Geometría Hip (Negación del 5° postulado muchas paralelas)

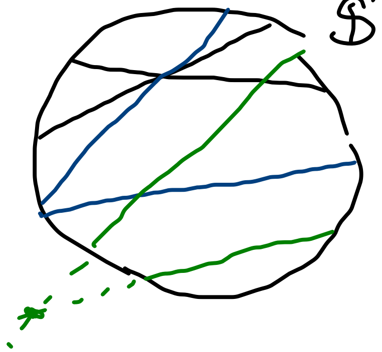
Modelo Disco de Klein

- Puntos $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2<1\}$

$\{(x:y:z) \in \mathbb{P}^2 \mid x^2+y^2-z^2<0\} \subset \mathbb{P}^2$

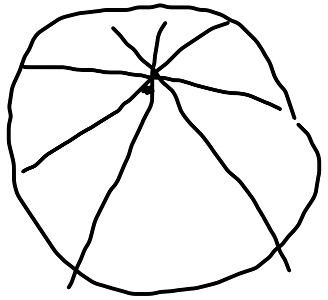
sin frontera S^1 son "puntos al infinito" $\notin \mathbb{H}^2$

- Líneas cuerdas de S^1



Pares de líneas $\begin{cases} \text{intersecten} \\ \text{paralelas} \\ \text{hiperparalelas} \\ \text{ultraparalelas} \end{cases}$

haces $\begin{cases} \text{concurrentes} \\ \text{paralelas} \\ \text{ultraparalelas} \end{cases}$



- Transformaciones

$\mathrm{Hip}(2) = \{ f \in \mathrm{Pr}(2) \mid f(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2 \}$

$= \{ f \in \mathrm{Pr}(2) \mid f(S^1) = S^1 \}$

$S^1 \subset \mathbb{P}^2 \qquad \mathbb{P}^2 \setminus S^1 = D^1 \sqcup B$

$f: \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$

$S^1 \longrightarrow S^1$

Afirmaciones

- $SO(2) \subset \mathrm{Hip}(2)$
- $O(2) \subset \mathrm{Hip}(2)$

Prop $O(2) = \{ f \in \mathrm{Hip}(2) \mid f(0) = 0 \}$

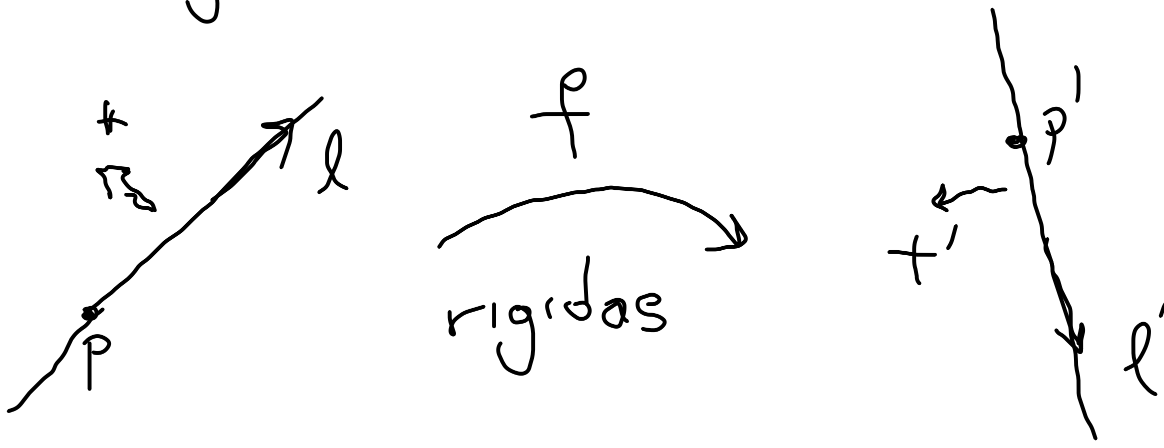
Obs Sucede en todas las geometrías.

P.d 0 no es distinguido.

$O(2) = \{ f \in Hip(2) \mid f(0) = 0 \}$ es independiente del origen

origen.

<u>Obs</u> Una transformación esta determinada por su efecto en un punto en una recta dirigida por el punto y un lado (orientacion)



homogeneos

S^1 homogneizado en $\mathbb{P}^2$

$$x^2 + y^2 - z^2$$

forma cuadratica

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ Matriz de Lorentz

$$q(x) = x L x^T$$

Producto interno de Minkowski

$$x \cdot_L y = X L Y^T = X \cdot (L Y) = (L X) \cdot Y$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$$

<u>Forma</u> simétrica bilineal de Lorentz - Minkowski

__Norma__ $|x|_L^2 = x \circ_L x = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$

__Obs__ $|tx|_L^2 = t^2 \, |x|_L^2$ signo en rectas por el origen no cambia

__Def__ Sea $[x] \in \mathbb{H}^2$

$|x|_L^2 > 0$ decimos $[x]$ es espacial

$|x|_L^2 < 0$ $[x]$ es temporal

$|x|_L^2 = 0$ $[x]$ es luminico