

Duas provas curtas do Teorema da Floresta Perfeita

Ramon Duarte de Melo & Yago Carvalho

Universidade Federal do Rio de Janeiro

ramonduarte@poli.ufrj.br &

9 de julho de 2019

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Primeira prova

Proposta

Dado um grafo $G = (V, E)$ com $|V| = n$, um subgrafo **gerador** F do grafo G é uma **floresta perfeita** se

- ① F for uma floresta.
- ② todos os graus de todos os vértices de F forem ímpares.
- ③ cada uma das sub-árvores de F é um subgrafo induzido de G .

Definition

- Um **emparelhamento** é um conjunto de arestas não-adjacentes.
- Um emparelhamento é dito **máximo** se possui o maior número possível de arestas.
- Um emparelhamento máximo é dito **perfeito** se suas arestas cobrem todos os vértices do grafo.

Proposta

Dado um grafo $G = (V, E)$ com $|V| = n$, podemos afirmar que ele contém uma floresta perfeita se

- ① *n for um número par.*
- ② *G for conexo.*

Lema

Se G for um grafo conexo com n vértices, sendo n par, e não for uma árvore, então G possui uma árvore geradora com pelo menos dois vértices de grau par.

Prova.

Seja T uma árvore geradora de G . Suponha T com todos os vértices de grau ímpar. Como G não é uma árvore, existe ao menos uma aresta $e \in E(G \setminus T)$. Suponha que ela conecte os vértices u e v . Considere a árvore T^* formada pela adição de e a T e a remoção da aresta (u, w) , onde w é o único vizinho de u no caminho entre u e v em T . O grau de v e w agora é par, e a árvore geradora T^* satisfaz o lema. □

Teorema

Se G é um grafo conexo com n vértices e n é um número par, então G possui uma floresta perfeita.

Prova (por indução).

- ❶ Se G for uma árvore com todos os vértices de grau ímpar, então G é uma floresta perfeita.
- ❷ Se G possuir ao menos um vértice w de grau par, então há um número par de sub-árvores em w , sendo que ao menos uma delas contém um número par de vértices. Suponha que G_1 seja o subgrafo induzido de G nesta sub-árvore e, portanto, possua ordem par. Então, G_2 , o subgrafo induzido por w e todas as suas demais sub-árvores, também possui ordem par. Como G_1 e G_2 são conexos, podemos dizer, por indução, que há uma floresta perfeita F_1 em G_1 e outra, F_2 , em G_2 . Por conseguinte, $F = F_1 \cup F_2$ é uma floresta perfeita em G .
- ❸ Se G não é uma árvore, então, pelo Lema, G possui uma árvore geradora T com pelo menos dois vértices de grau par. Por [2], sabemos que T possui uma floresta perfeita e, por conseguinte, G também a possui.

