1. Encuentra la ecuación paramétrica de C

Para la descripción paramétrica usaremos

$$\{P + tu \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Se toma a A y B para calcular el vector director

$u = B - A$

$u = (5,4) - (1,6)$

$u = (5,4) + (-1,-6)$

$u = (4,-2)$

Ahora se toma a P como A y la descripción paramétrica queda como

$$\{(1,6) + t(4,-2) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

2. Encuentra la ecuación normal de B

Para este caso se puede utilizar lo siguiente

$$\{P + td \mid t \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d^{\perp} \cdot x = d^{\perp} \cdot P\}$$

Para B tenemos que utilizar

$$d^{\perp} \cdot x = d^{\perp} \cdot p$$

Donde usaremos

$p = A$

$p = (1,6)$

Sustituyendo

$$d^{\perp} \cdot x = d^{\perp} \cdot (1,6)$$

Ahora calcularemos d

$$d = Q - P$$

Tomamos a

$$P = (1,6)$$
$$Q = (1,1)$$

Sustituyendo

$$d = (1,1) - (1,6)$$
$$d = (1,1) + (-1,-6)$$
$$d = (0,5)$$

Obtenemos el compadre ortogonal de d

$$d^{\perp} = (5,0)$$

Sustituyendo en

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d^{\perp} \cdot x = d^{\perp} \cdot p\}$$

Queda como

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid (5,0) \cdot x = (5,0) \cdot (1,6)\}$$

Aplicando la definición de producto punto del lado derecho,

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid (5,0) \cdot x = 5 + 0\}$$

Llegando a la ecuacion normal de la recta

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid (5,0) \cdot x = 5\}$$

3. Encuentra la ecuación normal de la altura por A (la perpendicular a por A).

Primero es necesario encontrar la ec. parametrica de la recta que va de B a C (t)

$$L_{BC} = B + t(B - C)$$
$$L_{BC} = (5,4) + t((5,4) - (1,1))$$
$$L_{BC} = (5,4) + t(4,3)$$

Denotemos a la recta perpendicular de $\mathcal{t}$ que pasa por A como M_{BC} cuya ec. parametrica debe ser

$$A + s(B-C)^{\perp}$$

(utilizamos el vector ortogonal ya que esta recta es perpendicular a M_{BC})

Entonces tenemos que $M_{BC} = (1,6) + s(4,3)^{\perp}$

$$M_{BC} = (1,6) + s(-3,4)$$

Ahora bien para pasar a la ec. normal de M_{BC}

Obtenemos el vector ortogonal a traves del vector dirección

$$d_{M_{BC}} = (-3,4) \qquad d^{\perp}_{M_{BC}} = (-4,-3)$$

Ahora utilizando el Teorema 1.82 sea $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces

$$\{p + tu \mid t \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d^{\perp} \cdot x = d^{\perp} \cdot p\}$$

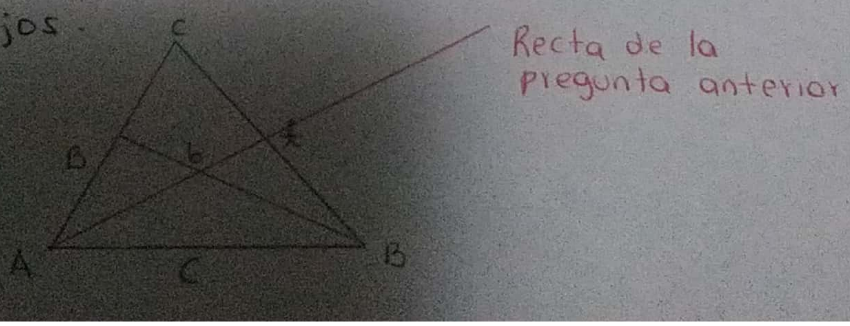
Entonces la ec. normal de la recta M_{BC} es

$$M_{BC} = \{d^{\perp}_{M_{BC}} \cdot \bar{x} = d^{\perp}_{M_{BC}} \cdot P_{M_{BC}},\ x \in \mathbb{R}^2\}$$

$$M_{BC} = \{(-4,-3) \cdot \bar{x} = (-4,-3) \cdot (1,6),\ x \in \mathbb{R}^2\}$$

4. Calcula las distancias $b = d(A,C)$ y $h = d(B,B)$, para determinar el area $\frac{bh}{2}$ y haz un dibujo del triangulo, indicando h y la recta de la pregunta anterior.

Dibujos:



Se sabe que la distancia entre dos puntos se define como la norma de su diferencia, es decir

$$d(A,C) = |A-C|$$ y sabemos que esta distancia es igual a b.

$$d((1,6),(1,1)) = \left|\sqrt{(1-1)^2+(6-1)^2}\right|$$

$$= \left|\sqrt{0^2+5^2}\right|$$

$$= \left|\sqrt{25}\right|$$

$$= |5|$$

$$\therefore\ b = 5$$

Ahora bien para calcular la distancia de B a) B utilizaremos la proposición 1.29

$$d(p.\pi) = \frac{|c-(n.p)|}{|n|}$$

Y sabemos que la ec. normal de la recta $\overline{AC}$

$$d(5,4),\ \overline{AC} = \frac{|-5-(5,0)\cdot(5,4)|}{|-5;0|}$$

$$= \frac{|-5-(-25+0)|}{|-5,0|}$$

$$= \frac{|-5-(-25)|}{|-5,0|}$$

$$= \frac{|-5+25|}{|(-5,0)|}$$

$$= \frac{|20|}{\sqrt{-5^2+0^2}}$$

$$= \frac{|20|}{\sqrt{25}}$$

$$= \frac{20}{5}$$

$$h = 4$$

Sabemos que el área del triangulo esta dado por $\frac{bh}{2}$ y sustituimos los valores encontrados:

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Por lo tanto el área del triangulo es de 10.

5. Obten las coordenadas polares de los puntos con coordenadas cartesianas

$$P = (1, -2) \quad y \quad Q = (1, 1)$$

La coordenada r es la distancia del punto (x, y) al origen

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La coordenada α es el ∡ que forma el vector $\vec{r}$ con el eje vertical de las x en sentido horario.

① $P = (1, -2)$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{(-2)}{1}\right) + 180°$$

$$= -63.43° + 180°$$

$$= 116.57°$$

Coordenadas polares $P = (5, 116.57°) \Rightarrow P = \left(\sqrt{5}, \frac{11657\pi}{18000}\right)$

② $Q = (1, 1)$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 46°$$

Coordenadas polares $Q = (\sqrt{2}, 45°) \Rightarrow Q = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

6. Demuestra que dos vectores u y v son perpendiculares si y solo si $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$. Haz el dibujo

Demostración:

Sean u y v ortogonales

$\Rightarrow$ Desarrollamos $|u+v|^2$

$|u+v|^2 = (u+v)(u+v) = u \cdot u + 2u \cdot v + v \cdot v$

Además si u, v son ortogonales, esto significa que $u \cdot v = 0$

Entonces: $|u|^2 + 0 + |v|^2 = |u|^2 + |v|^2$

$\Leftarrow$ Ahora supongamos que $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$

Desarrollamos el cuadrado $|u|^2 + 2u \cdot v + |v|^2 = |u|^2 + |v|^2$

Se cancela $|u|^2$ y $|v|^2$ queda $2uv = 0$ y esto es la definición de ortogonal

Por lo tanto u y v son ortogonales ■