3 Polares (L - polares)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad x, y \in \mathbb{R}^3$$

$$x \cdot_L y = x L y = (Lx) \cdot y$$
$$= x \cdot (Ly)$$

<u>Def</u> Dados $v, u \in \mathbb{R}^3$ decimos que son L-ortogonales si $v \cdot_L u = 0$

Sea $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$, $\Pi_{Lv} = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid v \cdot_L x = 0 \}$

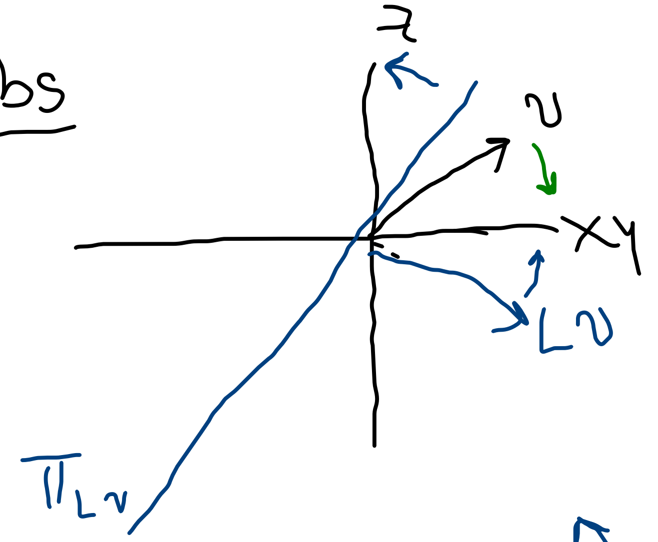
<u>Obs</u> Es un plano

$$\Pi_{Lv} = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid (Lv) \cdot x = 0 \}$$

<u>obs</u> Como L es no singular $L^{-1} = L$

$$L(v) \neq 0 \iff v \neq 0$$

<u>Obs</u>



es opuesta a

<u>Afirmación</u> Dado un (hiper)plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ existe $v \neq 0$ $v \in \mathbb{R}^3$ $\Pi_{Lv} = \Pi$

además

$$\Pi_{Lv} = \Pi_{Lu} \iff [u] = [v]$$

<u>Dem</u> $\{ ax + by + cz = 0 \} = \Pi$

$$v = L(a, b, c) = (a, b, -c) \qquad \Pi_{Lv} = \Pi$$

$\mathbb{P}^2 \ni p = [v] \quad v \in \mathbb{R}^3 \quad v \neq 0$

$(a,b) \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}^2$

$p = (a : b : 1) \in \mathbb{P}^2$

<u>Definimos</u> La polar de p como

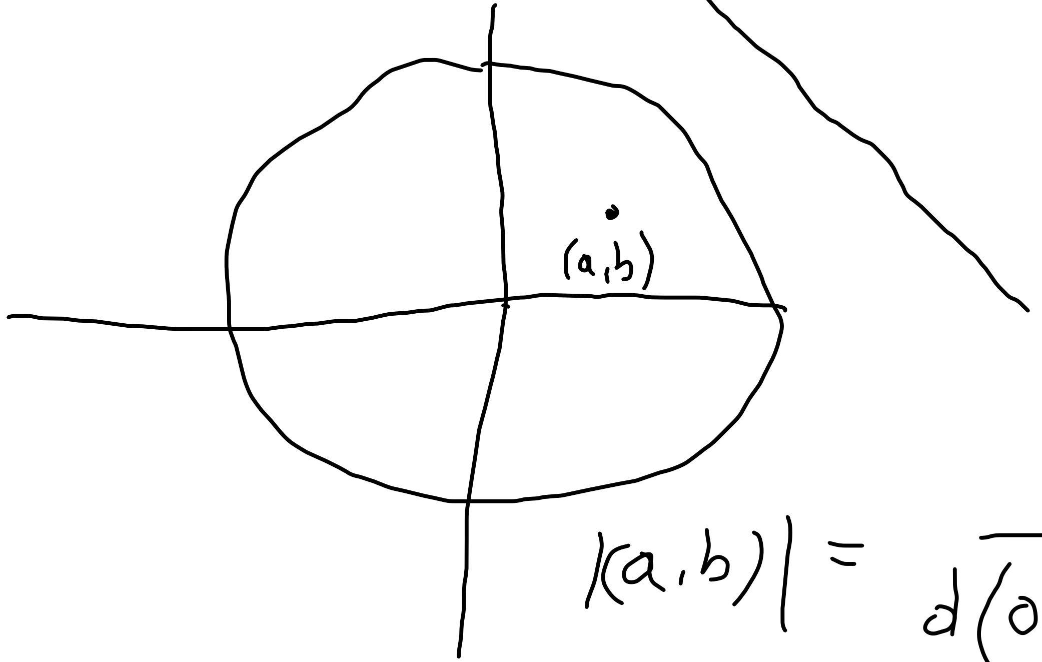
$$p^{\perp} = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid v \cdot_L x = 0 \} = [\Pi_{Lv}] = \ell \text{ línea}$$

$$p^{\perp} : \begin{pmatrix} a & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Por el lema dada ℓ existe un punto $\ell^{\perp}$ tal que $(\ell^{\perp})^{\perp} = \ell$

$$\begin{array}{ccc} p & \longrightarrow & p^{\perp} \\ \ell^{\perp} & \longleftarrow & \ell \end{array}$$

$z = 1 \qquad ax + by = 1$



$(a,0)$

$x = \frac{1}{a}$

$$|(a,b)| = \frac{1}{d(0, \ell)}$$

$$\ell = (a,b)^{\perp}$$

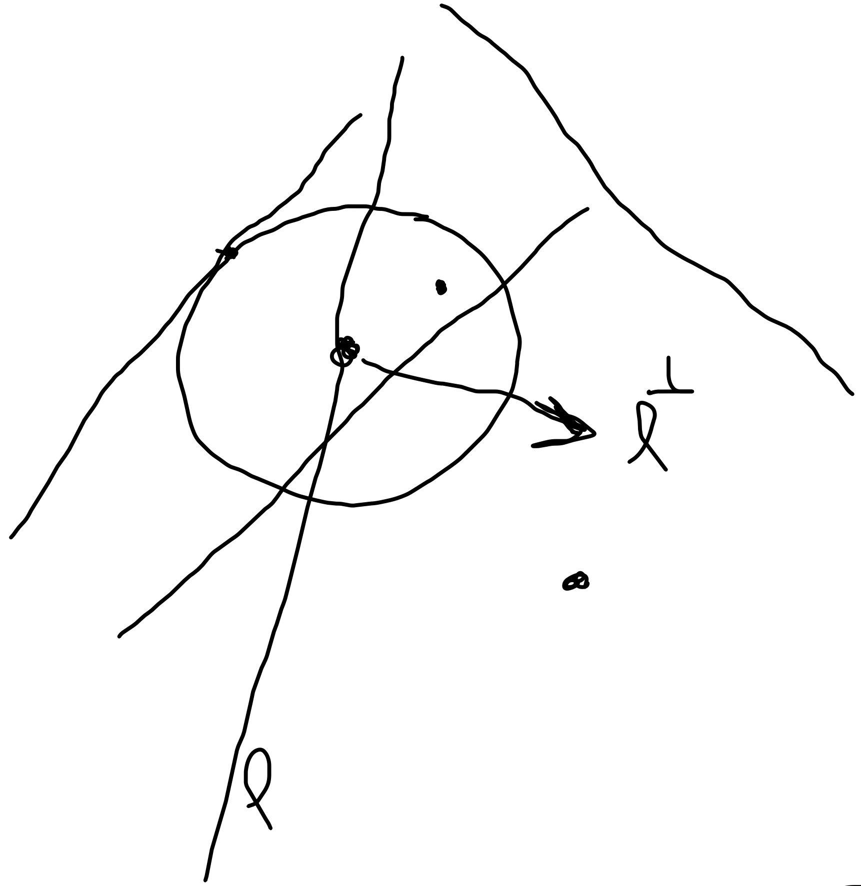
p temporal $\Rightarrow p^{\perp}$ espacial

p luz $\Rightarrow p \in p^{\perp}$ y $p^{\perp}$ es tangente a S^1

p espacial $\Rightarrow p^{\perp}$ es una línea Hiperbólica.

$p = 0 \Rightarrow p^{\perp}$ recta al infinito en $\mathbb{R}^2$

$p \in$ recta al infinito $\Rightarrow p^{\perp}$ la recta por el origen perpendicular a la dirección de p

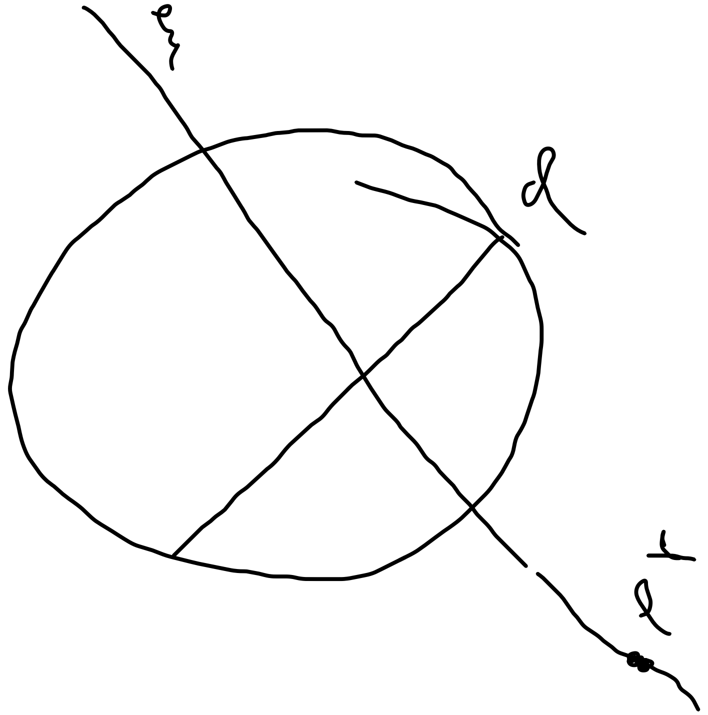


__Def__ p, q son L-ortogonales $p, q \in \mathbb{P}^2$

$$p \in q^{\perp} \Leftrightarrow q \in p^{\perp} \quad (p \cdot_L q = 0)$$

ℓ, ξ líneas en $\mathbb{P}^2$ son ortogonales si

$$\ell^{\perp} \in \xi \Leftrightarrow \xi^{\perp} \in \ell$$



ξ y ℓ son L-ortogonales

$\measuredangle \pi/2$ $(90°)$

Obs