Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

10

Geometría Analítica I

Grupo: 4071

Dr. Ramón Reyes Carrión

Emmanuel Ismael González Celio

Héctor Jair Morales Gómez

Examen 1

Chimal García Ernesto Andreo
Lízárraga Osuna Rosa Isela
López López Daniel
Ponce Vergara Santiago
Segura Moreno Rodrigo
Terrazas Pablo Christian Daniel

28 de noviembre del 2020

Considera los vértices del triángulo ABC y denota por $\mathcal{A}$ la recta que contiene al lado opuesto al vértice A; similarmente para $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.

$$A = (6, 1) \qquad B = (1, 1) \qquad C = (4, 5)$$

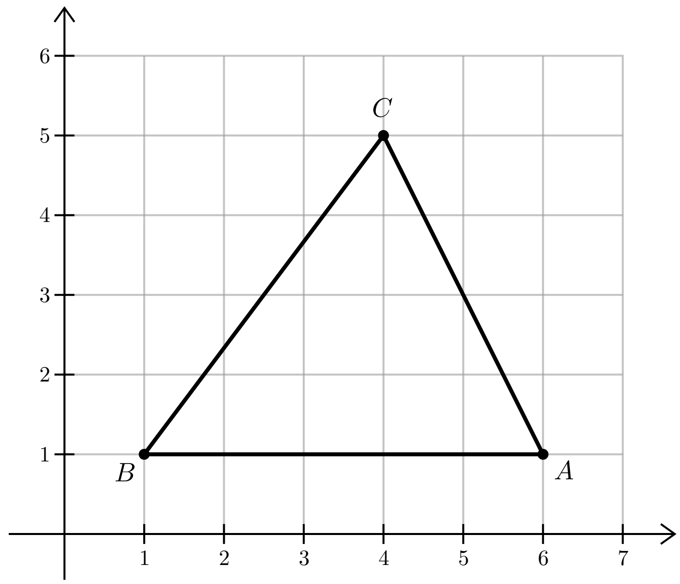

Figura 1: Triángulo ABC descrito

Capítulo 1

Problema 1

Encuentra la descripción paramétrica de $\mathcal{C}$.

Solución

Sabemos que, como $\mathcal{C}$ es opuesta a C, debe pasar por los vértices A y B. Así, un vector director es el vector que une a A con B. Sea $\mathbf{d} = B - A$. Así,

$$\begin{aligned} \mathbf{d} =& B - A \\ &= (1,1) - (6,1) \\ &= (-5,0) \end{aligned}$$

Por lo que el vector director de $\mathcal{C}$ es $(-5,0)$. Más aún, como $\mathcal{C}$ pasa por A, se tiene que una ecuación paramétrica suya es:

$$\mathcal{C}: \ A + t\mathbf{d} \quad t \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\mathcal{C} = \{(6,1) + t(-5,0) \,|\, t \in \mathbb{R}\}}$$

Capítulo 2

Problema 2

Encuentra la ecuación normal de $\mathcal{B}$.

Solución

$\mathcal{B}$ es la recta opuesta al vértice B; *i.e.* la que conecta los puntos A y C. Sabemos que su vector director puede obtenerse restando dos puntos en la misma.

Tomando $\mathbf{d} = A - C = (6-4, 1-5) = (2, -4)$, y A como punto en la recta, la expresión paramétrica de $\mathcal{B}$ es:

$$\{(6,1) + t(2,-4) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Para encontrar su expresión normal basta tomar $(2,-4)^{\perp} = (4,2)$ como vector normal y A como solución particular. Sea $\mathbf{x} = (x, y)$; entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{B}: \ \mathbf{x} \cdot (4,2) &= (6,1) \cdot (4,2) \\ (x,y) \cdot (4,2) &= (6,1) \cdot (4,2) \\ 4x + 2y &= 26 \\ 2x + y &= 13. \end{aligned}$$

Así, la ecuación normal de $\mathcal{B}$ es:

$$\boxed{\mathbf{x} \cdot (4,2) = 26}$$

$$\boxed{2x + y = 13}$$

Capítulo 3

Problema 3

Encuentra la ecuación normal de la recta de la mediatriz del segmento $\overline{BC}$

Solución

Sabemos que le mediatriz es una recta ortogonal al lado y pasa por el punto medio de la misma. A partir de esto definimos la ecuación normal de la mediatriz del lado $\overline{BC}$ como

$$m_{BC} : (B - C) \cdot \mathbf{x} = (B - C) \cdot \tfrac{1}{2}(B + C)$$

Sustituyendo con nuestros valores tenemos

$$m_{BC} : ((1,1) - (4,5)) \cdot \mathbf{x} = ((1,1) - (4,5)) \cdot \tfrac{1}{2}((1,1) + (4,5))$$
$$m_{BC} : (-3,-4) \cdot \mathbf{x} = (-3,-4) \cdot (\tfrac{5}{2}, 3)$$

$$\boxed{m_{BC} : \ (-3,-4) \cdot \mathbf{x} = -\frac{39}{2}}$$

Capítulo 4

Problema 4

Calcula las distancias $b = d(A, C)$ y $h = d(B, \mathcal{B})$, para determinar el área $\frac{bh}{2}$ y haz el dibujo del triángulo, indicando h y la recta de la pregunta anterior.

Solución

Para la distancia b, obtenemos la norma de la diferencia entre los puntos A y C:

$$d(A, C) = \|A - C\|$$

Por lo que, en coordenadas, lo podemos ver como:

$$\begin{aligned} b =& \sqrt{(6-4)^2 + (1-5)^2} \\ =& \sqrt{(2)^2 + (-4)^2} \\ =& \sqrt{4 + 16} \\ =& \sqrt{20} \end{aligned}$$

Sabemos que la distancia del vértice B al lado $\mathcal{B}$ puede calcularse como la distancia de un punto a una recta, por lo que la distancia de B a $\mathcal{B}$ se calcula como:

$$\mathrm{d}(B, \mathcal{B}) = \frac{|c - B \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

Donde la ecuación normal de la recta es de la forma $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c$. Por lo visto en el problema 2, sabemos que la ecuación normal de $\mathcal{B}$ es $\mathbf{x} \cdot (4, 2) = 26$, por lo que:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(B, \mathcal{B}) &= \frac{|26 - (1,1) \cdot (4,2)|}{\|(4,2)\|} \\ &= \frac{|26 - (4+2)|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} \\ &= \frac{|26 - 6|}{\sqrt{16 + 4}} \\ &= \frac{|20|}{\sqrt{20}} \\ &= \sqrt{20} \\ &= \sqrt{20} \end{aligned}$$

Por lo que, las distancias b y h son:

$$\boxed{b = 2\sqrt{5}}$$

$$\boxed{h = 2\sqrt{5}}$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{bh}{2} &= \frac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{20}}{2} \\ &= \frac{20}{2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\mathbf{A} = 10}$$

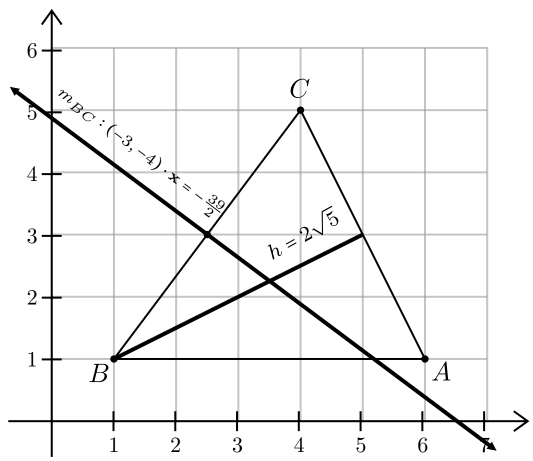

Figura 4.1: Triángulo ABC, con mediatriz m_{BC} y altura h

Capítulo 5

Problema 5

Obtén las coordenadas polares de los puntos con coordenadas cartesianas

$$P = (-1, 2) \qquad\qquad Q = (1, -2)$$

Sabemos que las coordenadas polares de un punto cualquiera (a,b) estará dado por

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad\qquad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Por tanto para el punto P se tiene que

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{2}{-1}\right) = \arctan(-2) = -\arctan(2)$$

Note que, como P se encuentra en el segundo cuadrante es necesario sumarle π a θ. Así pues, sus coordenadas polares son

$$\boxed{(\sqrt{5}, -\arctan(2) + \pi)}$$

Para Q se tiene que

$$r = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{-2}{1}\right) = \arctan(-2) = -\arctan(2)$$

Note que, como P se encuentra en el segundo cuadrante es necesario sumarle 2π a θ. Así pues, sus coordenadas polares son

$$\boxed{(\sqrt{5}, -\arctan(2) + 2\pi)}$$

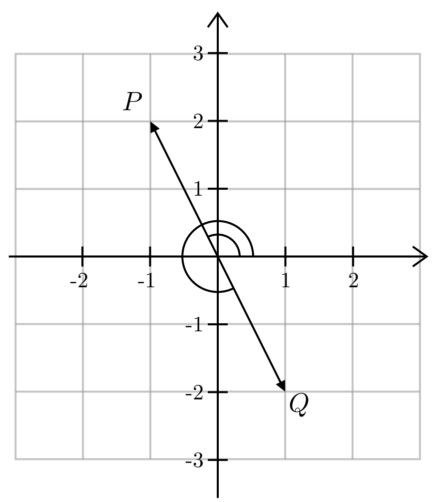

Figura 5.1: Vectores del problema 5

Capítulo 6

Problema 6

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores no nulos. Demuestra que tienen la misma norma si y sólo sí $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ son ortogonales.

$$|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| \iff (\mathbf{u}+\mathbf{v}) \perp (\mathbf{u}-\mathbf{v})$$

Demostración

$\Rightarrow$) Supóngase que $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\| &= \|\mathbf{v}\| \\
\|\mathbf{u}\|^2 &= \|\mathbf{v}\|^2 \\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} && \text{Por definición de norma} \\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} &= 0 \\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + 0 &= 0 && \text{Suma de neutro aditivo} \\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= 0 \\
\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) &= 0 && \text{Por distributividad} \\
(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) &= 0 && \text{Por distributividad}
\end{aligned}$$

Que $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = 0$ implica que $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \perp (\mathbf{u}-\mathbf{v})$.

$\Leftarrow$) El regreso se sigue de todos los pasos anteriores (en reversa) suponiendo que $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \perp (\mathbf{u}-\mathbf{v})$. El único paso por analizar con cuidado es $\|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \Rightarrow \|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$. Nótese que, por las propiedades de las normas, estas son siempre positivas, por lo que sus raíces también lo son y, con esto, $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$.

Por la doble implicación, queda demostrado que:

$$|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| \iff (\mathbf{u}+\mathbf{v}) \perp (\mathbf{u}-\mathbf{v})$$

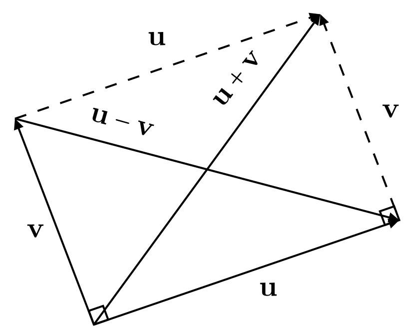

Figura 6.1: Vectores del problema 6