Teo Sean $S \neq \emptyset$ un cto y $\mathbb{F}$ un campo. Entonces ${}^{S}\mathbb{F}$ es un $\mathbb{F}$-eV

Obs

1) Recordemos que ${}^{S}\mathbb{F} = \{ f : S \to \mathbb{F} \mid f \text{ es función} \}$.
2) Cuando $S = \{1,2\}$, ent. ${}^{S}\mathbb{F}$ se identifica con $\mathbb{F}^2$
3) Si $f, g \in {}^{S}\mathbb{F}$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, ent. $f+g : S \to \mathbb{F}$, $\lambda f : S \to \mathbb{F}$

   $(f+g)(s) = f(s) + g(s)$ $\quad$ $(\lambda f)(s) = \lambda \cdot f(s)$
4) $\bar{0} : S \to \mathbb{F}$ se define como $\bar{0}(s) = 0$

Dem (del Teo)

I) Pd $({}^{S}\mathbb{F}, +, \bar{0})$ es gpo abeliano

Asociatividad: Pd $(f \hat{+} g) \hat{+} h = f \hat{+} (g \hat{+} h)$

Dadas $f, g, h \in {}^{S}\mathbb{F}$, se tiene que

$$(f \hat{+} g) \hat{+} h \quad \text{y} \quad f \hat{+} (g \hat{+} h)$$

tienen el mismo dominio y contradominio. Lo que falta para ver que son iguales es que tienen la misma regla de corresp. Para ello, tomemos un punto arbitrario del dominio, $s \in S$. Entonces

$$\big((f \hat{+} g) \hat{+} h\big)(s) = (f \hat{+} g)(s) + h(s)$$
$$= \big(f(s) + g(s)\big) + h(s)$$

Luego, por la asociatividad de la suma en $\mathbb{F}$, se tiene

$$= f(s) + \big(g(s) + h(s)\big)$$
$$= f(s) + (g \hat{+} h)(s)$$
$$= \big(f \hat{+} (g \hat{+} h)\big)(s)$$

Como $s \in S$ es arbitrario, hemos demostrado que

$$(f \hat{+} g) \hat{+} h = f \hat{+} (g \hat{+} h)$$

<u>Existencia del neutro</u>: Tenemos como candidato a $\bar{0} : s \in S \mapsto 0$.

Veamos que, para toda $f \in {}^{S}\mathbb{F}$, $f \hat{+} \bar{0} = f$.
En efecto, dados cualesquiera $f \in {}^{S}\mathbb{F}$ y $s \in S$, se tiene

$$(f \hat{+} \bar{0})(s) = f(s) + \overset{0}{\cancel{\bar{0}(s)}} = f(s) + 0 = f(s)$$

Análogamente se prueba que $\bar{0} \hat{+} f = 0$. $\therefore \bar{0}$ es neutro aditivo

<u>Existencia de inversos</u>: Dada $f \in {}^{S}\mathbb{F}$, definimos

$$-f : S \to \mathbb{F} \text{ tq } (-f)(s) = -(f(s))$$

Veamos que $f \hat{+} (-f) = \bar{0}$. En efecto, dado cualquier $s \in S$, se tiene

$$(f \hat{+} (-f))(s) = f(s) + (-f)(s) = f(s) + (-(f(s))) = 0$$

Así, $\forall s \in S$, $(f \hat{+} (-f))(s) = 0$. $\Rightarrow f \hat{+} (-f) = \bar{0}$.

Análogamente, $(-f) \hat{+} f = \bar{0}$. $\therefore$ Siempre existen inversos aditivos

<u>Conmutatividad</u>: Tomamos $f, g \in {}^{S}\mathbb{F}$ y $s \in S$. Ent

$$(f \hat{+} g)(s) = f(s) + g(s) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{la suma en } \mathbb{F} \text{ es conmutativa}}}{=} g(s) + f(s) = (g \hat{+} f)(s).$$

$\therefore$ La suma es conmutativa

De todo lo anterior, podemos concluir que $({}^{S}\mathbb{F}, \hat{+}, \bar{0})$ es un gpo. Abeliano.

Tarea Moral: Demostrar las otras 4 propiedades de $\mathbb{F}$-ev.

(las que corresponden a la mult escalar).

Ejemplo (importante) #5

Si $S \neq \phi$ es un cto finito, ent. $S_{\mathbb{F}}$ es esencialmente igual a $\mathbb{F}^{\cdot}$

Digamos que $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. En la clase del sábado 25 de agosto (virtual)

$\hookrightarrow \# S = n$

vimos cómo identificar a estos espacios mediante la correspondencia

$$\Phi(f : S \to \mathbb{F}) = (f(1), f(2), \ldots, f(n)) \in \mathbb{F}^n$$

Se puede probar que Φ es biyectiva y, más aún,

$$\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g)$$

y

$$\Phi(\lambda f) = \lambda \cdot \Phi(f).$$

Referente a los espacios de funciones tenemos la sigte propiedad que resultará de gran importancia en conceptos que estudiaremos más adelante

Antes de ello, definimos lo que es una combinación lineal.

Definición Sean $\mathbb{F}$ campo y V un $\mathbb{F}$ ev. Dado un cto $S \neq \phi$, decimos que $v \in V$ es una combinación lineal de elementos en S si existen $s_1, s_2, \ldots, s_m \in S$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F}$ tq

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

de los elementos diagonales

Teo Sean $S \neq \phi$ cto finito y $\mathbb{F}$ un campo. Entonces la colección $D = \{ \delta_a : S \to \mathbb{F} \mid a \in S \} \subseteq S_{\mathbb{F}}$ de funciones distinguidas δ_a [que están definidas por

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq a \\ 1 & \text{si } x = a \end{cases}]$$

cumple que toda función $f \in S_{\mathbb{F}}$ se escribe como combinación lineal de elementos en D

Obs ¿De dónde salen las funciones δ_a? Es decir, ¿por qué los consideramos?

Cuando $S = \{1, \dots, n\}$ ent. resulta que $\Phi^{-1}(e_i) = \delta_i$.

(comprobar que $\Phi(\delta_i) = e_i$)

Dem (del Teo) Sea $f \in S_{\mathbb{F}}$. Ent. f determina el sigte cto

$$f(S) = \{ f(x) \mid x \in S \} \subseteq \mathbb{F}$$

este conjunto tiene $\#S$ números/escalares (aunque pueden repetirse).

De este modo, para cada $p \in S$, se tiene un vector

$$f(p)\, \delta_p \in S_{\mathbb{F}}.$$

Asimismo, al sumar los todos obtenemos un vector

$$v = \sum_{p \in S} f(p)\, \delta_p \in S_{\mathbb{F}}$$

Sí vimos de dónde sale

Resulta que $v = f$. Como f y v son funciones con el mismo dominio y mismo contradominio, ent. solamente falta ver que tienen la misma regla de correspondencia. En efecto:

Dado cualquier $s \in S$, al evaluar v en s se tiene

$$v(s) = \left(\sum_{p \in S} f(p)\,\delta_p\right)(s) = \sum_{p \in S} f(p) \cdot \left(\delta_p(s)\right)$$

$$= f(p) \cdot \cancel{\delta_p(s)}^{\,0} + \dots + f(p_k)\,\cancel{\delta_{p_k}(s)}^{\,0} + f(s)\,\cancel{\delta_s(s)}^{\,1}$$

$$+ f(s)\,\cancel{\delta_{p_{k+1}}(s)}_{\,0} + \dots + f(p_m)\,\cancel{\delta_{p_m}(s)}^{\,0}$$

$$= f(s) \cdot \cancel{\delta_s(s)}^{\,1} = f(s) \cdot 1 = f(s).$$

$$\Longrightarrow \quad v(s) = f(s)$$

Como $s \in S$ es arbitrario, tenemos que $v = f$. Es decir

$$f = \sum_{p \in S} f(p)\,\delta_p.$$

$\blacksquare$