird es für jeden Punkt mindestens zwei Möglichkeiten geben, wovon aber nur einer relevant ist. Dabei ist die Auswahl des „korrekten“ Punktes in der Regel aber leicht möglich (solange keine Kreuzungen auftreten). Problematischer kann es werden, wenn die tatsächliche oder der erkannte Verlauf der Fahrbahn zu unruhig ist, und sich in unmittelbarer Nähe des Punktes mehrere Möglichkeiten ergeben.

Aber auch dies sollte im Rahmen des Projektseminars eine geringere Rolle spielen, da die Kamera ohnehin nicht den Verlauf der Markierungen neben dem Fahrzeug erfassen kann. Somit muss man sich hier überlegen, wie die Fahrbahn auf geeignete Weise in Richtung des Fahrzeuges „verlängert“ werden kann.

Die Orientierung kann ebenfalls bezogen auf den Tangentenvektor der Referenzkurve erfolgen und in diesem Fall mit  $\psi$  bezeichnet. So ist

$$\psi_K = \varphi_K - \varphi_r$$

der Kurswinkel relativ zu dem Bahnkoordinatensystem, Abbildung 3.12.



**Abbildung 3.12:** Beschreibung der Fahrzeugorientierung

Der Geschwindigkeitsvektor des Fahrzeuges der Länge  $v$ , der – da auch weiterhin das Ackermannmodell angenommen wird – in Fahrzeugsängsrichtung zeigt, kann damit in einen Anteil der Länge

$$v_{t,r} = v \cdot \cos(\psi_K) = v \cdot \cos(\varphi_K - \varphi_r),$$

der in Richtung des Tangentenvektors des Koordinatensystems zeigt, und einen Anteil senkrecht dazu der Länge

$$v_{n,r} = v \cdot \sin(\psi_K) = v \cdot \sin(\varphi_K - \varphi_r)$$

zerlegt werden.

Der senkrechte Anteil  $v_{n,r}$  entspricht der zeitlichen Änderung des Abstandes  $d$  des Fahrzeuges zur Referenzkurve,

$$\dot{d} = v_{n,r} = v \cdot \sin(\psi_K).$$

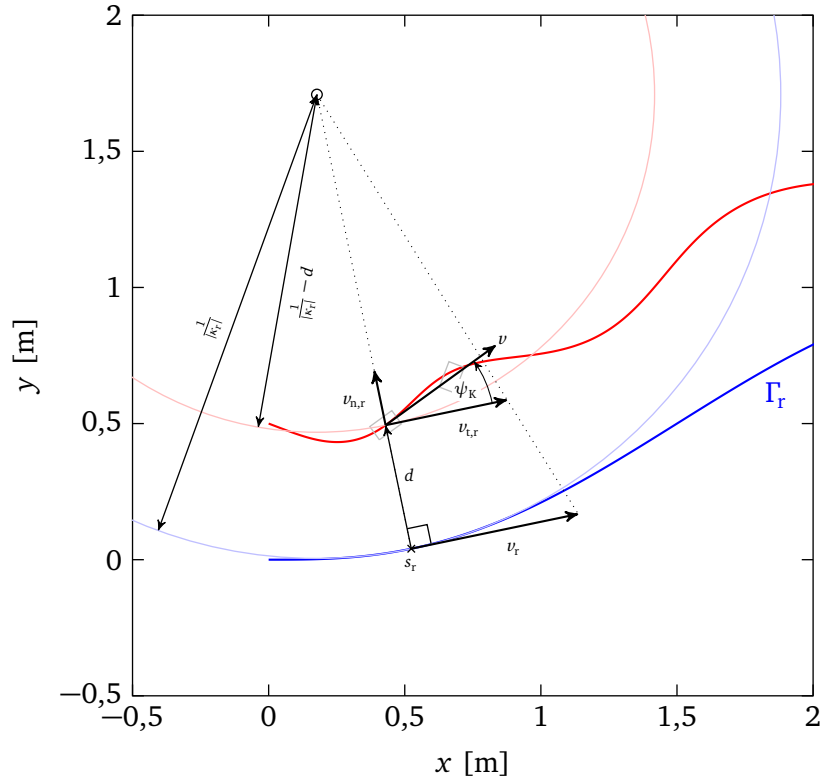
Zuletzt fehlt nur noch der Zusammenhang zwischen der Fahrzeuggeschwindigkeit  $v$  und der „Geschwindigkeit“  $v_r$ , mit der sich der Referenzpunkt  $s_r$  auf der Referenzkurve bewegt. Diese entspricht bei gekrümmten Kurven nicht dem Anteil  $v_{t,r}$ , da noch die verschiedenen Radien berücksichtigt werden müssen. (Angenommen die Referenzkurve sei ein Kreis mit dem Radius 2 m und das Fahrzeug bewegt sich auf einer konzentrischen Kreisbahn mit dem Radius 1 m. Dann muss sich der Punkt  $s_r$  doppelt so schnell wie das Fahrzeug bewegen.)

Anhand Abbildung 3.13 lässt sich erkennen, dass das Verhältnis von  $v_r$  und  $v_{t,r}$  über

$$\frac{v_r}{v_{t,r}} = \frac{\kappa_r^{-1}}{\kappa_r^{-1} - d}$$

ausgedrückt werden kann. Da hier eine Linkskurve abgebildet ist, ist  $\kappa_r$  am gezeigten Punkt positiv. Dadurch, dass die Krümmung für Rechtskurven negativ ist, gilt dieser Zusammenhang immer. Davon kann man sich überzeugen, indem man die Situation für die verbleibenden drei Fälle der insgesamt vier Möglichkeiten (Links- oder Rechtskurve, positives oder negatives  $d$ ) skizziert.





**Abbildung 3.13:** Zur Bestimmung des Zusammenhangs zwischen  $v_{t,r}$  und  $v_r$

Kritisch ist der Fall, wenn  $d$  betragsmäßig größer als  $\kappa_r^{-1}$  ist. Vom grundsätzlichen Verlauf des Kurses her sollte dies ausgeschlossen sein. Eine zu kleinteilige und wellige Beschreibung der gefundenen Ränder könnte hier aber zu Problemen führen.

Umstellen der Gleichung ergibt dann

$$v_r = v \cdot \cos(\psi_K) \cdot \frac{1}{1 - \kappa_r d} .$$

Für den Fall einer konstanten Fahrzeuggeschwindigkeit von  $v = 0,5 \text{ m/s}$  sind in Abbildung 3.14 die sich ergebenden Verläufe von  $v_r$ ,  $s_r$ ,  $d$  und  $\psi_K$  über der Zeit dargestellt.

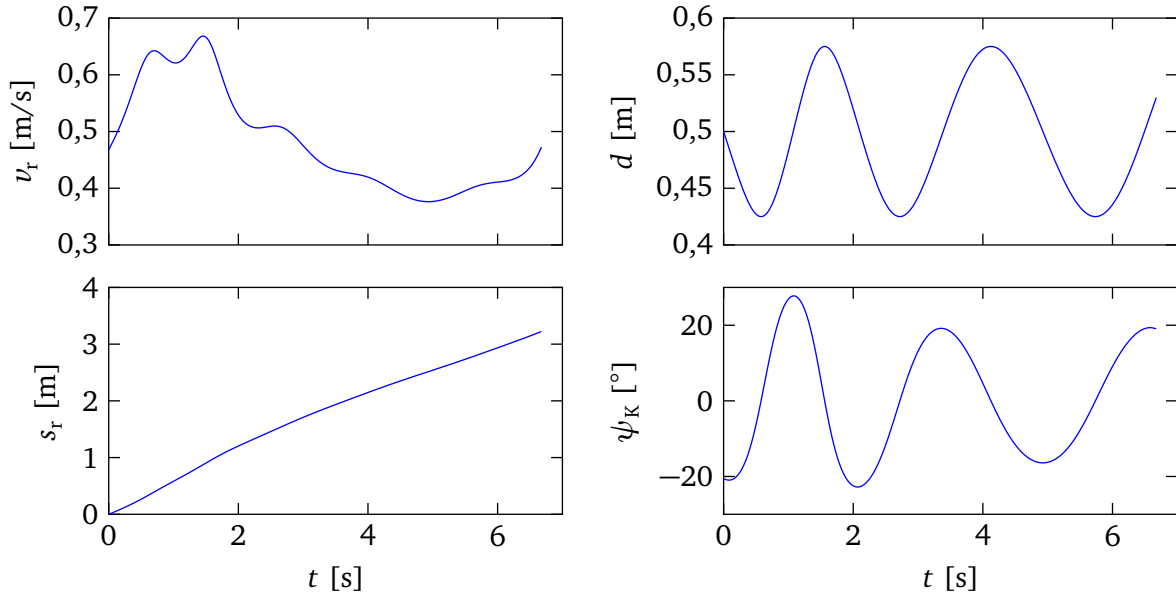
### Ackermannmodell in Bahnkoordinaten

Die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{s}_r &= v \cdot \cos(\psi_K) \cdot \frac{1}{1 - \kappa_r d} \\ \dot{d} &= v \cdot \sin(\psi_K) \end{aligned}$$

ersetzen im Ackermannmodell (2.2)-(2.4) die Differentialgleichungen für  $x$  und  $y$ . Die Differentialgleichung des Kurswinkels,

$$\dot{\psi}_K = \frac{v}{l} \cdot \varphi_L ,$$



**Abbildung 3.14:** Bewegung des Fahrzeuges relativ zur Referenzkurve

bleibt erhalten, und es gilt dann

$$\psi_K = \varphi_K - \varphi_r,$$

wobei sich  $\varphi_r$  über die gegebene Referenzkurve an der Stelle  $s_r$  ergibt.

Um zu berücksichtigen, dass die Lenkwinkel nicht beliebig schnell gestellt werden können, kann, wie auch schon oben gemacht, als Stellgröße  $u$  die Ableitung der Krümmung *des Fahrzeuges* verwendet werden,

$$\dot{\kappa} = u.$$

In dem Fall wird die Differentialgleichung des Kurswinkels in der Form

$$\dot{\varphi}_K = v \cdot \kappa$$

geschrieben.

Ist die Steuerung  $u = \dot{\kappa}$  bekannt, erhält man die zu stellende Ableitung des Lenkwinkels über

$$\dot{\varphi}_L = u \cdot l \cdot \cos^2 \varphi_L.$$

Dies entspricht im Wesentlichen dem Modell, welches in [Gutjahr und Werling 2015] verwendet wird. Dort ist zusätzlich auch der Verlauf der Referenzkurve über eine „Störgröße“, die deren Krümmungsänderung  $\dot{\kappa}_r$  entspricht, modelliert:

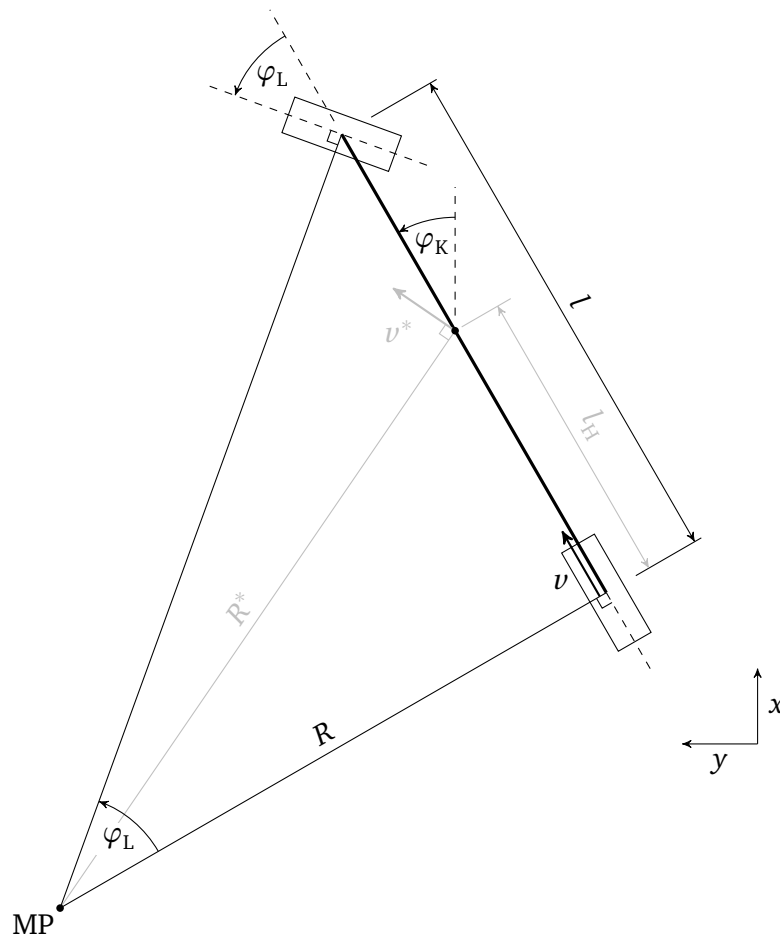
$$\begin{aligned} \dot{d} &= v \sin(\varphi_K - \varphi_r) \\ \dot{\varphi}_K &= v \kappa \\ \dot{\kappa} &= u \\ \dot{\varphi}_r &= v_r \kappa_r \quad v_r = \frac{v \cos(\varphi_K - \varphi_r)}{1 - d \kappa_r} \\ \dot{\kappa}_r &= z. \end{aligned}$$

Dieses Modell wird in der angegebenen Quelle dann für kleine  $\psi_K = \varphi_K - \varphi_r$  linearisiert (wobei die Geschwindigkeit als zeitvarianter Parameter aufgefasst wird), so dass ein LZV-System entsteht, welches dort für eine MPC verwendet wird.

### Alternative Herleitung des Ackermannmodells

Mit dem Begriff der Krümmung lässt sich das Ackermannmodell auch auf folgende Art herleiten, die in der Literatur verbreiteter ist. Auch wird dieser Weg bei der Herleitung des Einspurmodells, bei dem die Geschwindigkeiten nicht mehr in Reifenlängsrichtung zeigen, verwendet.

Ausgehend von den Mittelpunkten der Räder wird jeweils das Lot zur Radlängsachse gebildet. Diese treffen sich in einem Punkt, dem Momentanpol, der in Abbildung 3.15 mit MP bezeichnet ist.



**Abbildung 3.15:** Größen des Ackermannmodells

Der Momentanpol ist der Punkt, um den sich zu dem betrachteten Zeitpunkt der gesamte Starrkörper Fahrzeug dreht. D. h. die Geschwindigkeit jedes Punktes des Starrkörpers Fahrzeug steht senkrecht auf der Verbindungslinie zwischen dem jeweiligen Punkt und dem Momentanpol, wie es in der Abbildung auch für einen Punkt im Abstand  $l_H$  von der Hinterachse mit der Geschwindigkeit  $v^*$  eingezeichnet ist.

Damit entspricht die Krümmung des Pfades, die ein Punkt des Fahrzeuges vollzieht, gerade dem Kehrwert des Abstandes zwischen dem betrachteten Punkt und dem Momentanpol.

Aus der gezeigten Geometrie folgt

$$\tan \varphi_L = \frac{l}{R}$$

und daraus ergibt sich für die Krümmung des Pfades des Mittelpunktes des Hinterrades,  $\kappa$ , der Zusammenhang

$$\frac{1}{R} = \kappa = \frac{1}{l} \cdot \tan \varphi_L ,$$

---

der Gl. (3.4) entspricht.

Über den oben angegebenen Zusammenhang (3.2),  $\dot{\varphi} = \kappa v$ , folgt daraus die Differentialgleichung

$$\dot{\varphi}_K = \frac{v}{l} \cdot \tan \varphi_L$$

des Kurswinkels.

Ist die Krümmung der Bewegung eines anderen Punktes, z. B. des Schwerpunktes, gesucht, so muss anhand der gegebenen Geometrie der entsprechende Radius  $R^*$  bestimmt werden.

## 4 Kinematisches Kalmanfilter

In diesem Abschnitt wird an dem einfachsten Beispiel (nämlich der eindimensionalen Bewegung) die Grundidee eines kinematischen Kalmanfilters erläutert.

Wie hier diskutiert wird, benötigt ein kinematisches Kalmanfilter eine sogenannte Stützung durch Messung einer Absolutposition und -lage (oder der Messung einer Relativposition und -lage zwischen zwei Zeitpunkten, die nicht auf der Integration von Geschwindigkeiten basiert). Da für das angestrebte Szenario keine Kartographierung der Umgebung der Fahrbahn (d. h. den Tischen und Pfeilern) erfolgen soll, anhand derer mit dem 3D-Bild der Kamera eine Positions- und Lagebestimmung erfolgen könnte, dürfte dieses Kapitel für dieses Jahr weniger relevant sein.

Im Rahmen der studentischen Arbeit [Diefenbach 2018] wurden erste Untersuchungen vorgenommen, ob das „Delta“ zweier Bilder einer markierten Fahrbahn dazu verwendet werden kann, die Lage- und Positionsänderung des Fahrzeuges zwischen diesen Bildern zu bestimmen. Jedoch hat dieses Konzept noch keinen einsetzbaren Stand erreicht.

Das kinematische Kalmanfilter ist ein Kalmanfilter für ein kinematisches Modell. Dieses modelliert die Geschwindigkeiten und Positionen (sowie Winkel) eines Körpers aufgrund der gegebenen Beschleunigungen und Drehraten. Im hier betrachteten eindimensionalen Fall lautet das kinematische Modell

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot a,$$

wobei  $x$  die Position,  $\dot{x}$  die Geschwindigkeit und  $a$  die Beschleunigung ist. Dieses sagt also einfach aus, dass die Geschwindigkeit die integrierte Beschleunigung und die Position die integrierte Geschwindigkeit ist. (Wie die Beschleunigung entsteht, spielt für das kinematische Modell keine Rolle.)

Das Ziel ist es, ständig Schätzwerte für die Geschwindigkeit und Position zur Verfügung zu stellen, die von den Regelalgorithmen verwendet werden können. Dabei wird davon ausgegangen, dass Position und Geschwindigkeit zumindest in größeren zeitlichen Abständen gemessen werden können, und dass ein Beschleunigungssensor vorhanden ist, der Messdaten mit einer sehr kleinen Abtastzeit liefert. Die Position und Geschwindigkeit könnten z. B. durch den Hall-Sensor (Strecke) und die Kamera (Positionierung in einer Karte, Veränderung des Abstands zu definierten Hindernissen, Geschwindigkeit über optischen Fluss) generiert werden.

Würde man die gemessenen Beschleunigungen einfach aufintegrieren, so würden aufgrund der Sensorfehler die so bestimmte Geschwindigkeit und noch mehr die Position (da doppelt integriert) „weglaufen“ und schnell unbrauchbare Werte liefern. Daher besteht der Ansatz darin, diese integrierten Werte mit den Messungen der Geschwindigkeit und Position zu stützen, d. h. zu korrigieren, und dabei idealerweise die Sensorfehler mitzuschätzen, so dass die Genauigkeit der Schätzwerte auch zwischen den Geschwindigkeits- und Positionsmessungen zunimmt.

Bei der Messung der Beschleunigung werden immer Fehler auftreten. Vereinfacht wird davon ausgegangen, dass der Messwert  $\tilde{a}$  mit einem konstanten Bias  $x_{a,bias}$  und einem mittelwertfreien Rauschen  $n_a$  überlagert ist,

$$\tilde{a} = a - x_{a,bias} - n_a.$$

Somit gilt für die wahre Beschleunigung

$$a = \tilde{a} + x_{a,bias} + n_a .$$

Mit der Annahme, dass der Bias eine konstante Störung ist, d. h.  $\dot{x}_{a,bias} = 0$ , erhält man das Modell

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{x}_{a,bias} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ x_{a,bias} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{a} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot n_a . \quad (4.1)$$

Die Messgröße kann sowohl die Geschwindigkeit  $\dot{x}$  als auch die Position  $x$  sein. Beide Messungen werden als mit Rauschen überlagert angenommen, so dass die entsprechenden Ausgangsgleichungen

$$\tilde{y}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ x_{a,bias} \end{bmatrix} + n_x \quad (4.2)$$

bzw.

$$\tilde{y}_v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ x_{a,bias} \end{bmatrix} + n_v \quad (4.3)$$

lauten.

Für das System mit den Zustandsgleichungen (4.1) und den Ausgangsgleichungen (4.2) bzw. (4.3) kann ein Kalmanfilter entworfen werden. Dabei übernimmt  $\tilde{a}$  die Rolle als Eingangsgröße.

Es kann ein diskretes oder ein kontinuierlich-diskretes Kalmanfilter zum Einsatz kommen. Das Systemmodell ist zwar kontinuierlich, jedoch wird die Eingangsgröße Beschleunigung nur zu diskreten Zeitpunkten gemessen. D. h. auch im Fall des kontinuierlichen Systems muss die Systemgleichung diskret simuliert (prädiziert) werden, wozu z. B. das Euler-Vorwärts-Verfahren zum Einsatz kommen kann. Da diese Abtastzeit jedoch sehr klein ist, sollte kein großer Unterschied auftreten.

Für den (rein) diskreten Kalmanfilter geht man von der Systemdarstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{n}_{x,k} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{k'} &= \mathbf{C}_{k'}\mathbf{x}_{k'} + \mathbf{n}_{y,k'} \end{aligned}$$

aus. Hierbei sind die Abtastindizes in der Ausgangsgleichung anders als in der Zustandsgleichung gekennzeichnet, um deutlich zu machen, dass die Sensorwerte (deutlich) langsamer abgetastet werden können als die Beschleunigungswerte.

Die Matrizen ergeben sich hier (bei Diskretisierung mit ZOH und der Abtastzeit  $T_s$ ) zu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & T_s & \frac{1}{2}T_s^2 \\ 0 & 1 & T_s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T_s^2 \\ T_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{C}_{k'} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{bei Positionsmessung} \\ & \text{bei Geschwindigkeitsmessung.} \end{cases}$$

Die Kovarianzmatrix des Systemrauschens bestünde (ohne die Berücksichtigung von Diskretisierungsfehlern) theoretisch nur aus dem Messrauschen des Beschleunigungssensors,

$$\mathbf{Q} = E(\mathbf{n}_{x,k} \mathbf{n}_{x,k}^T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\ddot{a}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

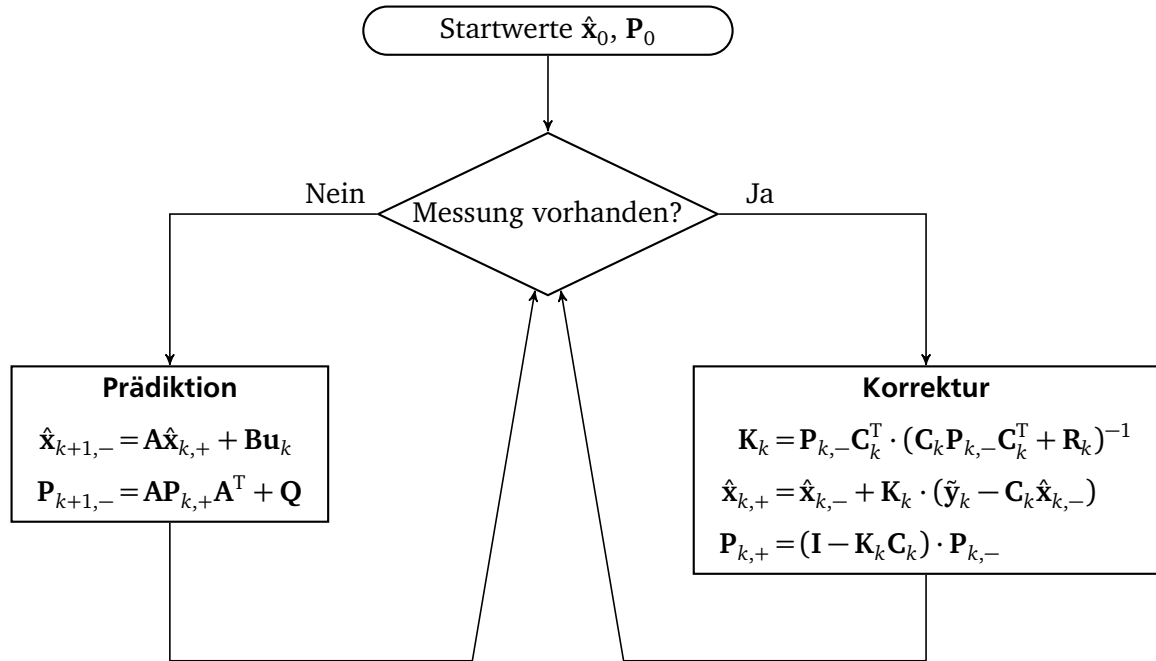
(Der kinematische Zusammenhang  $\dot{x} = v$  ist per Definition exakt, und es wurde ein konstanter Sensorbias angenommen.) Siehe dazu auch die Anmerkungen unten.

Die Kovarianzmatrix des Messrauschens entspricht der Varianz des jeweiligen Messwerts,

$$\mathbf{R} = E(\mathbf{n}_{y,k} \mathbf{n}_{y,k}^T) = \begin{cases} \sigma_{\tilde{x}}^2 & \text{bei Positionsmessung} \\ \sigma_{\tilde{v}}^2 & \text{bei Geschwindigkeitsmessung.} \end{cases}$$

Wird eine der Größen durch verschiedene Sensoren gemessen, so können auch unterschiedliche Werte für  $\sigma_{\tilde{x}}^2$  bzw.  $\sigma_{\tilde{v}}^2$  verwendet werden.

In Abbildung 4.1 ist der prinzipielle Ablauf der Schätzung dargestellt. Wesentlich ist dabei, dass nur dann eine Korrektur vorgenommen werden muss, wenn auch Messdaten vorliegen.



**Abbildung 4.1:** Ablauf der Schätzung mit Kalmanfilter

Man muss zusätzlich zu den oben angegebenen Größen noch einen Anfangswert  $\hat{\mathbf{x}}_0$  für die Schätzung und dessen Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_0$ , d. h. die Unsicherheit dieses Anfangswertes angeben.

## Einstellung des Filters

Letztlich hat man folgende Parameter zum Einstellen des Filters:  $\hat{\mathbf{x}}_0$ ,  $\mathbf{P}_0$ ,  $\mathbf{Q}$  und  $\sigma_x^2$  sowie  $\sigma_y^2$ .

$\hat{\mathbf{x}}_0$  sollte eine möglichst gute Schätzung des Anfangswertes sein (und nicht einfach nur auf  $\mathbf{0}$  gesetzt werden, wenn man es besser weiß). Mit den Diagonaleinträgen von  $\mathbf{P}_0$  kann man die Unsicherheit dieser Anfangswerte bewerten.  $\mathbf{Q}$  beinhaltet zwar theoretisch nur die Varianz  $\sigma_a^2$  der Beschleunigungsmessung, jedoch sprechen andere Erwägungen dafür, zumindest den Bias auch mit einer gewissen Unsicherheit zu beaufschlagen. Zum einen, um eine gewisse Zeitabhängigkeit des Bias zuzulassen, zum anderen hilft dieser Wert um – im Zusammenspiel mit  $\mathbf{P}_0$  – einen guten Kompromiss zwischen Einschwingzeit und Varianz des Filters zu erhalten.<sup>1</sup> Wenn das Modell nichtlinear ist (bei mehr als einer Dimension), müssen noch die dadurch entstehenden Fehler berücksichtigt werden.

An dieser Stelle ist jedoch auch anzumerken, dass die Berücksichtigung eines zeitveränderlichen Bias über ein weißes Messrauschen in aller Regel die Realität nur unzureichend abbildet und es durchaus sinnvoll sein kann, an dieser Stelle bessere, auf den Sensor angepasste Rauschmodelle zu verwenden.

- Wenn nur die Geschwindigkeit gemessen wird, dann kann das Filter ohne die Integration auf die Position verwendet werden.

## Anmerkungen

- In diesem einfachsten Fall erhält man tatsächlich ein lineares Modell. Ab der zweiten Dimension wird dieses jedoch nichtlinear, so dass Kalmanfilter zum Einsatz kommen müssen, die für nichtlineare Modelle geeignet sind. Dies könnte z. B. das „extended Kalmanfilter“ sein.

---

<sup>1</sup> Wenn alle theoretischen Voraussetzungen erfüllt sind, liefert das Kalmanfilter eine biasfreie Lösung mit minimaler Varianz. Allerdings sind die Voraussetzungen in der Praxis häufig nicht besonders gut erfüllt. Auch bezieht sich die Optimalität immer auf die Scharen, d. h. die Menge aller Wiederholungen des Experiments, und nicht auf den Schätzwert einer Realisierung im Zeitverlauf. Bei der Betrachtung von Beispielrealisierungen kann man durchaus den Wunsch verspüren, das Verhalten anzupassen.



---

# Literatur

- Demirtel, B. E. (2017). „Kamerabasierte Fahrbahnerkennung zur automatisierten Fahrbahnführung eines Modellautos“. Masterthesis. Technische Universität Darmstadt, FG Regelungstechnik und Mechatronik.
- Diefenbach, A. (2018). „Bestimmung der Lageänderung eines Fahrzeuges anhand Kameradaten“. Bachelorthesis. Technische Universität Darmstadt, FG Regelungstechnik und Mechatronik.
- Gutjahr, B. und M. Werling (2015). „Optimale Fahrzeugquerführung mittels linearer, zeitvarianter MPC“. In: *Uni-DAS, 10. Workshop Fahrerassistenzsysteme, FAS 2015, Walting im Altmühltal, 28.09. - 30.09.2015*, S. 61–70. ISBN: 978-3-00-050746-5. URL: [https://www.uni-das.de/images/pdf/fas-workshop/2015/FAS2015\\_Tagungsband.pdf](https://www.uni-das.de/images/pdf/fas-workshop/2015/FAS2015_Tagungsband.pdf).
- Sepulveda Acero, N. (2016). „Fahrbahnerkennung und automatisierte Fahrbahnführung anhand einer Farbkamera mit einem Modellfahrzeug“. Bachelorthesis. Technische Universität Darmstadt, FG Echtzeitsysteme.
- Trächtler, A., B. Lohmann und G. Struck (1992). „Regelung der Querbewegung eines kamerageführten Straßenfahrzeugs“. In: *at - Automatisierungstechnik* 40, S. 391–396.
- Wassermann, M. (2018). „Schätzung des Fahrzeugzustandes und Fahrzeugführung entlang von Trajektorien“. Masterthesis. Technische Universität Darmstadt, FG Regelungstechnik und Mechatronik.