Geometría Analítica 1
Reposición Segundo Parcial

Pablo Espiva Itzel
Gpo 4072

10

1. Considera los puntos $P_1=(2,2)$, $P_2=(4,6)$, $Q_1=(-2,1)$ y $Q_2=(-3,2)$
   a. Da ecuaciones normales para las mediatrices $M_{P_1P_2}$ y $M_{Q_1Q_2}$.
   b. Encuentra la intersección de las mediatrices previas. Llamemosle A
   c. Encuentra la distancia de A a las rectas $L_{P_1Q_1}$ y $L_{P_2Q_2}$

a. Primero encontremos el punto medio

$$M=\left(\frac{2+4}{2},\frac{2+6}{2}\right)=(3,4)$$

Ahora la pendiente del segmento AB

$$M_{AB}=\frac{6-2}{4-2}=\frac{4}{2}=2$$

Ahora la pendiente de la mediatriz

$$=-\frac{1}{2}$$

Ahora escribamos de forma de recta

$$y-4=-\frac{1}{2}(x-3)$$
$$y-4=-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{3}{2}$$
$$y+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{11}{2}=0 \quad \leftarrow M_{P_1P_2}$$

Ahora procedamos igual para $M_{Q_1Q_2}$

$$M=\left(\frac{-2+-3}{2},\frac{1+2}{2}\right)=-\frac{5}{2},\frac{3}{2}$$

$$M_{AB}=\frac{2-1}{-3-(-2)}=\frac{1}{-1}$$

$$M_{med}=-\frac{1}{\frac{1}{-1}}=1$$

$$y-\tfrac{3}{2}=1(x+\tfrac{5}{2})$$
$$y-x-4=0 \quad M_{Q_1Q_2}$$

b. Para hallar A igualemos ambas rectas

$$y+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{11}{2}=0 \qquad y-x-4=0$$
$$y=-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{11}{2} \qquad y=x+4$$

Ahora igualemos ambas rectas

$$-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{11}{2}=x+4$$

Resolvemos x

$$x=1$$

$$\Rightarrow y=x+4$$
$$y=1+4=5$$

Por lo tanto $A=(1,5)$

c. Ahora para encontrar la distancia de A.
Primero encontremos la pendiente de la recta $L_{P_1Q_1}$

$$M = \frac{1-2}{-2-2} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow y - 2 = 1/4\,(x-2)$$
$$y = 1/4\,x + 3/2$$

Usando la formula

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \frac{|1/4(-4) - 1(-1) + 3/2|}{\sqrt{1/4^2 + 1^2}} = \frac{6\sqrt{17}}{17}$$

$$d = \frac{6\sqrt{17}}{17} \;/\!/$$

Ahora haremos lo mismo para $L_{P_2Q_2}$

$$M = \frac{2-1}{-3+2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\Rightarrow y + 2 = -1(x-1)$$
$$y = -x - 1$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \frac{|-1(-1) - 1(1) - 1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$d = \frac{\sqrt{2}}{2} \;/\!/$$

2. Sea n el último dígito de su número de cuenta distinto de 0 considera el vector $u_0 = (2,n) = (2,1)$
   a. Normaliza u_0, denotemos al vector resultante como u_1 y encuentra un vector u_2, tal que $\{u_1, u_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ que es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Demuestra explícitamente que forman una base ortonormal, es decir que satisfacen $u_i \cdot u_j = \delta_{u_j}^{u_i}$
   b. ¿Cuántos vectores $w \in \mathbb{R}^2$ cumplen que $\{u/|u|, w\}$ es una base ortonormal? Explica.
   c. Escribe a los vectores $(1,1)$, $(7,4)$ y $(3,5)$ como combinación lineal de u_1 y u_2.
   d. Refleja al punto $(7,4)$ con respecto a la recta generada por u_1. Escribe a este punto reflejado como combinación lineal de u_1 y u_2. ¿Qué puedes notar de estos coeficientes con respecto a los de $(7,4)$?

Normalicemos al vector $(2,1)$

$$\Rightarrow \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}(2,1) = \frac{1}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1) = u_1$$

$$u_2 = u_1^{\perp} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$$

Entonces tenemos $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)\right) = 0$ Como es 0 esta cumpliendo ser base ortonormal

b. Está condición la cumplen solo dos vectores cuando son iguales y cuando es su compadre ortogonal.

c. Sea $x=(1,1)$

$\Rightarrow (1,1) = \left[(1,1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt5}(2,1)\right)\right]\cdot\overbrace{\frac{1}{\sqrt5}(2,1)}^{u_1} + \left[(1,1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt5}(-1,2)\right)\right]\cdot\overbrace{\frac{1}{\sqrt5}(-1,2)}^{u_2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt5}\left[(1,1)\cdot(2,1)\right]\cdot u_1 + \frac{1}{\sqrt5}\left[(1,1)\cdot(-1,2)\right]\cdot u_2 = \frac{3}{\sqrt5}\cdot u_1 + \frac{1}{\sqrt5}u_2$ //

Sea $x=(7,4)$

$\Rightarrow (7,4) = \left[(7,4)\frac{1}{\sqrt5}(2,1)\right]\cdot\frac{1}{\sqrt5}(2,1) + \left[(7,4)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt5}(-1,2)\right)\right]\cdot\frac{1}{\sqrt5}(-1,2)$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt5}\left((7,4)\cdot(2,1)\right)\cdot u_1 + \frac{1}{\sqrt5}\left((7,4)\cdot(-1,2)\right)\cdot u_2 = \frac{18}{\sqrt5}\cdot u_1 + \frac{-1}{\sqrt5}u_2$ //

Sea $x=(-3,5)$

$\Rightarrow (-3,5) = \left[(-3,5)\cdot\frac{1}{\sqrt5}(2,1)\right]\cdot\frac{1}{\sqrt5}(2,1) + \left[(-3,5)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt5}(-1,2)\right)\right]\cdot\frac{1}{\sqrt5}(-1,2)$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt5}\left((-3,5)\cdot(2,1)\right)\cdot u_1 + \frac{1}{\sqrt5}\left((-3,5)\cdot(-1,2)\right)\cdot u_2 = \frac{-1}{\sqrt5}u_1 + \frac{13}{\sqrt5}u_2$ //

d. $\bar{x}=(7,4)$ $\quad c=0$

$\mathcal{L}: u\cdot x = c \; = \; \mathcal{L}: 1\cdot x = 0$

$g(x) = \bar{x} + 2(c - 1\cdot\bar{x})1$

$g(7,4) = (7,4) + 2(0 - 1\cdot(7,4))\cdot 1$

$g(7,4) = (7,4) + 2(-1\cdot(7,4))\cdot 1$

$g(7,4) = (7,4) + (-14,-8)\cdot 1$

$g(7,4) = (-7,-4)$ //

Ahora a este punto escribamoslo como combinación lineal de u_1 y u_2.

Sea $x=(-7,-4)$

$\Rightarrow (-7,-4) = \left[(-7,-4)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt5}(2,1)\right)\right]\cdot\frac{1}{\sqrt5}(2,1) + \left[(-7,-4)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt5}(-1,2)\right)\right]\frac{1}{\sqrt5}(-1,2)$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt5}\left((-7,-4)\cdot(2,1)\right)\cdot u_1 + \frac{1}{\sqrt5}\left((-7,4)\cdot(-1,2)\right)\cdot u_2 = \frac{-18}{\sqrt5}u_1 + \frac{15}{\sqrt5}u_2$

Podemos observar que u_1 y u_2 son linealmente independientes por lo tanto sabemos que forman una base en $\mathbb{R}^n$.

3. Sea C la circunstancia $x^2+y^2-6x+8y=0$.

a) Encuentra el centro a y el radio r de C. Escríbela de la forma $(x-a)\cdot(x-a)=r^2$

b) Encuentra las rectas tangentes a C que pasan por el punto $P=(37/4,-4)$ sus ecuaciones y los puntos de tangencia.

c) Elige un punto C intermedio en el segmento de recta $\overline{QR}$ conecta a los puntos de tangencia, encuentra la ecuación de su recta polar. P_{e_1} y verifica que p está en dicha polar

a. $x^2+y^2-6x+8y=0$

$x^2-6y+y^2+8y=0$

~~xxxxxxx~~ $(x^2-6y+9)+(y^2+8y+16) = 9+16$

$(x-3)^2+(y-4)^2 = 25$

Centro $=(3,4)$

Radio $=(5)$

b. Recordemos nuestra ecuación del circulo $(x-3)^2+(y-4)^2=25$

$P=(37/4,-4)$

$\Rightarrow y+4=m(x-37/4)$

$y=m(x-37/4)-4$

Sustituimos en la ecuación del circulo

$(x-3)^2+(mx-37/4m-4-4)^2=25$

$(x-3)^2+(mx-37/4m-8)^2=25$

$(mx-37/4m-8)^2=(mx-(37/4m+8))^2=m^2x^2-2m(37/4m+8)x+(37/4m+8)^2$

$\Rightarrow (m(x-37/4)-8)^2=m^2(x-37/4)^2-2m\cdot 8(x-37/4)+64$

$=(m^2+1)x^2-(6+74m^2/4+16m)x+(9+1369m^2/16+148m+64)=25$

Resolviendo tenemos que la recta tangente es $m=-1.28$

Sustituyendo en la ecuación de la recta tenemos $y=-1.28(x-37/4)-4$

Resolviendo los puntos de tangencia $(x_1,y_1)\approx(-0.0782,7.94)$

$\Rightarrow$ la recta tangente toca en el punto $(x_2,y_2)\approx(6.0782,0.06)$

$L\to(-0.0782,7.94)$ y $(6.0782,0.06)$ //

c. Encontremos los puntos que conectan a los puntos

$P_1=(-0.0782,7.94)$

$P_2=(6.0782,0.06)$

$c=\left(\frac{7.94+0.06}{2},\frac{-0.0782+6.0782}{2}\right)=\frac{8}{2},\frac{6}{2}=3,4$

Ahora verifiquemos que está en la polar

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(3-3)^2+(4-4)^2}=\sqrt{0+0}=0$ //

4 Sean $p=(-1,3)$ y $q=(3,-1)$

a) Encuentra la ecuación vectorial de la circunferencia que tiene al segmento $\overline{pq}$ como diámetro

b) Elige un número $r\in(0,1)$, $r\neq\frac{1}{2}$ y considera el punto $a=p+r(q-p)$

Encuentra el conjugado armonico de a.

a. Primero encontremos el centro de la circunferencia.

$C=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{-1+3}{2},\frac{3-1}{2}\right)=(1,1)$

Ahora encontremos el radio

$d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(3-(-1))^2+(-1-3)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$

el radio es la mitad de la distancia $r=2\sqrt{2}$

Ahora encontremos la ecuación vectorial

$r(t)=C+r\cos(t)\hat{i}+r\sin(t)$

$\Rightarrow =(1,1)+2\sqrt{2}\cos(t)\hat{i}+2\sqrt{2}\sin(t)\hat{j}$

b. sea $r=1$

Calcular a

$q-p=(3-1)-(-1,3=(4,-4)$

$a=p+r(q-p)=(-1,3)+1(4-4)=(-1+4,3-4)$

Ahora calculemos el conjugado armonico

$a'=C+\frac{r^2}{|a-c|^2}(a-c)$

$a-c=(-2+4,2-4)$

$|a-c|^2=8-32r+32r^2$

$a'=(1,1)+\frac{(2\sqrt{2})^2}{8-32r+32r^2}(-2+4,2-4)$

$a'=(1,1)+\frac{8}{8-32r+32r}=(-2+4,2-4)$ //