MAE001: Modelagem Matemática em Finanças I

Ramon Duarte de Melo
ramonduarte@poli.ufrj.br

Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) — 8 de maio de 2019

Introdução

O objetivo do Projeto I é implementar o modelo binomial de precificação computacionalmente, realizando comparações de cunho matemático-estatístico e produzindo gráficos com tais observações.

Para tal, foi utilizada a linguagem *Python 3.6.7*, com os módulos *numpy* (métodos numéricos) e *matplotlib.pyplot* (visualização de dados). O programa requer a instalação destes módulos, mas possui uma ferramenta de instalação automatizada das dependências (*pipenv*).

O código utilizado neste trabalho, bem como o deste relatório e as imagens geradas, foi aberto e disponibilizado publicamente no repositório https://github.com/ramonduarte/mmftrab1.

1ª Questão

O tempo final $T = 20$ e o intervalo de discretização $\Delta t = 0.5$ foram fixados pelo enunciado da questão. Os demais parâmetros foram escolhidos de forma a facilitar a visualização dos dados plotados. A utilização de uma escala logarítmica teria sido uma opção mais adequada, porém os gráficos já haviam sido feitos quando esta possibilidade foi levantada pelo professor.

De toda maneira, a visualização e a observação da teoria não ficou prejudicada com a escolha destes parâmetros, que foram $S_0 = 100$, $u = 1.024$, $d = 1/u = 0.9765625$ e $p = q = 0.5$. Como não havia a necessidade de calcular a depreciação dos ativos, a taxa da renda fixa foi considerada como $r = 0$. Embora este dado não seja necessário em cenários reais (não-neutros a risco), o valor esperado de crescimento dos ativos é zero, isto é, $E[S(n)] = E[S(n+1)]$. Portanto, o valor esperado para a média é o mesmo que o inicial do ativo: $E[\bar{S}] = E[S_0]$. Foram gerados 20 passeios aleatórios baseados nestes parâmetros.

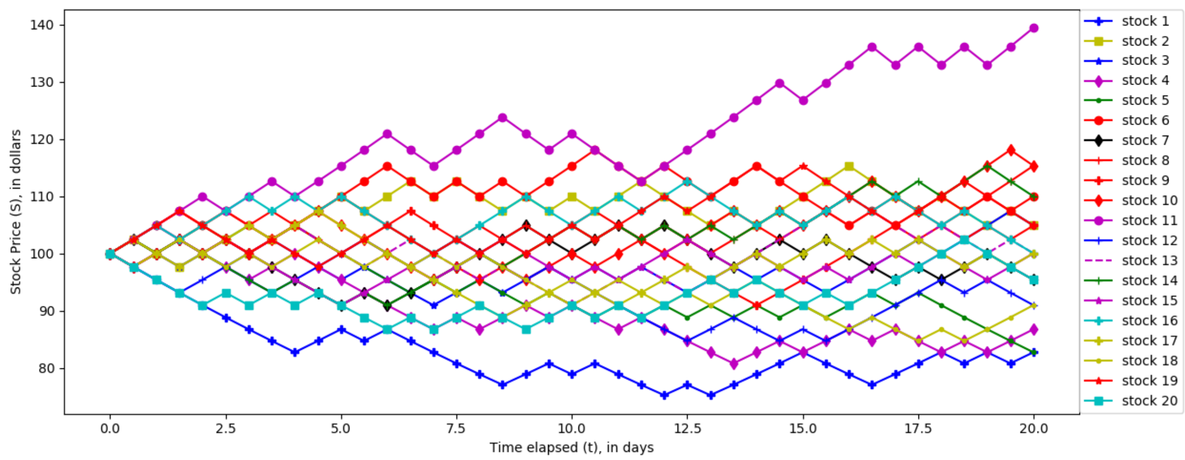

Figura 1: Passeios aleatórios com $S_0 = 100$, $u = 1.024$, $d = 1/u = 0.9765625$ e $p = q = 0.5$.

2ª Questão

Os boxplots foram gerados usando o módulo *matplotlib.pyplot.boxplot*. Para facilitar a comparação dos boxplots, eles foram agrupados em subplots no mesmo gráfico. *Outliers* foram marcados com quadrados vermelhos.

Figura 2: Boxplots com 250, 500, 1000 e 2000 iterações, respectivamente, de baixo para cima.

3ª Questão

Para esta questão, os boxplots foram refeitos utilizando os parâmetros $\Delta t = 0.25$ e $u = 1/d = \sqrt{1.024}$. Esta configuração gerou uma variância consideravelmente menor, bem como uma quantidade significativamente menor de *outliers*. Embora todos os ativos pudessem atingir as mesmas taxas de crescimento e decrescimento que no cenário anterior - apesar das taxas serem menores, o maior número de iterações compensa proporcionalmente a redução -, foram raros os ativos que obtiveram mais de 30% de variação, um cenário bastante comum na segunda questão.

Este fenômeno foi observado porque, como $E[\bar{S}] = E[S_0]$ e $E[S(n)] = E[S(n+1)]$, um número maior de repetições tende a aproximar os resultados da média. A redução da variância em distribuições probabilísticas por conta da ampliação do espaço amostral é bastante conhecida e documentada.

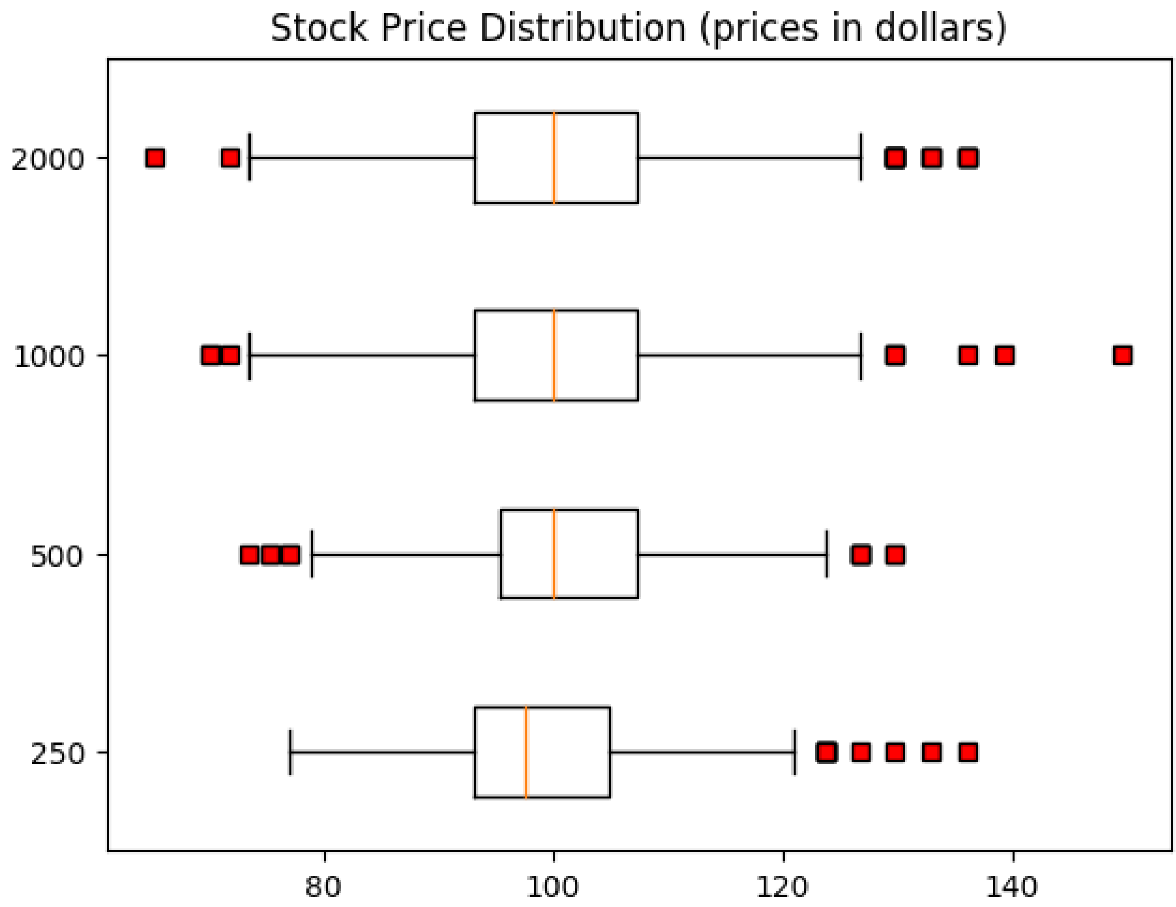

Figura 3: Boxplots com 250, 500, 1000 e 2000 iterações, respectivamente, de baixo para cima.

4ª Questão

O valor esperado de crescimento dos ativos com estes parâmetros é zero, isto é, $E[S(n)] = E[S(n+1)]$. Portanto, o valor esperado para a média é o mesmo que o inicial do ativo: $E[\bar{S}] = E[S_0]$.

Os resultados obtidos convergem fortemente para o previsto na teoria. A maior variação da média dos passeios aleatórios foi inferior a 3%, no boxplot $n = 250$ da terceira questão.

5ª Questão

Para esta questão, algumas adaptações fizeram-se necessárias, haja vista os parâmetros selecionados inicialmente. Em primeiro lugar, o uso da escala logarítmica aqui dificultaria a visualização dos dados, já que a média, as probabilidades e as taxas foram selecionadas de forma a facilitar a visualização em escala linear. Em segundo lugar, foi calculado o erro quadrático médio em vez do módulo do erro médio. Na prática, isto não faz nenhuma diferença, exceto que o gráfico observado será uma parábola em vez de uma reta.

Ao contrário do esperado, o erro quadrático médio cresceu com o aumento da distribuição, embora o aumento tenha sido muito reduzido para ser considerado significativo. É provável que este tenha sido um *outlier* em termos de simulação. Pode indicar, ainda, um viés na ferramenta de seleção pseudoaleatória utilizada para implementar a rotina *Random*.

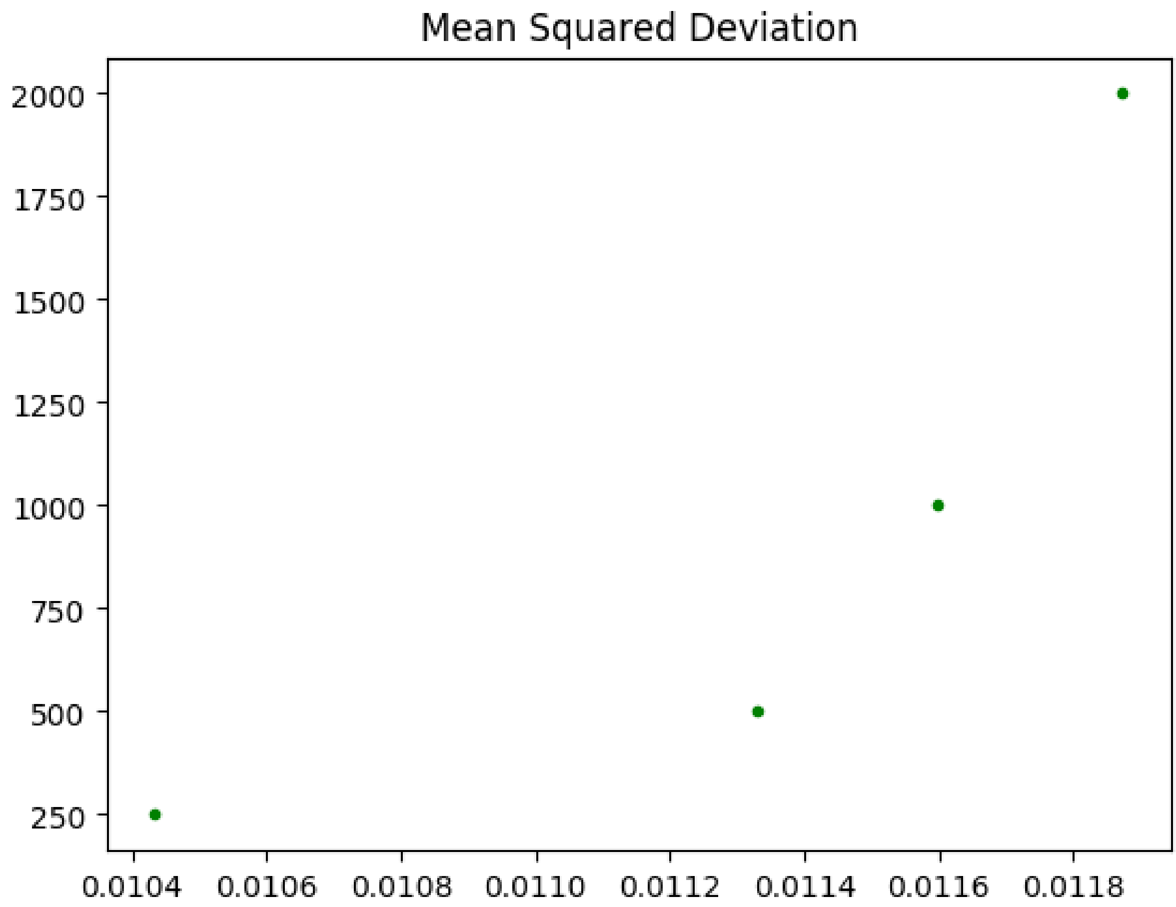

Figura 4: Erro quadrático médio encontrado com 250, 500, 1000 e 2000 iterações, respectivamente, de baixo para cima.