Examen 2

21 de enero

Equipo P

1.- Cano Navarro Fernando
2.- Jiménez Rojo Paulina Daniela
3.- Mariano Martínez Kevin
4.- Márquez López Anayely
5.- Pineda Béjar Daniel
6.- Sánchez Benítez Eduardo.

Resuelve los siguientes problemas explicando con detalle tus respuestas

1. Supongamos que tenemos una recta en $\mathbb{R}^2$ definida en su forma vectorial como $\vec{r} = \langle 3 - 3k, 5k \rangle$. Todos los puntos que están en esta recta experimentan una rotación de $\frac{\pi}{2}$ en el sentido inverso a las manecillas del reloj. Luego, experimentan una reflexión sobre el eje X y finalmente experimentan otra reflexión sobre el eje Y. Dá la ecuación (vectorial o funcional) de la recta que quedó después de aplicarle las tres transformaciones a la recta original.
2. Demuestra que si $\mathbf{c}$ es un punto exterior (al círculo $\mathcal{C}$ con centro P) entonces su recta a P bisecta sus dos tangentes a $\mathcal{C}$. Y además que las distancias a sus pies en $\mathcal{C}$ (es decir, a los puntos de tangencia) son iguales.
3. Halla la ecuación del conjunto de puntos G que tienen la propiedad de que la suma de las distancias de cada punto $P \in G$ a los puntos $(0, 3)$ y $(0, -3)$ vale $6\sqrt{3}$.
4. Demuestra que la ecuación

$$|\mathrm{d}(\mathbf{x}, P) - \mathrm{d}(\mathbf{x}, Q)| = 2a,$$

   define,
   - la mediatriz de P y Q para $a = 0$;
   - los rayos complementarios del segmento $\overline{PQ}$ para $a = c$, y
   - el conjunto vacío para $a > c$.
5. Encuentra la transformación afín $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple:
   1. $f(2) = 5$ y $f(5) = 2$
   2. $f(1) = -2$ y $f(2) = 2$
6. Demuestra, usando la fórmula, que la inversa de cualquier reflexión en $\mathbb{R}^2$ es ella misma.

1.- Del examen.

Tenemos $\vec{r}\langle 3-3K, 5K\rangle$, la pasamos a la paramétrica: $\vec{r}\{(3,0)+K(-3,5)/K\in\mathbb{R}\}$

• Necesitamos 2 puntos en la recta para tener una recta, así que tomemos $(3,0)$ el punto de Inicio y $(0,5)$ que bien es la suma de $(3,0)+(-3,5)=(0,5)$ o bien es la coordenada del vector director partiendo desde el origen.

⇒ Rotación $\pi/2 = 90°$

Por tarea, la fun. que rota $90°$ es:

$g(x,y)=(-y,x)$.

Vamos a rotar en el origen con está fórmula:

$g(-c)+c$

Hagamos rotación en $(3,0)$

$g(-3,0)+(3,0)=(0,-3)+(3,0)=\underline{(3,-3)}$ //

Ahora en $(0,5)$

$g(-c)+c = g(0,-5)+(0,5)$

$=(5,0)+(0,5)=(5,5)$

Reflejar en x $f(x,y) = f(x,-y)$

$f(3,-3) = (3,3)$

$f(5,5) = (5,-5)$

Reflejar en y $f(x,y) = f(-x,y)$

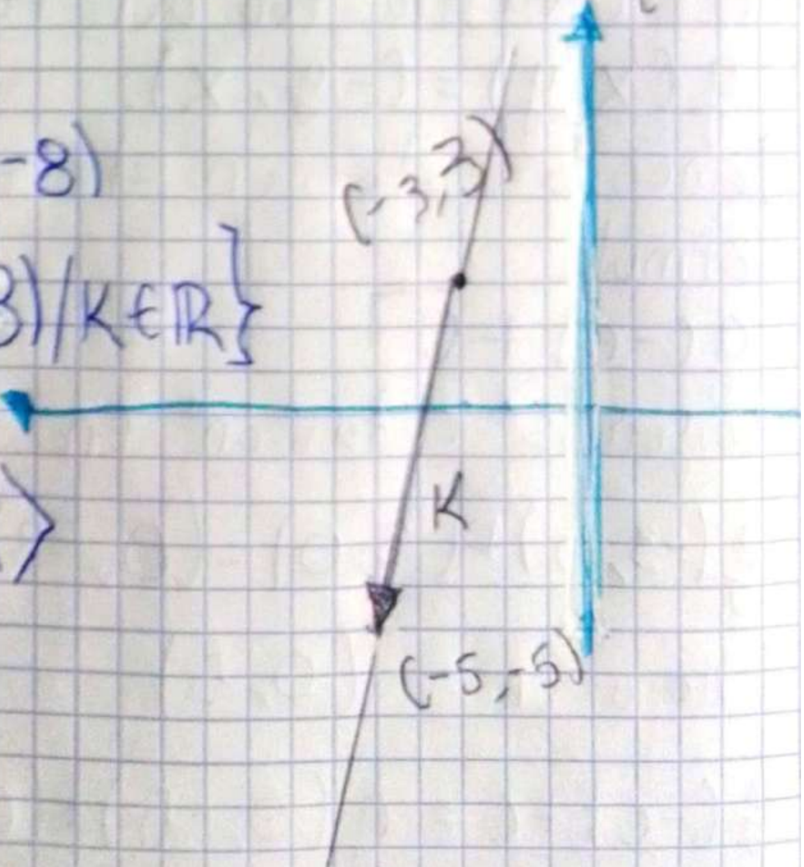
$f(3,3) = (-3,3)$

$f(5,-5) = (-5,-5)$

Ya tenemos 2 puntos de la recta, y como las transformaciones son biyectivas y para una recta se necesitan 2 puntos nos queda:

$d = (-5,-5) - (-3,3) = (-2,-8)$

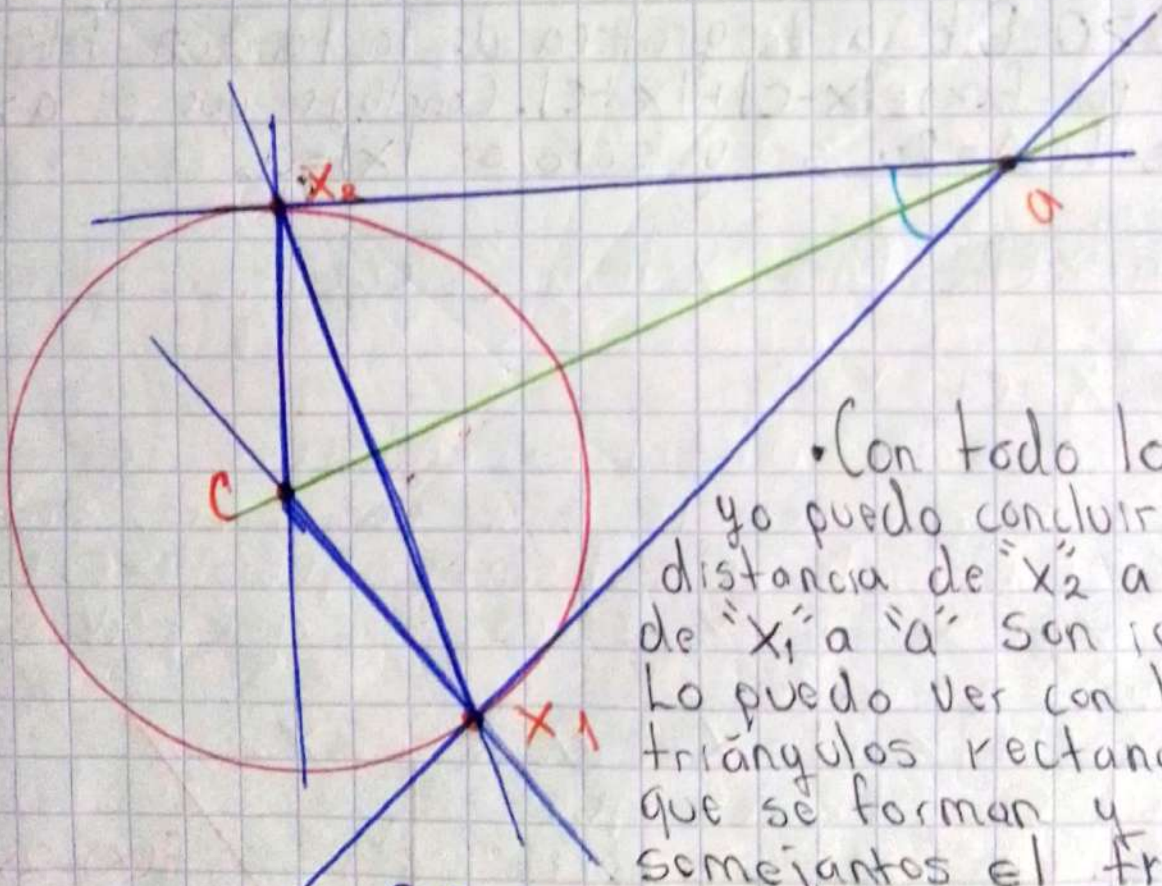
$l = \{(-3,3) + K(-2,-8) / K \in \mathbb{R}\}$



$l = \langle -3-2K, 3-8K \rangle$

2: Demuestra que si C es un punto exterior (al círculo con centro P) entonces a su recta a P bisecta sus 2 tangentes a C. Y además que las distancias a sus pies en C (es decir a sus puntos de Tangencia) son iguales.

• Aquí notamos que tomamos la recta polar de a, toda la recta que pasa por esos puntos el X_2 y X_1.
• Si yo tomo una recta que va del centro al punto a esa recta va cumplir ser perpendicular a la polar.
• Si trazamos las rectas de C a X_2 y a X_1, como X_2 y X_1 son puntos de Tangencia, las rectas serán perpendiculares a las tangentes.



• Con todo lo anterior yo puedo concluir que la distancia de "X_2" a "a" y de "X_1" a "a" son iguales. Lo puedo ver con los 2 triángulos rectangulos que se forman y son semejantes el triángulo CX_2a y el triángulo CX_1a sus lados $\overline{CX_2}$ y $\overline{CX_1}$ son iguales porque son radios de un círculo, el lado $\overline{Ca}$ es el mismo en los 2 triángulos y los ángulos son rectos.

Además hay otros 2 triángulos semejantes dentro del triángulo que tomamos. Lo podemos reducir al Teorema de Pitágoras si un cateto es el mismo y tienen la misma hipotenusa, forzosamente su otro cateto es el mismo. Con todo esto se concluye que la distancia $\overline{x_2 a}$ y $\overline{x_1 a}$ es la misma.

También la recta que une a $\overline{ca}$ es Mediatriz del segmento que une a x_1 con x_2, y como es mediatriz los ángulos que forma la mediatriz con las rectas que pasan por x_1 y x_2 van a ser iguales, que es la definición de bisectriz.

3. Halla la ecuación del conjunto de puntos G que tienen la propiedad de que la suma de las distancias de cada punto $P \in G$ a los puntos (0,3) y $0, -3)$ vale $6\sqrt{3}$

Sea (x, y) cualquier punto perteneciente a P simplemente tenemos que sumar las distancias a los puntos $(0, 3)$ y $(0, -3)$ y como queremos que se igual a $6\sqrt{3}$ lo igualamos a dicha cantidad, es decir

$$|(x, y) - (0, 3| + |(x, y) - (0, -3)| = 6\sqrt{3}$$

Desarrollamos

$$\sqrt{x - 0)^2 + (y - 3)^2} + \sqrt{(x - 0)^2 + (y - (-3))^2} = 6\sqrt{3}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 6y + 9} + \sqrt{x^2 + y^2 + 6y + 9} = 6\sqrt{3}$$

Despejamos

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 6y + 9} = 6\sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2 + 6y + 9}$$

Elevamos ambos al cuadrado

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 108 - 2 \cdot 6\sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2 + 6y + 9} + x^2 + y^2 + 6y + 9$$

Volvemos a despejar

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 - x^2 - y^2 - 6y - 9 = 108 - 2 \cdot 6\sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2 + 6y + 9}$$

Sumamos inversos y desarrollamos

$$-12y = 108 - 2 \cdot 6\sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2 + 6y + 9}$$

Dividimos todo entre 12

$$-y = 9 - \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2 + 6y + 9}$$

Volvemos a despejar y elevamos al cuadrado ambos lados

$$9 + y = \sqrt{x^2 + y^2 + 6y + 9}$$

$$81 + 18y + 81 = 3(x^2 + y^2 + 6y + 9)$$

Ahora pasamos todo de un lado, desarrollamos e igualamos a 0

$$3x^2 + 2y^2 - 12y - 72 = 0$$

4: Demuestra ecuación

$$|d(x,P)-d(x,Q)|=2a$$ define

- la mediatriz de P y Q para $a=0$.

Sea $a=0$, buscamos los puntos en $\mathbb{R}^2$ tales que

$$|d(x,P)-d(x,Q)|=0$$

Por valor absoluto tenemos

$$\sqrt{(d(x,P)-d(x,Q))^2}=0$$

$$\pm(d(x,P)-d(x,Q))=0$$

No ocuparemos la parte negativa, ya que las normas y su distancia siempre son positivas.

Así que:

$$d(x,P)-d(x,Q)=0$$

$$d(x,P)=d(x,Q)$$

Por el teorema

$$\text{Mediatriz } \overline{PQ}=\{(X(x,y)\mid d(x,P)=d(x,Q))\}$$

$$=\{X(x,y)\mid \sqrt{(x-P_x)^2+(y-P_y)^2}=\sqrt{(x-Q_x)^2+(y-P_y)^2}\}$$

$\therefore$ $d(x,P)=d(x,Q)$ es la mediatriz, o sea los puntos que estan a la misma distancia de P y Q

• el conjunto vacío para $a > c$

Supongamos $a > 0 = \frac{1}{2} d(P,Q) \Rightarrow 2a > d(P,Q)$

Buscamos puntos que cumplan

$|d(x,P) - d(x,Q)| = 2a > d(P,Q)$

Por la propiedad de valor absoluto

$|r| > a \Rightarrow a < r$ o $r < -a$

Tenemos 2 casos

Caso 1) $d(x,P) - d(x,Q) > d(P,Q)$

$\Rightarrow d(P,Q) + d(x,Q) < d(x,P) = d(P,Q) + d(Q,x) < d(P,x)$

Pero por desigualdad del triangulo, tenemos

$d(P,x) = d(P,Q) + d(Q,x)$!

Esto es que ningún x va a cumplir este caso.

Caso 2) $-(d(x,P) - d(x,Q)) > d(P,Q)$

$\Rightarrow d(x,Q) - d(x,P) > d(P,Q) = d(x,Q) > d(x,P) + d(P,Q)$

De nuevo por desigualdad del triangulo

$d(x,P) + d(P,Q) \geq d(x,Q)$!

No existe un x que cumpla esto

$\therefore$ el conjunto es vacío para $a > c$

- los rayos complementarios del segmento $\overline{PQ}$ para $a=c$

Sea $c=\frac{1}{2}d(P,Q)$

Necesitamos encontrar los puntos que cumplen que

$$|d(x,P)-d(x,Q)|=2c=d(P,Q)$$

Por valor absoluto

$$+(d(x,P)-d(x,Q))=2c=d(P,Q)$$
$$-(d(x,P)-d(x,Q))=2c=d(P,Q)$$

Tenemos dos casos

Caso 1) $d(x,P)-d(x,Q)=d(P,Q)$
$$d(x,P)=d(P,Q)+d(x,Q)$$
$$d(x,P)=d(P,Q)+d(Q,x)$$

Esta ecuación significa que $Q\in\overline{Px}$

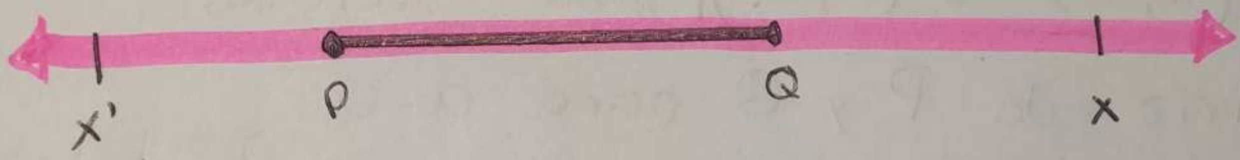
Los puntos que cumplen $d(P,x)=d(P,Q)+d(Q,x)$, se requiere que Q este en medio del segmento que conecta a P con X y eso significa que x esta a la derecha de Q.

Esto nos da que el conjunto de puntos que satisface eso son los que estan en el rayo complementario a la derecha de Q

Caso 2) $d(x',P)-d(x',Q)=-d(P,Q)$
$$d(x',P)+d(P,Q)=d(x',Q)$$

Sea $P\in\overline{x'Q}$, esto es que P esta a la derecha de x'

Graficamente tendriamos algo así



5. $f(2)=5$ $f(5)=2$

Una transformacion afin se escribe

$f(x)+b$

Primero $f(2)=5$ o sea $f(2)=2a+b$

$2a+b=5$

y $f(5)=2$ entonces $f(5)=5a+b$ y

queda $5a+b=2$. $a=-1$ $b=6$

Con algebra se llega a: $f(x)=-x+6$

$f(1)=-1$ $f(2)=3$

$a+b=-1$ y $2a+b=3$

Con Algebra da $a=3$ y $b=4$

$f(x)=3x-4$

6. Demuestra, usando la fórmula, que la inversa de cualquier reflexión en $\mathbb{R}^2$ es ella misma.
Demostración: Sea l una recta perteneciente a $\mathbb{R}^2$ definida por su ecuación normal como $l = \{u \cdot x = c\}$ donde $|u| = 1$ y c es una constante, definimos su reflexión por lo visto en clases como $\phi_l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ talque $\phi_l(x) = x + 2(c - u \cdot x)u$
Para demostrar que es su inversa basta con componerla con ella misma siendo $\phi_l \circ \phi_l$ que es igual a evaluarla en ella misma $\phi_l(\phi_l(x))$ por lo tanto

$$\phi_l \circ \phi_l = (x + 2(c - u \cdot x)u) + 2(c - u \cdot (x + 2(c - u \cdot x)u))u$$

$$= x + 2uc - 2u^2x + 2(c - u \cdot (x + 2uc - 2u^2x))u$$

$$= x + 2uc - 2u^2x + 2u(c - ux - 2u^2c + 2u^3x)$$

$$= x + 2uc - 2u^2x + 2uc - 2u^2x - 4u^3c + 4u^4x$$

$$= x + 4uc - 4u^2x - 4u^3c + 4u^4x$$

Como $|u| = 1$ entonces

$$= x + 4c - 4x - 4c + 4x$$

Esto sigue

$$= x$$

Si seguimos la cadena vemos que la composición de la reflexión con ella misma nos da la identidad y esto solo es posible si la inversa de la función es ella misma.
Por lo tanto la inversa de cualquier reflexión en $\mathbb{R}^2$ es ella misma.$\blacksquare$