Versión preliminar de las notas del curso

Álgebra Lineal I

Impartido por el Dr. Ramón Reyes Carrión

(Grupo 4145 - Semestre 2024-1)

Realizado por: Emmanuel I. González Celio

1. Clase 01

Seré un poco más conciso en esta primer sección porque en un archivo previo ya hemos motivado la definición de espacio vectorial, asimismo fueron introducidos los conceptos de *grupo* y *campo*. Ahondaremos más en lo que respecta a ejemplos y definiciones relacionadas a estos.

1.1. Primeras definiciones

En la siguiente subsección ejemplos de objetos que satisfacen las siguientes definiciones. Por lo pronto, comenzamos enunciándolas.

Definición 1. Un ***grupo*** es una terna ordenada $(G, *, e)$ que consta de un conjunto no vacío G, una operación $*: G \times G \to G$ y un elemento distinguido $e \in G$ que satisfacen las siguientes propiedades

(A) Asociatividad: Para cualesquiera $a, b, c \in G$, $a * (b * c) = (a * b) * c$.

(N) Neutro: Para cualquier $g \in G$, $g * e = e * g = g$.

(I) Existencia de inversos: Para cada $g \in G$, existe $g' \in G$ tal que $g * g' = g' * g = e$.

Si además la operación $*$ satisface

(C) Conmutatividad: Para cualesquiera $a, b \in G$, $a * b = b * a$.

decimos que el grupo es ***abeliano*** o *conmutativo*.

La operación de un grupo abeliano suele denotarse mediante el símbolo $+$ cuando se entiende que "es como" una suma usual, en lugar de $*$; o bien, mediante $\cdot$ cuando se comporta como un producto. Más adelante este tipo de convención se irá aclarando.

Definición 2. Un ***campo*** es una quinteta ordenada $(\mathbb{F}, +, \times, 0, 1)$ que consta de un conjunto $\mathbb{F}$, dos operaciones $+: \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, $\times: \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ y elementos distinguidos $0, 1 \in \mathbb{F}$, tales que

- $0 \neq 1$.
- $(\mathbb{F}, +, 0)$ es un grupo abeliano.
- $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \times, 1)$ es un grupo abeliano. En este caso, suele denotarse $\mathbb{F}^\times := \mathbb{F} \setminus \{0\}$.
- $\times$ se "distribuye" sobre $+$: Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{F}$, $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

Gracias a estos dos conceptos, podemos establecer qué es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$.

Definición 3. Sea $\mathbb{F}$ un campo. Un ***espacio vectorial sobre*** $\mathbb{F}$ es un conjunto V equipado con dos operaciones $+: V \times V \to V$ y $\cdot: \mathbb{F} \times V \to V$ tales que

- $(V, +)$ es un grupo abeliano con elemento neutro $\mathbf{0}$.
- La operación $\cdot$ satisface, para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, y $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$
  (A) Asociatividad: $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{v}) = (\alpha \times \beta) \cdot \mathbf{v}$.
  (Id) Identidad: $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$
  (Di) Distributividad izquierda: $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{v}$.

(Dd) Distributividad derecha: $\alpha \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha \cdot \mathbf{v} + \alpha \cdot \mathbf{w}$.

Los elementos $\mathbb{F}$ son llamados ***escalares*** y los de V son llamados ***vectores***.

Es de costumbre omitir el punto $\cdot$ en $\alpha \cdot \mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}$.

Definición 4. Sean $\mathbb{F}$ un campo y V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Dados escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ y vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$, la expresión

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i := \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n,$$

que es un vector en V, es llamada ***combinación lineal*** (y está únicamente determinada por $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$).

También se puede denotar mediante una suerte de producto matricial: $\begin{bmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n\end{bmatrix}$

En este caso, la matriz resultante $[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i]$ tiene como entrada un vector.

1.2. Ejemplos de Campos

1. Los de "toda la vida", $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ con las operaciones usuales.
2. Un poquito similar al inciso anterior,

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$$

es un subcampo de $\mathbb{R}$. Es decir, consideramos a $\mathbb{K}$ con las mismas operaciones que tenemos en $\mathbb{R}$.

3. Siguiendo la idea de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$, podemos definir $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(i) := \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q} \ \wedge \ i^2 = -1\} \subseteq \mathbb{C}$, que resulta ser un subcampo de $\mathbb{C}$ que contiene a $\mathbb{Q}$, no obstante, no queda contenido en $\mathbb{R}$.

Aprovechando que acabamos de mencionar la palabra *subcampo*, vamos a definirla de manera precisa

Definición 5. Sea $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1)$ un campo. Diremos que $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$ es un ***subcampo*** de $\mathbb{F}$ si $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{K}$ y las operaciones

$$+\big|_{\mathbb{K}\times\mathbb{K}}, \cdot\big|_{\mathbb{K}\times\mathbb{K}} : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{F}$$

hacen que la quinteta ordenada $\left(\mathbb{K}, +\big|_{\mathbb{K}\times\mathbb{K}}, \cdot\big|_{\mathbb{K}\times\mathbb{K}}, 0, 1\right)$ sea un campo.

En lo que resta de la subsección, hablaremos un poco de los anillos $\mathbb{Z}_n$ (con $n \in \mathbb{N}$). Para un exposición mucho más detallada consulte el libro **Álgebra Superior: Curso Completo** de ***Carmen Gómez Laveaga***. Recordemos que

- $\mathbb{Z}$ es un anillo conmutativo con unidad. Esto es: tiene dos operaciones, $+, \cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, tales que
  1. $(\mathbb{Z}, +, 0)$ es grupo abeliano; y
  2. $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ no es un grupo, no obstante la operación $\cdot$ es asociativa, tiene neutro y es conmutativa. Una estructura con estas propiedades es llamada *monoide conmutativo*.
- Si bien la operación $\cdot$ no tiene inversos siempre, sí nos da una noción de *divisibilidad*: Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, diremos que ***a* divide a *b***, o que *b es divisible por a*, si existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot q$. Si a divide a b, lo denotamos como $a \mid b$; si no lo divide, entonces usamos $a \nmid b$.
- A partir de la definición de divisibilidad, podemos notar que 1 divide a cualquier otro entero. Se puede probar, como consecuencia del *Teorema Fundamental de la Aritmética*[1], que cada entero $k \neq 0$ tiene un

[1] Este asegura que todo entero positivo es producto de número primos y dicho producto es único salvo en el orden de la multiplicación.

número finito de divisores. Es así que introducimos la siguiente:
Definición: Si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces su **máximo común divisor** es

$$(a; b) := \max\{d \in \mathbb{Z} \mid d\big|a \ \wedge \ d\big|b\}.$$

Se puede demostrar que $(a; b)$ coincide con el número

$$\min\big\{k \in \mathbb{N} : \exists\lambda, \mu \in \mathbb{Z}\ \big(k = a\lambda + b\mu\big)\big\}$$

- Decimos que a y b son **primos relativos** si $(a; b) = 1$. Es fácil notar que si $m, p \in \mathbb{Z}$ son tales que $p \not| \ m$ y p es primo, entonces $(m; p) = 1$.
- Asimismo, en $\mathbb{Z}$ tenemos el ***Algoritmo de la División***, este establece que:
  Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, existen **únicos** $r, q \in \mathbb{Z}$ tales que: $a = bq + r$, donde $0 \leq r < |b|$.

  Notemos que $a \ \big| \ b$ *si, y sólo si,* $r = 0$ en $a = bq + r$.
- Sea $n \neq 0$ un entero. En $\mathbb{Z}$ se puede definir la siguiente **relación de equivalencia**[2]:

$$a \sim_n b \iff n \ \big| \ (b - a).$$

  La relación $\sim_n \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es llamada "equivalencia *módulo* n" y se denota por

$$a \equiv b \pmod{n} \qquad \text{(en este caso diríamos "}a\text{ es equivalente ó congruente a }b\text{ módulo }n\text{")}.$$

  Si $a \in \mathbb{Z}$, usaremos $[a]$ ó $\overline{a}$ para referirnos a su clase de equivalencia, $[a] = \overline{a} := \{k \in \mathbb{Z} : k \equiv a \pmod{n}\}$.
- De la definición es evidente que para $k \in \mathbb{Z}$, $[k] = [0]$ *si, y sólo si,* $n \ \big| \ k$.
- Al conjunto de *clases de equivalencia módulo* n se le denota por $\mathbb{Z}_n$ ó $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Resulta que en $\mathbb{Z}_n = \{[k] : k \in \mathbb{Z}\}$ se tienen dos operaciones, $\hat{+}, \hat{\cdot}: \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, definidas mediante las correspondencias

$$[a]\hat{+}[b] = [a + b] \quad \text{y} \quad [a] \ \hat{\cdot} \ [b] = [a \cdot b].$$

  Un hecho importante es que estas operaciones están bien definidas (esto significa que son funciones que no dependen de los representantes de las clases de equivalencia). Más aún, como resultado se obtiene que $(\mathbb{Z}_n, \hat{+}, [0])$ es un grupo abeliano, y $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ es asociativa, tiene neutro y es conmutativa.
- El siguiente teorema es importante porque nos dice bajo qué condiciones un $\mathbb{Z}_n$ tiene inversos multiplicativos.

  Teorema 1.1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathbb{Z}_n$ es un campo ***si, y sólo si,*** n es un número **primo**.

  La parte "fácil"de demostrar es la implicación de necesidad $(\Leftarrow)$ y es como sigue:

  Demostración: Si n es primo y $[k] \in \mathbb{Z}_n$ no es cero (*i.e.* $[k] \neq [0]$), entonces por observaciones previas $n \not| \ k$ y por ello, siendo n primo, $(k; n) = 1$. Así, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ tales que $k\lambda + n\mu = 1$. Al tomar clases de equivalencia, obtenemos

$$[1] = [k\lambda + n\mu] = [k\lambda] \ + \underbrace{[n\mu]}_{[n][\mu]=[0][\mu]} = [k\lambda] + [0] = [k][\lambda].$$

  Esto es exactamente la existencia del inverso multiplicativo de $[k] \in \mathbb{Z}_n \setminus \{[0]\}$. ■

Ahora veremos un ejemplo "exótico" de campo. Así como en $\mathbb{R}$ agregamos la unidad imaginaria i para dar solución a la ecuación $X^2 + 1 = 0$, podemos hacer algo parecido en $\mathbb{Z}_2$: La ecuación $X^2 + X + 1 = 0$ no tiene solución. En efecto, si tomamos $X = 0$ nos da $0^2 + 0 + 1 = 1 \neq 0$; al tomar $X = 1$, obtenemos

[2] Es decir, una relación reflexiva, simétrica y transitiva.

$\underbrace{1^2+1}_{0}+1 = 1 \neq 0$. Es por ello que con exceso de fe, podemos creer la existencia de un "número" ξ compatible con $\mathbb{Z}_2$ tal que $\xi^2+\xi+1=0$. Resulta que sí podemos darle total sentido a esta situación particular:

Sea $\mathbb{F}=\{0,1,\xi,\xi^2\}$. Se afirma que $\mathbb{F}$ es un campo con las siguientes operaciones:

$+$	0	1	ξ	ξ^2
0	0	1	ξ	ξ^2
1	1	0	ξ^2	ξ^2
ξ	ξ	ξ^2	0	1
ξ^2	ξ^2	ξ	1	0

$\cdot$	0	1	ξ	ξ^2
0	0	0	0	0
1	0	1	ξ	ξ^2
ξ	0	ξ	ξ^2	1
ξ^2	0	ξ^2	1	ξ

Todos los valores de estas tablas se calcularon con base en las propiedades que uno quiere que cumpla. Es decir, 0 es neutro aditivo, 1 es neutro multiplicativo, ξ cumple $\xi^2+\xi+1=0$ y no nos alejamos mucho de $\mathbb{Z}_2$ (por ejemplo, $1+1=0$). De estas dos últimas, imponemos las reglas

$$\begin{aligned}
\xi+\xi &= 0 && \text{(debe respetar la factorización } \xi+\xi=\xi\cdot(\underbrace{1+1}_{0})) \\
\xi^2+\xi^2 &= 0 && \text{(debe respetar la factorización } \xi^2+\xi^2=\xi^2\cdot(\underbrace{1+1}_{0})) \\
\xi^2+\xi &= 1 && \text{(debe respetar la ecuación } \xi^2+\xi=\xi^2+\xi+1+1=0+1=1) \\
\xi^2 &= \xi+1 && \text{(debe respetar la ecuación } \xi^2=\xi^2+\underbrace{\xi^2+\xi+1}_{0}=\underbrace{\xi^2+\xi^2}_{0}+\xi+1=\xi+1) \\
\xi^3 &= 1 && \text{(debe respetar la ecuación } \xi^3=\xi\xi^2=\xi(\xi+1)=\xi^2+\xi=1) \\
&\vdots \\
&\text{Etc.}
\end{aligned}$$

Terminamos la subsección introduciendo una definición que se ha mostrado latente en las líneas anteriores.

Definición 6. Sea $\mathbb{F}$ un campo. Se define la ***característica*** de $\mathbb{F}$ como el entero no negativo:

$$\mathrm{Car}(\mathbb{F}) = \begin{cases} \min\{n\in\mathbb{N} : \underbrace{1+\cdots+1}_{n \text{ veces}}=0\} & \text{si existe algún } n \text{ tal que } \underbrace{1+\cdots+1}_{n \text{ veces}}=0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De nuestros cursos de Cálculo I es bien sabido que, para todo $n\in\mathbb{N}_{\geq 1}$, $\underbrace{1+\cdots+1}_{n \text{ veces}} = n \neq 0$. Por ello, $\mathrm{Car}(\mathbb{R})=0$. Por otro lado, para $p\in\mathbb{N}$ primo, es claro que $\mathrm{Car}(\mathbb{Z}_p)=p$, ya que

$$\Big[\underbrace{1+\cdots+1}_{p \text{ veces}}\Big]=[p]=[0] \qquad \text{y, para } 1\leq k<p, \quad \Big[\underbrace{1+\cdots+1}_{k \text{ veces}}\Big]=[k]\neq[0].$$

Asimismo, $\mathrm{Car}(\{0,1,\xi,\xi^2\})=2$.

Se puede demostrar que *si un campo tiene característica mayor a* 0*, entonces la característica es un número primo*, y que *todo campo finito tiene característica positiva.*

1.3. Ejemplos de Espacios Vectoriales

Sea $\mathbb{F}$ un campo.

1. Si V es un conjunto con un único punto, digamos $V=\{\mathbf{0}\}$, entonces V es un espacio vectorial sobre cualquier campo. En este caso las operaciones son "triviales" porque no hay mucho con qué trabajar (nada más hay un vector).
2. $V=\mathbb{F}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$.

3. Si $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$ también es un campo con las mismas operaciones que $\mathbb{F}$, entonces $V_{\mathbb{K}} = \mathbb{F}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Casos particulares de este ejemplo son:
   - $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ cumplen que $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$.
   - $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ cumplen que $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
   - $\mathbb{F} = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ y $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ cumplen que $V_{\mathbb{F}} = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$.

   Más adelante demostraremos que las afirmaciones recíprocas no necesariamente son verdaderas. Además, hay que notar que en el penúltimo caso particular es distinto a considerar $V = \mathbb{C}$ visto como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ mismo.

4. Si $n \in \mathbb{N}$, el producto cartesiano $\mathbb{F}^n$ es un espacio vectorial, sobre $\mathbb{F}$, con las operaciones puntuales. Esto es,

$$+\colon \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F} \quad \text{dada por} \quad (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_n, \ldots, x_n + y_n),$$

   con neutro $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{F}^n$, y

$$\cdot\colon \mathbb{F} \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F} \quad \text{dada por} \quad \alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

   Se puede demostrar que $(\mathbb{F}^n, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$.

5. $V = \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, el cual fue tratado en las notas previas cuando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, pero en esencia son las mismas operaciones.

6. Sea $\mathcal{S} \neq \varnothing$ un conjunto. Consideremos la colección

$${}^{\mathcal{S}}\mathbb{F} := \{f\colon \mathcal{S} \to \mathbb{F} \mid f \text{ es función}\}.$$

   Más adelante demostraremos la siguiente

   <u>Afirmación:</u> ${}^{\mathcal{S}}\mathbb{F}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ con las operaciones definidas de la siguiente manera: Sean $f, g \in {}^{\mathcal{S}}\mathbb{F}$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Entonces

$$(f + g)(s) := f(s) +_{\mathbb{F}} g(s) \in \mathbb{F} \qquad \text{y} \qquad (\lambda f)(s) = \lambda \cdot_{\mathbb{F}} (f(s)) \in \mathbb{F}.$$

   Así, hemos obtenido que $(f + g), (\lambda f) \in {}^{\mathcal{S}}\mathbb{F}$ si $f, g \in {}^{\mathcal{S}}\mathbb{F}$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. A estas operaciones las llamamos ***puntuales***.

   En las notas anteriores, habríamos escrito $\mathfrak{F}(\mathcal{S}, \mathbb{F})$ en lugar de ${}^{\mathcal{S}}\mathbb{F}$, sin embargo esta última se parece más a como lo denota el profesor, y también resultará más conveniente.

7. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, la colección $\mathcal{C}[a, b]$ de funciones reales de variable real, continuas, definidas en $[a, b]$ con las operaciones del inciso previo forma un espacio vectorial. Aquí hay que recordar que la suma y el producto de funciones continuas resultan continuas. En clase discutiremos este ejemplo con mayor detalle.

8. *Por último* (porque apenas me acordé al escribir la Tarea I), *pero no menos importante*: Sean $\mathbb{F}$ un campo y $(V, +_V, \cdot_V), (W, +_W, \cdot_W)$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$. Entonces el producto cartesiano $V \times W$ es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial con las operaciones definidas a continuación:

$$+\colon (V \times W) \times (V \times W) \longrightarrow V \times W \quad \text{tal que} \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}', \mathbf{v}') = (\mathbf{v} +_V \mathbf{v}', \mathbf{w} +_W \mathbf{w}');$$

   y

$$\cdot\colon \mathbb{F} \times (V \times W) \longrightarrow V \times W \quad \text{tal que} \quad \lambda \cdot (\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\lambda \cdot_V \mathbf{v}, \lambda \cdot_W \mathbf{w}).$$

   <u>Nota:</u> Probar que $(V \times W, +, (\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_W))$ es un grupo abeliano es parte del Ejercicio 7 de la Tarea I.

2. Clase 02

2.1. Algunas propiedades que cumplen los espacios vectoriales y un teorema importante

Proposición 2.1. Sean $\mathbb{F}$ un campo y V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial. Si $\alpha \in \mathbb{F}$ y $\mathbf{v} \in V$, entonces

i) $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ii) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

iii) $(-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}$ iv) $\alpha \cdot \mathbf{v} = 0 \implies \alpha = 0$ ó $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Demostración: Básicamente lo demostramos en las notas N0. ■

Ahora sí enunciamos y demostramos la afirmación pendiente de la subsección previa.

Teorema 2.2. Sean $\mathbb{F}$ un campo y $\mathcal{S}$ un conjunto no vacío. Entonces $V = {}^{\mathcal{S}}\mathbb{F}$ ***es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial*** con las *operaciones puntuales*.

Demostración: Primero demostraremos que $\left({}^{\mathcal{S}}\mathbb{F}, +, \mathbf{0}\right)$ es un grupo abeliano. En efecto:

(A) Asociatividad: Dadas $f, g, h \in {}^{\mathcal{S}}\mathbb{F}$ y cualquier punto $s \in \mathcal{S}$, se tiene que

$$\begin{aligned} ((f+g)+h)(s) &= (f+g)(s) +_{\mathbb{F}} h(s) &&= (f(s) +_{\mathbb{F}} g(s)) +_{\mathbb{F}} h(s) \\ &= f(s) +_{\mathbb{F}} (g(s) +_{\mathbb{F}} h(s)) &&= (f+(g+h))(s). \end{aligned}$$

Esto es, $f + (g+h) = (f+g)+h$ (porque ambas son funciones con el mismo dominio, contradominio y misma regla de correspondencia).

(N) Neutro: La función $\mathbf{0} \colon s \mapsto 0$ es la candidata a neutro aditivo. Veamos que, de hecho, sí lo es. Dados cualesquiera $f \in {}^{\mathcal{S}}\mathbb{F}$ y $s \in \mathcal{S}$, entonces

$$(f + \mathbf{0})(s) = f(s) +_{\mathbb{F}} \mathbf{0}(s) = f(s) +_{\mathbb{F}} 0 = f(s).$$

Así, $(f + \mathbf{0}) = f$. Análogamente se demuestra que $(\mathbf{0} + f) = f$.

(I) Existencia de inversos: Dada $f \in {}^{\mathcal{S}}\mathbb{F}$, definimos $(-f) \colon \mathcal{S} \to \mathbb{F}$ mediante $(-f)(s) = -f(s)$. Entonces

$$\forall s \in \mathcal{S} : \quad (f + (-f))(s) = f(s) +_{\mathbb{F}} (-f)(s) = f(s) +_{\mathbb{F}} (-f(s)) = 0.$$

(C) Conmutatividad: Si $f, g \in {}^{\mathcal{S}}\mathbb{F}$, entonces

$$\forall s \in \mathcal{S} : \quad (f+g)(s) = f(s) +_{\mathbb{F}} g(s) = g(s) +_{\mathbb{F}} f(s) = (g+f)(s).$$

Por ello, $f + g = g + f$.

Ahora demostramos que la *multiplicación por escalar* $\cdot \colon \mathbb{F} \times {}^{\mathcal{S}}\mathbb{F} \to {}^{\mathcal{S}}\mathbb{F}$ satisface las propiedades correspondientes. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $f, g \in {}^{\mathcal{S}}\mathbb{F}$. Entonces

(A) Asociatividad:

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathcal{S} : \quad (\alpha \cdot (\beta \cdot f))(s) &= \alpha \cdot_{\mathbb{F}} (\beta \cdot f)(s) &&= \alpha \cdot_{\mathbb{F}} (\beta \cdot_{\mathbb{F}} f(s)) \\ &= \alpha \cdot_{\mathbb{F}} (\beta \cdot_{\mathbb{F}} f(s)) &&= (\alpha \cdot \beta) \cdot_{\mathbb{F}} f(s) \\ &= ((\alpha \cdot \beta) \cdot f)(s). \end{aligned}$$

(Id) Identidad: Es fácil demostrar que $1 \cdot f = f$.

(Di) Distributividad izquierda:

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathcal{S} : \quad ((\alpha + \beta) \cdot f)(s) &= (\alpha + \beta) \cdot_{\mathbb{F}} f(s) &&= \alpha \cdot_{\mathbb{F}} f(s) +_{\mathbb{F}} \beta \cdot_{\mathbb{F}} f(s) \\ &= (\alpha \cdot f)(s) +_{\mathbb{F}} (\beta \cdot f)(s) &&= ((\alpha \cdot f) + (\beta \cdot f))(s). \end{aligned}$$

(Dd) Distributividad derecha: Es similar a (Di). ■

La razón por la cual este teorema es importante es porque básicamente **“engloba” a todos los $\mathbb{F}$-espacios vectoriales**. Veamos cómo se come a $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2.2.1. Sea $\mathcal{S} = \{1, 2\}$ un conjunto con dos puntos (a los que estamos denotando por 1 y 2). Del inciso anterior tenemos que ${}^{\mathcal{S}}\mathbb{R} = {}^{\{1,2\}}\mathbb{R}$ es un espacio vectorial. Notemos que cada función $f \in {}^{\mathcal{S}}\mathbb{R}$, queda determinada por sus valores en $\{1, 2\}$, ya que una vez tomandos los valores $f(1)$ y $f(2)$, no hay otra que tenga esos mismos valores. Esto debería resultarnos familiar a $\mathbb{R}^2$, porque aquí los vectores quedan determinados por sus dos entradas. Por ello, podemos considerar

$$\Phi\colon {}^{\{1,2\}}\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad \text{definida por} \quad \Phi\begin{pmatrix} 1 & \overset{f}{\longmapsto} & f(1) \\ 2 & \overset{f}{\longmapsto} & f(2) \end{pmatrix} = (f(1), f(2)).$$

No es muy difícil ver que Φ es biyectiva. Más adelante veremos que incluso es un ***isomorfismo lineal***. Esto último se a la siguiente propiedad que cumple la función *biyectiva* Φ: Si $f, g \in {}^{\{1,2\}}\mathbb{F}$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, entonces $\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g)$ y $\Phi(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \Phi(f)$. Esto lo podemos describir como Φ **hace corresponder**, no sólo a los vectores sino incluso, **a las operaciones** entre sí.

Tarea moral: Hacer lo análogo para el espacio de funciones ${}^{\{1,\ldots,n\}}\mathbb{F}$.

Ejemplo 2.2.2. Explorando un poco más estos espacios vectoriales, tenemos que cuando $\mathcal{S} = \mathbb{R} = \mathbb{F}$, el espacio V es igual a ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} := \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es función}\}$, el espacio de *todas las funciones de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$. Posteriormente se verá que con cierto tipo de restricciones podemos obtener otros (sub)espacios como los de funciones continuas, funciones diferenciables (en un punto especifico o en todo su dominio), lineales o constantes, aunque puede haber más restricciones.

Ejemplo 2.2.3. Sean $\mathbb{F}$ un campo y $n \in \mathbb{N}$. Con ejemplos previos ya hemos adquirido algo de experiencia con $\mathbb{F}^n$, ahora veremos que esto es un caso particular más de nuestro *Ejemplo estelar*. Denotemos $\overline{\mathbf{n}} := \{1, \ldots, n\}$. Entonces ${}^{\overline{\mathbf{n}}}\mathbb{F}$ es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial al cual podemos identificar con $\mathbb{F}^n$ mediante la correspondencia biunívoca

$$(x_1, \ldots, x_n) = (f(1), \ldots, f(n)) \longleftrightarrow f\colon \overline{\mathbf{n}} \to \mathbb{F}.$$

Como conjuntos podemos pensarlos como lo mismo, incluso como los mismos espacios vectoriales pues pasa algo similar a la conclusión del **Ejemplo 3.2**.

Ejemplo 2.2.4. Recordemos que en las notas N0 definimos, de manera un tanto vaga, a las matrices como *arreglos rectangulares*. Aquí lo haremos bien. Sean $\mathbb{F}$ un campo, $m, n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{S} = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$. El espacio de matrices con coeficientes en $\mathbb{F}$ se define como

$$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F}) = \mathbb{F}^{m\times n} := {}^{\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}}\mathbb{F}.$$

Observe que en este caso, matemáticamente hablando, ya podemos decir de forma precisa qué es una matriz A de $m \times n$: Es una función

$$\begin{array}{rccc} A\colon & \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ & (i, j) & \longmapsto & A(i, j) = a_{ij} \end{array}$$

Veamos qué más podemos observar en ${}^{\mathcal{S}}\mathbb{F}$: Para cada $a \in \mathcal{S}$, podemos *asociar una función distinguida*, a saber

$$\delta_a\colon \mathcal{S} \to \mathbb{F} \quad \text{definida por} \quad \delta_a(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq a \\ 1 & \text{si } s = a \end{cases}$$

Observación 2.3. Supongamos que $\mathcal{S}$ es finito, digamos $\mathcal{S} = \{a_1, \ldots, a_n\}$, y sea $f \in {}^{\mathcal{S}}\mathbb{F}$. Entonces f se puede escribir como ***combinación lineal*** de los elementos en $\{\delta_a : a \in \mathcal{S}\} \subseteq {}^{\mathcal{S}}\mathbb{F}$. A saber, $f = \sum\limits_{a\in\mathcal{S}} f(a) \cdot \delta_a$.

Demostración: Sea $p \in \mathcal{S}$ un punto arbitrario. Al evaluar f en p obtenemos $f(p)$, por otro lado, al evaluar $\sum\limits_{a\in\mathcal{S}} f(a)\cdot\delta_a$ en p obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{a\in\mathcal{S}} f(a)\cdot\delta_a\right)(p) &= \sum_{a\in\mathcal{S}} f(a)\cdot\delta_a(p)\\ &= f(a_1)\cdot\underbrace{\delta_{a_1}(p)}_{0}+f(a_2)\cdot\underbrace{\delta_{a_2}(p)}_{0}+\cdots+f(p)\cdot\underbrace{\delta_p(p)}_{1}+\cdots+f(a_n)\cdot\underbrace{\delta_{a_n}(p)}_{0}\\ &= f(p)\cdot 1 = f(p).\end{aligned}$$

Esto significa que las funciones f y $\sum\limits_{a\in\mathcal{S}} f(a)\cdot\delta_a$ coinciden en todos los puntos p del dominio $\mathcal{S}$. Por ello, $f = \sum\limits_{a\in\mathcal{S}} f(a)\cdot\delta_a$. ■

Notemos que en el caso $\mathcal{S} = \{1,\ldots,n\}$, al tomar $j \in \{1,\ldots,n\}$, se tiene la correspondencia

$$\delta_j = (0,\ldots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ j\text{-ésima entrada}}}{1},0,\ldots,0) = \mathbf{e}_j.$$

Es decir, $\delta_j \in {}^{\{1,\ldots,n\}}\mathbb{F}$ se identifica con el j-ésimo vector canónico, $\mathbf{e}_j$, de $\mathbb{F}^n$ (así lo llamábamos en Geometría Analítica cuando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y $n = 2,3$).

3. Clase 03

3.1. Condiciones lineales y subespacios

Recordemos que en el **Ejemplo 3.2** hablamos sobre algunas restricciones sobre las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Ahora hablaremos de ello.

Definición 7. Sean $\mathbb{F}$ un campo y V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Una ***condición*** C sobre vectores es ***lineal*** si:

$$\text{(CA)}\quad C(\mathbf{v})\ \wedge\ C(\mathbf{w}) \implies C(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \qquad\qquad \text{(CE)}\quad \lambda\in\mathbb{F}\ \wedge\ C(\mathbf{v}) \implies C(\lambda\cdot\mathbf{v})$$

Como ejemplos de condiciones lineales tenemos

1. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, "ser continua" es una condición lineal.
2. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, "ser derivable" es una condición lineal.
3. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, "ser lineal[3]" es una condición lineal.

Definición 8. Sean $\mathbb{F}$ un campo y V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Un ***subespacio***[4] $\mathcal{H}$ **es un subconjunto no vacío $\mathcal{H} \subseteq V$, que cumple una condición lineal**. En símbolos:

$$\exists C \text{ condición lineal tal que}\quad \mathcal{H} = \{\mathbf{v}\in V : C(\mathbf{v})\}.$$

Usaremos la notación $\mathcal{H} \leq V$ para indicar que $\mathcal{H}$ es un subespacio de V.

Resulta que si $\mathcal{H}$ es un subespacio de V (con V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial), entonces también es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial.

[3]Después precisaremos y demostraremos esto. Por lo pronto, puede entenderlo como: $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es lineal si existe una constante $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que, para todo $x\in\mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x$.

[4]***Subespacio vectorial***. En esta ocasión indicamos que estamos tratando con la definición de "subespacio vectorial", pero lo usual será decir solamente *subespacio*, a secas.

Teorema 3.1. Sean $\mathbb{F}$ un campo y V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial. Si $\mathcal{H}$ es un subespacio de V, entonces las operaciones

$$+\big|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}\colon \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to V, \qquad \cdot\big|_{\mathbb{F}\times\mathcal{H}}\colon \mathbb{F}\times\mathcal{H}\to V$$

hacen que $\left(H, +\big|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}, \cdot\big|_{\mathbb{F}\times\mathcal{H}}\right)$ sea un $\mathbb{F}$-espacio vectorial.

Demostración: Como $\mathcal{H} \leq V$, entonces existe una condición lineal C tal que $\mathcal{H} = \{\mathbf{v} \in V : C(\mathbf{v})\}$. Asimismo, siendo $\mathcal{H} \neq \varnothing$, existe $\mathbf{v}_0 \in H$. Por ello, $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_0 \in H$ (recuerde que $\lambda \in \mathbb{F}$ y $C(\mathbf{v})$ implican $C(\lambda\mathbf{v})$). De aquí hemos obtenido que, por lo menos, el neutro aditivo $\mathbf{0}$ está en $\mathcal{H}$.

Ahora bien, lo único que resta probar es que, para cualesquiera $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, se tiene que $\mathbf{v}+\mathbf{w} \in H$ y $\lambda\mathbf{v} \in H$, pero es una consecuencia directa de la definición de condición lineal.

El hecho de que $\mathcal{H}$ cumpla las propiedades de $\mathbb{F}$-espacio vectorial se sigue de que las operaciones $+$ y $\cdot$ son cerradas[5] en $\mathcal{H}$ y que V es $\mathbb{F}$-espacio vectorial. ■

Ejemplo 3.1.1. Sean $\mathbb{F}$ un campo, $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Consideremos en $V = \mathbb{F}^n$ la condición lineal definida a continuación[6]

$$C((v_1, \ldots, v_n)): \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$$

Esto es, C determina los vectores $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}^n$ tales que al evaluar la función $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ en $\mathbf{v}$ el resultado da 0.

Describiéndolo de otra manera, de puede proceder así: Sean $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathbb{F}$ y $\mathbb{F}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{F}\}$ y $C(\mathbf{v}) = C((x_1, \ldots, x_n)) := \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0\right)$. Veamos que C es una condición lineal

(CA) Si $\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{w} = (y_1, \ldots, y_n)$ satisfacen C, entonces $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0$. Por ello,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0 + 0 = 0.$$

Es decir, $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ satisface la condición C.

(CE) Si $\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n)$ satisface C y $\lambda \in \mathbb{F}$, entonces $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$. Por ello,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\lambda x_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \lambda 0 = 0.$$

Es decir, $\lambda\mathbf{v}$ satisface la condición C.

En esta subsección hemos definido los subespacios vectoriales a través de *condiciones lineales*, este es un enfoque diferente al usual. Es por ello que, para dar un panorama un poco más amplio, enunciamos la definición usual.

Definición 9. Sean $\mathbb{F}$ un campo y V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial. Decimos que $W \subseteq V$ es un subespacio vectorial si:

1. $W \neq \varnothing$
2. Para cualesquiera $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$, se tiene $\mathbf{v}+\mathbf{w} \in W$.
3. Para cualesquiera $\mathbf{w} \in W$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, se tiene $\lambda\mathbf{w} \in W$.

Estas propiedades implican que las operaciones $+_W = +\big|_{W\times W}\colon W\times W \to V$ y $\cdot_W = \cdot\big|_{\mathbb{F}\times W}\colon \mathbb{F}\times W \to V$ hagan de $(W, +_W, \cdot_W)$ sea un $\mathbb{F}$-espacio vectorial.

[5] Ser *cerradas* quiere decir que $+(\mathcal{H}\times\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$ y $\cdot(\mathbb{F}\times\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$.

[6] $C(\mathbf{v})$ es la condición "al sustituir las entradas de $\mathbf{v}$ en $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ obtenemos 0".

Más aún, se puede demostrar de manera más o menos sencilla el siguiente

Teorema 3.2. Las dos definiciones de subespacio vectorial que hemos dado son equivalentes.

3.2. Un ejemplo importante de espacio vectorial

Ejemplo 3.2.1. Sea $\mathbb{F}$ un campo. Definimos el ***espacio de polinomios en una indeterminada con coeficientes en*** $\mathbb{F}$ como[7]

$$\mathbb{F}[X] := \left\{ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \;\middle|\; n \in \omega \;\wedge \left(\forall k \in \{0,1,\ldots,n\},\ \alpha_k \in \mathbb{F}\right) \right\}.$$

Lo importante de los polinomios son sus coeficientes, no verlos como posibles funciones, ya que $p = X^2 + X$, visto $p \in \mathbb{Z}_2[X]$, es un polinomio (en particular, un vector no nulo hecho y derecho); sin embargo, visto como función $p\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ se tiene que $p \equiv 0$ (p es la función idénticamente 0).

Observación 3.3. Estrictamente hablando, hay que definir en términos precisos los elementos de $\mathbb{F}[X]$. Decir simplemente "son sumas finitas de potencias de X" no es suficiente, es vago. Para empezar, ¿qué es una indeterminada X? ¿Por qué tiene potencias? ¿Por qué puedo escalarlas y sumarlas? Para solucionar el problema, consideremos el espacio de funciones ${}^{\omega}\mathbb{F}$ y centremos nuestra atención en el subconjunto

$$\mathcal{F} := \left\{ f\colon \omega \to \mathbb{F} \mid \#\left(f^{-1}(\mathbb{F}\setminus\{0\})\right) < \aleph_0 \right\}$$

Es decir, $\mathcal{F}$ es el subconjunto de funciones que **no son 0 solamente en algún subconjunto finito** (el cual bien podría ser vacío). Si para cada $n \in \omega$ denotamos $X^n = \delta_n$ (ver final de la Clase 02), entonces podemos identificar $\mathbb{F}[X]$ con $\mathcal{F}$. Con esto, por lo menos, $\mathbb{F}[X]$ es un subconjunto de un espacio vectorial. En la siguiente subsección veremos que, de hecho, es un subespacio de ${}^{\omega}\mathbb{F}$ (y por lo tanto, puede pensarse como un espacio vectorial independiente).

Esto ha sido una solución parcial. En lo respecta al término "indeterminada" lo dejaremos en que *solamente es un nombre* para una "variable desconocida"; la cuestión de las potencias, en este caso, resultará una mera convención de notación (puede verlos como superíndices en lugar de potencias). Cuando estudiemos funciones *bilineales*, si es que nos da tiempo, veremos que sí podremos pensarlos como potencias y todo funcionará como es esperado.

3.3. Subespacio generado por un conjunto

A partir de ahora $\mathbb{F}$ siempre denotará un campo y V a un $\mathbb{F}$-espacio vectorial.

Definición 10. Sea $\mathcal{S} \subseteq V$ no vacío. Definimos el ***generado por*** $\mathcal{S}$ como

$$\begin{aligned} CL(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{S} \rangle &:= \left\{ \mathbf{v} \in V \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N},\ \exists\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\} \subseteq \mathcal{S},\ \exists\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\} \subseteq \mathbb{F}\ \left(\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i\right) \right\} \\ &= \left\{ \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} \lambda_{\mathbf{s}} \mathbf{s} \in V \;\middle|\; \left[\forall \mathbf{s} \in \mathcal{S}\ \left(\lambda_{\mathbf{s}} \in \mathbb{F}\right)\right] \wedge \left[\exists C \subseteq \mathcal{S}\ \left(\#C < \aleph_0\right)\right] \wedge \left[\forall \mathbf{s} \in \mathcal{S}\setminus C\ \left(\lambda_{\mathbf{s}} = 0\right)\right] \right\} \qquad (\star) \end{aligned}$$

Es decir, $\langle S \rangle$ es el conjunto de combinaciones lineales de elementos de S. La segunda descripción, $(\star)$, de $\langle \mathcal{S} \rangle$ puede parecer más complicada, sin embargo en ocasiones es más conveniente de usar por la *forma general* que tiene.

Observación 3.4. Si $\mathcal{S} \subseteq V$ es no vacío, entonces $\mathcal{S} \subseteq \langle \mathcal{S} \rangle$. Como consecuencia inmediata, cuando $\mathcal{S} = V$, entonces $\langle V \rangle = V$.

Teorema 3.5. Si $\mathcal{S} \subseteq V$ es no vacío, entonces $\langle \mathcal{S} \rangle$ es un subespacio de V (y por ello un $\mathbb{F}$-espacio vectorial por sí mismo).

[7] ω se define como $\{0\} \cup \mathbb{N}$.

Demostración: Como deseamos probar que un subconjunto es un subespacio, debemos mostrar que es no vacío y requerimos una *condición lineal*. En este caso, la *condición* que define a $\langle \mathcal{S} \rangle$, que denotaremos por C, es la que nos ayudará. C está dada por

$$C(\mathbf{v}): \quad \exists n \in \mathbb{N},\ \exists\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subseteq \mathcal{S},\ \exists\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{F} \left(\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i \right).$$

Si demostramos que C es una condición lineal, y que $\langle \mathcal{S} \rangle \neq \varnothing$, entonces habremos terminado, porque $\langle \mathcal{S} \rangle = \{\mathbf{v} \in V : C(\mathbf{v})\}$.

$\neg\varnothing\rfloor$ Como $\mathcal{S} \neq \varnothing$, hay al menos un $\mathbf{s}_0 \in \mathcal{S}$. Así $\mathbf{0} = 0\mathbf{s}_0 \in \langle \mathcal{S} \rangle$ (tomamos $\lambda_1 = 0, \mathbf{v}_1 = \mathbf{s}_0$ y los demás $\lambda_i = 0$). Esto nos dice que $\langle \mathcal{S} \rangle$ es no vacío.

Alternativamente, $\mathcal{S}$ no vacío y $\mathcal{S} \subseteq \langle \mathcal{S} \rangle$ implican $\langle \mathcal{S} \rangle \neq \varnothing$.

CA$\rfloor$ Supongamos que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son elementos de $\langle \mathcal{S} \rangle$. Si escribimos $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{v}_i$ y $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \mathbf{w}_j$, tendríamos problemas al sumarlos porque los índices son distintos y, a priori, no se pueden "factorizar" elementos en común. Aquí, usamos la notación ($\star$):

$$\mathbf{v} = \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} \lambda_{\mathbf{s}} \mathbf{s},\ \mathbf{w} = \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} \mu_{\mathbf{s}} \mathbf{s} \implies \mathbf{v} + \mathbf{w} = \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} (\lambda_{\mathbf{s}} + \mu_{\mathbf{s}})\, \mathbf{s},$$

donde todos los $\lambda_{\mathbf{s}}, \mu_{\mathbf{s}}$ son 0 *excepto una cantidad finita*. Es por esto que la última combinación lineal está bien definida, porque solamente tiene una cantidad finita de sumandos. Así, hemos obtenido la implicación $C(\mathbf{v}) \wedge C(\mathbf{w}) \implies C(\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

CE$\rfloor$ Si $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{v}_i$ y $\alpha \in \mathbb{F}$, entonces $\alpha \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} (\alpha \lambda_i) \mathbf{v}_i$. Por ello, $\lambda \in \mathbb{F} \wedge C(\mathbf{v}) \implies C(\lambda \mathbf{v})$.

De todo lo anterior, C es una condición lineal y por lo tanto $\langle \mathcal{S} \rangle$ es un subespacio vectorial de V. ■

Tarea moral: Demuestre la propiedad (CA) usando la primer definición de $\langle \mathcal{S} \rangle$ (la que no usamos en esta demostración).

Corolario 3.5.1. El conjunto de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{F}$ es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial.

Demostración: Basta recordar que: (i) para cada $n \in \omega$, se identificó X^n con $\delta_n \in {}^{\omega}\mathbb{F}$; y (ii) los polinomios son combinaciones lineales de estos. Así,

$$\mathbb{F}[X] = \langle \{X^n : n \in \omega\} \rangle .$$

Del Teorema previo, $\mathbb{F}[X]$ es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial. ■

Observación 3.6. Es fácil ver que la suma de dos polinomios $p = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i X^i$ y $q = \sum_{j=0}^{n} \beta_j X^j$ es precisamente la suma de las funciones $f, g \colon \omega \to \mathbb{F}$ tales que

$$f = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \delta_i \quad \text{y} \quad g = \sum_{j=0}^{n} \beta_j \delta_j$$

(de hecho, por la manera en que lo definimos, $f = p$ y $g = q$). Donde sí hay que *arrastrar el lápiz* es para demostrar que

$$p + q = \sum_{k=0}^{\ell} (\alpha_k + \beta_k)\, X^k, \qquad \ell = \text{máx}\{m, n\}.$$

(debe definir de manera adecuada los índices α_k ó β_k que no están definidos a primera vista)

Ahora veremos una proposición que nos da una formulación alternativa del generado por un subconjunto. Antes de ello, requerimos la siguiente

Proposición 3.7. Si $\mathcal{W} = \{W_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una colección, no vacía, de subespacios de V, entonces la intersección de todos estos, $\bigcap \mathcal{W} = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} W_\alpha$, es un subespacio.

Demostración: La condición lineal que tenemos es $C(\mathbf{v})$: $\mathbf{v} \in \bigcap \mathcal{W}$. Hay que demostrar las tres cosas usuales:

$\neg\varnothing\rfloor$ Como todos los W_α son subespacios, entonces, para cada $\alpha \in \Lambda$, $\mathbf{0} \in W_\alpha$. Así, $\mathbf{0} \in \bigcap \mathcal{W}$.

CA$\rfloor$ Por otro lado, si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \bigcap \mathcal{W}$, entonces

$$\forall \alpha \in \Lambda : \; \mathbf{v}, \mathbf{w} \in W_\alpha \implies \mathbf{v} + \mathbf{w} \in W_\alpha.$$

Por ello, $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \bigcap \mathcal{W}$.

CE$\rfloor$ Si $\mathbf{v} \in \bigcap \mathcal{W}$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, entonces

$$\forall \alpha \in \Lambda : \; \mathbf{v} \in W_\alpha \implies \lambda\mathbf{v} \in W_\alpha.$$

Por ello, $\lambda\mathbf{v} \in \bigcap \mathcal{W}$.

En conclusión, $\bigcap \mathcal{W}$ es un subespacio de V. ■

Gracias este resultado, podemos enunciar una caracterización del subespacio generado por un conjunto.

Teorema 3.8. Si $\mathcal{S} \subseteq V$ es no vacío, entonces $\langle \mathcal{S} \rangle = \bigcap\{W \leq V : \mathcal{S} \subseteq W\}$.

Demostración:

$\supseteq\rfloor$ Como $\langle \mathcal{S} \rangle \leq V$ y $\mathcal{S} \subseteq \langle \mathcal{S} \rangle$, entonces $\bigcap\{W \leq V : \mathcal{S} \subseteq W\} \subseteq \langle \mathcal{S} \rangle$.

$\subseteq\rfloor$ Recíprocamente, si $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{v}_i \in \langle \mathcal{S} \rangle$, entonces (por la definición del generado) $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathcal{S}$. Así, dado cualquier $W \leq V$ tal que $\mathcal{S} \subseteq W$, se tiene que $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^m \subseteq W$, y, por ello, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{v}_i \in W$. En consecuencia, $\mathbf{v} \in \bigcap\{W \leq V : \mathcal{S} \subseteq W\}$. ■

Corolario 3.8.1. El subespacio generado por un conjunto $\mathcal{S} \subseteq V$, $\langle \mathcal{S} \rangle$, es el subespacio más $\subseteq$-pequeño que contiene a $\mathcal{S}$.

Demostración: Es inmediato de la igualdad $\langle \mathcal{S} \rangle = \bigcap\{W \leq V : \mathcal{S} \subseteq W\}$. ■

Observación 3.9. En vista de esta caracterización, podemos justificar la convención $\langle \varnothing \rangle = \{\mathbf{0}\}$, pues todos los subespacios de V, incluyendo al trivial $\{\mathbf{0}\}$, contienen al subconjunto vacío.

4. Clase 04

Ya hemos acordado que $\mathbb{F}$ siempre denota a un campo y V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$.

4.1. Conjuntos de generadores y dependencia lineal

Comenzamos dando una **interpretación geométrica del subespacio generado** en $\mathbb{R}^3$: Sabemos que para $\mathcal{S} \subseteq V$, $\langle \mathcal{S} \rangle$ es un subespacio. Más aún,

$$\langle \mathcal{S} \rangle = \left\{ \sum_{\mathbf{s}\in\mathcal{S}} \lambda_{\mathbf{s}} \mathbf{s} \in V \;\middle|\; [\forall \mathbf{s} \in \mathcal{S}\ (\lambda_{\mathbf{s}} \in \mathbb{F})] \wedge [\exists C \subseteq \mathcal{S}\ (\#C < \aleph_0)] \wedge [\forall \mathbf{s} \in \mathcal{S} \setminus C\ (\lambda_{\mathbf{s}} = 0)] \right\}$$

Como casos particulares, podemos observar que

1. Si $V = \mathbb{R}^3$ (visto como $\mathbb{R}$-espacio vectorial) y $\mathcal{S} = \{(1,1,0)\}$, entonces

$$\langle \mathcal{S} \rangle = \{(\lambda, \lambda, 0) \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

es una recta.

2. Si $\mathcal{S}_1 = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,2,1)\}$ y $\mathcal{S}_2 = \{(1,1,0),(0,1,1)\}$, entonces $\langle \mathcal{S}_1 \rangle = \langle \mathcal{S}_2 \rangle$, pues $(1,2,1) \in \langle \mathcal{S}_2 \rangle$. En este caso, $\langle \mathcal{S}_2 \rangle$ **es un plano**.
3. Si $\mathcal{S}_3 = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,2,1),(1,1,1)\}$, se puede demostrar que, $\langle \mathcal{S}_3 \rangle = \mathbb{R}^3$, que **es todo el espacio tridimensional**.
4. Si $\mathcal{S}_3 = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$, se puede demostrar que, $\langle \mathcal{S}_3 \rangle = \mathbb{R}^3$, que, de nuevo, **es todo el espacio tridimensional**.

Los comportamientos ocurridos en los ejemplos previos, inspiran las siguientes definiciones

Definición 11. Sean $\mathcal{S} \subseteq V$ y $\mathbf{v} \in V$. Decimos que $\mathcal{S}$ es

- Un ***conjunto de generadores*** si $\langle \mathcal{S} \rangle = V$.
- Un *subconjunto de generadores* ***mínimo*** si

$$\forall T \subseteq \mathcal{S}, \quad T \neq \mathcal{S} \implies \langle T \rangle \neq V.$$

  Esta condición es lo mimo que decir, para todo $T \subsetneqq \mathcal{S}$, $\langle T \rangle \subsetneqq V$.
- Una ***base para V*** si es un conjunto generador tal que

$$\forall \mathbf{w} \in \langle \mathcal{S} \rangle, \ \exists! n \in \mathbb{N}, \ \exists! \{(\lambda_i, \mathbf{w}_i)\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{F} \times \mathcal{S} : \quad \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{w}_i.$$

  Nos referiremos a esta propiedad como *las expresiones en* $\langle \mathcal{S} \rangle$ (o *las expresiones de* $\mathcal{S}$*) son únicas.*

Referente a las bases, tenemos la siguiente

Proposición 4.1. Sea $\mathcal{S} \subseteq V$ no vacío. Entonces $\mathcal{S}$ es una base para V *si, y sólo si*, la única combinación lineal de $\mathbf{0} \in \langle \mathcal{S} \rangle$ es $\mathbf{0} = \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} 0 \cdot \mathbf{s}$.

Demostración:

$\Rightarrow\rfloor$ Si $\mathcal{S}$ es base, la implicación es obvia.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que la única manera de escribir a $\mathbf{0}$ como combinación lineal de elementos en $\mathcal{S}$ es la trivial (aquella donde todos los coeficientes son 0), que $\mathbf{v} \in \langle \mathcal{S} \rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$ es un elemento arbitrario y que tenemos dos maneras de escribir a $\mathbf{v}$ como combinación lineal de elementos en $\mathcal{S}$, digamos

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} \lambda_{\mathbf{s}} \mathbf{s} \quad \big(\text{donde existe } C \subseteq \mathcal{S} \text{ finito y tal que } \forall \mathbf{s} \in \mathcal{S} \setminus C \ (\lambda_{\mathbf{s}} = 0)\big) \\ \text{y} \\ \mathbf{v} &= \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} \mu_{\mathbf{s}} \mathbf{s}. \quad \big(\text{donde existe } D \subseteq \mathcal{S} \text{ finito y tal que } \forall \mathbf{s} \in \mathcal{S} \setminus D \ (\mu_{\mathbf{s}} = 0)\big). \end{aligned}$$

Al restar[8] ambas expresiones, obtenemos

$$\mathbf{0} = \mathbf{v} - \mathbf{v} = \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} \lambda_{\mathbf{s}} \mathbf{s} - \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} \mu_{\mathbf{s}} \mathbf{s} = \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} (\lambda_{\mathbf{s}} - \mu_{\mathbf{s}}) \mathbf{s}.$$

Como $\mathbf{0}$ solamente tiene una única expresión posible en términos de los elementos de $\mathcal{S}$, se sigue que

$$\forall \mathbf{s} \in \mathcal{S} : \quad \lambda_{\mathbf{s}} - \mu_{\mathbf{s}} = 0.$$

Esto claramente significa que las expresiones en $\langle \mathcal{S} \rangle$ son únicas. Es decir, $\mathcal{S}$ es base. ∎

[8] Esta manipulación de las sumas es válida porque: $C \cup D$ es finito y para todo $\mathbf{s} \in \mathcal{S} \setminus (C \cup D)$, $\lambda_{\mathbf{s}} = 0$.