10

Grupo: 4072

Magallanes Camacho Alexis Saúl — MIErcoles-11-Diciembre-2024

1.- Considera los puntos $P_1=(2,2)$, $P_2=(4,6)$, $Q_1=(-2,1)$ y $Q_2=(-3,2)$

a) Da ecuaciones normales para la mediatrices $M_{P_1P_2}$ y $M_{Q_1Q_2}$.

El punto medio P_1P_2 calcular el punto medio $M_{P_1P_2}$ $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$

$M_{P_1P_2}=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ $P_1=(2,2)$ $P_2=(4,6)$ $M_{P_1P_2}=\left(\frac{2+4}{2},\frac{2+6}{2}\right)=$

$(3,4)$ P_1 y P_2 $m_{P_1P_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{6-2}{4-2}=\frac{4}{2}=2$

$m_M=-\frac{1}{m_{P_1P_2}}=-\frac{1}{2}$ $y-y_1=m(x-x_1)$ $M_{P_1P_2}=(3,4)$ $m_M=-\frac{1}{2}$

$y-4=-\frac{1}{2}(x-3) \Rightarrow y-4=-\frac{1}{2}(x-3) \Rightarrow 2(y-4)=-(x-3) \Rightarrow$
$2y-8=-x+3 \Rightarrow x+2y=11$

Mediatriz de Q_1Q_2 $M_{Q_1Q_2}=\left(\frac{-2+(-3)}{2},\frac{1+2}{2}\right)=\left(\frac{-5}{2},\frac{3}{2}\right)$

$m_{Q_1Q_2}=\frac{2-1}{-3-(-2)}=\frac{1}{-1}=-1$ $m_M=-\frac{1}{-1}=1$ la pendiente negativa

$y-y_1=m(x-x_1)$ $y-\frac{3}{2}=1\left(x-\frac{-5}{2}\right) \Rightarrow y-\frac{3}{2}=x+\frac{5}{2} \Rightarrow 2y-3=$

$2x+5 \Rightarrow 2x-2y=-8$

b) Encuentra la intersección de las mediatrices previas. Llamemos a este punto A.

$x+2y=11$ despejamos x $x=11-2y$ sust. $x=11-2y$ en la segunda ecuación $2x-2y=8 \Rightarrow 2(11-2y)-2y=-8 \Rightarrow 22-4y-2y=-8 \Rightarrow 22-6y=-8 \Rightarrow -6y=-8-22 \Rightarrow -6y=-30$ $y=\frac{-30}{-6}=5$

$\Rightarrow y=5$ en $x=11-2y \Rightarrow x=11-2(5)=11-10=1$ El punto de intersección A la mediatrices es $(x,y)=(1,5)$. ∴ la intersección de las mediatrices $M_{P_1P_2}$ y $M_{Q_1Q_2}$ punto $A(1,5)$

c) Encuentra la distancia de A a las rectas $L_{P_1Q_1}$ y $L_{P_2Q_2}$.

$L_{P_1Q_1}$ $m_{P_1Q_1}=\frac{1-2}{-2-2}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}$ $P_1(2,2)$ $y-y_1=m_1(x-x_1)$

$y-2=\frac{1}{4}(x-2)$ multiplicar por 4 $4(y-2)=(x-2) \Rightarrow 4y-8=x-2$

$Ax+By+C=0$ $x-4y+6=0$ $L_{P_2Q_2}$ $m_{P_2Q_2}=\frac{2-6}{-3-4}=\frac{-4}{-7}=\frac{4}{7}$

Usamos la fórmula m_2 $P_2(4,6)$: $y-6=\frac{4}{7}(x-4)$ multiplicamos por 7 $\Rightarrow 7(y-6)=4(x-4) \Rightarrow 7y-42=4x-16$ $\quad Ax+By+C=0$

$4x-7y+26=0$ distancia del punto $A(1,5)$ a las rectas

$A(x_1,y_1)$ $Ax+By+C=0$; $d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ distancia:

$$d_1=\frac{|1(1)+(-4)(5)+6|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\frac{|1-20+6|}{\sqrt{1+16}}=\frac{|-13|}{\sqrt{17}}=\frac{13}{\sqrt{17}}$$

$d_1 \approx 3{,}15$ Distancia de $A(1,5)$ a $l_2 a_2$ $(4x-7y+26=0)$

$\Rightarrow 4x-7y+26=0 \Rightarrow A=4$ $B=-7$ y $C=26 \Rightarrow d_2=$

$$\frac{|4(1)+(-7)(5)+26|}{\sqrt{4^2+(-7)^2}}=\frac{|4-35+26|}{\sqrt{16+49}}=\frac{|-5|}{\sqrt{65}}=\frac{5}{\sqrt{65}} \quad d_2 \approx 0{,}62$$

2. Sea n el último dígito de su número de cuenta distinto de 0. Considera el vector $u_0=(2,n)$. a) Normaliza u_0, denotemos el vector resultante como u_1 y encuentra un vector u_2, tal que $\{u_1,u_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Demuestra explícitamente que forman una base ortonormal, es decir, que satisfacen $u_i \cdot u_j = \delta_{ij}$;

$u_0=(2,9) \Rightarrow \{u_1,u_2\} \Rightarrow u_0=(2,9) \Rightarrow \|u_0\|=\sqrt{2^2+9^2}=\sqrt{4+81}=\sqrt{85}$ $\quad u_0 \Rightarrow u_1=\frac{1}{\|u_0\|}u_0=\frac{1}{\sqrt{85}}(2,9) \Rightarrow u_1=\left(\frac{2}{\sqrt{85}},\frac{9}{\sqrt{85}}\right) \Rightarrow u_2$ ortogonal a $u_1 \Rightarrow u_1\left(\frac{2}{\sqrt{85}},\frac{9}{\sqrt{85}}\right)$ vector ortogonal a (a,b) en $\mathbb{R}^2$ es $(-b,a) \Rightarrow u_2=\left(-\frac{9}{\sqrt{85}},\frac{2}{\sqrt{85}}\right) \Rightarrow u_1$ y u_2

$\Rightarrow u_1 \cdot u_2=0 \Rightarrow$ longitud $\underline{1} \Rightarrow \|u_1\|=\|u_2\|=1 \Rightarrow$

$u_1=\left(\frac{2}{\sqrt{85}},\frac{9}{\sqrt{85}}\right)$ $\quad u_2=\left(-\frac{9}{\sqrt{85}},\frac{2}{\sqrt{85}}\right)$ $\quad u_1 \cdot u_2=\left(\frac{2}{\sqrt{85}}\right)\left(-\frac{9}{\sqrt{85}}\right)+\left(\frac{9}{\sqrt{85}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{85}}\right) \Rightarrow u_1 \cdot u_2=-\frac{18}{85}+\frac{18}{85}=0$ $\quad u_1$ y u_2 son ortogonales

$\|u_1\|=\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{85}}\right)^2+\left(\frac{9}{\sqrt{85}}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{85}+\frac{81}{85}}=\sqrt{\frac{85}{85}}=1$ $\quad \|u_2\|=\sqrt{\left(-\frac{9}{\sqrt{85}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{85}}\right)^2}=\sqrt{\frac{81}{85}+\frac{4}{85}}=\sqrt{\frac{85}{85}}=1$ $\quad u_1=\left(\frac{2}{\sqrt{85}},\frac{9}{\sqrt{85}}\right)$ $\quad u_2=\left(-\frac{9}{\sqrt{85}},\frac{2}{\sqrt{85}}\right)$

forman una base ortonormal en $\mathbb{R}^2$ => {1, 2}

b) ¿Cuantos vectos $w \in \mathbb{R}^2$ complen que $\{u/\|u\|, w\}$ es una base ortonormal? Explica tu respuesta.

$u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{85}}, \frac{9}{\sqrt{85}}\right)$ un vector unitario magnitud es 1 $\{u/\|u\|, w\}$ es unitario => $u/\|u\| = u_1$

w en $\mathbb{R}^2$ t.q. $\{u_1, w\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ $\{u_1, w\}$ sea una base ortonormal en $\mathbb{R}^2$ => $u_1 \cdot w = 0$ u_1 y w deben ser ortogonales. El vector w debe ser unitario $\|w\| = 1$ $u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{85}}, \frac{9}{\sqrt{85}}\right)$ u_1 en $\mathbb{R}^2$

condición de ortogonalidad $u_1 \cdot w = 0$ $u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{85}}, \frac{9}{\sqrt{85}}\right)$ $w = (w_1, w_2)$

$\frac{2}{\sqrt{85}} w_1 + \frac{9}{\sqrt{85}} w_2 = 0$ multiplicación en la ecuación por $\sqrt{85}$ => $2w_1 + 9w_2 = 0$ Despejando w_1: $w_1 = -\frac{9}{2} w_2$

=> los vectores w ortogonales a u_1 son múltiplos escalares de $(-9, 2)$ $w = k(-9, 2)$ k es un escalar => $\|w\| = 1$ $\|k(-9,2)\| = 1$

$k(-9, 2)$ => $\|k(-9,2)\| = \sqrt{(-9k)^2 + (2k)^2} = \sqrt{81k^2 + 4k^2} = \sqrt{85k^2} = \sqrt{85}|k|$ => $\|w\| = 1$ => $\sqrt{85}|k| = 1$ => $|k| = \frac{1}{\sqrt{85}}$

$k = \pm \frac{1}{\sqrt{85}}$ => w son ortogonales a u_1 tiene longitud 1 son.

$w = \pm \frac{1}{\sqrt{85}}(-9, 2)$. hay 2 vectores w que cumplen las condiciones para que $\{u_1, w\}$ base ortonormal en $\mathbb{R}^2$.

c) Escribe a los vectores $(1,1)$, $(7,4)$ y $(-3,5)$ como combinación lineal de u_1 y u_2. coeficientes α y β:

$(1,1) = \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2$, $(7,4) = \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2$, $(-3,5) = \alpha_3 u_1 + \beta_3 u_2$

$u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{85}}, \frac{9}{\sqrt{85}}\right)$ $u_2 = \left(-\frac{9}{\sqrt{85}}, \frac{2}{\sqrt{85}}\right)$ expresión de $(1,1)$ combinación lineal de u_1 y u_2 α_1 y β_1 t.q.

$(1,1) = \alpha_1\left(\frac{2}{\sqrt{85}}, \frac{9}{\sqrt{85}}\right) + \beta_1\left(-\frac{9}{\sqrt{85}}, \frac{2}{\sqrt{85}}\right)$ => $\frac{2}{\sqrt{85}}\alpha_1 - \frac{9}{\sqrt{85}}\beta_1 = 1$,

$\frac{9}{\sqrt{85}}\alpha_1 + \frac{2}{\sqrt{85}}\beta_1 = 1$ multiplicar por $\sqrt{85}$ $2\alpha_1 - 9\beta_1 = \sqrt{85}$,

$9\alpha_1 + 2\beta_1 = \sqrt{85}$ => multiplicamos la ecuación 1 por 2 y la segunda ecuación por 9

$4\alpha_1 - 18\beta_1 = 2\sqrt{85}$, $81\alpha_1 + 18\beta_1 = 9\sqrt{85}$ => sumamos para

β_1 => $85\alpha_1 = 11\sqrt{85}$ Despejando α_1: $\alpha_1 = \frac{11}{85}$

$\alpha_1 = \frac{11}{85}$ ecuación $2\alpha_1 - 9\beta_1 = \sqrt{85}$ $\quad 2 \cdot \frac{11}{85} - 9\beta_1 = \sqrt{85}$,

$\frac{22}{85} - 9\beta_1 = \sqrt{85}$ $\quad -9\beta_1 = \sqrt{85} - \frac{22}{85}$, $\quad -9\beta_1 = \frac{85\sqrt{85} - 22}{85}$

Despejando β_1 $\quad \beta_1 = \frac{85\sqrt{85} - 22}{-765} \Rightarrow (7, 4)$ combinación lineal

u_1 y u_2 $\Rightarrow (7, 4)$ $\quad \frac{2}{\sqrt{85}}\alpha_2 - \frac{9}{\sqrt{85}}\beta_2 = 7$, $\quad \frac{9}{\sqrt{85}}\alpha_2 + \frac{2}{\sqrt{85}}\beta_2 = 4$

multiplicar por $\sqrt{85}$ $\Rightarrow 2\alpha_2 - 9\beta_2 = 7$, $\quad 9 + 2 = 4$

$(-3, 5)$ u_1 y u_2 $\quad (-3, 5)$ $\quad \frac{2}{\sqrt{85}}\alpha_3 - \frac{9}{\sqrt{85}}\beta_3 = -3$

$\frac{9}{\sqrt{85}}\alpha_3 + \frac{2}{\sqrt{85}}\beta_3 = 5$ $\quad$ lo mismo que el anterior multiplicar por $\sqrt{85}$ $\Rightarrow 2 - 9 = -3$, $\quad 9 + 2 = 5$

$(1, 1) = \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2$ $\quad (7, 4) = \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2$

$(-3, 5) = \alpha_3 u_1 + \beta_3 u_2$

d) Refleja al punto $(7, 4)$ con respecto a la recta generada por u_1. Escribe a este punto reflejado como combinación lineal de u_1 y u_2. ¿Qué puedes notar de estos coeficientes con respecto a los de $(7, 4)$?

$v = (v_1, v_2)$ $\quad u = (u_1, u_2)$ en $\mathbb{R}^2$ fórmula v sobre $u = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$

$(7, 4)$ sobre $u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{85}}, \frac{9}{\sqrt{85}}\right)$ $\quad v \cdot u_1$: $\quad v \cdot u_1 = (7, 4) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{85}}, \frac{9}{\sqrt{85}}\right) =$

$7 \cdot \frac{2}{\sqrt{85}} + 4 \cdot \frac{9}{\sqrt{85}} = \frac{14}{85} + \frac{36}{\sqrt{85}} = \frac{50}{\sqrt{85}}$ $\Rightarrow u_1 \cdot u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{85}}\right)^2 + \left(\frac{9}{\sqrt{85}}\right)^2 =$

$\frac{4}{85} + \frac{81}{85} = \frac{85}{85} = 1$ $\quad (7, 4)$ sobre $u_1 = \frac{50}{\sqrt{85}} u_1 = \frac{50}{\sqrt{85}} u_1 = \frac{50}{\sqrt{85}}$

$\cdot \left(\frac{2}{\sqrt{85}}, \frac{9}{\sqrt{85}}\right) \Rightarrow \quad = \left(\frac{100}{85}, \frac{450}{85}\right) = \left(\frac{20}{17}, \frac{9}{17}\right)$ el reflejo de un punto v respecto recta n es dada por $\quad v = 2 \cdot (-v) \Rightarrow$ reflejo de $(7, 4) \Rightarrow$

$= 2\left(\frac{20}{17}, \frac{90}{17}\right) - (7, 4)$ $\quad v = \left(\frac{40}{17}, \frac{180}{17}\right) - (7, 4) = \left(\frac{40}{17} - 7, \frac{180}{17} - 4\right)$

$v = \left(\frac{40}{17} - \frac{119}{17}, \frac{180}{17} - \frac{68}{17}\right) = \left(\frac{-79}{17}, \frac{112}{17}\right)$ combinación lineal de u_1 y u_2 $\Rightarrow$

$v = \left(\frac{-79}{17}, \frac{112}{17}\right)$ combinación lineal de vectos u_1 y u_2 $\Rightarrow \alpha$ y β

$$\left(-\frac{79}{17}, \frac{112}{17}\right) = \alpha u_1 + \beta u_2 \Rightarrow \frac{-79}{17} = \alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{85}} + \beta \cdot \left(-\frac{9}{\sqrt{85}}\right), \quad \frac{112}{17} = \alpha \cdot \frac{9}{\sqrt{85}} + \beta \cdot \frac{2}{\sqrt{85}}$$

$\Rightarrow$ multiplicar pos $\sqrt{85}$ $\Rightarrow$

$$\frac{-79}{17} \cdot \sqrt{85} = \alpha \cdot 2 - \beta \cdot 9, \quad \frac{112}{17} \cdot \sqrt{85} = \alpha \cdot 9 + \beta \cdot 2$$

cuando comparamos $(7, 4)$ con su reflejo $(7, 4)$ la combinación lineal de $(7, 4)$, el coeficiente de u_2 el mismo signo menos y más el reflejo de u_2 puede cambiar su signo en función de la simetría respecto a la recta generada por u_1.

3. Sea C la circunstancia $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ a) Encuentra el centro, a y el radio, r, de C. Escríbela en la forma $(x - a) \cdot (x - a) = r^2$

La ecuación $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ su forma $(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2 = r^2$ términos de x y y $x^2 - 6x + y^2 + 8y = 0$ para $x^2 - 6x$:

$x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9 \Rightarrow y^2 + 8y$: $y^2 + 8y = (y+4)^2 - 16 \Rightarrow$

$(x-3)^2 - 9 + (y+4)^2 - 16 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$ el centro de la circunferencia es $a = (3, -4)$ y el radio es $r = \sqrt{25} = 5$

b) Encuentra las rectas tangentes a C que pasan por el punto $p = (37/4, -4)$, sus ecuaciones y los puntos de tangencia

Dado $p = \left(\frac{37}{4}, -4\right)$ rectas tangentes a C. La condición para una tangencia a una circunferencia

$(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2 = r^2$ distancia desde el centro $a = (3, -4)$ a la recta sea igual al radio r. Formula de la recta $y + 4 = m(x - 3)$, $y = mx - 3m - 4$ el centro de la circunferencia es $(3, -4)$

La distancia entre $(3, -4)$ la recta $y = mx - 3m - 4 \Rightarrow$ distancia $=$

$$\frac{|(-4) - m(3) + 3m + 4|}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{|2m|}{\sqrt{1+m^2}} \quad \text{radio } r = 5: \frac{|2|}{\sqrt{1+m^2}} = 5$$

$$\frac{(2m)^2}{1+m^2} = 25 \Rightarrow \frac{4m^2}{1+m^2} = 25$$ multiplicar po $1 + m^2 \Rightarrow 4m^2 = 25 + 25m^2$

$$\Rightarrow 25m^2 - 4m^2 = 25 \Rightarrow 21m^2 = 25 \Rightarrow m^2 = \frac{25}{21} \Rightarrow m = \pm\sqrt{\frac{25}{21}} =$$

$\pm\frac{5}{\sqrt{21}} \Rightarrow y = mx - 3m - 4 \quad m = \frac{5}{\sqrt{21}} \Rightarrow y = mx - 3m - 4 \quad m = \frac{5}{21}$

$y = \frac{5}{\sqrt{21}}x - 3\left(\frac{5}{\sqrt{21}}\right) - 4 = \frac{5}{\sqrt{21}}x - \frac{15}{\sqrt{21}} - 4 \Rightarrow y = \frac{5}{\sqrt{21}}x - \frac{15}{\sqrt{21}} - \frac{84}{21}$

para $m = \frac{-5}{\sqrt{21}}$ $\quad y = -\frac{5}{\sqrt{21}}x - 3\left(-\frac{5}{\sqrt{21}}\right) - 4 \Rightarrow y = -\frac{5}{\sqrt{21}}x + \frac{15}{\sqrt{21}} - 4 =$

$-\frac{5}{\sqrt{21}}x + \frac{15-84}{\sqrt{21}} = -\frac{5}{\sqrt{21}}x - \frac{69}{\sqrt{21}} \Rightarrow y = -\frac{5}{\sqrt{21}}x - \frac{69}{\sqrt{21}}$ para

$m = \frac{5}{\sqrt{21}} \Rightarrow y = \frac{5}{\sqrt{21}}x - 3\left(\frac{5}{\sqrt{21}}\right) - 4 \Rightarrow y = \frac{5}{\sqrt{21}}x - \frac{15}{\sqrt{21}} - 4 =$

$\frac{5}{\sqrt{21}}x - \frac{15+84}{\sqrt{21}} = \frac{5}{\sqrt{21}}x - \frac{99}{\sqrt{21}} \Rightarrow y = \frac{5}{\sqrt{21}}x - \frac{99}{\sqrt{21}}$

pare el $y = \frac{5}{\sqrt{21}}x - \frac{99}{\sqrt{21}} \Rightarrow (x-3)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{21}}x - \frac{99}{\sqrt{21}} + 4\right)^2 = 25$ y para

$y = -\frac{5}{\sqrt{21}}x - \frac{69}{\sqrt{21}} \Rightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$

c) Elige un punto C intermedio en el segmento de recta que conecta a los puntos de tangencia, encuentra la ecuación de su recta polar, P_C, y verifica que P está en dicha polar.

Seleccionando un punto C el segmento entre los puntos de tangencia la fórmula de la recta polar: $axx_1 + byy_1 + cyy_1 + dx + ey + p = 0$ son los coeficientes de la circunferencia, reemplazamos un punto intermedio C, recta polar recta polar P_C tenemos (usando la fórmula de polaridad $ax^2 + ay^2 + dx + ey + p = 0 \Rightarrow axx_c + ayy_c + \frac{d}{2}(x + x_c) + \frac{e}{2}(y + y_c) + p = 0 \Rightarrow x_c\, y_c$ en esta fórmula y si $p = \left(\frac{37}{4}, -4\right)$ satisface la ecuación

4. Sean $p = (1, 3)$ y $q = (7, -1)$. a) Encuentra la ecuación vectorial de la circunferencia que tiene al segmento $\overline{pq}$ como diámetro.

$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$, El centro (x_c, y_c) es el punto medio de p y q. El radio r es la mitad de la distancia entre p y q

Centro del círculo El centro es el punto medio de p y q:

El centro es el punto medio de p y q: $(x_c, y_c) = \left(\frac{x_p + x_q}{2}, \frac{y_p + y_q}{2}\right)$

$\Rightarrow p = (-1, 3)$ y $q = (3, -1) \Rightarrow (x_c, y_c) = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) = (1, 1)$

$d = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2} \Rightarrow d = \sqrt{(3-(-1))^2 + (-1-3)^2} =$
$\sqrt{(3+1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$ el radio es la mitad de d =
$r = \frac{\sqrt{32}}{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow$ el centro $(1,1)$ y el radio $r = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$
$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$. esta esta la ecuación de la circunferencia

b) Elije un número $r \in (0,1)$, $r \neq \frac{1}{2}$ y considera el punto $a = p + r(q-p)$. Encuentra el conjugado armónico de a.

punto a: Elegir $r \in (0,1)$, $r \neq \frac{1}{2}$ $a = p + r(q-p)$:

$a = p + r(q-p) = (-1, 3) + r((3,-1) - (-1, 3))$. $\Rightarrow$

$a = (-1, 3) + r(4, -4) = (-1 + 4r, 3 - 4r) \Rightarrow a = (-1+4r, 3-4r)$. conjugado armonico a respecto p y q es el punto b en la recta pq tal que p, q, a, b. Formula

$b = \frac{p + q - a}{2} \Rightarrow b = \frac{(-1,3) + (3,-1) - (-1+4r, 3-4r)}{2}$

$\Rightarrow b = \frac{(-1+3, 3-1) - (-1+4r, 3-4r)}{2} =$

$\frac{(2,2) - (-1+4r, 3-4r)}{2} \Rightarrow b = \frac{(2+1-4r, 2-3+4r)}{2} =$

$\frac{(3-4r, -1+4r)}{2} \Rightarrow b = \left(\frac{3-4r}{2}, \frac{-1+4r}{2}\right) \Rightarrow$

$b = \left(\frac{3-4r}{2}, \frac{-1+4r}{2}\right)$.