$f \in PSL(2,\mathbb{C})$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad ad-cb=1$$

$$f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$$

puntos fijos $\quad f(z)=z$

$$z(cz+d) = az+b$$

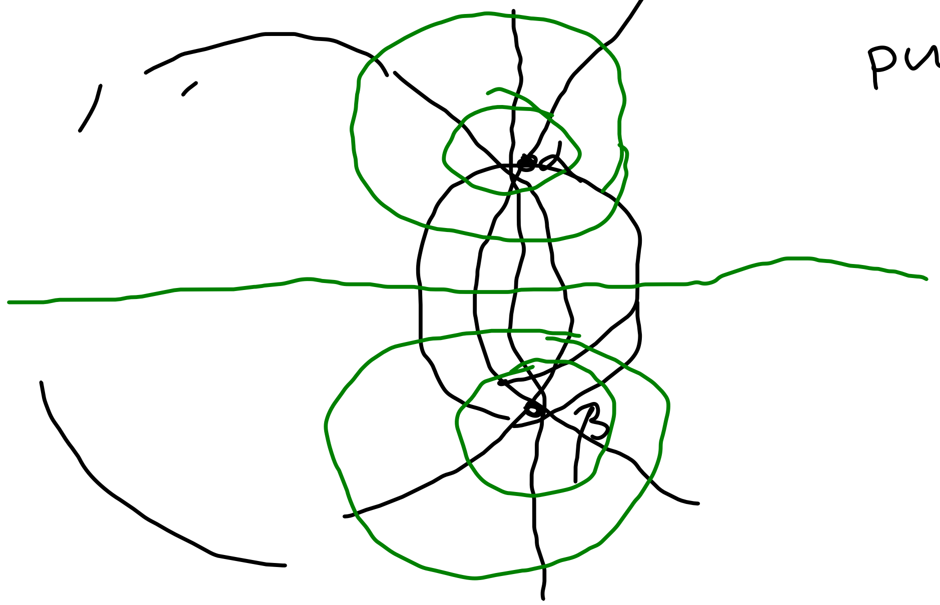
$$cz^2+(d-a)z-b=0$$

TFA hay α y β puntos fijos de f. $\quad \alpha \neq \beta$

<u>Afirmación</u>

La familia f_1 de circunferencias que invariante bajo f

f_2 familia de circunferencias ortogonales a f_1 es también invariante.



(Circulos de Apolonio con puntos límite α y β)

Red de Steiner

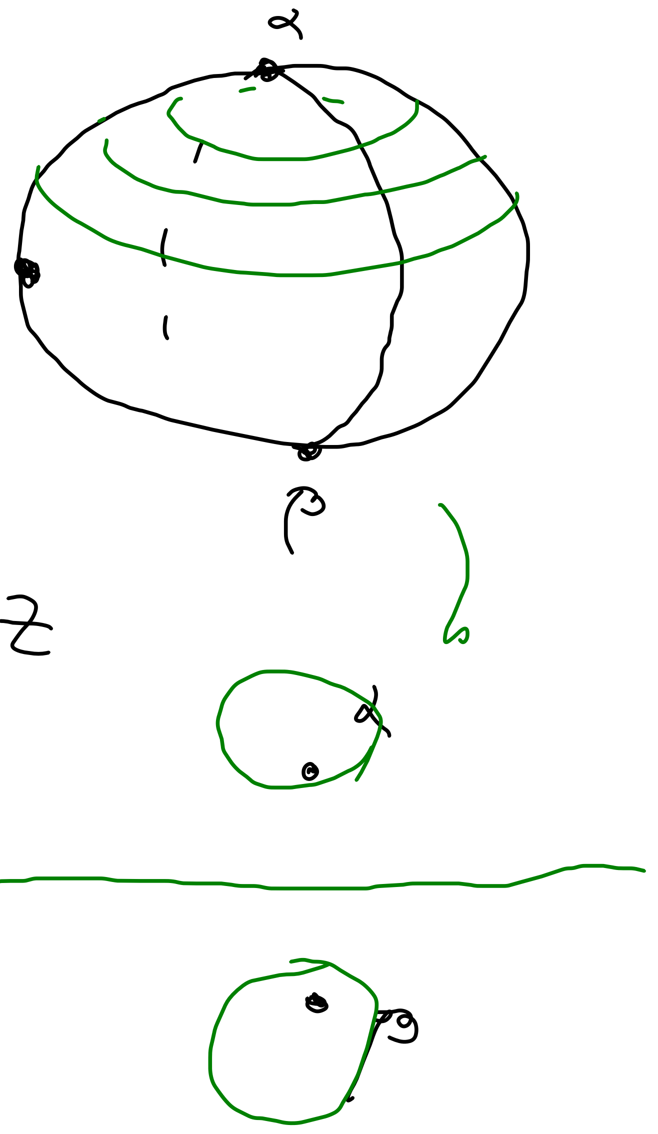
$$f \quad \begin{matrix} \alpha \to 0 \\ \beta \to \infty \end{matrix} \qquad \frac{z-\alpha}{z-\beta} = f(z)$$

(0,-1,0)

Proy

Plano XZ

H^+



f_1 son los meridianos + antipoda

f_2 son los paralelos

<u>Afirmación</u> Todo punto $p \in \hat{\mathbb{C}}$ $p \neq \alpha, \beta$ tiene un elemento de cada familia $\ell_1 \in f_1$ $\ell_2 \in f_2$

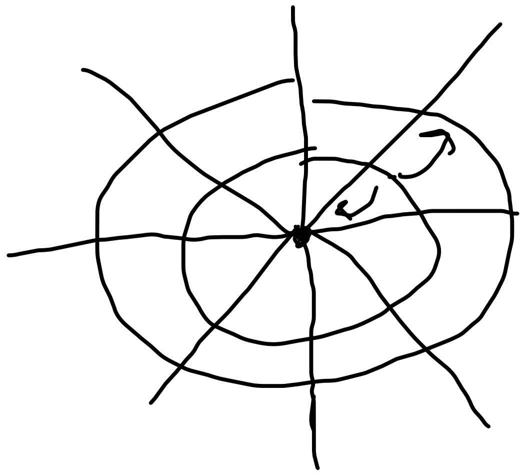
$$p \in \ell_1 \perp \ell_2$$

<u>Ejercicio</u> $\alpha = \beta$ $\quad \alpha \to \beta$

$f \in G^{+}_{H^{+}}$ $\qquad f \in PSL(2,\mathbb{R})$

$a,b,c,d \in \mathbb{R}$ $\qquad \alpha, \beta$ raíces

de la ecuación $(*)$



Hiperbólica

$\alpha \neq \beta$, $\quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ $\qquad \alpha \to 0$

$\beta \to \infty$

$f(0) = 0 \qquad b = 0 \qquad f(z) = (a/d)\, z$

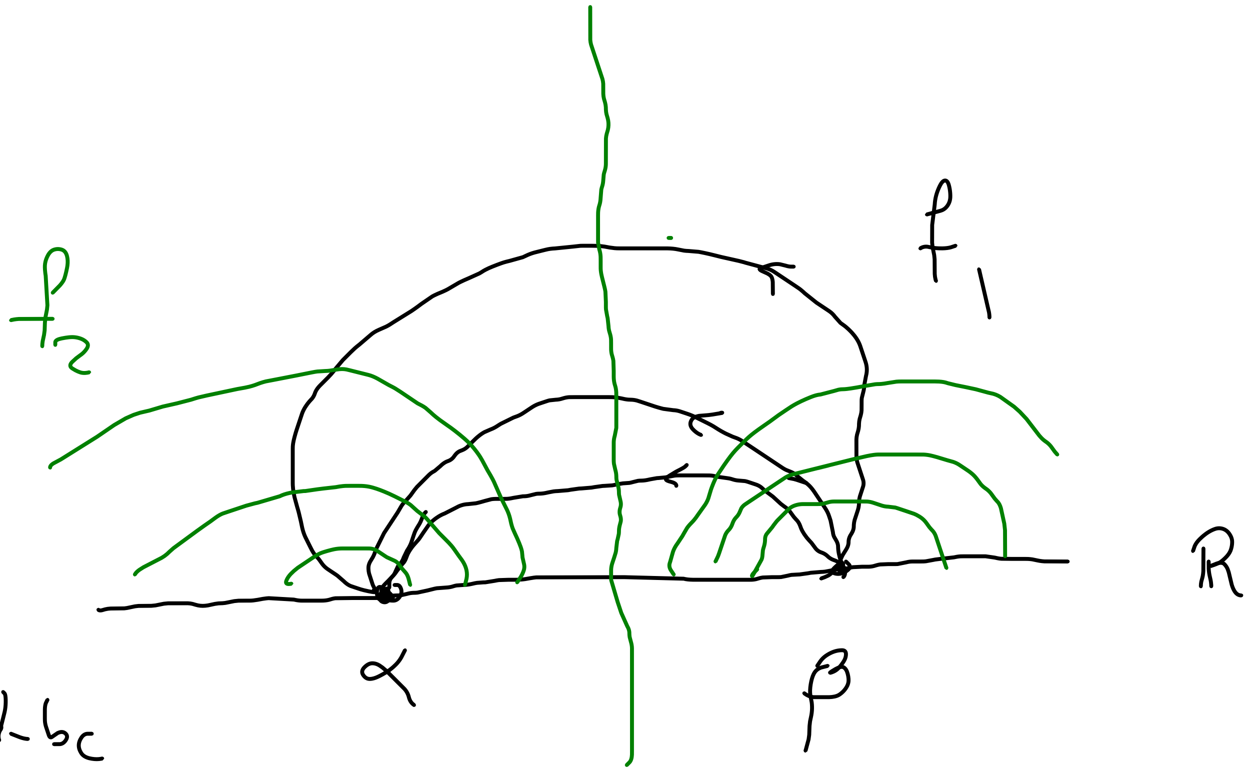
$f(\infty) = \infty \qquad c = 0$

$f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ $\qquad \boxed{f(z) = \lambda z}$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad E_J$ $\qquad ad-bc$

$f(z) = \lambda z \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$f \in PSL(2,\mathbb{R})$



Parabólicas $\alpha = \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha = \beta = 0$ $\quad c = 0$

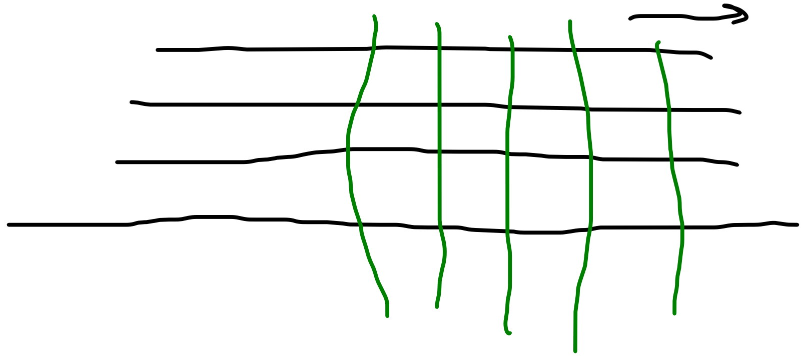
discriminante $= 0$ $\quad (a+d)^2 = 4$

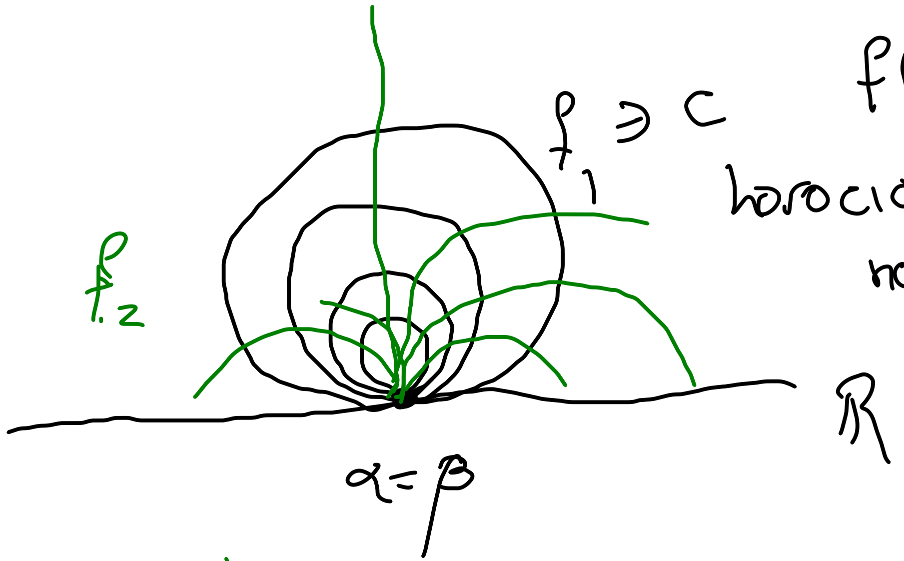
$ad = 1$

$1/d + d = \pm 2$

$d = \pm 1$

$z + k$





$f(c) = c$

$f_1 \ni c$

horociclos no son lineas hiperbólicas

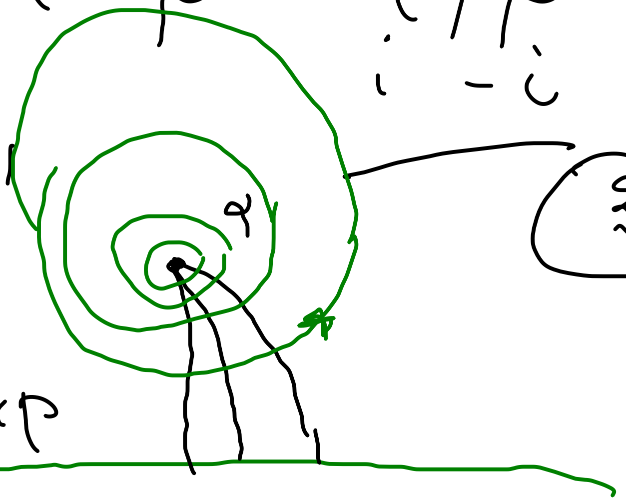
lineas hiperbolicas van unas en otras

Eliptica

$\alpha = \overline{\beta}$ $\quad \alpha \neq \beta$ $\quad \mathbb{R}$ invariante

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad i \quad -i$

f_1



van mas
en otras
son lineas hip

(2)

$$f(z) = \frac{az+b}{-bz+a}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$a^2 + b^2 = 1$

f_2 invariantes

$\exists c \quad f(c) = c$

no son lineas hiperbolicas

Prop $G^+_{H^+}$ toda $f \in G^+_{H^+}$ es

(3)

hiperbolica $\iff (a+d)^2 > 4$

parabolica $= 4$

eliptica < 4

(4) Ver como

son las dibujos en $\triangle$