De lo visto en los campos $\mathbb{Z}_p$, sabemos que

$$\bar{0} = [0] = [p] = [\underbrace{1+1+\dots+1}_{p \text{ veces}}] = \underbrace{[1]+[1]+\dots+[1]}_{p \text{ veces}}.$$

Es por ello que definimos

Dfn. Sea $\mathbb{F}$ un campo. Se define la característica de $\mathbb{F}$ como el entero no negativo

$$\operatorname{Car}(\mathbb{F}) = \operatorname{Char}(\mathbb{F}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nexists\, n \in \mathbb{N} \text{ tq } \underbrace{1+\dots+1}_{n \text{ veces}} = 0 \\ \min\{n \in \mathbb{N} \mid \underbrace{1+\dots+1}_{n \text{ veces}} = 0\} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para ilustrar la dfn., tenemos la sigte prop

Prop Sea $\mathbb{F}$ un campo. Si $\operatorname{Char}(\mathbb{F}) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Char}(\mathbb{F})$ es un número primo.

Dem

Supongamos que $\operatorname{Char}(\mathbb{F}) = q$ no es primo. Ent. $\exists\, a, b \in \mathbb{N}$ tq $q = a \cdot b$, con $1 < a < q$ y $1 < b < q$. De este modo

$$0 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{q} = q \cdot 1 = (a \cdot b) \cdot 1$$
$$= (a \cdot 1) \cdot_{\mathbb{F}} (b \cdot 1)$$

Esto significa que $\alpha = a \cdot 1$, $\beta = b \cdot 1 \in \mathbb{F}$ y cumplen

$$0 = \alpha \cdot \beta \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ó } \beta = 0$$

porque $\mathbb{F}$ es campo

De aquí, si $\alpha = 0$, tenemos

$$0 = \alpha = a \cdot 1 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{a \text{ veces}},$$

pero esto contradice $|a| < q = \operatorname{Char}(\mathbb{F})$. Es análogo si $\beta = 0$. ∎

Ejemplos de Esp. Vect. (continuación): Sea $\mathbb{F}$ campo.

0) Si $V=\{p\}$, ent. al tomar $p=\bar{0}$ (p jugará el papel del neutro), se tiene que las operaciones

$$\hat{+}: V\times V \to V \qquad \hat{\cdot}: \mathbb{F}\times V \to V$$
$$(p,p) \mapsto p \qquad (\alpha, p) \mapsto p$$

hacen de V un $\mathbb{F}$-esp. vect., llamado "trivial".

1) $V=\mathbb{F}$ (con $\mathbb{F}$ campo)

3) Si $K \subseteq \mathbb{F}$ es un subcampo (ver def 5 en N1, pág. 2), ent $\mathbb{F}$ es un K-esp. vect.. Como casos particulares, tenemos

- $K=\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} = \mathbb{F}$
- $K=\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{F}$

Moraleja: $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{Q}$-esp. vect. Sin embargo.

Teo $\mathbb{Q}$ no es un $\mathbb{R}$-esp. vect.

> **Lema** Sean $\mathbb{F}$ un campo, V un $\mathbb{F}$-e.v y $\bar{v} \in V\setminus\{\bar{0}\}$.
> Ent. la función $\varphi: \mathbb{F} \to V$, $\lambda \mapsto \lambda\bar{v}$ es inyectiva.
>
> **Dem**
> Sup. que $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ cumplen $\varphi(\lambda)=\varphi(\mu)$, i.e. $\lambda\bar{v}=\mu\bar{v}$.
> Por ello,
> $$(\lambda-\mu)\bar{v} = \lambda\bar{v} + (-(\mu\bar{v})) = \mu\bar{v} + (-(\mu\bar{v})) = \bar{0}$$
> Es decir, $(\lambda-\mu)\bar{v}=\bar{0} \underset{\text{por propiedad vista}}{\Longrightarrow} \lambda-\mu=0$. Así, $\lambda=\mu$ y φ es inyectiva. ∎

Dem (del Teo)
Si $V=\mathbb{Q}$ fuera un esp vect. sobre $\mathbb{R}$, ent. para el vector $\bar{v}=1\neq 0$,

se tiene que $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$, dada por $\varphi(\lambda) = \lambda \cdot_V 1$,
es inyectiva. De aquí, la cardinalidad de $\mathbb{Q}$ es mayor o igual a la de $\mathbb{R}$, i.e. $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{R}|$, lo cual es una contradicción. $\blacksquare$

4] $\mathbb{F}^n$ es $\mathbb{F}$-e.v.

5] $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es lo mismo que
$\mathbb{F}^{m \times n} = \mathrm{Fun}(\{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}, \mathbb{F})$

6] Si S es cto $\neq \emptyset$ ent. $S_{\mathbb{F}} = \{ f : S \to \mathbb{F} \mid f$ es función$\}$.

7] $V = C[a,b]$ es $\mathbb{R}$-e.v.

$\hat{+}: V \times V \to V$
$(f,g) \mapsto f \hat{+} g : p \in [a,b] \mapsto f(p)+g(p)$

$\hat{\cdot}: \mathbb{R} \times V \to V$
$(\lambda, f) \mapsto \lambda f : p \in [a,b] \mapsto \lambda \cdot (f(p))$

Obs Aquí es importante que
f, g cont $\Rightarrow f+g$ cont
para que la fun $\hat{+}: V \times V \to V$ esté bien definida.

8] Si V y W son $\mathbb{F}$-e.v., ent. $V \times W$ también lo es con las operaciones $+: (V \times W) \times (V \times W) \to V \times W$
$(v,w) + (v',w') = (v +_V v', w +_W w')$

$\to$ Obs Tarea Dem. que $(V \times W, +, (0_V, 0_W))$ es gpo abeliano

---

Prop. Sea $\mathbb{F}$ un campo y V un $\mathbb{F}$-e.v. Si $\alpha \in \mathbb{F}$ y $\bar{v} \in V$, ent
ii) $\alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$, iii) $(-1)\bar{v} = -\bar{v}$.

Dem
ii) $\alpha \bar{0} = \alpha(\bar{0} + \bar{0}) = \alpha\bar{0} + \alpha\bar{0} \Rightarrow \alpha\bar{0} = \alpha\bar{0} + \alpha\bar{0}$
sumamos $-(\alpha\bar{0})$

$\bar{0} = \alpha\bar{0} + (-(\alpha\bar{0})) = \alpha\bar{0} + (\alpha\bar{0} + (-(\alpha\bar{0})))$
$= \alpha\bar{0} + \bar{0} = \alpha\bar{0}.$

iii) Notemos que $(-1)\bar{v}$ cumple

$$\bar{v} + (-1)\bar{v} = 1\cdot\bar{v} + (-1)\bar{v} = \overbrace{(1+(-1))}^{0}\bar{v} = \bar{0}\,\bar{v} = \bar{0}$$

Así, $\bar{v} + (-1)\bar{v} = \bar{0} = \bar{v} + (-\bar{v})$

Sumando a ambos lado $-\bar{v}$, se obtiene

$$(-1)\bar{v} = -\bar{v}$$

■

Teo Sean $S \neq \phi$ un cto y $\mathbb{F}$ un campo. Ent. $S_{\mathbb{F}}$ es un $\mathbb{F}$-ev.

Ejemplo $S = \{1,2\}$ y $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ se come a $\mathbb{R}^2$.

Dado $f \in {}^{\{1,2\}}\mathbb{R}$, se tiene $f : \{1,2\} \to \mathbb{R}$. Así, f queda determinada por los valores $f(1)$ y $f(2)$ (en ese órden). Veamos porqué: si $g \in {}^{\{1,2\}}\mathbb{R}$ y $g(1) = f(1)$, $g(2) = f(2)$, ent.

f y g son funciones con el mismo, mismo contradominio y misma regla de correspondencia,

por ello son iguales.

De este modo, podemos definir $\Phi : {}^{\{1,2\}}\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\Phi\left(f : \begin{array}{l} 1 \mapsto f(1) \\ 2 \mapsto f(2) \end{array}\right) = (f(1), f(2)).$$

Resulta que Φ es biyectiva y, más aún, preserva las operaciones. Esto es

$$\Phi(f+g) = \Phi(f) +_{\mathbb{R}^2} \Phi(g)$$

$$\Phi(\lambda f) = \lambda \cdot_{\mathbb{R}^2} \Phi(f)$$