Duas provas curtas do Teorema da Floresta Perfeita

Ramon Duarte de Melo & Yago Carvalho

Universidade Federal do Rio de Janeiro

ramonduarte@poli.ufrj.br &

9 de julho de 2019

Sumário

Proposta

Dado um grafo $G = (V, E)$ com $|V| = n$, um subgrafo **gerador** *F do grafo G é uma* **floresta perfeita** *se*

1. *F for uma floresta.*
2. *todos os graus de todos os vértices de F forem ímpares.*
3. *cada uma das sub-árvores de F é um subgrafo induzido de G.*

DEF

- Um **emparelhamento** é um conjunto de arestas não-adjacentes.
- Um emparelhamento é dito **máximo** se possui o maior número possível de arestas.
- Um emparelhamento máximo é dito **perfeito** se suas arestas cobrem todos os vértices do grafo.

Proposta

Dado um grafo $G = (V, E)$ com $|V| = n$, podemos afirmar que ele contém uma floresta perfeita se

1. *n for um número par.*
2. *G for conexo.*

Lema

Se G for um grafo conexo com n vértices, sendo n par, e não for uma árvore, então G possui uma árvore geradora com pelo menos dois vértices de grau par.

Prova.

Seja T uma árvore geradora de G. Suponha T com todos os vértices de grau ímpar. Como G não é uma árvore, existe ao menos uma aresta $e \in E(G \setminus T)$. Suponha que ela conecte os vértices u e v. Considere a árvore T^* formada pela adição de e a T e a remoção da aresta (u, w), onde w é o único vizinho de u no caminho entre u e v em T. O grau de v e w agora é par, e a árvore geradora T^* satisfaz o lema. □

Teorema

Se G é um grafo conexo com n vértices e n é um número par, então G possui uma floresta perfeita.

Prova (por indução em $|V|$).

1. Se G for uma árvore com todos os vértices de grau ímpar, então G é uma floresta perfeita.
2. Se G possuir ao menos um vértice w de grau par, então há um número par de sub-árvores em w, sendo que ao menos uma delas contém um número par de vértices. Suponha que G_1 seja o subgrafo induzido de G nesta sub-árvore e, portanto, possua ordem par. Então, G_2, o subgrafo induzido por w e todas as suas demais sub-árvores, também possui ordem par. Como G_1 e G_2 são conexos, podemos dizer, por indução, que há uma floresta perfeita F_1 em G_1 e outra, F_2, em G_2. Por conseguinte, $F = F_1 \cup F_2$ é uma floresta perfeita em G.
3. Se G não é uma árvore, então, pelo Lema, G possui uma árvore geradora T com pelo menos dois vértices de grau par. Por [2], sabemos que T possui uma floresta perfeita e, por conseguinte, G também a possui.

$\square$

Prova (por indução em $|E|$).

Seja $|E| = m$ para um grafo $G = (V, E)$.

1. Suponha que um subgrafo $G - e$, para algum $e \in E$, é não-conexo. Se as duas componentes possuírem um número par de vértices, então, pela prova anterior em [3], elas possuem floresta F_1 e F_2, respectivamente, tal que $F = F_1 \cup F_2$ é uma floresta perfeita em G.
2. Se as componentes possuírem número ímpar de vértices, então $G_1' = G_1 + e$ e $G_2' = G_2 + e$ contêm um número par de vértices e $F' = F_1' \cup F_2'$ é uma floresta perfeita em G.

$\square$

Prova (por indução em $|E|$) (cont.)

3. Se $G - e$ permanecer conexo, então, por indução, ainda existe uma floresta perfeita F em $G - e$ e, por conseguinte, em G. Suponha que e seja uma aresta de corte em F. Então, por [1], cada componente possui uma floresta perfeita (F_1 e F_2, respectivamente) e $F = F_1 \cup F_2$ ainda é uma floresta perfeita em G.
4. Suponha agora que e não é uma aresta de corte e, portanto, conecta dois vértices u e v pertencentes à mesma componente H de F. Seja K a única de todas as demais componentes de F. Se K for vazia, então $F = H$ é uma árvore e satisfaz as condições para ser uma floresta perfeita de G.
5. Se $K \neq \{\}$, considere o subgrafo induzido em G pelos vértices de H, cujo conjunto de arestas é $E(H) + e$, já que H é o subgrafo induzido conexo de $G - e$. Isto permite concluir que $H + e$ é um subgrafo induzido de G, que possui exatamente um único ciclo C que contém a aresta e. Considere o subgrafo $H - E(C)$ obtido pela remoção de todas as arestas de H que pertencem também a C,