MAE001: Modelagem Matemática em Finanças I

Ramon Duarte de Melo
ramonduarte@poli.ufrj.br

Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) — 5 de junho de 2019

Introdução

O objetivo do Projeto I é implementar, avaliar e comparar o algoritmo recursivo proposto pelo livro no capítulo 1.3 e o Método de Monte-Carlo, aplicados à determinação do valor de contratos americanos e europeus de opção de compra e venda, realizando comparações de cunho matemático-estatístico e produzindo gráficos com tais observações.

Para tal, foi utilizada a linguagem *Python 3.6.7*, com os módulos *numpy* (métodos numéricos) e *matplotlib.pyplot* (visualização de dados). O programa requer a instalação destes módulos, mas possui uma ferramenta de instalação automatizada das dependências (*pipenv*).

O código utilizado neste trabalho, bem como o deste relatório e as imagens geradas, foi aberto e disponibilizado publicamente no repositório https://github.com/ramonduarte/mmftrab2.

Atividade 1

Nesta atividade, foi implementado o algoritmo sugerido no livro em seu capítulo 1.3. O procedimento é composto de três etapas:

1. obtenção dos valores finais, com especial atenção para evitar a explosão combinatória típica do modelo binomial.
2. cálculo recursivo dos valores intermediários utilizando os valores finais.
3. dedução do valor inicial V_0 do contrato, que também representa seu custo pela teoria de precificação da arbitragem.

Os contratos escolhidos possuem os mesmos parâmetros, tanto para a opção de compra, quanto para a opção de venda:

- valor inicial do ativo: 4
- taxa de valorização: 100
- taxa de desvalorização: 50
- taxa de renda fixa: 25
- preço de *strike*: 5

Estes parâmetros foramutilizados junto às probabilidades neutras a risco $\tilde{p} = \tilde{q} = 0.5$. Foram calculados os valores para 10 simulações, tais que $N = 2^k; k = 1, 2, ..., 10$.

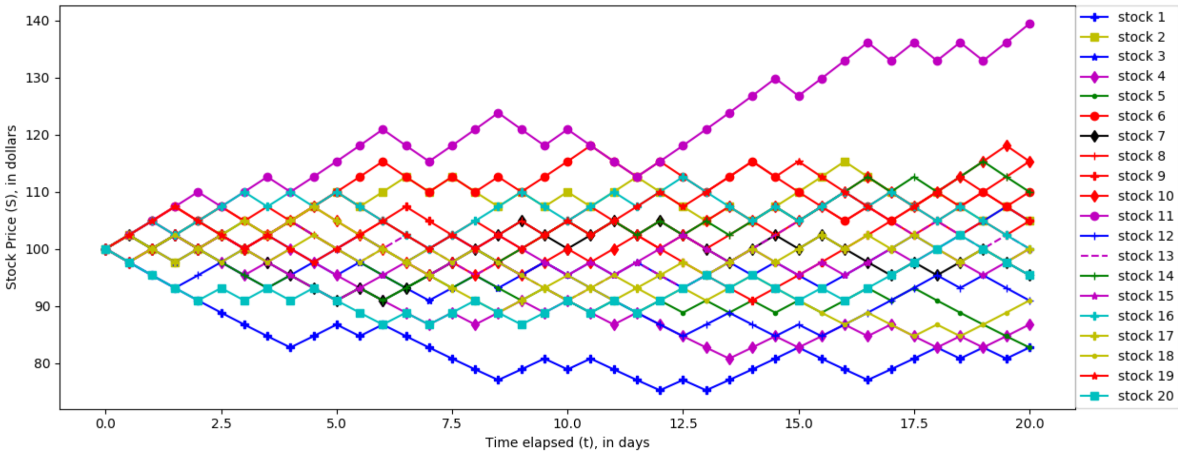

Figura 1: Passeios aleatórios com $S_0 = 100$, $u = 1.024$, $d = 1/u = 0.9765625$ e $p = q = 0.5$.

2ª Questão

Os boxplots foram gerados usando o módulo *matplotlib.pyplot.boxplot*. Para facilitar a comparação dos boxplots, eles foram agrupados em subplots no mesmo gráfico. *Outliers* foram marcados com quadrados vermelhos.

Figura 2: Boxplots com 250, 500, 1000 e 2000 iterações, respectivamente, de baixo para cima.

3ª Questão

Para esta questão, os boxplots foram refeitos utilizando os parâmetros $\Delta t = 0.25$ e $u = 1/d = \sqrt{1.024}$. Esta configuração gerou uma variância consideravelmente menor, bem como uma quantidade significativamente menor de *outliers*. Embora todos os ativos pudessem atingir as mesmas taxas de crescimento e decrescimento que no cenário anterior - apesar das taxas serem menores, o maior número de iterações compensa proporcionalmente a redução -, foram raros os ativos que obtiveram mais de 30% de variação, um cenário bastante comum na segunda questão.

Este fenômeno foi observado porque, como $E[\bar{S}] = E[S_0]$ e $E[S(n)] = E[S(n+1)]$, um número maior de repetições tende a aproximar os resultados da média. A redução da variância em distribuições probabilísticas por conta da ampliação do espaço amostral é bastante conhecida e documentada.

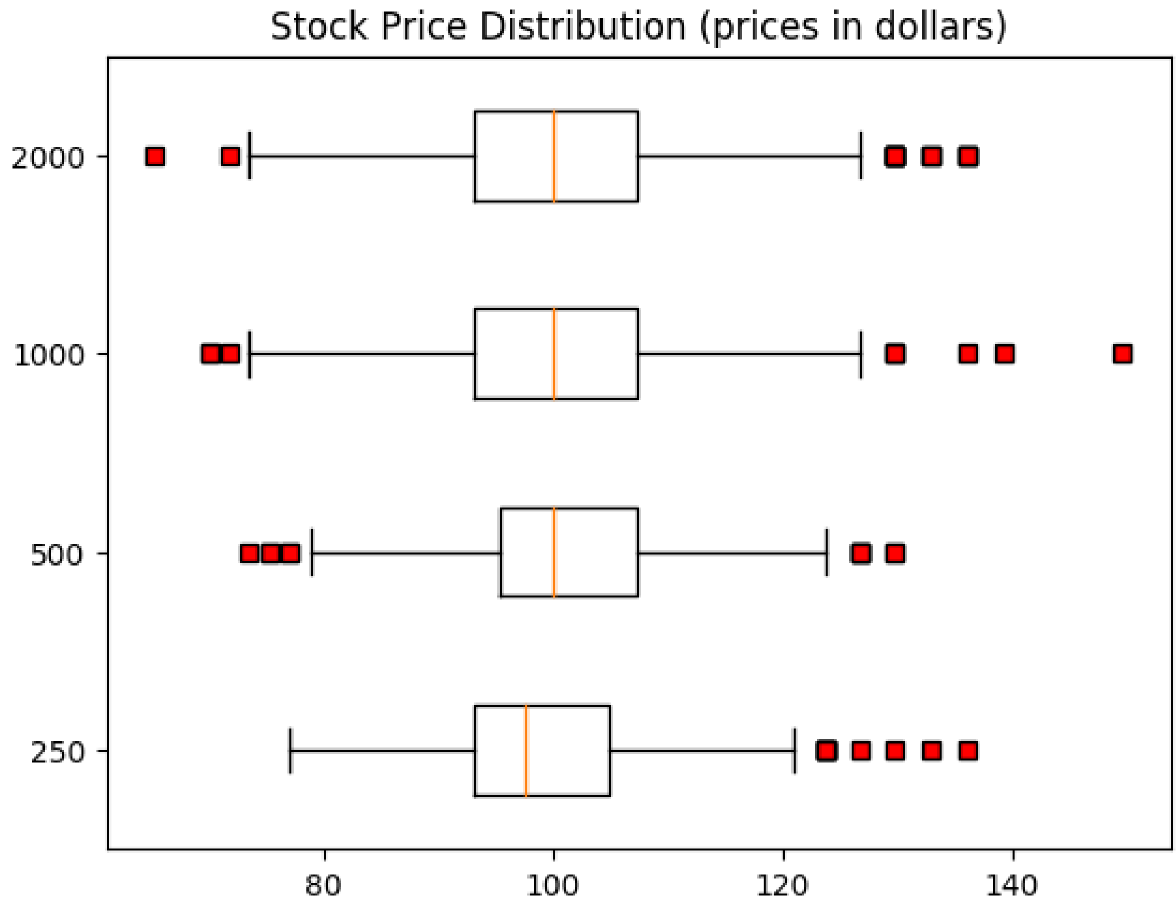

Figura 3: Boxplots com 250, 500, 1000 e 2000 iterações, respectivamente, de baixo para cima.

4ª Questão

O valor esperado de crescimento dos ativos com estes parâmetros é zero, isto é, $E[S(n)] = E[S(n+1)]$. Portanto, o valor esperado para a média é o mesmo que o inicial do ativo: $E[\bar{S}] = E[S_0]$.

Os resultados obtidos convergem fortemente para o previsto na teoria. A maior variação da média dos passeios aleatórios foi inferior a 3%, no boxplot $n = 250$ da terceira questão.

5ª Questão

Para esta questão, algumas adaptações fizeram-se necessárias, haja vista os parâmetros selecionados inicialmente. Em primeiro lugar, o uso da escala logarítmica aqui dificultaria a visualização dos dados, já que a média, as probabilidades e as taxas foram selecionadas de forma a facilitar a visualização em escala linear. Em segundo lugar, foi calculado o erro quadrático médio em vez do módulo do erro médio. Na prática, isto não faz nenhuma diferença, exceto que o gráfico observado será uma parábola em vez de uma reta.

Ao contrário do esperado, o erro quadrático médio cresceu com o aumento da distribuição, embora o aumento tenha sido muito reduzido para ser considerado significativo. É provável que este tenha sido um *outlier* em termos de simulação. Pode indicar, ainda, um viés na ferramenta de seleção pseudoaleatória utilizada para implementar a rotina *Random*.

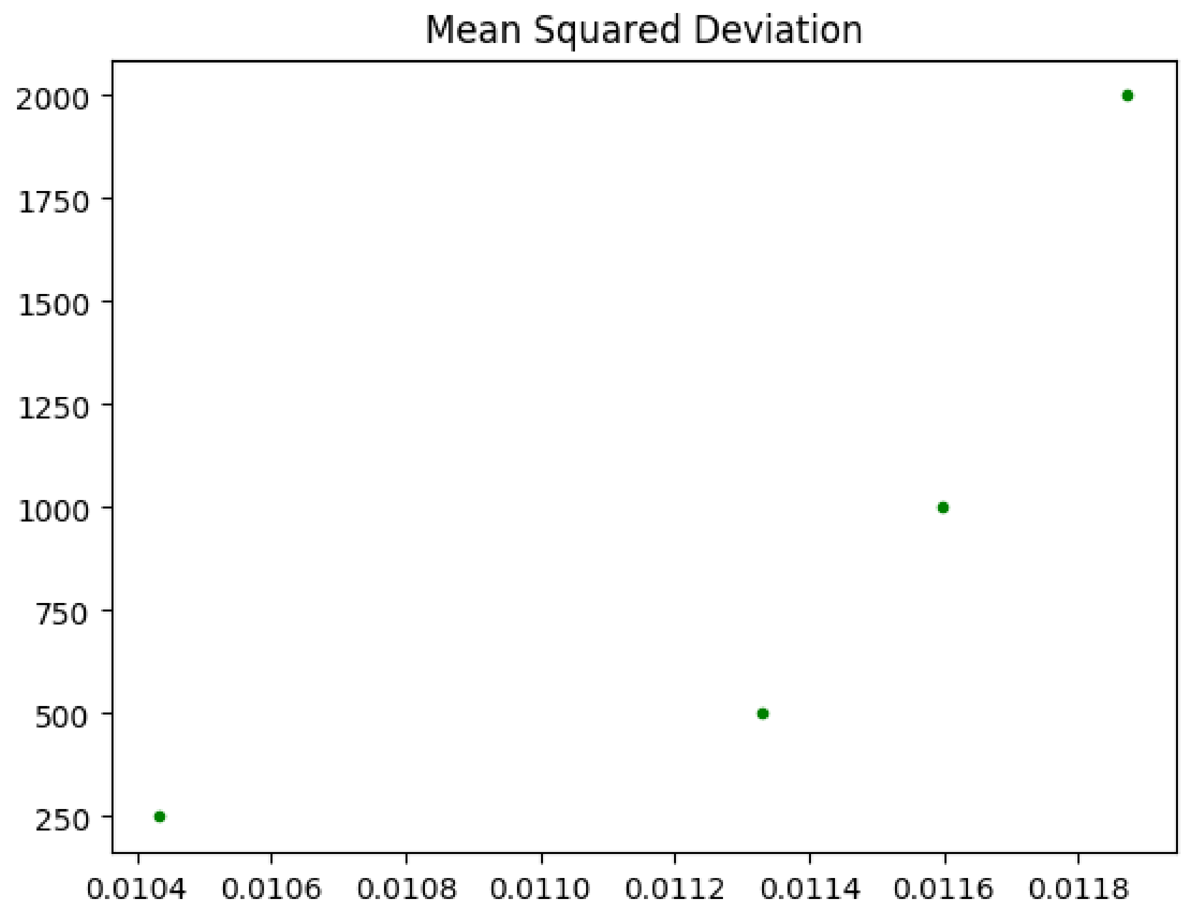

Figura 4: Erro quadrático médio encontrado com 250, 500, 1000 e 2000 iterações, respectivamente, de baixo para cima.