Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Geometría Analítica I

Grupo: 4071

Dr. Ramón Reyes Carrión

Emmanuel Ismael González Celio

Héctor Jair Morales Gómez

Examen 2

Equipo γ
Chimal García Ernesto Andreo
Lizárraga Osuna Rosa Isela
López López Daniel
Ponce Vergara Santiago
Segura Moreno Rodrigo
Terrazas Pablo Christian Daniel

21 de enero del 2021

Problema 1

Supongamos que tenemos una recta en $\mathbb{R}^2$ definida en su forma vectorial como $\vec{r} = \langle 3-3k, 5k \rangle$. Todos los puntos que están en esta recta experimentan una rotación de $\frac{\pi}{2}$ en el sentido inverso a las manecillas del reloj. Luego, experimentan una reflexión sobre el eje X y finalmente experimentan otra reflexión sobre el eje Y. Da la ecuación (vectorial o funcional) de la recta que quedó después de aplicarle las tres transformaciones a la recta original.

Solución. Para encontrar la recta resultante basta con aplicar cada transformación a dos puntos particulares de la recta, y pues dos puntos cualesquiera determinan a toda la recta. En este caso, la recta está dada por $\mathcal{L} : (3,0) + k(-3,5)$, así que podemos tomar los puntos $(3,0)$ y $(0,5)$, que corresponden a los valores $k = 0$, $k = 1$. Para la primera transformación, su matriz asociada de $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para la reflexión por el eje X, la matriz asociada es $\begin{pmatrix} \cos 2\cdot 0 & \sin 2\cdot 0 \\ \sin 2\cdot 0 & -\cos 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para la reflexión por el eje Y la matriz asociada es $\begin{pmatrix} \cos\pi & \sin\pi \\ \sin\pi & -\cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, por lo que tenemos

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así, vemos que el vector director de la recta resultante es $(5,0) - (0,-3) = (5,3)$. Entonces la recta final está dada por:

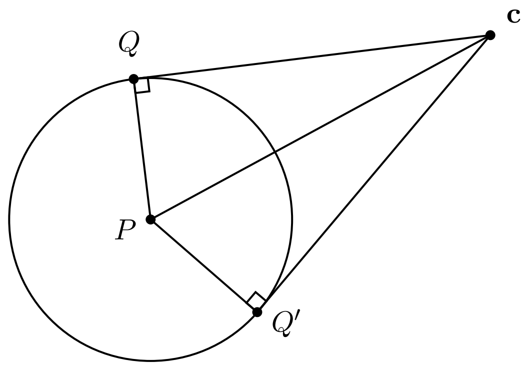
$$\boxed{\mathcal{L} : (0,-3) + k(5,3)}$$

$$\boxed{\langle 5k, 3k-3 \rangle}$$

Problema 2

Demuestra que si $\mathbf{c}$ es un punto exterior (al círculo $\mathcal{C}$ con centro en P) entonces su recta a biseca sus dos tangentes a $\mathcal{C}$. Y además que las distancias a sus pies en $\mathcal{C}$ (es decir, a los puntos de tangencia) son iguales.

Demostración. La demostración se basa en la figura.



Tómese un punto arbitrario $\mathbf{c}$ en el exterior de la circunferencia con centro en P y radio r, y trácese el segmento $\overline{\mathbf{c}P}$. Supóngase que las tangentes a la circunferencia por $\mathbf{c}$ tienen como punto de tangencia a Q y Q'. Como Q y Q' están en la circunferencia, $\overline{PQ} = \overline{PQ'} = r$. Además, como las tangentes a una circunferencia son siempre perpendiculares al radio por el punto de tangencia, se puede afirmar que $\overline{PQ} \perp \overline{Q\mathbf{c}}$ y, análogamente, $\overline{PQ'} \perp \overline{Q'\mathbf{c}}$. Así, $\triangle PQ\mathbf{c}$ y $\triangle PQ'\mathbf{c}$ son rectángulos y cumplen el teorema de Pitágoras. Esto último significa que

$$\overline{PQ}^2 + \overline{Q\mathbf{c}}^2 = \overline{P\mathbf{c}}^2$$

$$\overline{PQ'}^2 + \overline{Q'\mathbf{c}}^2 = \overline{P\mathbf{c}}^2$$

Igualando ambas ecuaciones,

$$\overline{PQ}^2 + \overline{Q\mathbf{c}}^2 = \overline{PQ'}^2 + \overline{Q'\mathbf{c}}^2$$

Y como $\overline{PQ} = \overline{PQ'} = r$, se tiene que $\overline{Q\mathbf{c}}^2 = \overline{Q'\mathbf{c}}^2$. Como $\overline{Q\mathbf{c}}$ y $\overline{Q'\mathbf{c}}$ son distancias, ambas son positivas y se concluye que $\overline{Q\mathbf{c}} = \overline{Q'\mathbf{c}}$ (por lo que la distancias de $\mathbf{c}$ a sus pies en la circunferencia, Q y Q', son iguales). Como $\triangle PQ\mathbf{c}$ y $\triangle PQ'\mathbf{c}$ comparten el lado $\overline{P\mathbf{c}}$, $\overline{PQ} = \overline{PQ'}$ y $\overline{Q\mathbf{c}} = \overline{Q'\mathbf{c}}$, los triángulos $\triangle PQ\mathbf{c}$ y $\triangle PQ'\mathbf{c}$ son congruentes por el criterio LLL. Esto significa que $\angle P\mathbf{c}Q = \angle P\mathbf{c}Q'$, por lo que $\overline{\mathbf{c}P}$ biseca al ángulo $\angle Q\mathbf{c}Q'$ formado por las tangentes a la circunferencia por $\mathbf{c}$. ■

Problema 3

Halla la ecuación del conjunto de puntos G que tienen la propiedad de que la suma de las distancias de cada punto $P \in G$ a los puntos $(0,3)$ y $(0,-3)$ vale $6\sqrt{3}$.

Solución. Sean $f_1 = (0,3)$ y $f_2 = (0,-3)$. Se sabe que una elipse es el conjunto de los puntos en donde se satisface que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es una constante $2a$, rápidamente podemos ver que el problema describe una elipse donde la constante de la que hablamos vale $6\sqrt{3}$, así $a = 3\sqrt{3}$.

Anudado a esto, el centro de la elipse estará en el punto medio de los dos puntos fijos f_1 y f_2, así este punto medio será el origen del plano. Ahora, llamamos a c la distancia entre alguno de los focos y el centro, por ende $c = 3$.

Además, las elipses satisfacen la relación $b^2 = a^2 - c^2$, por lo que $b = \sqrt{27-9} = 3\sqrt{2}$.

Ahora, la ecuación canónica de una elipse con centro en el origen tiene la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Entonces la ecuación del conjunto de puntos G es:

$$\boxed{\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{18} = 1}$$

Por lo que el conjunto definido por los puntos:

$$\boxed{\mathcal{E} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{18} = 1 \right\}}$$

Problema 4

Demuestra que la ecuación

$$|\mathrm{d}(x,P) - \mathrm{d}(x,Q)| = 2a$$

define,

- la mediatriz de P y Q para $a = 0$;
- los rayos complementarios del segmento $\overline{PQ}$ para $a = c$, y
- el conjunto vacío para $a > c$.

Lema. El rayo que parte desde $\mathbf{x}$ hasta $\mathbf{y}$ (la continuación de la recta por $\mathbf{x}$ y que pasa más allá de $\mathbf{y}$) es el conjunto $\{\mathbf{z} \mid \mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathrm{d}(\mathbf{y},\mathbf{z}) = \mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{z})\}$.

Demostración. Definiendo el rayo que describimos anteriormente por medio de el conjunto:

$$\{t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \mid t \in \mathbb{R}, t \leq 0\}$$

Primero, demostraremos la igualdad de ambos conjuntos.

$\subseteq$) Sea $\mathbf{z} = t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}$ un elemento perteneciente al primer conjunto. Su distancia a $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ puede verse como:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{z}) &= \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| \\
&= \|\mathbf{x} - t\mathbf{x} - (1-t)\mathbf{y}\| \\
&= \|(1-t)\mathbf{x} - (1-t)\mathbf{y}\| \\
&= |1-t|\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \\
&= |1-t|\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathbf{y},\mathbf{z}) &= \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\| \\
&= \|\mathbf{y} - t\mathbf{x} - (1-t)\mathbf{y}\| \\
&= \| - t\mathbf{x} + t\mathbf{y}\| \\
&= |t|\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \\
&= |t|\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})
\end{aligned}$$

Como $t \leq 0$, podemos decir que $|t| = -t$ y $|1-t| = 1-t$. Teniendo esto en cuenta, podemos restar la segunda ecuación de la primera para que, de esta manera:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{z}) - \mathrm{d}(\mathbf{y},\mathbf{z}) =& (1-t)\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - (-t)\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\
=& \mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})
\end{aligned}$$

Siendo así que $\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathrm{d}(\mathbf{y},\mathbf{z})$

$\supseteq$) Teniendo en cuenta que $\{\mathbf{z} \,|\, \mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathrm{d}(\mathbf{y},\mathbf{z}) = \mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{z})\}$. Si consideramos un *triángulo*, el cual podría formarse por los vértices $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$, del cual sus lados estarían dados por $\mathbf{u} = \mathbf{z} - \mathbf{y}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{z}$. Podemos observar que:

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{z} + \mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{z} = \mathbf{w}$$

.

Con lo anterior, podemos obtener:

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2$$

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2 \tag{1}$$

Obsérvese que $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{z}-\mathbf{y}\| = \mathrm{d}(\mathbf{y},\mathbf{z})$, $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ y $\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| = \mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{z})$. Siendo que tenemos por hipótesis:

$$\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| + \|\mathbf{u}\|$$

De donde

$$\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{u}\|$$

Y

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{u}\|^2 \tag{2}$$

Igualando (1) y (2) se tiene que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{u}\|^2 \\ -2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= -2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\end{aligned}$$

Como $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$, donde θ el ángulo que se forma entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ podemos ver que $\cos\theta = 1$ y $\theta = 0$. Con ello, vemos que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos, por lo que $\exists t \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$. Sustituyendo $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{z} - \mathbf{y} &= t(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ \mathbf{z} &= \mathbf{y} + t(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ \mathbf{z} &= t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}\end{aligned}$$

Si suponemos $t > 0$. Por lo que calculamos al inicio de la demostración, tenemos que

$$\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = |1-t|\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$\mathrm{d}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = |t|\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

De esta manera, $|t| = t$. Donde $|1-t| = 1-t$ si $t \in (0,1]$; y $|1-t| = t-1$ si $t \in (1,\infty)$. En el primer caso se tiene

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \mathrm{d}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) &= (1-t)\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - t\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= (1-2t)\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\neq \mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\end{aligned}$$

Podemos asegurar lo último que mencionamos porque no existe $t \in (0,1]$ tal que $1 - 2t = 1$. Si hacemos lo mismo para $t \in (1,\infty)$ podemos ver que:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \mathrm{d}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) &= (t-1)\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - t\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= -\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\neq \mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\end{aligned}$$

De esta manera podemos observar que necesariamente $t \in (-\infty, 0]$. ■

Ahora, para demostrar lo que se nos pide:

Demostración. Si $|\mathrm{d}(\mathbf{x}, P) - \mathrm{d}(\mathbf{x}, Q)| = 2a$, entonces $\mathrm{d}(\mathbf{x}, P) - \mathrm{d}(\mathbf{x}, Q) = 2a$ o $\mathrm{d}(\mathbf{x}, Q) - \mathrm{d}(\mathbf{x}, P) = 2a$.

I) Suponiendo $a = 0$. Podemos ver que $\mathrm{d}(\mathbf{x}, P) - \mathrm{d}(\mathbf{x}, Q) = 0$ o $\mathrm{d}(\mathbf{x}, Q) - \mathrm{d}(\mathbf{x}, P) = 0$, donde ambas nos dicen que $\mathrm{d}(\mathbf{x}, P) = \mathrm{d}(\mathbf{x}, Q)$; lo cual puede verse como la mediatriz de P y Q.

II) Suponiendo $a = c = \frac{1}{2}\mathrm{d}(P, Q)$, donde $\mathrm{d}(\mathbf{x}, P) - \mathrm{d}(\mathbf{x}, Q) = \mathrm{d}(P, Q)$ o $\mathrm{d}(\mathbf{x}, Q) - \mathrm{d}(\mathbf{x}, P) = \mathrm{d}(P, Q)$. Podemos despejar ambas ecuaciones anteriores para poder obtener
$$\mathrm{d}(\mathbf{x}, P) = \mathrm{d}(P, Q) + \mathrm{d}(\mathbf{x}, Q) \text{ y } \mathrm{d}(\mathbf{x}, Q) = \mathrm{d}(P, Q) + \mathrm{d}(\mathbf{x}, P).$$
Por el lema que se demostró anteriormente, sabemos que estas dos ecuaciones describen los rayos sobre la recta que pasa por P y Q, siendo estos aquellos que se siguen tanto de P como de Q (siendo que van más allá Q); dicho de otra manera, son los rayos complementarios del segmento $\overline{PQ}$.

III) Suponiendo $a > c = \frac{1}{2}\mathrm{d}(P,Q)$. Así, $\mathrm{d}(\mathbf{x},P)-\mathrm{d}(\mathbf{x},Q) > \mathrm{d}(P,Q)$ o $\mathrm{d}(\mathbf{x},Q)-\mathrm{d}(\mathbf{x},P) > \mathrm{d}(P,Q)$. Podemos observar que $\mathrm{d}(\mathbf{x},P) > \mathrm{d}(\mathbf{x},Q)+\mathrm{d}(P,Q)$ o $\mathrm{d}(\mathbf{x},Q) > \mathrm{d}(\mathbf{x},P)+\mathrm{d}(P,Q)$.
Podemos notar que ambas ecuaciones hacen una afirmación de la forma $\mathrm{d}(\mathbf{a},\mathbf{b}) > \mathrm{d}(\mathbf{a},\mathbf{c}) + \mathrm{d}(\mathbf{c},\mathbf{b})$, lo cual contradice a la desigualdad del triángulo, siendo así que no existe alguna $\mathbf{x}$ que cumpla con las ecuaciones. Finalmente, observamos que esta ecuación describe al conjunto vacío.

$\blacksquare$

Problema 5

Encuentra la transformación afín $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple:

- $f(2) = 5$ y $f(5) = 2$
- $f(1) = -2$ y $f(2) = 2$

Solución. Sabemos que una transformación afín es de la forma $f(t) = at + b$.

- $f(2) = 5$ y $f(5) = 2$ De tal modo que se tiene $f(2) = 2a+b$ y $f(5) = 5a+b$. Restando ambas expresiones resulta

$$\begin{aligned} f(5) - f(2) &= 5a + b - 2a - b \\ 2 - 5 &= 3a \\ -3 &= 3a \\ a &= -1 \end{aligned}$$

  Sustituyendo a en cualquiera de las dos funciones de obtiene

$$\begin{aligned} f(2) &= -2 + b \\ 5 &= -2 + b \\ b &= 7 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f(5) &= -5 + b \\ 2 &= -5 + b \\ b &= 7 \end{aligned}$$

  Por tanto, la transformación afín es $\boxed{f(t) = -t + 7}$.

- $f(1) = -2$ y $f(2) = 2$ De tal modo que se tiene $f(1) = a+b$ y $f(2) = 2a+b$. Restando ambas funciones resulta

$$\begin{aligned} f(1) - f(2) &= a + b - 2a - b \\ -2 - 2 &= -a \\ -4 &= -a \\ a &= 4 \end{aligned}$$

  Sustituyendo a en cualquiera de las dos funciones de obtiene

$$\begin{aligned} f(1) &= 4 + b \\ -2 &= 4 + b \\ b &= -6 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f(2) &= 2(4) + b \\ 2 &= 8 + b \\ b &= -6 \end{aligned}$$

  Por tanto, la transformación afín es $\boxed{f(t) = 4t - 6}$.

Problema 6

Demuestra, usando la fórmula, que la inversa de cualquier reflexión en $\mathbb{R}^2$ es ella misma.

Solución. La inversa de una función se define como aquella tal que al componerse con la función arroja la función identidad. Se demostrará que, dada una reflexión $\lambda_\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ respecto a una recta $\ell \subset \mathbb{R}^2$, se cumple que

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (\lambda_\ell \circ \lambda_\ell)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

Sea ℓ una recta definida por la ecuación normal

$$\ell : \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = c$$

Con $\mathbf{u}$ un vector unitario. Así, la reflexión λ_ℓ está descrita por

$$\lambda_\ell(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + 2(c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\mathbf{u}$$

De donde

$$\begin{aligned}
(\lambda_\ell \circ \lambda_\ell)(\mathbf{x}) &= (\mathbf{x} + 2(c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\mathbf{u}) + 2(c - \mathbf{u} \cdot (\mathbf{x} + 2(c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\mathbf{u}))\mathbf{u} \\
&= \mathbf{x} + 2(c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\mathbf{u} + 2(c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} - 2(c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} \\
&= \mathbf{x} + 2(c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\mathbf{u} + 2(c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\mathbf{u} - 4(c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} \\
&= \mathbf{x} + 4(c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\mathbf{u} - 4(c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\mathbf{u} \\
&= \mathbf{x}
\end{aligned}$$

Que era lo que se quería demostrar. ■