отсюда $x = (1 - z^4)^{-2/3}$, $dx = \frac{8}{3}(1 - z^4)^{-5/3} z^3\, dz$, поэтому

$$I = \frac{8}{3}\int \frac{z^4}{(1 - z^4)^2}\, dz = \frac{2}{3}\int z\, d\frac{1}{1 - z^4} = \frac{2}{3}\left(\frac{z}{1 - z^4} - \int \frac{dz}{1 - z^4}\right) =$$

$$= \frac{2z}{3(1 - z^4)} - \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1 - z^2} + \frac{1}{1 + z^2}\right) dz =$$

$$= \frac{2z}{3(1 - z^4)} - \frac{1}{6}\ln\left|\frac{1 + z}{1 - z}\right| - \frac{1}{3}\operatorname{arctg} z + C,$$

где z выражается через x по формуле (21.15).

21.5. Интегралы вида $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx, \quad a \neq 0,$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 1$. С принципиальной точки зрения этот интеграл всегда можно свести к интегралу от рациональной дроби с помощью одной из подстановок Эйлера (см. п. 21.3). Однако в данном конкретном случае значительно быстрее к цели приводит обычно другой прием.

Именно, покажем, что справедлива формула

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx =$$

$$= P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \qquad (21.16)$$

где $P_{n-1}(x)$ — многочлен степени не выше, чем $n - 1$, а α — некоторое число.

Итак, пусть многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \qquad (21.17)$$

задан. Если существует многочлен

$$P_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0, \qquad (21.18)$$

удовлетворяющий условию (21.16), то, дифференцируя это равенство, получим

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= P'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{P_{n-1}(x)(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\alpha}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

или

$$2P_n(x) = 2P'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + P_{n-1}(x)(2ax+b) + 2\alpha. \tag{21.19}$$

Здесь слева стоит многочлен степени n, а справа каждое слагаемое также является многочленом степени не больше n.

Замечая, что

$$P'_{n-1}(x) =$$

$$= (n-1)b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + k\, b_k x^{k-1} + \ldots + b_1, \tag{21.20}$$

и подставляя (21.17), (21.18) и (21.20) в (21.19), имеем равенства

$$2(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) =$$

$$= 2(ax^2+bx+c)[(n-1)b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + kb_k x^{k-1} + \ldots + b_1] +$$

$$+ (2ax+b)(b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_k x^k + \ldots + b_0) + 2\alpha.$$

Приравнивая коэффициенты у одинаковых степеней x, получим следующую систему $n+1$ линейных уравнений с $n+1$ неизвестными $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, \alpha$:

$$2a_0 = 2cb_1 + bb_0 + 2\alpha,$$

$$2a_1 = 2bb_1 + 4cb_2 + 2ab_0 + bb_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2a_k = 2(k-1)ab_{k-1} + 2kbb_k + 2(k+1)cb_{k+1} + 2ab_{k-1} + bb_k,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2a_{n-1} = 2(n-2)ab_{n-2} + 2(n-1)bb_{n-1} + 2ab_{n-2} + bb_{n-1},$$

$$2a_n = 2(n-1)ab_{n-1} + 2ab_{n-1}. \tag{21.21}$$

Из последнего уравнения сразу находим: $b_{n-1} = a_n/na$. Подставляя это выражение в предпоследнее уравнение и замечая, что в этом уравнении коэффициент у неизвестного b_{n-2} равен $2a(n-1) \neq 0$, найдем значение b_{n-2}. Подставляя далее значения b_{n-1} и b_{n-2} в предыдущее уравнение, найдем