1.- Teniendo la recta $\vec{r} = (3-3k, 5k)$ para $k_1 = 1$ y $k = 2$

entonces $P_1 = (3-3, 5) = (0, 5)$, $P_2 = (-3, 10)$

Sabiendo que la rotación $\frac{\pi}{2} = \begin{pmatrix} \cos 90 & -\operatorname{Sen} 90 \\ \operatorname{Sen} 90 & \cos 90 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$R_{p1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad R_{p2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$R_{p1} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } R_{p2} = \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} \cos 0 & \operatorname{Sen} 0 \\ \operatorname{Sen} 0 & -\cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ (reflexión por eje x)

Entonces

$$E_{1p1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_{p2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

y $E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (reflexión por eje y)

Entonces

$$E_{2p1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2p2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

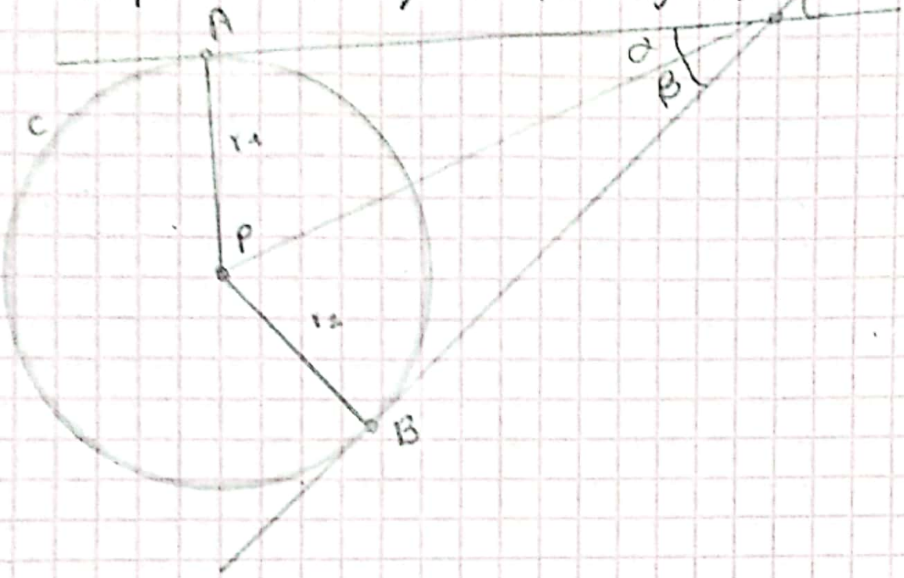
$\therefore P_1 = (5,0)$ y $P_2 = (10,3)$

$\Rightarrow \vec{r} = (5,0) + h\left((10,3) - (5,0)\right)$

$= (5,0) + h(5,3) = (5+5h, 3h)$

$= (5+5h, 3h)$

2. Demuestra que si C es un punto exterior (al círculo $\mathcal{C}$ con centro P) entonces su recta a P biseca sus dos tangentes a $\mathcal{C}$. Y además que las distancias a sus pies en $\mathcal{C}$ (es decir, a los puntos de tangencia) son iguales.



Llamemos a los puntos de tangencia a y b.

Por ser a un punto de tangencia se tiene que su distancia con el radio, y la distancia del centro P a C y la distancia de a a C forman un triángulo rectángulo al que llamaremos APC. Así si α es el ángulo que se forma entre la tangente de a (AC) y la recta de PC entonces tenemos que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{PA}{PC} = \frac{r}{PC}$

Analogamente BPC también es un triángulo rectángulo por lo que si β es el ángulo que se forma entre BC y PB entonces tenemos que $\operatorname{Sen}\beta = \frac{PB}{PC} = \frac{r}{PC}$

Por lo tanto tendríamos que $\operatorname{Sen}\alpha = \operatorname{Sen}\beta$

Ya que APC es un triángulo rectangulo tenemos que $0 < \alpha < 90$. Analogamente para BPC tenemos $0 < \beta < 90$. Retomando que $\operatorname{Sen}\alpha = \operatorname{Sen}\beta$ se obtiene que $\alpha = \beta$.

Ya vimos que $\alpha = \beta$, así que los angulos $\measuredangle APC$ y $\measuredangle BPC$ son iguales, por el criterio de congruencia LAL (lado-ángulo-lado) se tiene que los triangulos APC y BPC son congruentes y por lo tanto $AC = BC$.

3. Dado $d(x,a) + d(x,b) = 6\sqrt{3}$ con puntos dados en la hip.

Sabemos que es una elipse centrada en el origen, pues $2a = 6\sqrt{3}$, al multiplicar por el inverso multiplicativo de $2 = a = 3\sqrt{3}$.

Vamos a usar la ecuación canónica de la elipse, es decir $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Ahora, encontramos $b^2 = a^2 - c^2$, es decir.

$$2a = (a,b) = \|(0,3) - (0,-3)\| = \|(0,6)\|,$$ donde por def. de norma

$$\sqrt{0^2 + 6^2} = 6 \quad \therefore \; 2c = 6 \quad y \quad c = \frac{6}{2} = 3$$

Análogamente con $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - (3)^2} = \sqrt{27 - 9} = \sqrt{18}$

$b^2 = 18$ y $a^2 = 27$

$$\therefore \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{27} = 1$$

4.

$\hookrightarrow$ La mediatriz de P y Q para $a=0$

a) Si $a=0$ entonces

$$|d(x,P)-d(x,Q)|=0$$

Por las propiedades de valor absoluto tenemos que:

$$\sqrt{(d(x,P)-d(x,Q))^2}=0$$

ahora cómo sabemos que las distancias siempre van a ser positivas podemos cancelar el cuadrado, lo cual sería

$$d(x,P)-d(x,Q)=0$$

Y por álgebra obtenemos

$$d(x,P)=d(x,Q)$$

Ahora nosotros sabemos que la mediatriz de

$\overline{AB}=\{X(x,y) \mid d(x,A)=d(x,B)\}=\{X(x,y) \mid \sqrt{(x-A_x)^2+(y-A_y)^2}=\sqrt{(x-B_x)^2+(y-B_y)^2}\}$

entonces sustituyendo obtenemos que

Mediatriz de $\overline{PQ}=\sqrt{(x-P_x)^2+(y-P_y)^2}=\sqrt{(x-Q_x)^2+(y-Q_y)^2}$

$$x^2-2P_xx+P_x^2+y^2-2P_yy+P_y^2=x^2-2Q_xx+Q_x^2+y^2-2Q_yy+Q_y^2$$

$$2P_xx-P_x^2+2P_yy-P_y^2-2Q_xx+Q_x^2-2Q_yy+Q_y^2=0$$

$$2(P_x-Q_x)x+2(P_y-Q_y)y-\|P\|^2-\|Q\|^2=0$$

$$(P_x-Q_x)x+(P_y-Q_y)y-\frac{\|P\|^2-\|Q\|^2}{2}=0$$

Rayos complementarios del segmento $\overline{PQ}$ para $a=c$ y

b) Si $a=c$ sustituimos en la ecuación y obtenemos que

$$|d(x,P)-d(x,Q)|=2c$$

Y por valor absoluto las distancias al ser positivas obtenemos:

$$d(x,P)-d(x,Q)=2c$$

Ahora, recordemos que una elipse se define como:

$$E=\{P\in\mathbb{R} \mid |PF_2|+|PF_1|=2a\}$$

Y ya que esto se define de P a Q. Por lo tanto podemos concluir que si hacemos $a=c$ se definen los rayos complementarios entre ambos puntos

c) Recordando la definición de excentricidad sabemos que

$$\frac{c}{a}$$

Ya que $a > c$ la excentricidad nos queda negativa

$$0 > \frac{c}{a}$$

$$0 > e$$

Ya que como sabemos no es posible obtener excentricidades negativas si hacemos $a > c$ en la expresión nos queda el conjunto vacío ($\emptyset$)

Encuentra la transformación afín $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple

1) $f(2)=5$ y $f(5)=2$

2) $f(1)=-2$ y $f(2)=2$

Una transformación afín es $f(x)=ax+b$, entonces

1) $f(2)=5$ y $f(5)=2$

tenemos

$$5=2a+b$$
$$2=5a+b$$

deseejando b

$$b=2-5a$$

sustituyendo

$$2a+(2-5a)=5$$
$$2a+2-5a=5$$
$$-3a=5-2$$
$$-3a=3$$
$$a=-1$$

Sustituyendo a

$$b=2-5(-1)$$
$$=2+5=7$$

Entonces $f(x)=-x+7$

2) $f(1) = -2$ y $f(2) = 2$

tenemos

$$-2 = a + b$$
$$2 = 2a + b$$

despeejando b

$$b = -2 - a$$

sustituyendo

$$2a + (-2 - a) = 2$$

$$2a - 2 - a = 2$$

$$a = 2 + 2$$
$$a = 4$$

Sustituyendo a

$$b = -2 - 4$$
$$b = -6$$

Entonces $f(x) = 4x - 6$

6. Demuestra, usando la fórmula, que la inversa de cualquier reflexion en $\mathbb{R}^2$ es ella misma.

Sabemos que la reflexion en $\mathbb{R}^2$ a lo largo de

$$l: u \cdot x = c \,(\text{con } |u| = 1) \text{ se ve como:}$$

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\phi(x) = x + 2(c - u \cdot x)u$$

Para saber si es su misma inversa la componemos con ella misma y debemos de obtener la identidad:

$$\begin{aligned}
(\phi \circ \phi)(x) &= \phi(\phi(x)) \\
&= \phi(x + 2(c - u \cdot x)u) \\
&= (x + 2(c - u \cdot x)u) + 2(c - u(x + 2(c - u \cdot x)u))u \\
&= x + 2u(c - xu) + 2u(c - u(x + 2u(c - xu))) \\
&= x + 2u(c - xu) + 2u(c - u(x + 2uc - 2xu^2)) \\
&= x + 2u(c - xu) + 2u(c - ux - 2u^2c + 2xu^3) \\
&= x + 2u(c - xu) + 2u(2xu^3 - 2u^2c - ux + c) \\
&= x + 2uc - 2xu^2 + 2u(2xu^3 - 2u^3c - ux + c) \\
&= x + 4uc - 4u^2x + 4xu^4 - 4u^2c \\
&= x(1 - 4u^2 + 4u^4) + 4uc - 4u^2c
\end{aligned}$$

Como ϕ esta definida cuando $|u| = 1$ entonces:

$$\begin{aligned}
&= x(1 - 4(1)^2 - 4(1)^4) + 4(1)c - 4(1)^2c \\
&= x(1 - 4 + 4) + 4c - 4c \\
&= x(1) \\
&= x
\end{aligned}$$

Obtuvimos la identidad entonces es su misma inversa.