José Martín Valdez López

Josué Lujano Faustinos

Axel Yael Peña Nuñez

Erick del Toro Zarraga

Griselda Merino Hernández

Santiago Hernández Colin

Sea la recta

$$\vec{r} = \left\langle \begin{matrix} 3-3k \\ 5k \end{matrix} \right\rangle$$

Rotamos por la matriz de rotación por $\frac{\pi}{2}$

$$M_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3-3k \\ 5k \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -5k \\ 3-3k \end{pmatrix}$$

Ahora por la reflexión en el eje de las X con la transformación

$$T_1(x,y) : (x, -y)$$

$$\cancel{\Rightarrow (x, y)}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -5k \\ -3+3k \end{pmatrix}$$

y la reflexión por el eje Y

$$T_2(x,y) : (-x, y)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5k \\ -3+3k \end{pmatrix}$$

∴ la recta, rotada 90°, por el eje X, y luego por el eje Y.

$$\vec{r} = \left\langle \begin{matrix} 5k \\ -3+3k \end{matrix} \right\rangle$$

2. Demuestra que c es un punto exterior (al círculo C con centro P) entonces su recta a P bisecta sus dos tangentes a C . Y además que las distancias a sus pies en C (es decir, a los puntos de tangencia) son iguales.

Sea un círculo C con centro en P y radio r, existe un punto fuera del círculo C, denominado c, donde la polar de c intersecta a la circunferencia en 2 puntos, i_1 e i_2, y las polares de i_1 e i_2, que son tangentes al circulo C, intersecan al punto c (lo sabemos gracias al preambulo del ejercicio 6). Entonces con estos datos podemos definir a las polares de la siguiente manera:

$$P_{i_1} : (i_1 - P) \cdot (x - p) = (i_1 - P) \cdot c$$

$$P_{i_2} : (i_2 - P) \cdot (x - p) = (i_2 - P) \cdot c$$

Y queremos saber si la recta que pasa por los puntos P y c es bisectriz de P_{i_1} y P_{i_2} (es decir las tangentes del círculo C que intersecan en c), por lo que antes que nada es importante definir a la recta que pasa por P y c

$$\mathcal{L}_{\overline{Pc}} : \{c + t(p - c) | t \in \mathbb{R}\}$$

Con esto supongamos un elemento cualquiera que pertenezaca a la recta $\mathcal{L}_{\overline{Pc}}$, al cual lo denominaremos q, de modo que:

$$q \in \mathcal{L}_{\overline{Pc}} \Rightarrow q = c + t_0(p - c)$$

Por demostrar que $d(q, P_{i_1}) = d(q, P_{i_2})$

Por teorema sabemos que la distancia de un punto a una recta se expresa como:

$$d(s, \mathcal{L}) = \frac{|u - n \cdot s|}{|n|}$$

Donde u es la constante (en este primer caso lo tomaremos como $(i_1 - P) \cdot c$), s es el punto (en nuestro caso es q) y n es la es el vector de la recta (en este primer caso es $(i_1 - P)$), por lo que usando el teorema obtenemos:

$$d(q, P_{i_1}) = \frac{|(i_1 - P) \cdot c - (i_1 - P) \cdot q|}{|(i_1 - P)|}$$

Factorizamos terminos semejantes:

$$d(q, P_{i_1}) = \frac{|(i_1 - P) \cdot (c - q)|}{|(i_1 - P)|}$$

Retomando la expresión de la recta $L_{\overline{Pc}}$, o0bservemos lo siguiente:

$$q = c + t_0(p - c) \Leftrightarrow q - c = t_0(p - c) \Leftrightarrow c - q = -t_0(p - c) \Leftrightarrow c - q = t_0(c - p)$$

Por lo que sustituyendo $(c - q)$ nuestra expresión queda de la siguiente forma

$$d(q, P_{i_1}) = \frac{|(i_1 - P) \cdot t_0(c - p)|}{|(i_1 - P)|}$$

Por conmutatividad del pruducto punto, podemos decir lo siguiente:

$$d(q, P_{i_1}) = \frac{|t_0| \cdot |(i_1 - P) \cdot (c - p)|}{|(i_1 - P)|}$$

Tomemos en cuenta que la polar no solo la podemos escribir de una manera tambien podemos descirbir a la polar de la siguiente manera:

$$P_{i_1} : (i_1 - P) \cdot (x - p) = r^2$$

Y samebos que c pasa por la polar de i_1 entonces podemos escribir a la polar como:

$$P_{i_1} : (i_1 - P) \cdot (c - p) = r^2$$

Y notemos que $(i_1 - P) \cdot (c - p) = r^2$ por lo que sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$d(q, P_{i_1}) = \frac{|t_0| r^2}{|(i_1 - P)|}$$

Y notemos que $|i_1 - P|$ se puede expresar como $d(i_1, P)$ como i_1 es un punto de la circunferencia y P es elo centro su distancia describe al radio del círculo C, la cuál es r, por lo que sustituyendo obtenemos:

$$d(q, P_{i_1}) = \frac{|t_0| r^2}{r}$$

Simplificamos

$$d(q, P_{i_1}) = |t_0| r$$

Por lo que la distancia de q a la polar P_{i_1} es $|t_0|r$.

Ahora para encontrar $d(q, P_{i_2})$. Usando el teorema que vimos con anterioridad, sabemos que la distancia de un punto a una recta se expresa como:

$$d(s, \mathcal{L}) = \frac{|u - n \cdot s|}{|n|}$$

Donde u es la constante (en este primer caso lo tomaremos como $(i_2 - P) \cdot c$), s es el punto (en nuestro caso es q) y n es la es el vector de la recta (en este primer caso es $(i_2 - P)$), por lo que usando el teorema obtenemos:

$$d(q, P_{i_2}) = \frac{|(i_2 - P) \cdot c - (i_2 - P) \cdot q|}{|(i_2 - P)|}$$

Factorizamos terminos semejantes:

$$d(q, P_{i_2}) = \frac{|(i_2 - P) \cdot (c - q)|}{|(i_2 - P)|}$$

Retomando la expresión de la recta $L_{\overline{Pc}}$, o0bservemos lo siguiente:

$$q = c + t_0(p - c) \Leftrightarrow q - c = t_0(p - c) \Leftrightarrow c - q = -t_0(p - c) \Leftrightarrow c - q = t_0(c - p)$$

Por lo que sustituyendo $(c - q)$ nuestra expresión queda de la siguiente forma

$$d(q, P_{i_2}) = \frac{|(i_2 - P) \cdot t_0(c - p)|}{|(i_2 - P)|}$$

Por conmutatividad del pruducto punto, podemos decir lo siguiente:

$$d(q, P_{i_2}) = \frac{|t_0| \cdot |(i_2 - P) \cdot (c - p)|}{|(i_2 - P)|}$$

Tomemos en cuenta que la polar no solo la podemos escribir de una manera tambien podemos descirbir a la polar de la siguiente manera:

$$P_{i_2} : (i_2 - P) \cdot (x - p) = r^2$$

Y samebos que c pasa por la polar de i_1 entonces podemos escribir a la polar como:

$$P_{i_2} : (i_2 - P) \cdot (c - p) = r^2$$

Y notemos que $(i_2 - P) \cdot (c - p) = r^2$ por lo que sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$d(q, P_{i_2}) = \frac{|t_0|r^2}{|(i_2 - P)|}$$

Y notemos que $|i_2 - P|$ se puede expresar como $d(i_2, P)$ como i_1 es un punto de la circunferencia y P es elo centro su distancia describe al radio del círculo C, la cuál es r, por lo que sustituyendo obtenemos:

$$d(q, P_{i_2}) = \frac{|t_0|r^2}{r}$$

Simplificamos

$$d(q, P_{i_2}) = |t_0|r$$

Por lo que la distancia de q a la polar P_{i_2} es $|t_0|r$. Y notamos que es exactamente la misma distancia que la polar de P_{i_1}, por transitividad de la igualdad pormos decir que $d(q, P_{i_1}) = d(q, P_{i_2})$

Por lo que la recta $\mathcal{L}_{\overline{Pc}}$ esta contenida en la bisectrizde las polares P_{i_1} y P_{i_1}, pero ahora vemos que la bisectriz es una recta que pasa por los P y c, por lo que describe la misma recta que $\mathcal{L}_{\overline{Pc}}$, porlo que al pasar por los mismos 2 puntos y ser rectas podemos concluir que la bisectriz de las pólares P_{i_1} y P_{i_1} es igual a la recta $\mathcal{L}_{\overline{Pc}}$

Ahora demostraremos que $d(i_1, c) = d(i_2, c)$.

Con los datos que tenemos, sabemos que el el segmento de recta que forma al radio va de $(i_1 - P)$,es ortogonal al segmento de recta que va $(i_1 - c)$, por si conectamos a los puntos c y p, formarian un triángulo rectangulo, y por teorema de pitagoras sabemos la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de sus catetos elevados al cuadrado, y como la hipotenusa es el segmento de recta más largo de un triángulo rectangulo el cuál es el lado opuesto al ángulo recto entonces la hipotenusa en este casi seria la distancia del segmento de recta $(c - P)$. Por lo que usando el teorema de pitagoras expresamos lo siguiente:

$$|c - p|^2 = |i_1 - p|^2 + |i_1 - c|^2$$

Y sabemos que $|i_1 - p|$ es la distancia del centro a un punto de la círcunferencia, el cuál forma el radio del círculo C que es r, sabiendo esto decimos

$$|c - p|^2 = r^2 + |i_1 - c|^2$$

Ahora con respecto a el punto i_2,con los datos que tenemos, sabemos que el el segmento de recta que forma al radio va de $(i_2 - P)$,es ortogonal al segmento de recta que va (i_2-c), por si conectamos a los puntos c y p, formarian un triángulo rectangulo, y por teorema de pitagoras sabemos la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de sus catetos elevados al cuadrado, y como la hipotenusa es el segmento de recta más largo de un triángulo rectangulo el cuál es el lado opuesto al ángulo recto entonces la hipotenusa en este casi seria la distancia del segmento de recta $(c-P)$. Por lo que usando el teorema de pitagoras expresamos lo siguiente:

$$|c-p|^2 = |i_2 - p|^2 + |i_2 - c|^2$$

Y sabemos que $|i_2 - p|$ es la distancia del centro a un punto de la círcunferencia, el cuál forma el radio del círculo C que es r, sabiendo esto decimos

$$|c-p|^2 = r^2 + |i_2 - c|^2$$

Y por transitividad de la igualdad podemos decir

$$r^2 + |i_1 - c|^2 = r^2 + |i_2 - c|^2$$

Reducimos terminos semejantes en la iguldad.

$$|i_1 - c|^2 = |i_2 - c|^2$$

Y sabemos que las normas de estos 2 vectores describen a la distancia, es decir queb

$$d(i_1, c) = d(i_2, c)$$

Y es lo que se quería demostrar.

3) Halla la ecuación del conjunto de puntos G que tienen la propiedad de que la suma de las distancias a cada punto $P \in G$ a los puntos $(0,3)$ y $(0,-3)$ vale es $6\sqrt{3}$

Dado $d(x,a) + d(x,b) = 6\sqrt{3}$
con los puntos $a=(0,3)$ y $b=(0,-3)$

Notemos que es una elipse centrada en el origen con $2a = 6\sqrt{3}$
Dividiendo entre dos ambos lados
$a = 3\sqrt{3}$. Recordemos que la expresión canónica es $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$\Rightarrow$ Encontremos b donde $b^2 = a^2 - c^2$, pero $2c$ es la distancia entre los dos focos de dicha elipse

$\Rightarrow 2c = (a,b) = \|(0,3)-(0,-3)\|$

$= \|(0,6)\|$, pero la norma se puede expresar como
$\sqrt{0^2+6^2} = 6 \quad \Rightarrow 2c = 6$ y $c = 3$

Ahora con $b = \sqrt{a^2-c^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - (c)^2}$

$= \sqrt{27-9} = \sqrt{18}$, entonces

$b = \sqrt{18} \Longleftrightarrow b^2 = 18$ y $a^2 = 27$

$\therefore \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{27} = 1$

5. Encuentra la transformación afín $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. $f(2)=5$ y $f(5)=2$

La transformación afín tiene la forma

$$f(x)=ax+b$$

Sustituyendo tenemos que

Para $f(2)=5 \Rightarrow$
$$f(2)=a(2)+b$$
$$f(2)=2a+b$$
$$=2a+b=5$$

Para $f(5)=2 \Rightarrow$
$$f(5)=a(5)+b$$
$$f(5)=5a+b$$
$$=5a+b=2$$

Con lo anterior tenemos el sig sistema de ecuaciones.

$$2a+b=5$$
$$5a+b=2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones.

$$2a+b=5$$
$$-(5a+b=2)$$
$$2a+\cancel{b}=5$$
$$-5a-\cancel{b}=-2$$
$$-3a=3$$
$$a=\frac{3}{-3}$$
$$a=-1$$

Sustituyendo lo obtenido en la sig ecuación

$$2a+b=5$$
$$2(-1)+b=5$$
$$-2+b=5$$
$$b=5+2$$
$$b=7$$

Sustituyendo en $f(x)=ax+b$

$f(x)=-1x+7 \rightarrow$ transformación afín

$f(x)=-x+7$

2. $f(1) = -2$ y $f(2) = 2$

Podemos escribir la transformación afín de la forma

$$f(x) = ax + b$$

Sustituyendo tenemos

Para $f(1) = -2$

$$f(1) = a(1) + b$$
$$= 1a + b$$
$$a + b = -2$$

Para $f(2) = 2$

$$f(2) = a(2) + b$$
$$= 2a + b$$
$$2a + b = 2$$

entonces tenemos el sig. sistema de ecuaciones

$$a + b = -2$$
$$2a + b = 2$$

resolviendo el sistema de ecuaciones

$$a + b = -2$$
$$-(2a + b = 2)$$

$$a + \cancel{b} = -2$$
$$-2a - \cancel{b} = -2$$

$$-a = -4$$
$$\underline{a = 4}$$

Sustituyendo lo obtenido tenemos que

$$a + b = -2$$
$$4 + b = -2$$
$$b = -2 - 4$$
$$\underline{b = -6}$$

Sustituyendo en $f(x) = ax + b$

$f(x) = 4x - 6$ => transformación afín.

4. Demuestra que la ecuación

$$|d(x,P) - d(x,Q)| = 2a$$

define,

• **la mediatriz de** P **y** Q **para** $a = 0$

• **los rayos complementarios del segmento** $\overline{PQ}$ **para** $a = c$

• **el conjunto vacío para** $a > c$

1. Cuando $a = 0$

Cuando $a = 0$ nustra ecuación queda definida como:

$$|d(x,P) - d(x,Q)| = 0$$

Y como las distancias resultan ser un número real mayor o igual a cero, por teorema sabemos que $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$, los distancias al ser un número real usando el teorema ppodemos decir que :

$$d(x,P) - d(x,Q) = 0$$

De la expresión anterior podemos concluir que

$$d(x,P) = d(x,Q)$$

Como ambas distancias son iguales, podemos concluir que es la mediatriz de P y Q, pues la mediatriz se define como el punto medio de un segmento de recta, situado a la misma distancia.

2. Cuando $a = c$

Antes de proceder es importante recordar como definimos a c y es que $c = \frac{1}{2}d(P,Q) \Leftrightarrow 2c = d(P,Q)$. Con esto podemos decir que nuestra ecuación se expresa de la siguiente manera:

$$|d(x,P) - d(x,Q)| = 2c$$

Y como definimos a $2c = d(P,Q)$, nos queda que

$$|d(x,P) - d(x,Q)| = d(P,Q)$$

Como las distancias son números reales mayores o iguales a cero, podemos usar el teorema $|a| = b \Leftrightarrow b = a$ o $b = -a$, por lo que es equivalente tener estos 2 casos:

Caso 1

$$d(x,P)-d(x,Q) = d(P,Q) \Leftrightarrow d(x,P) = d(P,Q)+d(x,Q) \Leftrightarrow d(x,P) = d(P,Q)+d(Q,x)$$

Y sabemos que esta expresión nos dice que Q está dentro de segmento de P y x, es decir que son colineales y es valido decir que la recta $x \in \overline{PQ}$, siendo en este caso un rayo complementario del segmento $\overline{PQ}$.

Caso 2

$$-(d(x,P) - d(x,Q)) = d(P,Q) \Leftrightarrow -d(x,P) + d(x,Q) = d(P,Q)$$

$$\Leftrightarrow d(x,Q) = d(P,Q) + d(x,P) \Leftrightarrow d(x,Q) = d(Q,P) + d(P,x)$$

Y por la demsotración de la pregunta 8 de la tarea pasada, sabemos que esta expresión nos dice que P está dentro de segmento de Q y x, es decir que son colineales y es valido decir que la recta $x \in \overline{PQ}$, siendo en este caso un rayo complementario del segmento $\overline{PQ}$.

3. Cuando $a > c$

Recordando como definimos a c sabemos que $a > \frac{1}{2}d(P,Q) \Leftrightarrow 2a > d(P,Q)$, y sabemos que $2a = d(x,P) - d(x,Q)$, por lo que la ecuación queda expresada en la siguiente desigualdad:

$$|d(x,P) - d(x,Q)| > d(P,Q)$$

Como las distancias son números reales mayores o iguales a cero, podemos usar el teorema $|a| > b \Leftrightarrow a > b$ o $a < -b$, por lo que obtenemos 2 casos:

Caso 1

$$d(x,P)-d(x,Q) > d(P,Q) \Leftrightarrow d(P,x) > d(P,Q)+d(x,Q) \Leftrightarrow d(P,x) > d(P,Q)+d(Q,x)$$

Por desigualdad deñ¿l triangulo podemos decir que $d(P,Q) + d(Q,x) \geq d(P,x)$. Pero sabemos que $d(P,x) > d(P,Q) + d(Q,x)$ por lo que se tiene

$$d(P,x) > d(P,Q) + d(Q,x) \geq d(P,x)$$

Pero eso es un absurdo pues ningún real cumple eso, púes por tricotomia sabemos que un número real puede ser mayor, menor o igual a otro número real, más no se puede las 3 cosas a la vez, por lo que en este caso la solución a la ecuación es vacía.

Caso 2

$$-d(x,P)+d(x,Q) > d(P,Q) \Leftrightarrow d(x,Q) > d(P,Q)+d(x,P) \Leftrightarrow d(Q,x) > d(Q,P)+d(P,x)$$

Por desigualdad deñ¿l triangulo podemos decir que $d(Q,P)+d(P,x) \geq d(Q,x)$. Pero sabemos que $d(Q,x) > d(Q,P) + d(P,x)$ por lo que se tiene

$$d(Q,x) > d(Q,P) + d(P,x) \geq d(Q,x)$$

Pero eso es un absurdo pues ningún real cumple eso, púes por tricotomia sabemos que un número real puede ser mayor, menor o igual a otro número real, más no se puede las 3 cosas a la vez, por lo que en este caso la solución a la ecuación es vacía.

Ejercicio 6

January 22, 2021

Demuestra, usando la fórmula, que la inversa de cualquier reflexión en R^2 es ella misma.

Demostracion: Supongamos que $P : R^2 \to R^2$ es una reflexion con respecto a la recta $\ell : n \cdot x$ con u un vector unitario Entonces:

$$P(x) = x + 2(c - x \cdot u)u$$

Y lo que queremos ver es que P es su propia inversa $P \circ P^{-1} = Id_{\mathbf{R^2}}$ o equivalentemente que $P(P^{-1}(x)) = x$ para todo x

Entonces:

$$P(P^{-1}(x))$$
$$= P(x + 2(c - x \cdot u)u)$$
$$= x + 2(c - x \cdot u)u$$
$$= (x + 2(c - x \cdot u)u) + 2(c - u \cdot (x + 2(c - u \cdot x)u))u$$
$$= (x + 2cu - 2u^2x) + 2(c - u \cdot (x + 2cu - 2u^2x))u$$
$$= x + 2cu - 2u^2x + 2(c - ux - 2cu^2 - 2u^3x)u$$
$$= x + 2cu - 2u^2x + 2cu - 2u^2x - 4cu^3 + 4u^3x$$

Pero sabemos que u es un vector unitario, entonces $\mid u \mid= 1$, asi que lo podemos sustituir

$$= x + 2c(1) - 2(1)^2x + 2c(1) - 2(1)^2x - 4c(1)^3 + 4(1)^3x$$
$$= x + 2c - 2x + 2c - 2x - 4c + 4x$$
$$= x$$

Por lo tanto $x = Id_{\mathbf{R^2}}$. Asi llegamos a que la inversa de cualquier refelexion en R^2 es ella misma y esto es lo que queriamos demostrar.