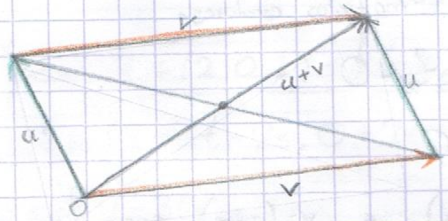
Geometría Analítica 4072.

Alumno: Cerveira Pérez Kevin Leonardo.

# Reposición (Primer Parcial)

1. Dados dos vectores $u$ y $v$ en $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes, el paralelogramo que definen tiene como vértices los puntos $O, u, v$ y $u+v$ (como en la figura). Demuestra que sus diagonales, es decir, los segmentos de $O$ a $u+v$ y de $u$ a $v$ se intersectan en su punto medio.

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$, suponemos los vértices $O, u, v$ y $u+v$ en el siguiente paralelogramo.




Y usando coordenadas baricéntricas, sean $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$.

$\Rightarrow$ Partiendo de la recta $L_{uv}: \alpha u + \beta v$, t.q. $\alpha + \beta = 1$

Como la recta en forma baricéntrica garantiza que un punto se encuentre dentro de la recta:

$\Rightarrow$ El punto medio $= \frac{1}{2}\bar{u} + \frac{1}{2}\bar{v} = L_{uv}$

Análogamente, usando la otra recta $L_{O(u+v)}: \gamma O + \lambda(u+v)$, t.q. $\gamma + \lambda = 1$

Entonces, el punto medio de $L_{O(u+v)} = \frac{1}{2}(\bar{u}+\bar{v}) = \frac{1}{2}\bar{u} + \frac{1}{2}\bar{v}$.

$\therefore$ El punto medio de $L_{uv}$ y $L_{O(u+v)} = \frac{1}{2}\bar{u} + \frac{1}{2}\bar{v}$ ☒

2. Demuestra que tres puntos $a, b$ y $c$ son no colineales si y solo si, los vectores $u = (b-a)$ y $v = (c-a)$ son linealmente independientes.

P.D. $u = (b-a)$ y $v = (c-a)$ son lin. independientes.

Suponemos $a, b, c$ son no colineales.

$\Rightarrow$ Si son colineales, ent., se puede representar $c = a + t(b-a)$.

Es decir, $c = a + t(b-a)$

$\Rightarrow c - a = t(b-a)$

$\Rightarrow (c-a) - t(b-a) = 0$

$= v - t(u) = 0$

$\Rightarrow$ Por lo visto en clase, $u$ y $v$ no son lin. independientes.

Por lo que, si $a, b, c$ son no colineales.

$\Rightarrow v \neq tu$, ya que, al no ser colineales, $u$ y $v$ no tienen múltiplos escalares.

$\Rightarrow t_1 = 0$ y $t_2 = 0$

$\Rightarrow t_1 u + t_2 v = 0$

$\therefore$ $u = (b-a)$ y $v = (c-a)$ son lin. independientes.

$\Leftarrow$ Sup. que $u = (b-a)$ y $v = (c-a)$ son lin. ind.

P.D. $a, b, c$ no son colineales.

Ent. Por lo anterior, existe un $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ t.q.

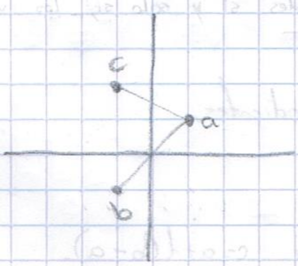
$t_1 \bar{u} + t_2 \bar{v} = 0$, $t_1 = 0$ y $t_2 = 0$

Pero como $t_1 = 0$, $t_2 = 0$

$\Rightarrow 0 \cdot \underset{(b-a)}{\bar{u}} = 0$ y $0 \cdot \underset{(c-a)}{\bar{v}} = 0$

i.e. $\bar{u} \neq \bar{v}$

$\therefore$ Los puntos $a, b, c$ no son colineales, ya que no se encuentran sobre la misma recta.



3. Da una expresión paramétrica para el plano que pasa por los siguientes puntos $a=(2,0,1)$, $b=(0,1,1)$ y $c=(-1,2,0)$

Sea la ecuación paramétrica de un plano $\Pi = a + t\bar{v} + s\bar{u}$, $t,s \in \mathbb{R}$.
Con $u=b-a$ y $v=c-a$.

$$\Rightarrow u = ((0,1,1)-(2,0,1)) = (-2,1,0) \quad y,$$

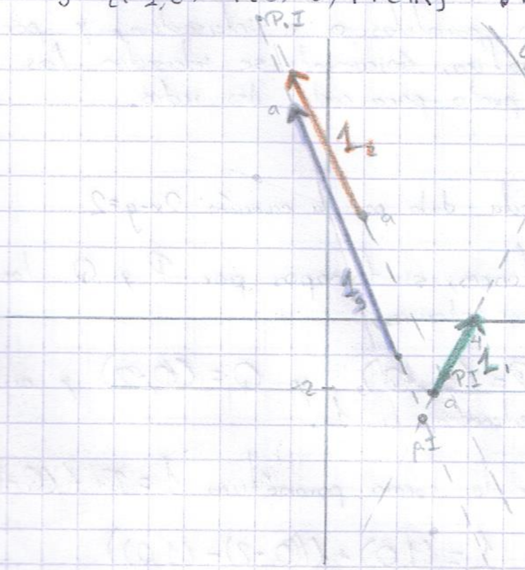
$$v = ((-1,2,0)-(2,0,1)) = (-3,2,-1)$$

⇒ Es lo mismo que $\underline{\Pi = (2,0,1) + t(-3,2,-1) + s(-2,1,0)}$

Desarrollando $\Pi = (2-3t-2s,\ 0+2t+s,\ 1-t+0)$

$$e = 2-3t-2s$$
$$f = 0+2t+s$$
$$g = 1-t$$

4. Determina cómo se intersectan las rectas siguientes, usando únicamente el determinante.
$l_1 = \{(3,-2)+t(1,-2) \mid t\in\mathbb{R}\}$ $\quad l_2 = \{(1,3)+s(-2,4) \mid s\in\mathbb{R}\}$
$l_3 = \{(-1,6)+r(3,-6) \mid r\in\mathbb{R}\}$. Dibújalas.




Sean $l_1: p+t\vec{u}$ y $l_2: a+s\vec{v}$

⇒ Su determinante (por lo visto en clase) es de la forma:

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \vec{u}\cdot(\vec{v})^{\perp}$$

Si $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$, ent. no son paralelas y se pueden intersectar.

Y como el det. está determinado por los parámetros $s,t,r \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \det l_1 = \det(1,-2)$$
$$\det l_2 = \det(-2,4)$$
$$\det l_3 = \det(3,-6)$$

$\Rightarrow$ Para $l_1$ y $l_2 = u \cdot (-2,4)^{\perp}$

$= (1,-2) \cdot (-4,-2)$

$= (-4) + (-2) \cdot (-2) = 0$

$\therefore l_1$ y $l_2$ son paralelas o se intersectan.

$\Rightarrow$ Para $l_1$ y $l_3 = u \cdot (3,6)^{\perp}$

$= (1,-2) \cdot (-6,3)$

$= -6 + (-2) \cdot (3) = 0$

$\therefore L_1$ y $l_3$ son paralelas o se intersectan.

$\Rightarrow$ Para $l_2$ y $l_3 = u \cdot (3,6)^{\perp}$

$= (-2,4) \cdot (-6,3)$

$= 12 - 12 = 0$

$\therefore l_2$ y $l_3$ son paralelas se intersectan.

$\therefore l_1, l_2$ y $l_3$ son paralelas o se intersectan, y por lo visto en la gráfica, únicamente se intersectan los tres en al menos un punto para cada dos rectas.

5. Resuelva los siguientes incisos.

a) Da una descripción paramétrica de la recta dada por la ecuación: $2x-y=2$

Si $x=0$

$\Rightarrow 2(0)-y=2$

$y=-2$

$\Rightarrow (0,-2) \in l$

Si $y=0$

$\Rightarrow 2x-(0)=2$

$x=1$

$\Rightarrow (1,0) \in l$

Entonces, si tomamos por $P$ y $Q$ los puntos anteriores,

$\Rightarrow P=(1,0)$ y $Q=(0,-2)$ y ambos pertenecen a $l$.

Y por la forma paramétrica $l = P + t(Q-P)$

$\Rightarrow l = (1,0) + t((0,-2)-(1,0))$

$= (1,0) + t(-1,-2)$

$= (1-t,-2t)$

b) Encuentra una ecuación normal para la recta que pasa por los puntos: $(2,0)$ y $(1,1)$

Dados $q=(1,1)$ y $p=(2,0)$, encontrar la ec. normal, t.q. es igual a $\bar{d}\cdot\bar{x}=\bar{d}\cdot p$, con $d=(\bar{v})^{\perp}$

$v=(q-p)=(1-2,\ 1-0)=(-1,1)$

$\Rightarrow v^{\perp}=(-1,-1)$

$\Rightarrow (-1,-1)\cdot\bar{x}=(-1,-1)\cdot(2,0)$

$\Rightarrow (-1,-1)\cdot(x,y)=-2$

$\Rightarrow -x-y=-2$

$\therefore\ x+y=2$ es la ecuación normal de la recta que pasa por $(2,0)$ y $(1,1)$.