Geometría Analítica I

Reposición del primer parcial

Grupo: 4072

Profesor: Ramón Reyes Carrión

1.- Dados dos vectores $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$ linealmente independientes, el paralelogramo que definen tiene como vértices los puntos $O, \bar{u}, \bar{v}, \bar{v}+\bar{u}$.
Demuestra que sus diagonales se intersectan en su punto medio.

Demostración:

Sea $\mathcal{L}_{uv} := [\lambda \bar{u} + \alpha v, \ \lambda + \alpha = 1]$ | Sea $\mathcal{L}_{O(u+v)} := [tO + \mu(\bar{u}+\bar{v}), \ t+\mu = 1]$

El punto medio de $\mathcal{L}_{uv}$ es $\frac{1}{2}\bar{u} + \frac{1}{2}\bar{v}$ | El punto medio de $\mathcal{L}_{O(u+v)}$ es $\frac{1}{2}\bar{O} + \frac{1}{2}(\bar{u}+\bar{v})$ =

Notemos que $\frac{1}{2}O + \frac{1}{2}(\bar{u}+\bar{v}) = O + \frac{1}{2}\bar{u} + \frac{1}{2}\bar{v} = \frac{1}{2}\bar{u} + \frac{1}{2}\bar{v}$

Por lo tanto $\mathcal{L}_{uv}$ y $\mathcal{L}_{O(u+v)}$ se intersectan Q.E.D

2.- Demuestra que tres puntos a, b, c son no colineales si, y sólo si, los vectores $\bar{u} = (\bar{b} - \bar{a})$ y $\bar{v} = (\bar{c} - \bar{a})$ son linealmente independientes

$\Rightarrow$) Si $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ son colineales, entonces $\bar{c} \in \mathcal{L}_{a,b}$

Por lo que $\bar{c} = \bar{a} + \lambda(\bar{b} - \bar{a}) \Rightarrow \bar{c} - \bar{a} = \lambda(\bar{b} - \bar{a}) \Rightarrow \bar{c} - \bar{a} - \lambda(\bar{b} - \bar{a})$

$\Rightarrow 1 \cdot (\bar{c} - \bar{a}) + (-\lambda)(\bar{b} - \bar{a}) = 0$

$\Rightarrow 1 \cdot \bar{v} + (-\lambda)\bar{u} = 0$

$\bar{u}$ y $\bar{v}$ no son linealmente independientes $\alpha \neq \lambda \neq 0$

$\alpha \bar{u} + \lambda \bar{v} = 0$,

$\Leftarrow$) Supongamos que $\bar{u} = \bar{b} - \bar{a}$ y $\bar{v} = (\bar{c} - \bar{a})$ no son linealmente independientes

Entonces $\exists \ \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \bar{u} + \lambda \bar{v} = 0$ y $\alpha \neq 0$ o $\lambda \neq 0$

Si $\lambda \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda}(\lambda \bar{v} = -\alpha \bar{u}) \Rightarrow \bar{v} = -\frac{\alpha}{\lambda}\bar{u}$

Como $\bar{u} = \bar{b} - \bar{a}$ y $\bar{v} = \bar{c} - \bar{a} \Rightarrow \bar{c} - \bar{a} = -\frac{\alpha}{\lambda}(\bar{b} - \bar{a}) \Rightarrow \bar{c} = \bar{a} - \frac{\alpha}{\lambda}(\bar{b} - \bar{a})$

$\bar{c} = \bar{a} + \eta(\bar{b} - \bar{a})$

Entonces $\bar{c}$ es un punto que está sobre la recta que determina $\bar{b}$ y $\bar{c}$. Por tanto $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ son colineales

Si $\alpha \neq 0$, entonces $\lambda \bar{v} + \alpha \bar{u} = 0 \Rightarrow \alpha \bar{u} = -\lambda \bar{v} \Rightarrow \bar{u} = -\frac{\lambda}{\alpha}\bar{v}$

$\bar{b} - \bar{a} = \frac{(-\lambda)}{\alpha}(\bar{c} - \bar{a}) \Rightarrow \bar{b} = \bar{a} + \frac{(-\lambda)}{\alpha}(\bar{b} - \bar{a}) \ \therefore \ \bar{b} \in \mathcal{L}_{a,b}$

3: Da una expresión paramétrica para el plano que pasa por los siguientes puntos
$\bar{a}=(2,0,1)$, $\bar{b}=(0,1,1)$ y $\bar{c}=(-1,2,0)$

Definiendo $\bar{u}=\bar{b}-\bar{a} \Rightarrow \bar{u}=\langle 0,1,1\rangle - \langle 2,0,1\rangle = \langle -2,1,0\rangle$
y $\bar{v}=\bar{c}-\bar{a} \Rightarrow \bar{v}=\langle -1,2,0\rangle - \langle 2,0,1\rangle = \langle -3,2,-1\rangle$

Entonces $\pi := [\bar{a}+t\bar{u}+s\bar{v} : t,s \in \mathbb{R}]$

$$\pi = [\langle 2,0,1\rangle + t\langle -2,1,0\rangle + s\langle -3,2,-1\rangle : t,s \in \mathbb{R}]$$

$$\pi = [\langle 2,0,1\rangle + \langle -2t,t,0\rangle + \langle -3s,2s,-s\rangle : t,s \in \mathbb{R}]$$

$$\pi = [\langle 2-2t-3s,\ t+2s,\ 1-s\rangle : t,s \in \mathbb{R}]$$

4: Determine como se intersectan las rectas siguientes.
$\mathcal{L}_1 := [\langle 3,-2\rangle + t\langle 1,-2\rangle : t \in \mathbb{R}]$, $\mathcal{L}_2 := [\langle 1,3\rangle + s\langle -2,4\rangle : s \in \mathbb{R}]$, $\mathcal{L}_3 := [\langle -1,6\rangle + r\langle 3,-6\rangle : r \in \mathbb{R}]$

Tomando el vector de la primera ecuación de la recta y haciendo producto interior con el vector dirección de la segunda ecuación

Para $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ $\langle 1,-2\rangle \langle -2,4\rangle^{\perp} = \langle 1,-2\rangle \langle -4,-2\rangle$ Det 0
$\Rightarrow \langle 1,-2\rangle\langle -4,-2\rangle = (-4)(1)+(-2)(-2) = -4+4 = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$ o $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$

Para $\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_3$ $\langle -2,4\rangle\langle 3,-6\rangle^{\perp} = \langle -2,4\rangle\langle 6,3\rangle = (6)(-2)+(4)(3) = -12+12 = 0$
Como Det es 0, entonces $\mathcal{L}_2 \parallel \mathcal{L}_3$ o $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3$

Para $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3$ $\langle 1,-2\rangle\langle 3,-6\rangle^{\perp} = \langle 1,-2\rangle\langle 6,3\rangle = (6)(1)+(-2)(3) = 6-6 = 0$
Como Det es 0, entonces $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_3$ o $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_3$

5.- Resuelva los siguientes incisos

a) Da una descripción paramétrica de la recta dada por la ecuación $2x-y=2$

b) Encuentra una ecuación normal para la recta que pasa por $(2,0)$ y $(1,1)$

Para a). La ecuación normal es de la forma $\bar{u}\cdot\bar{v}=c$

Sea $\bar{u}=(2,-1)$ y $\bar{v}=(x,y)$, con $c=2 \Rightarrow (2,-1)(x,y)=2 \Rightarrow \bar{u}\cdot\bar{v}=2$

Para su ecuación parametrizada. tomamos $x=1 \Rightarrow 2-y=2 \Rightarrow -y=0, y=0$

$x=2 \Rightarrow 4-y=2 \Rightarrow -y=-2, y=2$

Entonces $\mathcal{L}:=[\alpha(2,2)+\lambda(1,0):\alpha,\lambda\in\mathbb{R}]$ forma parametrizada

Para b) Sea $\bar{u}=(2,0)$ y $\bar{v}=(1,1)$

$\bar{u}\bar{v}=(2,0)(1,1)=(2\cdot1)+(0)\cdot1)=2 \Rightarrow \bar{u}\cdot\bar{v}=2$ ecuación normal