10

Reposición Primer Parcial

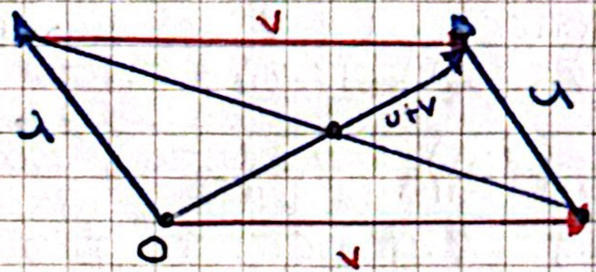
Grupo: 4072 Semestre: 2025-1

Profesor: Ramón Reyes Carrión

Fecha de aplicación: Martes 10 de Diciembre de 2024

Nombre: Juan Pablo Martín del Campo Ladrón de Guevara

Pregunta 1: Dados 2 vectores u, v en $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes, el paralelogramo que definen tiene como vértices los puntos $0, u, v, u+v$. Demuestra que sus diagonales, es decir, los segmentos de 0 a $u+v$ y de u a v se intersectan en su punto medio.



Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ con u y v linealmente independientes

$$\overline{0,(u+v)} = \{\lambda 0 + \mu(u+v) \mid \lambda, \mu > 0 \text{ y } \lambda+\mu = 1\}$$

Encontremos el punto medio con coordenadas baricéntricas

P.m. $\overline{0(u+v)}$ $\boxed{\frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}(u+v)} = \boxed{\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v}$

El segmento de u a v queda definido por

$$\overline{uv} = \{ru + sv \mid r, s > 0 \text{ y } r+s = 1\}$$

su punto medio es: $\boxed{\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v}$

$\therefore \overline{0(u+v)} \cap \overline{uv} = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$ ∎

Pregunta 2: Demuestra que 3 puntos a, b y c son no colineales si: los vectores $u = (b-a)$ y $v = (c-a)$ son linealmente independientes.

Esto es lo mismo a demostrar que: a, b y c son colineales $\Leftrightarrow$ $u = (b-a)$ y $v = (c-a)$ son linealmente dependientes

$\Rightarrow$ sup que a, b, c son colineales, entonces,
$b = a + t(c-a)$ p.a $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow b - a - t(c-a) = 0$

$\Rightarrow 1(b-a) + (-t)(c-a) = 0 \Rightarrow 1u + (-t)v = 0$

como $1 \neq 0$, entonces u y v son linealmente dependientes ya que $(b-a) = t(c-a)$, p.a $t \in \mathbb{R} \Rightarrow u = tv$ p.a $t \in \mathbb{R}$

$\Leftarrow$ sup que $u = (b-a)$ y $v = (c-a)$ son linealmente dependientes

$\Rightarrow ru + sv = 0$ p.a r o $s \neq 0$

si $r \neq 0 \Rightarrow u = -\frac{s}{r} v \Rightarrow (b-a) = -\frac{s}{r}(c-a)$

$\Rightarrow \boxed{b = a - \frac{s}{r}(c-a)} \Rightarrow b \in \mathcal{L}ac$

si $s \neq 0 \Rightarrow v = -\frac{r}{s} u \Rightarrow c - a = -\frac{r}{s}(b-a)$

$\Rightarrow \boxed{c = a - \frac{r}{s}(b-a)} \Rightarrow c \in \mathcal{L}ab$

$\therefore$ a, b y c son colineales ■

Pregunta 3 Da una expresión paramétrica para el plano que pasa por los siguientes puntos $a = (2,0,1)$, $b = (0,1,1)$, $c = (-1,2,0)$

Buscamos una expresión de la forma

$$\Pi = \{ a + \lambda(b-a) + \mu(c-a) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

sustituyendo tenemos que

$$\Pi = \{ (2,0,1) + \lambda((0,1,1) - (2,0,1)) + \mu((-1,2,0) - (2,0,1)) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

$$\Pi = \{ (2,0,1) + \lambda(-2,1,0) + \mu(-3,2,-1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

Desarrollando más, obtenemos lo siguiente

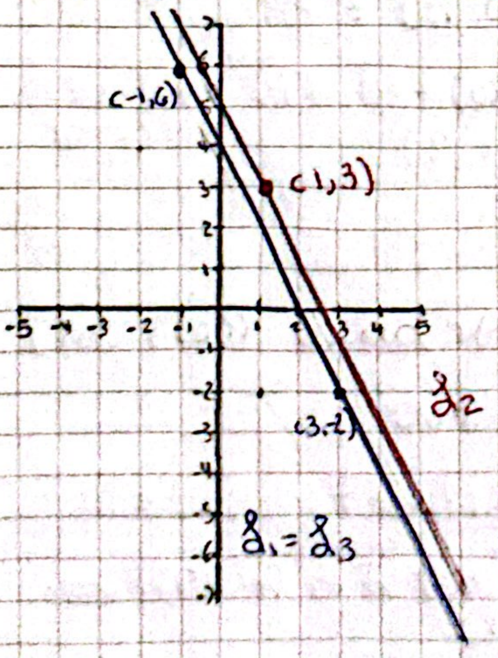
$$\Pi = \{ (2,0,1) + (-2\lambda, \lambda, 0) + (-3\mu, 2\lambda, -\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

$$\Pi = \{ (-2\lambda - 3\mu + 2, \lambda + 2\mu, -\mu + 1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

Pregunta 4 Determina cómo se intersectan las rectas siguientes, usando únicamente el determinante.

$$\mathcal{L}_1 = \{ (3,-2) + t(1,-2) \mid t \in \mathbb{R} \}$$
$$\mathcal{L}_2 = \{ (1,3) + s(-2,4) \mid s \in \mathbb{R} \}$$
$$\mathcal{L}_3 = \{ (-1,6) + r(3,-6) \mid r \in \mathbb{R} \}$$

Dibujalas para entender qué está pasando



calculemos el determinante de los vectores dirección de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$

$$\det((1,-2),(-2,4)) = (1,-2)\cdot(-4,-2)$$
$$= -4 + 4 = 0$$

como $\det((1,-2),(-2,4)) = 0$
$\Rightarrow \mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas

Veamos si $(3,-2) \in \mathcal{L}_2$

esto pasa si $(3,-2) = (-2s+1, 4s+3)$ para $s \in \mathbb{R}$

tenemos el siguiente sistema

$3 = -2s + 1 \Leftrightarrow 2 = -2s \Leftrightarrow s = -1$

$-2 = 4s + 3 \Leftrightarrow 4s = -5 \Leftrightarrow s = -\frac{5}{4}$

como el sistema es inconsistente

$\Rightarrow (3,-2) \notin \mathcal{L}_2 \Rightarrow \mathcal{L}_2 \neq \mathcal{L}_1 \Rightarrow \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$

calculamos el determinante para los vectores dirección de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_3$

$\det((1,-2),(3,-6)) = (1,-2)\cdot(6,3) = 6-6=0$

veamos si $(3,-2) \in \mathcal{L}_3$; esto sucede si $(3,-2)=(3r-1, -6r+6)$

Resolvamos el sistema

$3 = 3r-1 \iff 4 = 3r \iff r = \frac{4}{3}$

$-2 = -6r+6 \iff -8 = -6r \iff r = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow (3,-2) \in \mathcal{L}_3 \therefore \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_3$

como $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_3$ y $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$

$\Rightarrow \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_3 = \emptyset$

Pregunta 5 Resuelve los siguientes incisos

a) Da una descripción paramétrica de la recta dada por la ecuación: $2x - y = 2 = \mathcal{L}$

Tomemos 2 puntos dados por la ecuación $2x-y=2$

tomando $x=0$, $-y=2 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow (0,-2) \in \mathcal{L}$

tomando $y=0$, $2x=2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0) \in \mathcal{L}$

usemos a $(0,-2)$ como punto base y $((1,0)-(0,-2))$ como vector director.
$= (1,2)$

$\Rightarrow \mathcal{L} = \{(0,-2)+t(1,2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{L} = \{(t, 2t-2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

b) Encuentra una ecuación normal para la recta que pasa por $(2,0)$ y $(1,1)$.

Encontremos primero la forma paramétrica

$\mathcal{L} = \{(2,0) + t((1,1)-(2,0)) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(2,0)+t(-1,1) \mid t\in\mathbb{R}\}$

Buscamos ecuación de la forma $d\cdot x = d\cdot p$, donde d es perpendicular al vector director de la recta. $d = (-1,1)^{\perp} = (-1,-1)$

$\Rightarrow (-1,-1)\cdot(x,y) = (-1,-1)\cdot(2,0)$

$\Rightarrow -x-y=-2$

$\Rightarrow \boxed{x+y=2}$ es una ecuación normal de $\mathcal{L}$