Reposición II Geometría Analítica — Grajeda González Lisseth Lizbeth

1) Considera los puntos $P_1=(2,2)$, $P_2=(4,6)$, $Q_1=(-2,1)$ y $Q_2=(-3,2)$

a) Da ecuaciones normales para las mediatrices $M_{P_1P_2}$ y $M_{Q_1Q_2}$.

Para obtener las mediatrices necesitamos sacar el punto medio de P_1 y P_2.

$$M_{P_1P_2}=\left(\frac{4+2}{2},\frac{6+2}{2}\right)=\left(\frac{6}{2},\frac{8}{2}\right)=(3,4)$$

También debemos obtener la pendiente que pasa por P_1 y P_2 que se calcula:

$$m_{P_1P_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{6-2}{4-2}=\frac{4}{2}=2 \quad \therefore m_{P_1P_2}=2$$

Pero esa es la pendiente de esos dos puntos y para saber la pendiente de la mediatriz es la pendiente perpendicular de P_1 y P_2 es decir, el negativo y el inverso

$$m_{P_1P_2}=2=-\frac{1}{2}$$

Utilizando la ecuación de punto-pendiente

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

Sustituyendo $m=-\frac{1}{2}$ y $M_{P_1P_2}=(3,4)$

$$y-4=-\frac{1}{2}(x-3) \quad \text{y ahora despejamos } y$$

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}+4$$

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2} \leftarrow \text{Mediatriz de } P_1 \text{ y } P_2$$

y para $M_{Q_1Q_2}$ es lo mismo pero con sus puntos correspondientes

$$M_{Q_1Q_2}=\left(\frac{-2-3}{2},\frac{1+2}{2}\right)=\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right) \rightarrow \text{Punto medio}$$

$$m_{Q_1Q_2}=\frac{2-1}{-3+2}=\frac{1}{-1}=-1 \rightarrow \text{Pendiente} \quad m_{MQ_1Q_2}=1$$

Usando punto-pendiente

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-\frac{3}{2}=\left(x-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)$$

$$y-\frac{3}{2}=x+\frac{5}{2}$$

$$y=x+\frac{5}{2}+\frac{3}{2}$$

$$y=x+\frac{8}{2}=x+4$$

$$y=x+4 \leftarrow \text{Mediatriz de } Q_1 \text{ y } Q_2$$

b) Encuentra la intersección de las mediatrices previas. Llamamos a este punto A.

Teniendo las ecuaciones de las mediatrices

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$ y $y = x + 4$ como ambos son iguales a y las igualamos como

$$-\frac{1}{2}x + \frac{11}{2} = x + 4$$

mult. por 2 $\Rightarrow -x + 11 = 2x + 8$

Resolvemos para x

$$-x - 2x = 8 - 11$$
$$-3x = -3$$
$$x = 1$$

y sust. $x = 1$ en una mediatriz

ent. $y = x + 4$
$y = 1 + 4$
$y = 5$

Entonces la intersección de las mediatrices es $A(1, 5)$ //

C) Encuentra la distancia de A a las rectas $L_{P_1Q_1}$ y $L_{P_2Q_2}$

Para encontrar la distancia de $A(1, 5)$ a rectas de forma $Ax + By + C = 0$ su fórmula es:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Sacamos la pendiente de $L_{P_1Q_1}$ es:

$$m_{P_1Q_1} = \frac{1 - 2}{-2 - 4} = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}$$

ent. su ecuación es $y - 2 = \frac{1}{6}(x - 2)$

$$y = \frac{1}{6}x + \frac{10}{6}$$
$$\Rightarrow x - 6y + 10 = 0 \quad \text{--- } 1$$

Aplicando a la fórmula de la distancia 1 y A

$$d = \frac{|1 - 6(5) + 10|}{\sqrt{1 + 36}} = \frac{|1 - 30 + 10|}{\sqrt{37}} = \frac{|-19|}{\sqrt{37}} = \frac{19}{\sqrt{37}}$$

$$d_{L_{P_1Q_1}} = \frac{19\sqrt{37}}{37}$$ //

1)

c) Distancia de A a recta $\mathcal{L}_{P_2Q_2}$

Pendiente de recta $L_{P_2Q_2}$ es

$$m_{P_2Q_2} = \frac{2-6}{-3-4} = \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$$

Usando el punto $P_2(4, 6)$ y pendiente

$$y - 6 = \frac{4}{7}(x-4)$$

$$y = \frac{4}{7}x - \frac{16}{7} + 6$$

$$y = \frac{4}{7}x + \frac{26}{7}$$

$$7y = 4x + 26$$

$$4x - 7y + 26 = 0 \quad --- \; ③$$

Aplicando a la formula de distancia ② y A

$$d = \frac{|4\cdot(1) + (-7)(5) + 26|}{\sqrt{16+49}} = \frac{|4 - 35 + 26|}{\sqrt{65}} = \frac{|-5|}{\sqrt{65}} = \frac{5}{\sqrt{65}}$$

$$d_{\mathcal{L}_{P_2Q_2}} = \frac{5\sqrt{65}}{65} = \frac{\sqrt{65}}{13}$$

2) Sea n un número cualquiera distinto de 0, considera el vector $u_0=(2,n)$

a) Normalizar el vector u_1

$u_0=(2,n)$

$\|u_0\| = \sqrt{2^2+n^2} = \sqrt{4+n^2}$

- El vector normalizado es:

$u_1 = \frac{u_0}{u_0} = \left(\frac{2}{\sqrt{4+n^2}}, \frac{n}{\sqrt{4+n^2}}\right)$

- Encontrar un vector u_2 ortogonal a u_1

$u_1 \cdot u_2 = 0$

$u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{4+n^2}}, \frac{n}{\sqrt{4+n^2}}\right)$ supongamos $u_2=(a,b)$

$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{4+n^2}}a + \frac{n}{\sqrt{4+n^2}}b = 0$ Sea $a \neq 0$ por simplicidad

$\Rightarrow b = \frac{-2}{n}$ $a=1$

$\therefore u_2 = \left(1, \frac{-2}{n}\right)$

- Normalicemos u_2

$\|u_2\| = \sqrt{1^2+\left(-\frac{2}{n}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{4}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2+4}}{|n|}$

El vector normalizado es:

$u_2 = \left(\frac{1}{\|u_2\|}, \frac{-\frac{2}{n}}{\|u_2\|}\right) = \left(\frac{|n|}{\sqrt{n^2+4}}, \frac{-2}{\sqrt{n^2+4}}\right)$

- Verificamos que u_1, u_2 forman una base ortonormal

a) Ver que $u_1 \cdot u_1 = 1$ & $u_2 \cdot u_2 = 1$

Para u_1:

$u_1 \cdot u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{4+n^2}}\right)^2 + \left(\frac{n}{\sqrt{4+n^2}}\right)^2 = \frac{4}{4+n^2} + \frac{n^2}{4+n^2} = \frac{4+n^2}{4+n^2} = 1$

Para u_2:

$u_2 \cdot u_2 = \left(\frac{|n|}{\sqrt{n^2+4}}\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{n^2+4}}\right)^2 = \frac{n^2}{n^2+4} + \frac{4}{n^2+4} = \frac{n^2+4}{n^2+4} = 1$

b) Verificar que $u_1 \cdot u_2 = 0$

$u_1 \cdot u_2 = \frac{2}{\sqrt{4+n^2}} \cdot \frac{|n|}{\sqrt{n^2+4}} + \frac{n}{\sqrt{4+n^2}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{n^2+4}} = \frac{2|n|}{4+n^2} - \frac{2n}{4+n^2} = \frac{2(|n|-n)}{4+n^2}$

Obs Para $0<n \Rightarrow |n|=n$ así $n-n=0$ $\Rightarrow \frac{2(0)}{4+n^2} = 0$

Para $n<0 \Rightarrow |n|=-n$ así $-n-(-n)=0$

$\therefore u_1 \cdot u_2 = 0$ forman una base ortonormal

b) Encontrar los $w \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen las condiciones para formar una base ortonormal junto con $v = \frac{u}{|u|}$

donde sea $u = (2; n)$

w debe cumplir: $v \cdot w = 0$ & $|w| = 1$

1) Ortogonalidad: En $\mathbb{R}^2$ si $v = (v_1, v_2)$, cualquier vector ortogonal a v se puede escribir como

$w = \alpha(-v2, v1)$ $\alpha \in \mathbb{R}$

2) Normalización: Exigimos que $|w| = 1$

En particular w puede ser $(-v_2, v_1)$ ó $(v_2, -v_1)$

En $\mathbb{R}^2$ siempre hay exactamente dos vectores unitarios ortogonales a un vector unitario dado.

$w_1 = (-v_2, v_1)$ $w_2 = (v_2, v_1)$

Ambos tienen norma 1 $|w| = 1$ & son ortogonales a v; $v \cdot w = 0$

c)

Para encontrar los escalares a,b :

$v = au_1 + bu_2$

Supongamos $u_1 = (x_1, y_1)$ & $u_2 = (x_2, y_2)$

$\Rightarrow ax_1 + bx_2 = v_1$

$ay_1 + by_2 = v_2$

Si u_1 & u_2 son linealmente independientes el sistema de ecuaciones tiene solución única

$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} = \begin{pmatrix} y_2 - x_2 , & -y_1 \; x_1 \end{pmatrix}$

Por lo tanto

- $(1,1) = 1u_1 + 1u_2$
- $(7,4) = 7u_1 + 4u_2$
- $(-3,5) = -3u_1 + 5u_2$

d) $p = (7,4)$

Sea $u_1 = (x_1, y_1)$ & $u_2 = (-y_1, x_1)$

1) Proyección de $P = (7,4)$ sobre u_1

$a = \frac{p \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}$, $b = \frac{p \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2}$

Componente paralelo: $p_{\parallel} = au_1$

Componente perpendicular: $p_{\perp} = bu_2$

2) El punto reflejado es

$p' = p_{\parallel} - p_{\perp} = au_1 - bu_2$

3) Sea $\mathcal{C}$ la circunstancia $x^2+y^2-6x+8y=0$.

a) Encuentra el centro a y el radio r de $\mathcal{C}$, escribela en la forma $(x-a)\cdot(x-a)=r^2$

Pasemos la ecuación a la forma $(x-a)\cdot(x-a)=r^2$ y para esto completemos el cuadrado para x y para y.

para x: x^2-6x necesitamos agregar la mitad del coeficiente de x ie -6 y lo dividimos por 2 elevandolo al cuadrado quedando 9, así tenemos la expresión

$$x^2-6x+9 \Rightarrow x^2-6x=(x-3)^2-9$$

Para y: y^2+8y necesitamos agregar la mitad de coeficiente de y ie 8 lo dividimos por 2 y lo elevamos al cuadrado quedando 16, así tenemos la expresión:

$$y^2+8y+16 \Rightarrow y^2+8y=(y+4)^2-16$$

Sustituimos estas expresiones en la ecuación original y tenemos:

$$(x-3)^2-9+(y+4)^2-16=0$$
$$\Rightarrow (x-3)^2+(y+4)^2-25=0$$
$$\Rightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=25$$

con esto vemos que el centro $c=(3,-4)$
el radio $r^2=5^2 \Rightarrow r=5$

b) Encuentra las rectas tangentes a $\mathcal{C}$ que pasan por el punto $p=(37/4,-4)$ sus ecuaciones y los puntos de tangencia.

Completemos el cuadrado para x y para y, como vimos en el inciso a) nos quedaría:

$$x^2-6x+9 \Rightarrow x^2-6x=(x-3)^2-9$$
$$y^2+8y+16 \Rightarrow y^2+8y=(y+4)^2-16$$

Una vez vimos que el centro $=(3,-4)$ y el radio $=5$ seguimos con las rectas tangentes desde el punto $p=(37/4,-4)$, para ello usemos de la tangente desde un punto exterior a la circunferencia que es:

$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$ sustituimos los valores que tenemos y queda $(x_1-3)(x-3)+(y_1-(-4))(y-(-4))=5^2$
$\Rightarrow (x_1-3)(x-3)+(y_1+4)(y+4)=25$ veamos que $(x_1,y_1)=(37/4,-4)$ lo sustituimos: $(37/4-3)(x-3)+(-4+4)(y+4)=25$ simplificamos $(25/4)(x-3)=25 \Rightarrow x-3=4 \Rightarrow x=7$ esto es la ecuación de la recta tangente. y la otra tangente será $y=-4$.

Ahora bien, los puntos de tangencia están en la intersección de las tangentes dadas anteriormente con la circunferencia:

Sustituimos en la formula.

• Para $x=7$: $(7-3)^2+(y+4)^2=25$

$\Rightarrow 16+(y+4)^2=25$

$\Rightarrow (y+4)^2=9$

$\Rightarrow (y+4)=\pm 3$

$\Rightarrow$ hay dos posibles soluciones para $(y+4)$.

Ya sea que: $y+4=3 \Rightarrow y=-1$

$y+4=-3 \Rightarrow y=-7$

$\Rightarrow$ los puntos de tangencia son $(7,-1)$ y $(7,-7)$.

• Para $y=-4$: $(x-3)^2+(-4+4)^2=25$

$\Rightarrow (x-3)^2=25$

$\Rightarrow x-3=\pm 5$

$\Rightarrow$ hay dos posibles soluciones para $(x-3)$

Ya sea que: $x-3=5 \Rightarrow x=8$

$x-3=-5 \Rightarrow x=-2$

$\Rightarrow$ los puntos de tangencia son $(8,-4)$ y $(-2,-4)$.

$\therefore$ las ecuaciones de las rectas tangentes son $x=7$ $y=-4$ y los puntos de tangencia son: $(7,-1)$, $(7,-7)$, $(8,-4)$ y $(-2,-4)$

C) Elige un punto c intermedio en el segmento de recta que conecta a los puntos de tangencia, encuentra la ecuación de su recta polar P_c y verifica que p está en dicha polar.

Veamos que los puntos de tangencia son $(7,-1)$, $(7,-7)$, $(8,-4)$ y $(-2,-4)$

Veamos para $(7,-1)$ y $(7,-7)$, tenemos que hallar un punto intermedio c en el segmento de recta que conecta a $(7,-1)$ con $(7,-7)$, proponemos $c=\{(7+7)/2, (-1+-7)/2\} = (7,4)$. Recordemos que la ecuación de la recta polar de un punto respecto a una circunferencia es $(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)$.

Ahora bien, para la circunferencia $(x-3)^2+(y+4)^2=25$ y el punto intermedio $c=(7,4)$ quedaria:

$(7-3)(x-3)+(-4+4)(y+4)=25$

$\Rightarrow (4)(x-3)=25$

$\Rightarrow x-3=25/4$

$\Rightarrow x=37/4$ $\Rightarrow$ La ecuación de la recta polar es $x=37/4$

y el punto $p=(37/4,-4)$ trivialmente satisface $x=37/4$

$\therefore$ p está en la recta polar P_c y $P_c = x=37/4$

4) Sean $p=(-1,3)$ y $q=(3,-1)$

a) Encuentra la ecuación vectorial de la circunferencia que tiene al segmento $\overline{pq}$ como diámetro.

Hallemos el centro de la circunferencia, este centro (c) será el punto medio de $\overline{pq}$. Veamos que $c=\{(x_1+x_2)/2, (y_1+y_2)/2\}$, si sustituimos a p y q en la ecuación del centro, c tendremos:

$$c=\{(-1+3)/2, (3+(-1))/2\}=\{2/2, 2/2\}=(1,1).$$

Con esto podemos ver que $c=(1,1)$

Ahora bien, otro dato que podemos obtener es el radio (r) de la circunferencia que sería la mitad del segmento $\overline{pq}$, este lo podemos calcular obteniendo primero la longitud de $\overline{pq}$ y dividiéndolo a la mitad.

$$\overline{pq}=\sqrt{(3-(-1))^2+(-1-3)^2}=\sqrt{(4)^2+(-4)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow r=(4\sqrt{2})/2=2\sqrt{2} \quad \therefore r=2\sqrt{2}$$

Como ya vimos obtuvimos el centro, diámetro y radio de la circunferencia, ahora obtengamos la ecuación de la circunferencia, la fórmula de la ecuación de la circunferencia es: $c=(h,k)$ radio $(r) \rightarrow [(x-h)^2+(y-k)^2=r^2]$ y si sustituimos tenemos que $(h,k)=(1,1)$ y $r=2\sqrt{2}$ quedando $[(x-1)^2+(y-1)^2=(2\sqrt{2})^2]=\underbrace{[(x-1)^2+(y-1)^2=8]}_{\text{Esta sería la ecuación del círculo}}$

Ahora bien veamos la ecuación de la circunferencia mediante una ecuación vectorial:

Conocemos el centro y el radio, busquemos un vector de posición, si $\vec{c}$ es el vector de posición del centro de la circunferencia, cualquier punto en la circunferencia se puede describir como $\vec{r}=\vec{c}+\vec{u}$ donde $\vec{u}$ representa al vector magnitud $=r$

Seguimos con el vector unitario, véase que $\vec{u}$ se puede ver en términos de un vector unitario que tiene una magnitud 1 pero varía de dirección

$\Rightarrow \vec{u}=r\hat{u}$

Veamos ahora la ecuación vectorial sustituyendo $\vec{u}$ en $\vec{r}$ = $[\vec{r}=\vec{c}+r\hat{u}]$ como $\vec{c}=(1,1)$ y $r=2\sqrt{2}$ sustituimos en la ecuación quedando $[\vec{r}=(1,1)+(2\sqrt{2})\hat{u}]$ y esto lo podemos interpretar en términos de $\hat{u}=(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ como $\vec{r}=(1+2\sqrt{2}\cos\theta, 1+2\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta)$ con θ variando entre 0 a 2π por los puntos de la circunferencia y $\vec{r}=(1+2\sqrt{2}\cos\theta, 1+2\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta)$ es la ecuación vectorial de la circunferencia.

b) Elige un número $\tau \in (0,1)$, $\tau \neq 1/2$ y considera el punto $a = p + \tau(q-p)$, encuentra el conjugado armónico de a.

Veamos primero a τ, sabemos que $p = (-1,3)$ y $q = (3,-1)$, si calculamos a tendremos:

$$\vec{a} = p + \tau(q-p) \quad \text{y sustituyendo queda:}$$

$$\vec{a} = [(-1,3) + \tau((3,-1)-(-1,3))] = [(-1,3) + \tau(4,-4)] \Rightarrow \vec{a} = (-1+4\tau, 3-4\tau)$$

Seguimos con el conjugado armónico de a.
Recordemos que el conjugado armónico de un punto a respecto a los puntos p y q es el punto b t.q. la razón armónica $(p,q;a,b)$ sea (-1) $\Rightarrow$ $pa/aq = -pb/bq$.
Ahora bien, para hallar a b usemos la formula del conjugado armónico:

$$b = p + \frac{(1-2\tau)}{\tau}(a-p) \quad \text{sustituimos}$$

y queda: $a = (-1+4\tau, 3-4\tau)$ ∴ $b = (-1,3) + \frac{(1-2\tau)}{\tau}((-1+4\tau, 3-4\tau) - (-1,3))$

$$\Rightarrow \vec{b} = (-1,3) + \frac{(1-2\tau)}{\tau}(4\tau, -4\tau) \Rightarrow \vec{b} = (-1,3) + (4(1-2\tau), -4(1-2\tau)) \Rightarrow \vec{b} = -1+4-8\tau, 3-4+8\tau \Rightarrow \vec{b} = (3-8\tau, -1+8\tau)$$