Exámen 2

Geometría Analítica

21 de Enero de 2021

Integrantes del Equipo.

- Alanis Avila Eduardo Enrique
- Pantoja Reyes Arturo
- Aragón Aparicio Irving Raul
- Fuentes Olvera Victor Manuel
- Romero González Luis Angel
- Vera Ramos Tonatiuh

Profesor:

Ramón Reyes Carrión

1)

$\cdot\ \vec{r} = (3-3k, 5k)$ para $k=1$ y $k=2$

$P_1 = (3-3, 5) = (0,5)$, $P_2 = (-3, 10)$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos 90 & -\operatorname{sen} 90 \\ \operatorname{sen} 90 & \cos 90 \end{pmatrix}$ ← rotación por $\pi/2$

$A_{P_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_{P_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} \cos 0 & \operatorname{sen} 0 \\ \operatorname{sen} 0 & -\cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ← reflexión por eje x

$\Rightarrow B_{P_1'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B_{P_2'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix}$

y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ← reflexion por eje y

$\Rightarrow C_{P_1''} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_{P_2''} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\therefore$ P_1 se trasformo en $(5,0)$ y P_2 en $(10,3)$ despues de las transformaciones

$\Rightarrow \vec{r}' = (5,0) + t((10,3) - (5,0))$

$= (5,0) + t(5,3) = (5+5t, 3t)$

$\therefore$ La ecuación es: $\vec{r}' = (5+5t, 3t)$

(2) Llamemos C_1 y C_2 a las intersecciones de P_c con la circunferencia, sabemos que tales puntos tienen como rectas polares a.

$P_{C_1}: (C_1 - p)\cdot c = r^2 + p\cdot c - p$

$P_{C_2}: (C_2 - p)\cdot c = r^2 + p\cdot c - p$

Lo que se pretende ver es que la recta que une a p con c es bisectriz de P_{C_1} y P_{C_2}.

Por ello parametrizaremos

$L: c + t(p-c)$

Si $q \in L_q = c + t_0(p-c)$ es algún elemento

$\Rightarrow q - c = t_0(p-c)$

$\Rightarrow$ P.d. $d(q, P_{C_1}) = d(q, P_{C_2})$

Como $c \in P_{C_1} \Rightarrow P_{C_1}: (C_1 - p)\cdot x = (C_1 - p)\cdot c$

$$d(q, P_{C_1}) = \frac{|(C_1-p)\cdot c - (C_1-p)\cdot q|}{|C_1 - p|}$$

Factorizamos:

$$d(q, P_{C_1}) = \frac{|(C_1-p)\cdot -(c-q)|}{|C_1-p|}$$

Como z ∈ $L = c + t(p-c)$, sustituimos:

$$= \frac{|(C_1-p)\cdot(-t_0(p-c))|}{|C_1-p|}$$

$$= \frac{|-t_0(C_1-p)\cdot(p-c)|}{|C_1-p|}$$

Como sabemos $C_1 - p$ es igual a r, por lo que sustituimos y tomamos un menos por mas

$$= \frac{|t_0(C_1-p)\cdot(c-p)|}{r}$$

$$= \frac{|t_0||(C_1-p)\cdot(c-p)|}{r}$$

$$= \frac{|t_0|\cdot r^2}{r} = |t_0| r$$

$\Leftarrow$) $$d(q, P_{c_2}) = \frac{|(C_2-p)\cdot c-(C_2-p)\cdot q|}{|C_2-p|}$$

Factorizamos

$$d(q, P_{c_2}) = \frac{|(C_2-p)\cdot(c-q)|}{|C_2-p|}$$

Como $z \in L = c + t(p-c)$, sustituimos:

$$= \frac{|(C_2-p)\cdot(-t_0(p-c)|}{|C_2-p|}$$

$$= \frac{|-t_0(C_2-p)\cdot(p-c)|}{|C_2-p|}$$

Como sabemos C_2-p es igual a r, por lo que sustituimos y tomamos un menos por más:

$$= \frac{|t_0(C_2-p)\cdot(c-p)|}{r}$$

$$= \frac{|t_0|\,|(C_2-p)\cdot(c-p)|}{r}$$

$$= \frac{|t_0|\cdot r^2}{r} = |t_0|\, r$$

Como $|t_0| r = |t_0| r$ se puede ver la igualdad, por lo que

$$d(q, P_{c_1}) = d(q, P_{c_2})$$

L está contenida en la bisectriz de P_{c_1} y P_{c_2} ya que la bisectriz tiene puntos en común.

Como $L \in B$ (que es la bisectriz) y esta última que es una recta, tenemos que:

$$B = L$$

Obtenemos las distancias de P a C:

Como $C_1-p \perp c-C_1$ tenemos:

$$\|C_1-p+c-C_1\|^2 = \|C_1-p\|^2 + \|c-C_2\|^2$$

Eliminando términos:

$$\|c-p\|^2 = \|C_1-p\|^2 + \|c-C_1\|^2$$

Como sabemos $C_1 - p$ es igual a r, por lo que sustituimos:

$$\|c-p\|^2 = \|r\|^2 + \|c-C_1\|^2$$

Por otro lado, como $C_2 - p \perp c - C_1$, tenemos:

$$\|C_2 - p + c - C_2\|^2 = \|C_2 - p\|^2 + \|c - C_2\|^2$$

Eliminando términos:

$$\|c-p\|^2 = \|C_2-p\|^2 + \|c - C_2\|^2$$

Como sabemos $C_2 - p$ es igual a r, por lo que sustituimos:

$$\|c-p\|^2 = \|r\|^2 + \|c-C_2\|^2$$

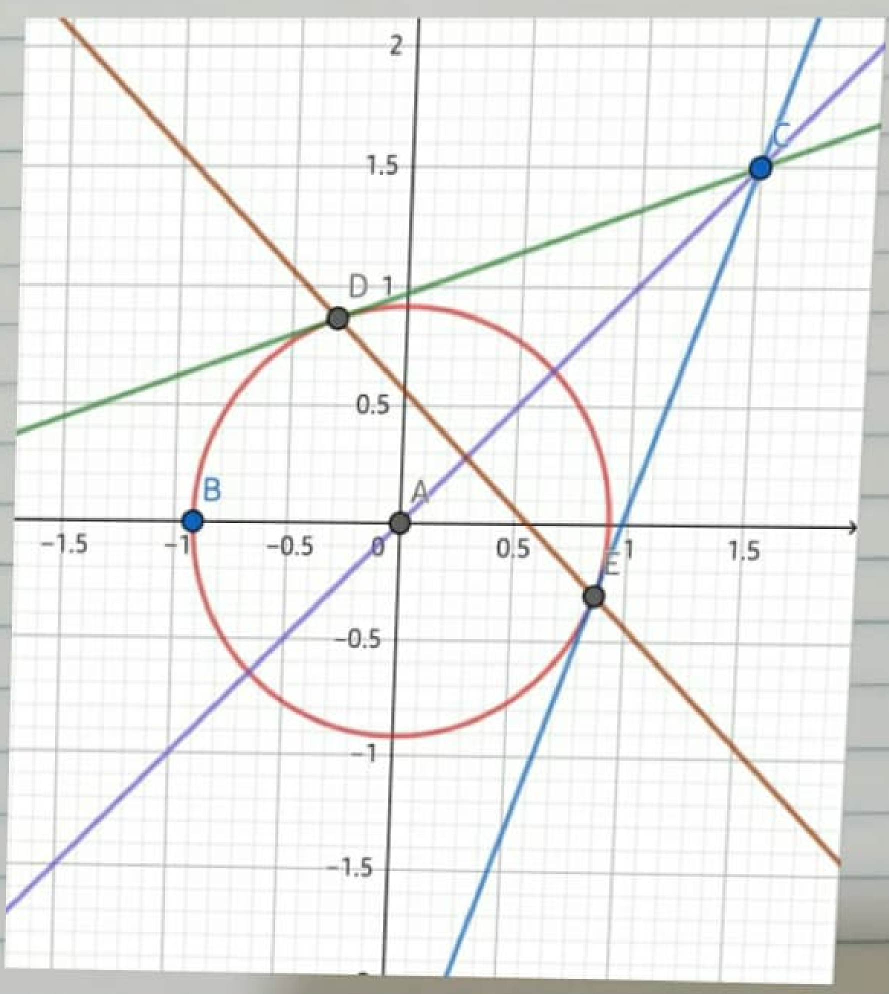
Por transitividad de la igualdad:

$$r^2 + \|c-C_1\|^2 = r^2 + \|c-C_2\|$$

Eliminando términos.

$$\|c-C_1\|^2 = \|c-C_2\|$$

$\therefore$ las distancias de P a C son iguales.



3) Sol:

Se quiere encontrar una ecuación para el conjunto de puntos G que cumple que:

$$d(x,a) + d(x,b) = 6\sqrt{3} \quad \text{con} \quad a = (0,3) \quad y \quad b = (0,-3)$$

que es una elipse centrada en el origen con $2a = 6\sqrt{3}$

$\Rightarrow a = 3\sqrt{3}$, así para llegar a la expresion de la forma $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, para esto se tiene que encontrar $b \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$, donde $2c$ es la distancia entre los dos focos de la elipse

$$\Rightarrow \quad 2c = d(a,b) = \|(0,3) - (0,-3)\| = \|(0,6)\| = \sqrt{0^2 + 6^2} = 6$$

$$\Rightarrow 2c = 6 \Leftrightarrow \underline{c = 3}$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - (c)^2} = \sqrt{27 - 9} = \sqrt{18}$$

$\therefore \quad b^2 = 18 \quad y \quad a^2 = 27$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{27} = 1}$$

Demuestra que la ecuación $|d(X,P)-d(X,Q)|=2a$ Define ->

- La mediatriz de P y Q para $a=0$

- Buscamos los puntos $X\in\mathbb{R}$ tales que $|d(X,P)-d(X,Q)|=0$
Sacando el valor absoluto tenemos que $d(X,P)-d(X,Q)=0$
Es decir la mediatriz es

$$d(X,P)=d(X,Q)$$

∎

- Los Rayos Complementarios del segmento $\overline{PQ}$ para $a=c$

- Recordando un Rayo Complementario es aquel que a un segmento lo convierte en Recta.

- Tomamos cualquier valor para c que satisfaga lo pedido. En este caso Tomamos $c=\frac{1}{2}d(P,Q)$. Buscamos los puntos que cumplen $|d(X,P)-d(X,Q)|=2c=d(P,Q)$

Esto equivale:

$$d(X,P)-d(X,Q)=d(P,Q) \Rightarrow d(X,P)=d(X,Q)+d(P,Q)$$

Nos quedaría algo de la manera -> $d(X,Q)+d(P,Q) \Leftrightarrow Q\in\overline{PX}$

$$d(X,P)-d(X,Q)=-d(P,Q) \Rightarrow d(X,P)+d(P,Q)+d(X,Q)$$

Que sería igual a $d(X,P)+d(P,Q) \Leftrightarrow P\in\overline{XQ}$.

∎

- El conjunto Vacío para $a>c$

- Por el valor que le asignamos a c, supongamos que $a>c=\frac{1}{2}d(P,Q) \Rightarrow 2a>d(P,Q)$

- Buscamos los puntos que cumplen: $=|d(X,P)-d(X,Q)|$ vale $=2a>d(P,Q)$

Lo hacemos por casos ->

Caso 1 ->

$$d(X,P)-d(X,Q)>2(P,Q)$$
$$\Rightarrow d(P,Q)+d(X,Q)<d(X,P)$$
$$\Rightarrow d(P,Q)+d(X,Q)<d(X,P)$$
$$\Rightarrow d(X,P)\leq d(P,Q)+d(X,Q)$$!

No es Posible

Caso 2 ->

$$-d(X,P)-d(X,Q)>(P,Q)$$
$$\Rightarrow d(X,Q)-d(X,P)>d(P,Q)$$
$$\Rightarrow d(X,Q)>d(X,P)+d(P,Q)$$
$$\Rightarrow d(X,P)+d(P,Q)\geq d(X,Q)$$!

No es Posible

∴ No es posible para ningún caso ya que no hay ningún X que satisfaga.

$$\rightarrow \{X\in\mathbb{R}^2 \mid |d(X,P)-d(X,Q)|-a>d(P,Q)\}$$ es vacío.

5)

$f(2)=5$ y $f(5)=2$

la transformacion afin esta definida por

$f(x)=ax+b$

$\Rightarrow f(2)=a(2)+b$ y $f(5)=a(5)+b$

$\Rightarrow -1(2a+b=5) = -2a-b=-5$

$$\begin{array}{r} 5a+b=2 \\ + \; -2a-b=-5 \\ \hline 3a=-3 \\ a=-1 \end{array}$$

$a=-1 \Rightarrow 2(-1)+b=5$

$-2+b=5$

$b=7$

$\therefore$ la combinacion afin es $f(x)=-x+7$

$f(1)=-2$ y $f(2)=2$

$\Rightarrow f(1)=a(1)+b$ y $f(2)=a(2)+b$

$\Rightarrow a+b=-2$ y $2a+b=2$

$-1(a+b=-2) = -a-b=2$

$$\begin{array}{r} 2a+b=2 \\ + \; -a-b=2 \\ \hline a=4 \end{array}$$

$a=4 \Rightarrow 4+b=-2$

$b=-6$

$\therefore$ la combinacion afin es $f(x)=4a-6$

) Demuestra usando la fórmula, que la inversa de cualquier reflexión en $\mathbb{R}^2$ es ella misma.

- Como hemos visto y recordando sabemos que la reflexión de $\mathbb{R}^2$ a lo largo de $\lambda: v\cdot x = c$ con ($|v|=1$) se define como ->

$$\rho_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\rho_\lambda(x) = x + 2(c - v\cdot x)v$$

Por otro lado sabemos que al componer es inversa de una función seguida de la misma resulta en la función identidad, en otras palabras, para demostrar que la inversa de cualquier reflexión en $\mathbb{R}^2$ sea ella misma basta con demostrar -> desarrollando la composición tenemos $\rho \circ \rho^{-1} = Id\,\mathbb{R}^2$, siendo así, considerando a cualquier $x \in \mathbb{R}^2$, ~~dada~~

$$\rho(\rho^{-1}(x)) = \rho(x + 2(c - v\cdot x)v)$$
$$= x + 2(c - v\cdot x)v = (x + 2(c - v\cdot x)v) + 2(c - v\cdot(x + 2(c - v\cdot x)v))v$$
$$= (x + 2cv - 2v^2x) + 2(c - v\cdot(x + 2cv - 2v^2x))v$$
$$= x + 2cv - 2v^2x + 2(c - vx - 2cv^2 - 2v^3x)v$$
$$= x + 2cv - 2v^2x + 2cv - 2v^2x - 4cv^3 + 4v^4x \quad \text{-> sabemos que } |v| = 1 \,:\,$$

$$= x + 2c(1) - 2(1)^2x + 2c(1) - 2(1)^2x - 4c(1)^3 + 4(1)^4x$$
$$= x + \cancel{2c} - \cancel{2x} + \cancel{2c} - \cancel{2x} - \cancel{4c} + \cancel{4x} = \underline{x}\rfloor$$

Como $x = Id\,\mathbb{R}^2$ se ha demostrado que la inversa de cualquier reflexión en $\mathbb{R}^2$ es ella misma. ∎