9

Ramón Reyes Carrión

Bouzas Vargas Miguel Tonatiuh 4072

Geometría Analítica I Reposición del Primer Parcial

1º Dados dos vectores u y v en $\mathbb{R}^n$ linealmente independiente, el paralelogramo que define tienen como vértices los puntos 0, u, v y u+v. Demuestra que sus diagonales, es decir, los segmentos de 0 a u+v y de u a v se intersectan en su punto medio

$\mathcal{L}_{v,u} \{ v + t(u-v) \mid t \in \mathbb{R} \}$

$\mathcal{L}_{0(u+v)} \{ \bar{0} + s((u+v)-\bar{0}) \mid s \in \mathbb{R} \}$

Sea $x \in \mathcal{L}_{v,u} \cap \mathcal{L}_{0(u+v)}$

$\Rightarrow x = v + t(u-v) \quad \wedge \quad x = s(u+v)$

$\Rightarrow v + tu - tv = su + sv$

$\Rightarrow v - tv - sv + tu - su = 0$

$\Rightarrow \underbrace{(1 + t - s)}_{x} v + \underbrace{(t-s)}_{y} u$

$x = 1 - t - s = 0$

$y = t - s = 0 \quad \Rightarrow \quad t = s$

Sustituyendo "y" en "x" tenemos

$\Rightarrow 1 - t - t = 0 = 1 - 2t = 0$

$\Rightarrow 2t = 1 \quad \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

$\therefore \mathcal{L}_{v,u}$ y $\mathcal{L}_{0(u+v)}$ se intersectan en su punto medio

2º Demuestra que tres puntos a, b y c son no colineales si y solo si los vectores $u = (b-a)$ y $v = (c-a)$ son linealmente independientes

1) Si a, b y c no son colineales, los puntos forman un triángulo, lo que implica que u y v no estan alineados. Para que u y v sean linealmente dependientes, necesitaríamos que

$v = \lambda u \quad tq \quad \lambda \in \mathbb{R}$

lo que implicaría que c se encuentra sobre la línea determinada por a y b. Como no es el caso, u y v son linealmente independientes

2) Si u y v son linealmente independientes entonces a, b y c no son colineales ya que la independencia lineal de u y v implica que los vectores no están alineados, por lo que c no se encuentra sobre la línea que pasa por a y b.

Esto significa que a, b y c no son colineales.

3º Da una expresión paramétrica para el plano que pasa por los siguientes puntos $a = (2,0,1)$, $b = (0,1,1)$ y $c = (-1,2,0)$.

$\Pi(a,b,c) = \{ a + su + tv \mid s,t \in \mathbb{R} \}$

$u = b - a = (0-2, 1-0, 1-1) = (-2, 1, 0)$

$v = c - a = (-1-2, 2-0, 0-1) = (-3, 2, -1)$

[illegible] $,2,-1)$

[illegible] $\mid s,t \in \mathbb{R} \}$

$\therefore \Pi(a,b,c) = \{ (2-2s-3t, \; s+2t, \; 1-t) \mid s,t \in \mathbb{R} \}$

Determina cómo se intersectan las rectas siguientes usando únicamente el determinante

$$\mathcal{L}_1 = \{(3,-2) + t(1,-2) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{L}_2 = \{(1,3) + s(-2,4) \mid s \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{L}_3 = \{(-1,6) + r(3,-6) \mid r \in \mathbb{R}\}$$

Los vectores dirección de las rectas son $d_1 = (1,-2)$, $d_2 = (-2,4)$, $d_3 = (3,-6)$

$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (-2)(-2) = 4 - 4 = 0$

entonces $d_1$ y $d_2$ son linealmente dependientes y $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$

$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = (1)(-6) - (3)(-2) = -6 + 6 = 0$

entonces $d_1$ y $d_3$ son linealmente dependientes y $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_3$

$D = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = (-2)(-6) - (3)(4) = 12 - 12 = 0$

entonces $d_2$ y $d_3$ son linealmente dependientes y $\mathcal{L}_2 \parallel \mathcal{L}_3$

$\mathcal{L}_1 = (3,-2) + t(1,-2)$ evaluamos si $(1,3) \in \mathcal{L}_1$

$\Rightarrow (3+t, -2-2t) = (1,3)$

$\Rightarrow 3+t = 1 \qquad -2-2t = 3$

$\Rightarrow t = -2$

$-2 - 2(-2) = -2 + 4 = 2 \neq 3$

$\therefore (1,3) \notin \mathcal{L}_1$ y las rectas no coinciden

$\mathcal{L}_1 = (3,-2) + t(1,-2)$ evaluamos $(-1,6) \in \mathcal{L}_1$

$\Rightarrow (3+t, -2-2t) = (-1,6)$

$\Rightarrow 3+t = -1 \qquad -2-2t = 6$

$\Rightarrow t = -4$

$-2 - 2(-4) = -2 + 8 = 6$

$\therefore (-1,6) \in \mathcal{L}_1$

$\mathcal{L}_3 = (-1,6) + r(3,-6)$ evaluamos $(1,3) \in \mathcal{L}_3$

$\Rightarrow (-1+3r, 6-6r) = (1,3)$

$\Rightarrow -1+3r = 1 \qquad 6-6r = 3$

$\Rightarrow r = 2/3$

$6 - 6(2/3) = 6 - 4 = 2 \neq 3$

$\therefore (1,3) \notin \mathcal{L}_3$

Entonces $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_3$ se intersectan en toda la recta y $\mathcal{L}_2$ es paralela a estas pero no se intersecta, es decir, $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_3$ son la misma recta y $\mathcal{L}_2$ es una recta distinta.

5 Resuelve los siguientes incisos

a) Da una descripción paramétrica de la recta dada por la ecuación $2x - y = 2$

$y = 2x - 2$



$\Rightarrow v = (1,2)$ donde

$\Rightarrow \mathcal{L} = \{(0,-2) + t(1,2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$x = t \quad y = -2 + 2t \quad tq\ t \in \mathbb{R}$

b) Ecuación normal para la recta que pasa por $(2,0)$ y $(1,1)$

Sea $v$ el vector dirección

$v = (1-2, 1-0) = (-1, 1)$

Sea $n = (1,1)$

$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) = 0$

donde $(x_0, y_0) = (2,0)$

$n = (n_1, n_2)$

$\Rightarrow 1(x-2) + 1(y-0) = 0$

$\Rightarrow x + y - 2 = 0$