Subespacios y más

Ejemplo de cond. lineal que no determina un subespacio:

1) En $V = \mathcal{C}[a,b]$, $C(f): \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

$$\Rightarrow H = \{ f \in V / C(f) \} = \phi$$

2) En cualquier V, $C(u): u \neq u$

$$\Rightarrow H = \{ f \in V \mid C(f) \} = \phi$$

Notación Si $\mathcal{H} \subseteq V$ es subespacio, ent. lo denotamos por $\mathcal{H} \leq V$.

Teo (importante) Sea V un $\mathbb{F}$-ev. Entonces todo subespacio $\mathcal{H} \leq V$ con las operaciones restringidas

$$\boxed{\begin{array}{ll} & +_{\mathcal{H}}: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to V \ \text{ tq } \ +_{\mathcal{H}} = +\big|_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} \\ \text{y} & \\ & \cdot_{\mathcal{H}}: \mathbb{F} \times \mathcal{H} \to V \ \text{ tq } \ \cdot_{\mathcal{H}} = \cdot\big|_{\mathbb{F} \times \mathcal{H}} \end{array}}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$.

Dem

Comencemos notando que, como $\mathcal{H} \leq V$, existe C cond. lineal tq

$$\mathcal{H} = \{ v \in V \mid C(v) \}.$$

Por la dfn de subespacio, al tomar dos vectores $u, v \in \mathcal{H}$, se tiene que, por ser C una cond. lineal

$$C(u) \wedge C(v) \Rightarrow C(u+v).$$

Esto significa que $u, v \in \mathcal{H} \Rightarrow u+v \in \mathcal{H}$.

Con esto podemos notar que la imagen de $+_{\mathcal{H}}$ queda contenida en $\mathcal{H}$, ie $+_{\mathcal{H}}(\mathcal{H} \times \mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H} \subseteq V$. Veamos que $(\mathcal{H}, +_{\mathcal{H}}, 0)$ es gpo. abeliano.

Obs. $\bar{0} \in \mathcal{H}$ ya que $\mathcal{H} \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, u_0 \in \mathcal{H}$. Luego, $C(u_0)$ es verdadera y por ello $C(0 u_0) = C(\bar{0})$ también es verdadera. Por ello, $\bar{0} \in \mathcal{H}$

Asociatividad: Del hecho de que V es $\mathbb{F}$-ev. se tiene

$$\forall u,v,w \in V, \quad (u+v)+w = u+(v+w).$$

En particular, $\mathcal{H} \leq V$ implica que

$$\forall u,v,w \in \mathcal{H}, \quad (u \underset{\mathcal{H}}{+} v) \underset{\mathcal{H}}{+} w = u \underset{\mathcal{H}}{+} (v \underset{\mathcal{H}}{+} w).$$

Existencia del neutro: Del hecho de que V es $\mathbb{F}$-ev. se tiene

$$\forall u \in V, \quad u + \bar{0} = \bar{0} + u = u$$

En particular, $\mathcal{H} \leq V$ implica que

$$\forall u \in \mathcal{H}, \quad u \underset{\mathcal{H}}{+} \bar{0} = \bar{0} \underset{\mathcal{H}}{+} u = u.$$

Gracias a que $\bar{0} \in \mathcal{H}$, $\bar{0}$ es el neutro de $+_{\mathcal{H}}$.

Existencia de inversos: Dado cualquier $u \in V$, sabemos que

$$(-1)\cdot u = -u.$$

Por ello, dado $u \in \mathcal{H}$, $(-1)u = -u$ también está en $\mathcal{H}$ porque

$$u \in \mathcal{H} \Rightarrow C(u) \text{ verdadera} \Rightarrow \underset{\text{verdadera}}{C((-1)u) = C(-u)}$$

$$\Rightarrow (-1)\cdot u = -u \in \mathcal{H}.$$

Es fácil notar que, gracias a esto que acabamos de probar, la operación $+_{\mathcal{H}}$ tiene inversos $\left(u \in \mathcal{H} \Rightarrow \exists -u \in \mathcal{H} \text{ tq } u+(-u) = \bar{0} \right]$

Conmutatividad: Del hecho de que V es $\mathbb{F}$-ev. se tiene

$$\forall u,v \in V, \quad u+v = v+u.$$

En particular, $\mathcal{H} \leq V$ implica que

$$\forall u,v \in \mathcal{H}, \quad u \underset{\mathcal{H}}{+} v = v \underset{\mathcal{H}}{+} u.$$

De todo lo anterior, concluimos que $\mathcal{H} \leq V$ es en sí mismo es un grupo abeliano.

<u>Tarea moral</u>: Demostrar que $\mathcal{H} \leq V$ también cumple las propiedades de $\mathbb{F}$ ev sobre la mult. escalar. (las pruebas son análogas) ∎

Ejemplos de subespacios:

1) Todos los que corresponden a las condiciones lineales vistas en la clase 04.

2) Sea $\mathbb{F}$ campo, V $\mathbb{F}$-ev y $\alpha_1, \alpha_n \in \mathbb{F}$ constantes. En $V = \mathbb{F}^n$, consideremos la condición lineal

$$C((x_1, \ldots, x_n)) : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

Denotemos $\mathcal{H} = \{\bar{x} \in \mathbb{F}^n \mid C(\bar{x})\}$. Veamos que es un subespacio.

<u>$\neg\phi$</u> Como $\bar{x} = \bar{0}$ cumple $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 0 = 0$, ent $C(0)$.

<u>CA</u> Sup. $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{H}$. Ent. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$. Al sumar, nos da

$$0 = 0 + 0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i + y_i)$$

$\therefore C(\bar{x} + \bar{y})$.

<u>CE</u> Es similar a (CA).

Así, $\mathcal{H}$ es un subespacio. ∎

Definición alternativa de subespacio

Decimos que $W \subseteq V$ es un subespacio si cumple los siguientes propiedades:

por cerradura

$\neg\phi$) W es no vacío

CA) $\forall u, v \in W, \quad u+v \in W$

CE) $\forall u \in W, \forall \lambda \in \mathbb{F}, \quad \lambda u \in W.$

Teo Los subespacios inducidos por condiciones lineales son lo mismo que los subespacios recién definidos (por cerradura)

"Dem"

$\Rightarrow$) Ya lo demostramos antes

$\Leftarrow$) Sea W subesp. por cerradura de V. Ent. la condición

$$C(u): \quad u \in W$$

es lineal. Y por ello,

$$W = \{ u \in V \mid C(u) \}$$

es subespacio por condición lineal. ∎

Un ejemplo importante de E.V.

Sea $\mathbb{F}$ un campo. Definimos el espacio de polinomios en una indeterminada con coeficientes en $\mathbb{F}$ como

$$\mathbb{F}[x] = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_n x^k \;\middle|\; \begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ \forall k \in \{0,1,\dots,n\}, \; a_k \in \mathbb{F} \end{matrix} \right\}$$

Nota Lo importante de un polinomio son sus coeficientes, no verlo como posible función. Por ejemplo, $p = x^2 + x \in \mathbb{Z}_2[x]$ visto como polinomio no es cero; sin embargo, al considerar $p: \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ se tiene que $p(0) = 0 = p(1)$, es decir $p \equiv 0$ (p es idénticamente cero).

Obs: ¿Por qué se puede definir $\mathbb{F}[x]$ como el cto de sumas de potencias de x escaladas por elementos en $\mathbb{F}$?

Para empezar, lo único que sabemos de x es que "es una indeterminada".

Por otro lado, la cuestión sobre la existencia de $\mathbb{F}[x]$, como simple cto, podemos resolverla usando espacios de funciones. A saber, en el espacio ${}^{\omega}\mathbb{F} = \{ f : \omega \to \mathbb{F} \mid f \text{ función} \}$, donde $\omega = \{0\} \cup \mathbb{N}$, y escribiendo, para cada $n \in \omega$, $f_n = x^n \in {}^{\omega}\mathbb{F}$, podemos definir

$$\mathcal{F} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i \;\middle|\; \begin{array}{c} n \in \mathbb{N} \\ \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}, \ \alpha_i \in \mathbb{F} \end{array} \right\} \subseteq {}^{\omega}\mathbb{F}$$

o bien

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in {}^{\omega}\mathbb{F} \;\middle|\; \#\left(f^{-1}\left(\mathbb{F} \setminus \{0\} \right) \right) < \aleph_0 \right\} \subseteq {}^{\omega}\mathbb{F}.$$

Resulta que $\mathbb{F}[X] = \mathcal{F}$ [más adelante lo veremos con mucho mejor detalle]. ▲