# Geometría Analítica I

## Reposición del Segundo Parcial

Grupo 4072 — Semestre 2025-1

Profesor: Ramón Reyes Carrión

Fecha de aplicación: Miércoles 11 de diciembre de 2024

**Instrucciones:** Resuelve los 5 ejercicios indicados debajo. Cada uno vale 2 puntos. Para el segundo ejercicio, puede elegir entre 2) y 2'), y análogamente para el tercero. El examen es INDIVIDUAL. Cualquier conducta que falte a las normas de honestidad académica y ética universitaria anulará la entrega del examen.

1. (2.5 pts) Considera los puntos $P_1 = (2,2)$, $P_2 = (4,6)$, $Q_1 = (-2,1)$ y $Q_2 = (-3,2)$.
   *a*) Da ecuaciones normales para las mediatrices $\mathcal{M}_{P_1P_2}$ y $\mathcal{M}_{Q_1Q_2}$.
   *b*) Encuentra la intersección de las mediatrices previas. Llamemos a este punto $A$.
   *c*) Encuentra la distancia de $A$ a las rectas $\mathcal{L}_{P_1Q_1}$ y $\mathcal{L}_{P_2Q_2}$.
2. (3 pts) Sea $n$ el último dígito de su número de cuenta **distinto de 0**. Considera el vector $u_0 = (2, n)$.
   *a*) Normaliza $u_0$, denotemos al vector resultante como $u_1$ y encuentra un vector $u_2$, tal que $\{u_1, u_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Demuestra explícitamente que forman una base ortonormal, es decir, que satisfacen $u_i \cdot u_j = \delta^i_j$.
   *b*) ¿Cuántos vectores $w \in \mathbb{R}^2$ cumplen que $\{u/|u|, w\}$ es una base ortonormal? Explica tu respuesta.
   *c*) Escribe a los vectores $(1,1)$, $(7,4)$ y $(-3,5)$ como combinación lineal de $u_1$ y $u_2$.
   *d*) Refleja al punto $(7,4)$ con respecto a la recta generada por $u_1$. Escribe a este punto reflejado como combinación lineal de $u_1$ y $u_2$. ¿Qué puedes notar de estos coeficientes con respecto a los de $(7,4)$?
3. (3 pts) Sea $\mathcal{C}$ la circunstancia $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$.
   *a*) Encuentra el centro, $\mathbf{a}$, y el radio, $r$, de $\mathcal{C}$. Escríbela en la forma $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = r^2$.
   *b*) Encuentra las rectas tangentes a $\mathcal{C}$ que pasan por el punto $\mathbf{p} = (37/4, -4)$, sus ecuaciones y los puntos de tangencia.
   *c*) Elige un punto $\mathbf{c}$ intermedio en el segmento de recta que conecta a los puntos de tangencia, encuentra la ecuación de su recta polar, $\mathcal{P}_{\mathbf{c}}$, y verifica que $\mathbf{p}$ está en dicha polar.
4. (2.5 pts) Sean $\mathbf{p} = (-1,3)$ y $\mathbf{q} = (3,-1)$.
   *a*) Encuentra la ecuación vectorial de la circunferencia que tiene al segmento $\overline{\mathbf{pq}}$ como diámetro.
   *b*) Elije un número $\tau \in (0,1)$, $\tau \neq \frac{1}{2}$y considera el punto $a = \mathbf{p} + \tau(\mathbf{q} - \mathbf{p})$. Encuentra el conjugado armónico de $a$.

¡MUCHA SUERTE!

10

Geometría Analítica I - Reposición del Segundo Parcial Grupo: 4072

Profesor: Ramón Reyes Carrión. Semestre: 2025-1

Ayudante: Emmanuel Ismael Gonzalez Celio.

Alumno: Rivero Martínez Alan Daniel No. cuenta: 322264085

## Ejercicio (1)

Considera los puntos $P_1=(2,2)$, $P_2=(4,6)$, $Q_1=(-2,1)$ y $Q_2=(-3,2)$

a) Da ecuaciones normales para las mediatrices $M_{P_1P_2}$ y $M_{Q_1Q_2}$

Sabemos que la ecuación de la mediatriz con extremos p y q es:

$M_{pq}: x\cdot(p-q)=\frac{1}{2}(p-q)\cdot(p+q)$

Al tomar la mediatriz de $P_1$ y $P_2$, con $x=(x,y)$ queda como:

$$M_{P_1P_2}: x(P_1-P_2)=\frac{1}{2}(P_1-P_2)\cdot(P_1+P_2)\Rightarrow(x,y)\cdot[(2,2)-(4,6)]=\frac{1}{2}[(2,2)-(4,6)]\cdot[(2,2)+(4,6)]$$

$$\Rightarrow(x,y)\cdot(-2,-4)=\frac{1}{2}[(-2,-4)]\cdot[(6,8)]$$

$$-2x-4y=\frac{1}{2}[-12-32]$$

$$-2x-4y=\frac{1}{2}[-44]$$

$$(-2x-4y=-22)/-2$$

$$\Rightarrow x+2y=11$$

$\Rightarrow$ La ecuación normal de la mediatriz $M_{P_1P_2}$ es $x+2y=11$ ■

Ahora al tomar la mediatriz de $Q_1$ y $Q_2$ con $x=(x,y)$ queda como:

$$M_{Q_1Q_2}: x(Q_1-Q_2)=\frac{1}{2}(Q_1-Q_2)\cdot(Q_1+Q_2)\Rightarrow(x,y)\cdot[(-2,1)-(-3,2)]=\frac{1}{2}[(-2,1)-(-3,2)][(-2,1)+(-3,2)]$$

$$\Rightarrow(x,y)\cdot(1,-1)=\frac{1}{2}[(1,-1)(-5,3)]$$

$$x-y=\frac{1}{2}(-5-3)$$

$$x-y=\frac{1}{2}(-8)$$

$$\Rightarrow x-y=-4$$

$\Rightarrow$ La ecuación normal de la mediatriz $M_{Q_1,Q_2}$ es $x-y=-4$ ■

b) Encuentra la intersección de las mediatrices previas. Llamemos a este punto A.

Para encontrar ésta intersección, $M_{P_1P_2}: x+2y=11$ y $M_{Q_1Q_2}: x-y=-4$, las $x, y$ deben de coincidir, i.e

$$\begin{cases} x+2y=11 & ① \\ x-y=-4 & ② \end{cases}$$ → Se obtiene un sistema de ecuaciones, al despejar $x$ de ① se obtiene:

$x = 11-2y$ Al sustituir $x$ en ② se obtiene: $x-y=-4 \Rightarrow 11-2y-y=-4$

$-3y=-15$

$y=5$

Ahora al sustituir $y$ en el despeje de $x$, se obtiene: $x=11-2y \Rightarrow x=11-2(5)$

$x=11-10$

$x=1$

∴ La intersección de las mediatrices $M_{P_1P_2}$ y $M_{Q_1Q_2}$ es $A=(1,5)$ ∎

c) Encuentra la distancia de A a las rectas $\mathcal{L}_{P_1Q_1}$ y $\mathcal{L}_{P_2Q_2}$.

Tomemos los vectores dirección $V=P_1-Q_1$ y $U=P_2-Q_2$

$V=P_1-Q_1 \Rightarrow V=(2,2)-(-2,1)=(2+2,2-1)=(4,1)$

$U=P_2-Q_2 \Rightarrow U=(4,6)-(-3,2)=(4+3,6-2)=(7,4)$

Recordatorio

$\mathcal{L}_p: x\cdot v^{\perp}=v^{\perp}\cdot p$

Entonces tenemos las rectas: (con $x=(x,y)$)

$\mathcal{L}_{P_1Q_1}: x\cdot V^{\perp}=V^{\perp}\cdot P_1$ y $\mathcal{L}_{P_2Q_2}: x\cdot U^{\perp}=U^{\perp}\cdot P_2$

$\Rightarrow (x,y)(-1,4)=(-1,4)\cdot(2,2)$ $\Rightarrow (x,y)(-4,7)=(-4,7)(4,6)$

$-2+8$

$\mathcal{L}_{P_1Q_1}: -x+4y=6$ $\mathcal{L}_{P_2Q_2}: -4x+7y=26$

Sabemos que la ecuación de un punto a una recta es: $\frac{|v^{\perp}\cdot x-c|}{\|v^{\perp}\|}$ con el punto $x=A$; tenemos que:

$$d(A,\mathcal{L}_{P_1Q_1})=\frac{|V^{\perp}\cdot A-C|}{\|V^{\perp}\|}=\frac{|(-1,4)\cdot(1,5)-6|}{\sqrt{(-1)^2+(4)^2}}=\frac{|-1+20-6|}{\sqrt{17}}=\frac{13}{\sqrt{17}}\approx 3.152963125$$ ∎

$$d(A,\mathcal{L}_{P_2Q_2})=\frac{|U^{\perp}\cdot A-C|}{\|U^{\perp}\|}=\frac{|(-4,7)(1,5)-26|}{\sqrt{(-4)^2+(7)^2}}=\frac{|-4+35-26|}{\sqrt{65}}=\frac{5}{\sqrt{65}}\approx 0.6201736729$$ ∎

Ejercicio (2) 322264085

Sea $n$ el último dígito de su número de cuenta distinto de 0, considera el vector $u_0 = (2, n) = u_0 = (2, 5)$

a) Normaliza $u_0$ denotemos al vector resultante como $u_1$ y encuentra un vector $u_2$ tal que $\{u_1, u_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Demuestra explícitamente que forman una base ortonormal, ie, que satisfacen $u_i \cdot u_j = \delta^i_j$.

Para normalizar a $u_0$, multiplicamos por el inverso multiplicativo de la norma, ie,

$$u_1 = \frac{1}{\|u_0\|}(u_0) = \frac{1}{\sqrt{2^2+5^2}}(2,5) = \frac{1}{\sqrt{29}}(2,5) = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right) = u_1$$

Sea $u_2 = u_1^{\perp}$, ie, $u_2 = \left(-\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\right)$

Para probar que forman una base ortonormal, deben cumplir que:

- $u_1, u_2$ tengan norma 1
- $u_1, u_2$ sean ortogonales
- $u_1, u_2$ generen $\mathbb{R}^2$

Probaremos que $u_1, u_2$ tienen norma 1

$$\|u_1\| = \sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{29} + \frac{4}{29}} = \sqrt{\frac{29}{29}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|u_2\| = \sqrt{\left(-\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{29} + \frac{4}{29}} = \sqrt{\frac{29}{29}} = \sqrt{1} = 1$$

✓ $\therefore u_1, u_2$ tienen norma 1.

Probaremos que $u_1, u_2$ son ortogonales, ie, $u_1 \cdot u_2 = 0$

$$u_1 \cdot u_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right) \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\right) = -\frac{10}{\sqrt{29}} + \frac{10}{29} = 0$$

$\therefore u_1, u_2$ son ortogonales.

Dado a que $u_1, u_2 \in S^1$ y son ortogonales entre sí, su generado siempre será $\mathbb{R}^2$; y como generan todo $\mathbb{R}^2 \Rightarrow u_1, u_2$ son una base.

$\therefore u_1, u_2$ sí son una base ortonormal ∎

b) ¿Cuántos vectores $w \in \mathbb{R}^2$ cumplen que $\left\{\frac{u}{|u|}, w\right\}$ es una base ortonormal? Explica tu respuesta.

Como $\frac{u}{|u|}$ es un vector de norma 1, para que $\left\{\frac{u}{|u|}, w\right\}$ formen una base ortonormal $w$ sólo tiene dos opciones que sea compadre ortogonal o menos el compadre ortogonal ie, $w = \frac{u^{\perp}}{|u|}$ ó $w = -\frac{u^{\perp}}{|u|}$; ya que $w$ seguiría siendo de norma 1 y sí o sí [illegible] entonces solo 2 vectores lo cumplen ∎

c) Escribe los vectores (1, 1), (7, 4) y (-3, 5) como combinación lineal de $u_1$ y $u_2$.

Como $u_1, u_2$ forman una base ortonormal, ent, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^2 \quad \bar{x} = (\bar{x} \cdot u_1)u_1 + (\bar{x} \cdot u_2)u_2$

Entonces, si $\bar{x} = (1, 1)$, queda como: $\quad (1,1) = \lambda u_1 + \mu u_2$

$$(1,1) = \left[(1,1) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right)\right] \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right) + \left[(1,1)\left(-\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\right)\right] \left(\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\right)$$

$$(1,1) = \left[(1,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{29}}(2,5)\right] u_1 + \left[(1,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{29}}(-5,2)\right] u_2$$

$$(1,1) = \frac{1}{\sqrt{29}}\left[(1,1)(2,5)\right] u_1 + \frac{1}{\sqrt{29}}\left[(1,1)\cdot(-5,2)\right] u_2$$

$$(1,1) = \frac{1}{\sqrt{29}}[2+5]\, u_1 + \frac{1}{\sqrt{29}}(-5+2)\, u_2$$

$$(1,1) = \left(\frac{7}{\sqrt{29}}\right) u_1 + \left(-\frac{3}{\sqrt{29}}\right) u_2 \quad \blacksquare \qquad \therefore \lambda = \frac{7}{\sqrt{29}}, \quad \mu = -\frac{3}{\sqrt{29}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u_1 = \frac{1}{\sqrt{29}}(2,5) = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right) \\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{29}}(-5,2) = \left(-\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\right) \end{array}}$$

Ahora si $\bar{x} = (7, 4)$, queda como: $\quad (7,4) = \lambda u_1 + \mu u_2$

$$(7,4) = \left[(7,4) \cdot \frac{1}{\sqrt{29}}(2,5)\right] u_1 + \left[(7,4) \cdot \frac{1}{\sqrt{29}}(-5,2)\right] u_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{29}}\left[(7,4)(2,5)\right] u_1 + \frac{1}{\sqrt{29}}\left[(7,4)\cdot(-5,2)\right] u_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{29}}[14+20]\, u_1 + \frac{1}{\sqrt{29}}[-35+8]\, u_2$$

$$(7,4) = \left(\frac{34}{\sqrt{29}}\right) u_1 + \left(-\frac{27}{\sqrt{29}}\right) u_2 \quad \blacksquare \qquad \therefore \lambda = \frac{34}{\sqrt{29}}, \quad \mu = -\frac{27}{\sqrt{29}}$$

Por último, si $\bar{x} = (-3, 5)$ queda como: $\quad (-3,5) = \lambda u_1 + \mu u_2$

$$(-3,5) = \left[(-3,5) \cdot \frac{1}{\sqrt{29}}(2,5)\right] u_1 + \left[(-3,5) \cdot \frac{1}{\sqrt{29}}(-5,2)\right] u_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{29}}\left[(-3,5)\cdot(2,5)\right] u_1 + \frac{1}{\sqrt{29}}\left[(-3,5)\cdot(-5,2)\right] u_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{29}}[-6+25]\, u_1 + \frac{1}{\sqrt{29}}[+15+10]\, u_2$$

$$(-3,5) = \left(\frac{19}{\sqrt{29}}\right) u_1 + \left(\frac{25}{\sqrt{29}}\right) u_2 \quad \blacksquare \qquad \therefore \lambda = \frac{19}{\sqrt{29}}, \quad \mu = \frac{25}{\sqrt{29}}$$

d) Refléja al punto $(7,4)$ con respecto a la recta generada $U_1$. Escribe a este punto refléjado como combinación lineal de $U_1$ y $U_2$. ¿Qué puedes notar de estos coeficientes con respecto a los de $(7,4)$?

Sabemos que la formula de reflexión es $\mathfrak{R}_\ell(x) = x + 2(C - U\cdot x)U$ donde $x$ es el punto que refléjamos con respecto a una linea, en este caso la recta generada por $U_1$

Notemos que la recta generada por $U_1$ es la misma que $U_0$, i.e,

$$\ell_{U_1} = \ell_{U_0} \Rightarrow -\frac{5}{\sqrt{29}}x + \frac{2}{\sqrt{29}}y = 0 = -5x + 2y = 0$$

Por lo que en éste éjercicio trabajaremos con la ecuación de la recta $\frac{-5}{\sqrt{29}}x + \frac{2}{\sqrt{29}}y = 0$

Entonces, al sostituir la fórmula de la reflexión con la recta y el punto, queda como:

$$\mathfrak{R}_{\ell_{U_1}}(7,4) = (7,4) + 2\left[0 - \left(-\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\right)(7,4)\right]\left(\frac{-5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\right)$$

$$= (7,4) + 2\left[-\left(\frac{-35}{\sqrt{29}} + \frac{8}{\sqrt{29}}\right)\right]\left(-\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\right)$$

$$= (7,4) + 2\left(\frac{27}{\sqrt{29}}\right)\left(-\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\right)$$

$$= (7,4) + \frac{54}{\sqrt{29}}\left(\frac{-5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\right)$$

$$= (7,4) + \left(\frac{-270}{29}, \frac{108}{29}\right)$$

$$\mathfrak{R}_{\ell_{U_1}}(7,4) = \left(-\frac{67}{29}, \frac{224}{29}\right)$$

$\therefore$ La reflexión del punto $(7,4)$ con respecto a la recta generada por $U_1$ es $\left(-\frac{67}{29}, \frac{224}{29}\right)$ ∎

Ahora, la combinación lineal es:

$$\left(-\frac{67}{29}, \frac{224}{29}\right) = \left[\left(-\frac{67}{29}, \frac{224}{29}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{29}}(2,5)\right]U_1 + \left[\left(-\frac{67}{29}, \frac{224}{29}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{29}}(-5,2)\right]U_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{29}}\left[-\frac{134}{29} + \frac{1120}{29}\right]U_1 + \frac{1}{\sqrt{29}}\left[\frac{335}{29} + \frac{448}{29}\right]U_2$$

$$\left(-\frac{67}{29}, \frac{224}{29}\right) = \left(\frac{34}{\sqrt{29}}\right)U_1 + \left(\frac{27}{\sqrt{29}}\right)U_2$$

La combinación lineal cambia el signo del escalar de $U_2$, sólo cambió el signo y todo lo demás quedó igual.

# Ejercicio 3

Sea $C$ la circunferencia $x^2+y^2-6x+8y=0$

a) Encuentra el centro "a" y el radio "r" de $C$. Escribela en la forma $(x-a)\cdot(x-a)=r^2$

Para obtener el radio y el centro completamos el trinomio cuadrado perfecto

$$x^2-6x+9+y^2+8y+16=9+16$$

$$(x-3)^2+(y+4)^2=25=5^2$$

$\therefore$ Entonces el centro es $a=(3,-4)$ y de radio 5

Si tomamos a $\bar{x}=(x,y)$ la ecuación vectorial del círculo es:

$$(\bar{x}-a)\cdot(\bar{x}-a)=r^2 \Rightarrow [(x,y)-(3,-4)]\cdot[(x,y)-(3,-4)]=5^2$$

$$\Rightarrow (x-3,\ y+4)\cdot(x-3,\ y+4)=25$$

b) Encuentra las rectas tangentes a $C$ que pasan por el punto $p=\left(\frac{37}{4},-4\right)$, sus ecuaciones y los puntos de tangencia.

Tomando la ecuación vectorial del círculo y sustituyendo un punto por el punto p, queda como:

$$(x-a)\cdot(x-a)=r^2 \Rightarrow [(x,y)-(3,-4)]\cdot\left[\left(\frac{37}{4},-4\right)-(3,-4)\right]=5^2$$

$$\Rightarrow (x-3,\ y+4)\cdot\left(\frac{25}{4},\ 0\right)=5^2$$

$$\frac{25x}{4}-\frac{75}{4}=25$$

$$25x-75=100$$

$$25x=175$$

$$x=\frac{175}{25}$$

$$x=7$$

Ahora al sustituir $x=7$ en la ecuación original, se obtiene:

$$7^2+y^2-6(7)+8y=0$$

$$y^2+8y+7=0$$

Al ocupar la chicharronera se obtiene:

$$y=\frac{-(+8)\pm\sqrt{(-8)^2-4(1)(7)}}{2(1)}$$

$$=\frac{-8\pm\sqrt{64-28}}{2} = \frac{-8\pm 6}{2}$$

$\oplus \frac{-8+6}{2} = -1$ $\qquad$ $\ominus \frac{-8-6}{2} = -7$

∴ Los puntos de tangencia son $(7,-1)$ y $(7,-7)$

Para hallar las ecuaciones de las tangentes se sustituyen éstos puntos en la ecuación vectorial del circulo, entonces queda como:

$[(x,y)-(3,-4)]\cdot[(7,-1)-(3,-4)] = 5^2$

$(x-3,y+4)\cdot(4,3) = 25$

$4x-12+3y+12=25$

$4x+3y=25$

$[(x,y)-(3,-4)]\cdot[(7,-7)-(3,-4)] = 5^2$

$(x-3,y+4)\cdot(4,-3) = 25$

$4x-12-3y-12=25$

$4x-3y-24=25$

$4x-3y=49$

∴ Las ecuaciones de las tangentes que pasan por el punto $\left(\frac{37}{4},-4\right)$ son:
$4x+3y=25$ y $4x-3y=49$. ∎

c) Elige un punto C intermedio en el segmento de recta que conecta los puntos de tangencia, encuentra la ecuación de su recta polar $P_c$ y verifica que p está en dicha polar

Sea $c = \frac{(7,-1)+(7,-7)}{2} = \frac{(14,-8)}{2} = (7,-4)$

Como la ecuación de la polar de un punto es $(x-a)\cdot(p-a)=r^2$ con p el punto, al sustituir se obtiene:

$[(x,y)-(3,-4)]\cdot[(7,-4)-(3,-4)] = 5^2$

$(x-3,y+4)\cdot(4,0) = 25$

$4x-12=25$

∴ La ecuación polar de C es $P_c: 4x-12=25$ ∎

Para comprobar que el punto $p=\left(\frac{37}{4},-4\right)$ pertenece a la polar de c, sustituiremos

$4x-12=25 \Rightarrow 4\left(\frac{37}{4}\right)-12=25$

$37-12=25$

$25=25$ ✓

tanto $c \in P_p$ ∎

## Ejercicio (4)

Sean $p=(-1,3)$ y $q=(3,-1)$ $\qquad q-p=(3,-1)-(-1,3) \qquad 3+1, -1-3$

a) Encuentra la ecuación vectorial de la circunferencia que tiene al segmento $\overline{pq}$ como diámetro

Sea $c=\frac{p+q}{2}$ el centro y $r=\frac{d(q,p)}{2}$ el radio.

$$\Rightarrow c=\frac{(-1,3)+(3,-1)}{2} \qquad r=\frac{\sqrt{(3-(-1))^2+(-1-3)^2}}{2}$$

$$=\frac{(2,2)}{2} \qquad =\frac{\sqrt{16+16}}{2} \qquad \frac{\sqrt{32}}{2}$$

$$c=(1,1) \qquad =\frac{4\sqrt{2}}{2}$$

$$r=2\sqrt{2}$$

Entonces la ecuación vectorial del círculo es: $\quad$ con $x=(x,y)$

$$(\bar{x}-a)\cdot(\bar{x}-a)=r^2 \qquad \Rightarrow [(x,y)-(1,1)]\cdot[(x,y)-(1,1)]=(2\sqrt{2})^2$$

$$(\bar{x}-(1,1))\cdot(\bar{x}-(1,1))=(2\sqrt{2})^2 \qquad (x-1,y-1)\cdot(x-1,y-1)=8$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2=8$$

b) Elige un número $\tau\in(0,1)$, $\tau\neq 1/2$ y considera el punto $a=p+\tau(q-p)$. Encuentra el conjugado armónico de $a$.

Sea $\tau=1/4$, el punto $a$ queda como:

$$a=(-1,3)+1/4[(3,-1)-(-1,3)]$$

$$a=(-1,3)+1/4(4,-4)$$

$$a=(-1,3)+(1,-1)$$

$$a=(0,2)$$

Sabemos que si $p,q,a,b$ son colineales y existe un círculo con diámetro $\overline{pq}$ y "$a$" $\in\overline{pq}$, entonces la polar de $a$ contiene a "$b$" y en específico $b$ es el conjugado armónico de "$a$"

Entonces, la recta polar resulta como:

$$(\bar{x}-c)\cdot(a-c)=r^2 \qquad \Rightarrow [(x,y)-(1,1)]\cdot[(0,2)-(1,1)]=(2\sqrt{2})^2$$

$$(x-1,y-1)\cdot(-1,1)=4(2)$$

$$1-x+y-1=8 \qquad \Rightarrow -x+y=8$$

Ahora buscamos la intersección del segmento $\overline{pq}$ con la recta $P_a$

Tenemos que la recta del segmento $\overline{pq}$ es $\mathcal{L}_{\overline{pq}} = p + \lambda(q-p)$ i.e. $\mathcal{L}_{\overline{pq}} : p + \lambda v$

con $v = q - p$ $(3,-1)-(-1,3) = (4,-4)$

$v = (4,-4)$

Y descrita de forma normal es $\mathcal{L}_{\overline{pq}} : \overline{x} \cdot v^{\perp} = v^{\perp} \cdot p$

$$(x,y)\cdot(4,4) = (4,4)\cdot(-1,3)$$
$$4x + 4y = -4 + 12$$
$$(4x + 4y = 8)/4$$
$$x + y = 2$$

Ent. la intersección de ambas rectas es:

$$\begin{cases} -x + y = 8 & (1) \\ x + y = 2 & (2) \end{cases}$$

Se obtiene un sistema de ecuaciones 2x2.

Al sumar (1)+(2) se obtiene $2y = 10$

$y = 5$

Al sustituir en (2) $x + y = 2 \Rightarrow x + 5 = 2$

$x = -3$

$\therefore$ El conjugado armónico de $a = (0,2)$, llamémosle $b = (-3,5)$.