Integrantes:

- Victor Espinoza Otoñez
- Aiko Johana García Romero
- Lyneth Emilia Bolaños Cruz
- Jesús Lorenzo Hernández
- Natalia Beristain Martínez
- Aranza López Juárez

4. Demuestre que la ecuación $$|d(x,P)-d(x,Q)|=2a,$$

define,

a) La mediatriz de P y Q para $a=0$;
b) Los rayos complementarios del segmento $\overline{PQ}$ para $a=c$, y
c) El conjunto vacio para $a>c$.

Inciso a)

Teniendo que $a=0$, consideramos la ecuación

$$|d(x,P)-d(x,Q)|=0$$

Sacando el valor absoluto tenemos que

$$d(x,P)-d(x,Q)=0$$

Tomamos la parte positiva dado que una norma es positiva,

$\therefore$ La mediatriz de P y Q para $a=0$ es

$$d(x,P)=d(x,Q)$$

Inciso b)

Por la definicion vista en clase de que un rayo complementario transforma a un segmento en recta;
si tomamos cualquier valor en C de tal modo que satisfazca lo que se pide,
tomamos que $$c=\frac{1}{2}d(P,Q)$$

Para encontrar los puntos vamos a considerar la expresion

$$|d(x,P)-d(x,Q)|=2c=d(P,Q)$$

Por la definición de valor absoluto, tenemos 2 casos:

CASO I

$$d(x,P)-d(x,Q)=d(P,Q)$$

Esto implica que

$$d(x,P)=d(x,Q)+d(P,Q)$$

Siendo así, podemos decir que

$$d(x,Q)+d(P,Q) \quad \text{si y solo si} \quad Q\in\overline{Px}$$

CASO II

Teniendo la expresión

$$d(x,P)-d(x,Q)=-d(P,Q)$$

Esto implica que

$$d(x,P)+d(P,Q)+d(x,Q)$$

Siendo así, podemos decir que

$$d(x,P)+d(P,Q) \text{ si y solo si } P\in \overline{xQ}$$

Inciso c)

Volviendo al valor de $c=\frac{1}{2}\,d(P,Q)$

Supongamos que

$$a>c=\frac{1}{2}\,d(P,Q)$$

$$\Rightarrow 2a>d(P,Q)$$

Buscando los puntos, consideramos

$$|d(x,P)-d(x,Q)|=2a>d(P,Q)$$

Para esta solucion hay dos casos

CASO I

$$d(x,P)-d(x,Q)>2\ (P,Q)$$

$$\Rightarrow d(P,Q)+d(x,Q)<d(x,P)$$

$$\Rightarrow d(x,P)\leq d(P,Q)+d(x,Q) \quad !$$

CASO II

$$d(x,P)-d(x,Q)>(P,Q)$$

$$\Rightarrow d(x,Q)-d(x-P)>d(P,Q)$$

$$\Rightarrow d(x,Q)>d(x,P)+d(P,Q)$$

$$\Rightarrow d(x,P)+d(P,Q)\geq d(x,Q) \quad !$$

Puesto que x no funciono en ni uno de los dos casos,

$\therefore \{x\in\mathbb{R}^2 \mid d(x,P)-d(x,Q)\}=a>d(P,Q)$ es vacio

pues en un plano no se puede dar el caso de que tenga excentricidades negativas.

5. Encuentra la transformación afín $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumple:

1.) $f(2)=5$ y $f(5)=2$

2.) $f(1)=-2$ y $f(2)=2$

Representación de la transformación afín:

1) $f(x)=ax+b$

Tenemos: $f(2)=5 \Rightarrow f(2)=2a+b \Rightarrow 2a+b=5$

Tenemos: $f(5)=2 \Rightarrow f(5)=5a+b \Rightarrow 5a+b=2$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2a+b&=5 \quad \cdots (1) \\ 5a+b&=2 \quad \cdots (2) \end{aligned}\right\}$$

$(1)\times -1: \quad -2a-b=-5 \quad \cdots (1)'$

$(2)+(1)': \quad$
$$\begin{array}{r} 5a+b=2 \\ + \; -2a-b=-5 \\ \hline 3a=-3 \end{array}$$

$\Rightarrow \underline{a=-1}$

Sustituimos a "a" en (1): $2(-1)+b=5 \Rightarrow b=5+2$

$\Rightarrow \underline{b=7}$

$\therefore$ La transformación afín de 1.) es $f(x)=-x+7$

2)

Tenemos: $f(1)=-2 \Rightarrow f(1)=1a+b \Rightarrow f(1)=a+b \Rightarrow a+b=-2$

Tenemos: $f(2)=2 \Rightarrow f(2)=2a+b \Rightarrow 2a+b=2$

Resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} a+b&=-2 \quad \cdots (3) \\ 2a+b&=2 \quad \cdots (4) \end{aligned}\right\}$$

$(3)\times -1: \quad -a-b=2 \quad \cdots (3)'$

$(4)+(3)': \quad$
$$\begin{array}{r} 2a+b=2 \\ + \; -a-b=2 \\ \hline a=4 \end{array}$$

$\Rightarrow \underline{a=4}$

Sustituimos a "a" en (3): $(4)+b=-2 \Rightarrow b=-2-4$

$\Rightarrow b=-6$

$\therefore$ La transformación afín de 2) es $f(x)=4x-6$

6 Demuestra, usando la formula, que la inversa de cualquier reflexión en R^2 es ella misma

Demostración

Con apoyo en el libro se define a la reflexión de R^2 a lo largo de

$$\lambda : u \cdot x = c \quad \text{con } |u| = 1$$

Como $\varphi\lambda : R^2 \rightarrow R^2$

De modo que

$$\varphi\lambda(x) = x + 2(c - u \cdot x)u$$

Al igual se sabe que al componer a una función con su inverso se obtiene la función identidad, entonces demostrar que la inversa de cualquier reflexión en R^2 es igual a:

$$= \varphi \circ \varphi^{-1}$$

$$= \varphi(\varphi^{-1}(x))$$

Donde al sustituir a $\varphi^{-1}(x)$

Se tiene que

$$=\varphi(x+2(c-u\cdot x))u$$

Y al aplicar φ se obtiene

$$=(x+2(c-u\cdot x)u)+2(c-u\cdot(x+2(c-u)u))u$$

Desarrollando que da como

$$=(x+2cu-2u^2x)+2(c-u\cdot(x+2cu-2u^2x)u$$

$$=x+2cu-2u^2x+2(c-ux-2cu^2-2cu^3x)u$$

$$=x+2cu-2u^2x+2cu-2u^2x-4cu^3+4u^4x$$

Recordando que $u=1$, sustituimos de modo que:

$$= x + 2c(1) - 2(1)^2 x + 2c(1) - 2(1)^2 x - 4c(1)^3 + 4(1)^4 x$$

$$= x + 2c - 2x + 2c - 2x - 4c + 4x$$

En donde al cancelar terminos queda como

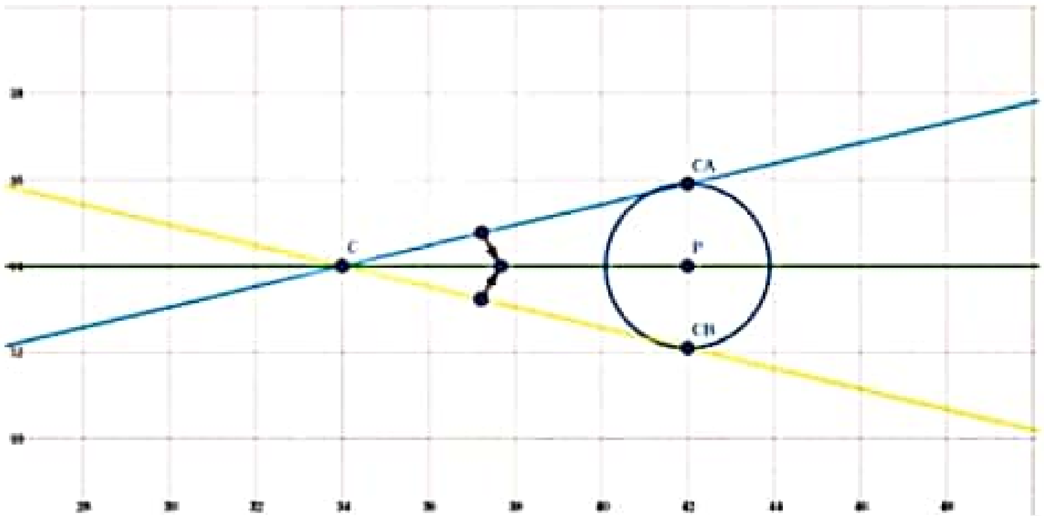
$$= x + \cancel{2c} - \cancel{2x} + \cancel{2c} - \cancel{2x} - \cancel{4c} + \cancel{4x}$$

$$= x$$

Con esto se llega a que x es igual a Id_{R^2} por lo tanto queda demostrado que cualquier reflexión en R^2 es ella misma.

2 Demuestra que si c es un punto exterior (al circulo $\mathcal{C}$ con centro P) entonces su recta a P bisecta sus dos tangentes a $\mathcal{C}$. Y además que las distancias a sus pies en $\mathcal{C}$ (es decir, a los puntos de tangencia) son iguales.

La representación de esto seria



Sea C el circulo con radio r y centro P, debido a que c es un punto que se encuentra en el exterior del circulo, su recta polar que llamaremos P_c, corta a la circunferencia en dos puntos C_a y C_b, las rectas polares a estos puntos de tangencia son

Para $P_c a$ se tiene que

$$P_c a : (C_a - P) \cdot (x - P) = r^2$$

Para P_cb se tiene que

$$P_ca : (C_b - P) \cdot (x - P) = r^2$$

Lo que se busca es que la recta que une a C con P es bisectriz de la polar de C_a, P_ca al igual de la polar de C_b y P_cb ya que son tangentes a la circunferencia C que pasan por el punto C. Ahora se tomara la descripción parametrica de la recta que une a c con P de esta manera queda como

$$L_cp : \{c + t(P - C) : t \in R\}$$

Tomamos a $q \in L$, por lo cual q es de la forma

$$q = c + t, (P - C) \ con \ t \in R$$

Donde se despeja a t de la siguiente manera

$$q - c = t, (P - C)$$

Al igual se puede multiplicar por -1 quedando

$$c - q = -t, (P - C)$$

Ahora se demostrara que q se encuentra a la misma distancia de P_{ca} como de P_{cb}, para esto se vera cual es la distancia de P_{ca} a q
Por lo cual se tiene que

$$c \in P_{ca}$$

Por lo cual se usara

$$P_ca : (C_a - P) \cdot x$$

Lo cual se puede escribir como

$$P_ca : (C_a - P) \cdot c$$

Ahora para sacar la distancia de q a P_{ca}

$$d(q, P_ca) = \frac{|C_a - P) \cdot c - (C_a - P) \cdot q|}{|C_a - p|}$$

Donde se puede factorizar a c-q, quedando de este modo

$$\frac{|(C_a - P) \cdot (c - q)|}{|C_a - P}$$

Al sustituir $c - q = -t, (P - C)$ se tiene

$$\frac{|(C_a - P) \cdot (-t, (P - C))|}{|C_a - P}$$

Donde se llega a

$$\frac{|t(C_a - P) \cdot (-(P - C))|}{|C_a - P}$$

Usando las propiedades del valor absoluto

$$\frac{|t||(C_a - P) \cdot (P - C)|}{|C_a - P}$$

Donde se tiene que $|C_a - P|$ es la distancia del centro a un punto en la circunferencia, ademas de esto se tiene que

$$(C_a - P) \cdot (P - C) = r^2$$

Sustituimos

$$= \frac{|t_1||r^2|}{r}$$

Ademas se tiene que

$$r^2 > o$$

Por lo que

$$|r^2| = r^2$$

Entonces

$$= \frac{|t_1|r^2}{r}$$

Llegando asi a que $d(q, P_{ca)}$= $|t_1|$r
Ahora para la distancia de P_cb a q se tiene

$$c \in P_cb$$

Donde se usara

$$P_ca : (C_b - P) \cdot x$$

Lo cual se puede reescribir como

$$P_ca : (C_b - P) \cdot c$$

Ahora para la distancia de P_cb a q se tiene que

$$d(q, P_cb) = \frac{|C_b - P) \cdot c - (C_b - P) \cdot q|}{|C_b - p|}$$

Donde se puede factorizar a c-q, quedando de este modo

$$\frac{|(C_b - P) \cdot (c - q)|}{|C_b - P}$$

Al sustituir $c - q = -t, (P - C)$ se tiene

$$\frac{|(C_b - P) \cdot (-t, (P - C))|}{|C_b - P}$$

Donde se llega a

$$\frac{|t(C_b - P) \cdot (-(P - C))|}{|C_b - P}$$

Usando las propiedades del valor absoluto

$$\frac{|t||(C_b - P)\cdot(P - C)|}{|C_b - P}$$

Donde se tiene que $|C_b - P|$ es la distancia del centro a un punto en la circunferencia, ademas de esto se tiene que

$$(C_b - P)\cdot(P - C) = r^2$$

Sustituimos

$$= \frac{|t_1||r^2|}{r}$$

Ademas se tiene que

$$r^2 > o$$

Por lo que

$$|r^2| = r^2$$

Entonces

$$= \frac{|t_1|r^2}{r}$$

Llegando asi a que $d(q, P_{cb} = |t_1|$r Entonces se tiene que $d(q, P_{cb} = |t_1|$r y $d(q, P_{ca)} =$ $|t_1|$r, donde al aplicar la transitividad de una igualdad se llega a

$$d(q, P_{cb} = d(q, P_{ca)}$$

Esto significa que q esta a la misma distancia de $P_c b$ como de $P_c a$, entonces L esta contenida en la bisectriz de $P_c b$ y $P_c a$, ahora definiendo a B como la bisectriz se tiene que

$$L \subseteq B$$

Se sabe que

$$P \in L$$

Y tambien que

$$C \in L$$

Como

$$L \subseteq B$$

Se sabe que

$$P \in B$$

Y tambien que

$$C \in B$$

Es decir que L y B tienen dos puntos en común pero dos rectas no tienen dos puntos en común a menos que sena la misma por lo cual

$$L = B$$

Ahora hay que comprobar que la distancia de C a C_a es la misa a C_b
Se tiene que

$$C_a - P \perp C - C_a$$

Por lo demostrado en la tarea 5 lo cual es

$$u \perp v \longleftrightarrow |u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$$

se tiene que

$$|C_a - P + C - C_a|^2$$

$$|C_a - P|^2 + |C - C_a|^2$$

Llegando a

$$|c - P|^2 = |C_a - P|^2 + |C - C_a|^2$$

Ademas $C_b - P \perp C - C_b$ y de nuevo por lo demostrado en la tarea 5 se tiene que

$$|C_b - P + C - C_b|^2$$

$$|C_b - P|^2 + |C - C_b|^2$$

Llegando a

$$|c - P|^2 = |C_b - P|^2 + |C - C_b|^2$$

Aplicando la transitividad de la igualdad se tiene que

$$|C_a - P|^2 + |C - C_a|^2 = |C_b - P|^2 + |C - C_b|^2$$

Donde se recuerda que

$$C_a - P = r$$

$$C_b - P = r$$

Sustituyendo se tiene que

$$|r|^2 + |C - C_a|^2 = |r|^2 + |C - C_b|^2$$

Donde se cancelan terminos quedando

$$|C - C_a|^2 = |C - C_b|^2$$

Y como se tiene que las distancias sean positivas se puede sacar raíz cuadrada llegando a

$$|C - C_a| = |C - C_b|$$

Lo cual es

$$d(c, c_a) = d(c, cb)$$

Por lo tanto la distancia de C a C_a es la misma que de C a $P_c b$, esto significa que la distancia de c a sus puntos de tangencia son iguales

3. Halla la ecuación del conjunto de puntos G que tienen la propiedad de que la suma de las distancias de cada punto $P \in G$ a los puntos $(0,3)$ y $(0,-3)$ vale $6\sqrt{3}$.

Solución.

Sabemos que el conjunto de puntos G forman una elipse, ya que estas cónicas son definidas como el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante, quedando así determinada su ecuación como:

$$G: \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,p) + d(x,q) = 2a\}$$

En este caso p toma el valor de $(0,3)$ y q el de $(0,-3)$, mientras que $2a$ toma el valor de $6\sqrt{3}$, de forma que al sustituir en la ec. anterior obtenemos:

$$G: \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(0,3)) + d((x,y),(0,-3)) = 6\sqrt{3}\}$$

Ahora recordemos la expresión canónica de la elipse dada por $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ donde $b^2 = a^2 - c^2$

Sabemos que $2c = \|(0,3)-(0,-3)\| = \|(0,6)\|$ pero la norma se puede expresar como

$$\sqrt{0^2+6^2} = 6$$

así $2c = 6$ y por lo tanto $c = 3$

Ahora calculemos la b

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - c^2} = \sqrt{27-9} = \sqrt{18}, \text{ entonces}$$

$$b = \sqrt{18} \quad y \quad b^2 = 18$$

$\therefore \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{27} = 1$ es la ecuación de la elipse

Escaneado con CamScanner

Una ecuación vectorial es de la forma

$$(x,y) = A + k \cdot \overrightarrow{AB}$$

1

De tal manera que al tener una recta definida en $\mathbb{R}^2$ en su forma vectorial como

$$\vec{r} = \langle 3-3k, 5k \rangle$$

Tomaremos dos puntos de la recta, dado que

$$\vec{r} = \langle 3-3k, 5k \rangle = (3,0) + (-3k, 5k) = (3,0) + k(-3,5)$$

de esta manera 2 puntos en la recta son

$$P_1 = (3,0) \qquad y \qquad P_2 = (0,5)$$

Sabemos que para sacar una rotación en un punto y un ángulo

$$R_{\theta,P} = T_P \circ R_\theta \circ T_{-P}$$

Al sustituir P_1 con una rotación de $\pi/2$ en el sentido inverso a las manecillas del reloj.

$$R_{\frac{\pi}{2},(3,0)} = T_{(3,0)} \circ R_{\frac{\pi}{2}} \circ T_{-(3,0)}$$

Lo evaluamos en (x,y)

$$R_{\frac{\pi}{2},(3,0)}(x,y) = T_{(3,0)} \circ R_{\frac{\pi}{2}} \circ T_{-(3,0)}(x,y)$$

Al asociar la composición, haremos la traslación seguida de la rotación

$$R_{\frac{\pi}{2},(3,0)}(x,y) = T_{(3,0)} \circ R_{\frac{\pi}{2}}((x,y)-(3,0))$$

$$= T_{(3,0)} \circ R_{\frac{\pi}{2}}((x-3; y))$$

$$= R_{\frac{\pi}{2}}((x-3; y)) + (3,0)$$

Donde la rotación tiene la forma:

$$R_\theta : (x\cos(\theta) - y\sin(\theta) ; x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$$

sustituyendo

$$= (x-3 \cdot \cos(\tfrac{\pi}{2}) - y \cdot \sin(\tfrac{\pi}{2}), x-3 \cdot \cos(\tfrac{\pi}{2}) + y \cdot \cos(\tfrac{\pi}{2}))$$
$$+ (3,0)$$

$$= (x-3 \cdot \cos(\tfrac{\pi}{2}) - y \cdot \sin(\tfrac{\pi}{2}) + 3, x-3 \cdot \cos(\tfrac{\pi}{2}) + y \cdot \cos(\tfrac{\pi}{2})$$

$$= (x-3 \cdot 0 - y \cdot 1 + 3, \; x-3 \cdot 1 + y \cdot 0)$$
$$= (-y+3, \; x-3) \qquad = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Obtendremos la rotación en el P_2 de la recta en $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cdot (0,5) \\ (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \cdot (0,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$