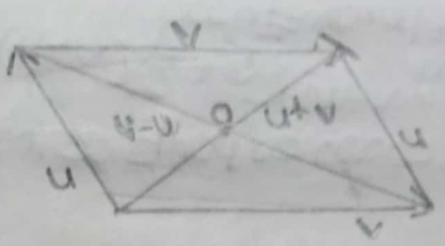
7

Reposición del primer parcial - Sánchez Estrada Andrés

1.- Dados dos vectores u y v en $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes, el paralelogramo que definen tiene como vértices los puntos 0, u, v y u+v (como la figura). Demuestra que sus diagonales, es decir los segmentos de 0 a u+v y de u a v se intersectan en su punto medio.



Para demostrar que sus diagonales se intersectan en el punto medio debemos de parametrizar las diagonales, entonces recordemos como parametrizar una recta

$\mathcal{L}: \{p + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}^n\}$

Entonces la recta u+v, queda así.

$\mathcal{L}_{u+v}: \{t(u+v) \mid t \in \mathbb{R}^n\}$, y para la recta u, v queda así

$\mathcal{L}_{v-u}: \{u + r(v-u) \mid r \in \mathbb{R}^n\}$

Ahora como podemos apreciar el punto O está en el centro del paralelogramo pero debemos demostrar que ese dicho punto es la mitad

Demostración)

Sean u, v dos vectores en $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes lo que quiere decir que no existe una λ tal que $\lambda u = v$ o viceversa que se definen en el paralelogramo y tiene como vértices los puntos 0, u, v y u+v

P.D: Sus diagonales se intersectan en su punto medio

Parametrizando las rectas del paralelogramo tenemos lo siguiente.

$\mathcal{L}_{u+v}: \{p + t(u+v) \mid t \in \mathbb{R}^n\}$ y $\mathcal{L}_{v-u}: \{p + t(v-u) \mid t \in \mathbb{R}^n\}$

Para encontrar el punto medio igualemos ambas rectas.

$\Rightarrow \mathcal{L}_{u+v} = \mathcal{L}_{v-u}$, es decir que:

$\Rightarrow t(u+v) = u + r(v-u)$

$\Rightarrow tu + tv = u + rv - ru$

$\Rightarrow$ Separando los vectores u, v

$\Rightarrow t\cancel{u} = (1-r)\cancel{u}$, $t\cancel{v} = r\cancel{v}$

Es decir que obtenemos un sistema de ecuaciones

$\Rightarrow t = 1 - r$ y $t = r$

y si resolvemos el sistema de ecuaciones nos queda lo siguiente

$t = 1 - t$

$2t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{2} = r$

Ahora sustituyamos en las ecuaciones parametrizadas

$\Rightarrow \mathcal{L}_{u+v} = \{ \frac{1}{2}(u+v) \mid \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^n \}$ y $\mathcal{L}_{v-u} : \{ u + \frac{1}{2}(v-u) \mid \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^n \}$

y como podemos observar en ambos casos su punto de intersección es el punto medio osea la mitad

$\therefore$ se intersectan en el punto O y es el punto medio

2.- Usando coordenadas, demuestra que dos vectores u y v en $\mathbb{R}^2$ son perpendiculares si y sólo si $v \parallel u^\perp$

Antes de demostrar lo que piden veamos que quiere decir que dos vectores son perpendiculares

Dos vectores son perpendiculares si, sólo si

$u \cdot v = 0$

Demostración) Si $u \cdot v = 0 \Rightarrow v \parallel u^\perp$ $\Rightarrow$)

Sea $u = (2,0)$ y $v = (0,2)$

$\Rightarrow u \cdot v = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 0 \Rightarrow u \cdot v = 0$

Consideremos $u^\perp = (0,2)$ y verifiquemos que v es paralelo a $u^\perp$

$\Rightarrow$ Si $v \parallel u^\perp$ se debe cumplir que $v = \lambda u^\perp$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}^2$

Esto implica que:

$v_1 = \lambda(0)$ y $v_2 = \lambda(2)$

Sustituimos $v_1 = \lambda(0)$ y $v_2 = \lambda(2)$ en el producto punto $u \cdot v$

$\Rightarrow u_1 v_1 + u_2 v_2 = 2(\lambda(0)) + 0(\lambda(2))$

$\Rightarrow \lambda(2 \cdot 0) + \lambda(2 \cdot 0) = \lambda(0) + \lambda(0) = 0$ //

Por lo tanto si $u \cdot v = 0$ se cumple que $v \parallel u^\perp$

$\Leftarrow$) Si $v \parallel u^\perp \Rightarrow u \cdot v = 0$

Sea $v \parallel u^\perp$ entonces: $v = \lambda u^\perp = \lambda(0,2)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}^2$

Sustituyendo $v = \lambda(0,2)$ en el producto punto nos queda lo sig:

$u \cdot v = 2 \cdot \lambda(0) + 0\lambda(2) = \lambda(2 \cdot 0) + \lambda(2 \cdot 0) = \lambda(0) + \lambda(0) = 0$ //

$\therefore u \cdot v = 0$ //

3º Da una expresión paramétrica para el plano que pasa por los siguientes puntos $a=(2,0,1)$, $b=(0,1,1)$ y $c=(-1,2,0)$

Como hemos visto en el primer ejercicio para parametrizar a una recta tiene que estar de la forma.

$\mathcal{L}: \{p+t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$

y ya tenemos los puntos del plano ahora nos falta obtener los vectores directores del plano para ello se definen restando el punto a a los otros puntos.

$\Rightarrow$ Vector $\vec{v_1}$

$\vec{v_1} = b-a = (0,1,1)-(2,0,1) = (-2,1,0)$

$\Rightarrow$ Vector $\vec{v_2}$

$\vec{v_2} = c-a = (-1,2,0)-(2,0,1) = (-3,2,-1)$

Ahora solo debemos darle forma de plano parametrizado, que es de la forma

$\mathcal{P}(u,v) = a + u\vec{v_1} + v\vec{v_2}$

Ahora sustituyendo

$\mathcal{P}(u,v) = (2,0,1) + u(-2,1,0) + v(-3,2,-1)$

$\mathcal{P}(u,v) = (2,0,1) + (-2u,u) + (-3v,2v-v)$

$\mathcal{P}(u,v) = (2,-2u,-3v,\ 0-2u+2v,\ 1-v)$

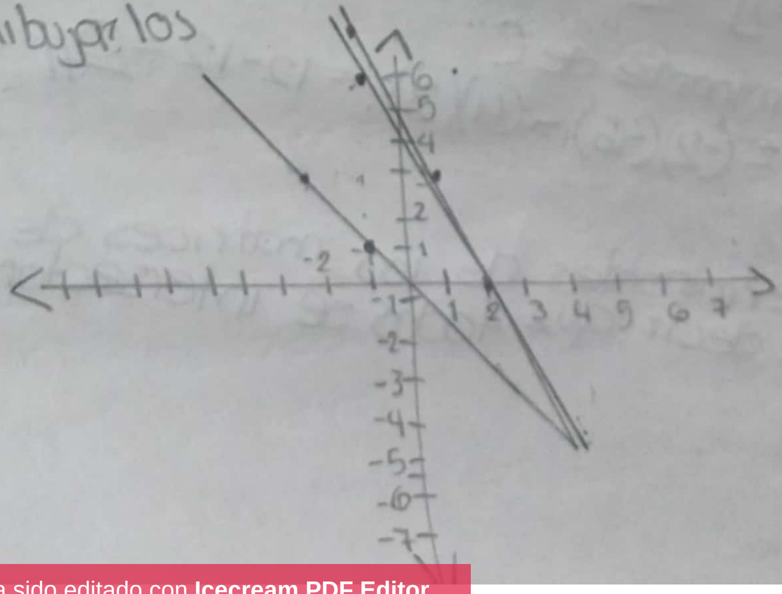
$\Rightarrow \mathcal{P}(u,v) = \{(2-2u-3v,\ 0-2u+2v,\ 1-v) \mid u,v \in \mathbb{R}\}$

4º Determina cómo se intersectan las rectas siguientes, usando únicamente el determinante

$\mathcal{L}_1 = \{(3,-2)+t(1,-2) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{L}_2 = \{(1,3)+s(-2,4) \mid s \in \mathbb{R}\}$ y

$\mathcal{L}_3 = \{(-1,6)+r(3,-6) \mid r \in \mathbb{R}\}$. Dibujalos para entender qué esta pasando

Vamos a dibujarlos



Dadas 3 rectas definidas de la siguiente manera

$\mathcal{L}_1=\{(3,-2)+t(1,-2)\mid t\in\mathbb{R}\}$, $\mathcal{L}_2=\{(1,3)+s(-2,4)\mid s\in\mathbb{R}\}$ y

$\mathcal{L}_3=\{(-1,6)+r(3,-6)\mid r\in\mathbb{R}\}$

Ahora sabemos que dos rectas en $\mathbb{R}^2$ se intersectan, sus vectores direccionales deben ser linealmente dependientes o que la matriz formada por los vectores direccionales y el vector entre sus puntos sea igual a 0

$\Longrightarrow$ formemos dicha matriz y veamos si su determinante es igual a 0

Para $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$

Sea $A=\begin{bmatrix}\vec{v_1} & \vec{v_2} & P_2-P_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & (1-3)\\ -2 & 4 & (3-(-2))\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 4 & 5\end{bmatrix}$

Ahora obtengamos el determinante de A

$\det(A)=\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 4 & 5\end{bmatrix}=(1)(4)-(-2)(-2)=4-4=\underline{0}\,//$

$\det(A)=0$

Para $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_3$

Sea $B=\begin{bmatrix}\vec{v_1} & \vec{v_3} & P_3-P_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & (-1-3)\\ -2 & -6 & (6-(-2))\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -4\\ -2 & -6 & 8\end{bmatrix}$

Calculamos el determinante

$\mathrm{Det}(B)=\begin{bmatrix}1 & 3 & -4\\ -2 & -6 & 8\end{bmatrix}=(1)(-6)-(-2)(3)=-6-(-6)=-6+6=\underline{0}\,//$

$\Rightarrow \det(B)=0$

Para $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_3$

Sea $C=\begin{bmatrix}\vec{v_2} & \vec{v_3} & (P_3-P_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & (-1-1)\\ 4 & -6 & (6-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -2\\ 4 & -6 & 3\end{bmatrix}$

Calculemos el determinante de C

$\mathrm{Det}(C)=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -2\\ 4 & -6 & 3\end{bmatrix}=(-2)(-6)-(4)(3)=12-12=\underline{0}\,//$

$\therefore$ Como todos los determinantes de las matrices de las líneas son igual a 0 quiere decir que todas se intersectan en algún punto.

scResuelva los siguientes incisos
a) Da una descripción paramétrica de la recta dada por la ecuación $2x-y=2$
b) Encuentra una ecuación lineal normal para la recta que pasa por los puntos (2,0) y (1,1)

a) Para este inciso nos piden encontrar una descripción paramétrica de la recta con la ecuación $2x-y=2$
Entonces primero reescribimos la ecuación en términos de y

$y=2x-2$

Ahora sea $x=t$

$\Rightarrow y=2t-2$

Y como podemos ver ya tiene la forma de una recta parametrizada

$\Rightarrow \mathcal{L}=\{(t,2t-2)\mid t\in\mathbb{R}\}$

$\Rightarrow \mathcal{L}=\{(0,2)+t(1,2)\mid t\in\mathbb{R}\}$

b) Para encontrar una ecuación normal que pase por dichos puntos primero tenemos que encontrar el vector director de dicha ecuación

Entonces el vector se encuentra restando los puntos dados

$\vec{v}_1=(1-2,1-0)=(-1,1)$

Ahora para encontrar el vector normal solo necesitamos a vector perpendicular al vector encontrado

$n=(1,1)$

Ahora recordemos la ecuación general de una recta normal la cual e

$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$

Entonces sustituimos

$1(x-2)+1(y-0)=0$

Simplificamos

$x+y-2=\underline{0}$ //