Geometría Analítica

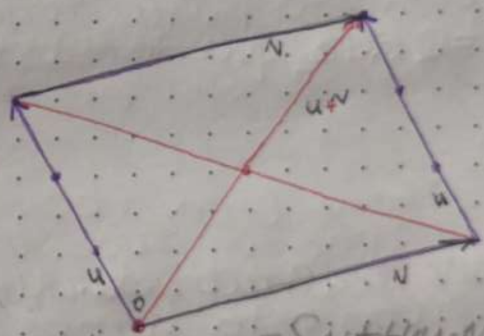
Reposición del primer parcial

Grupo: 4072 Alumna: Grajeda González Lisseth Lizbeth
No de cuenta: 323256426

Profesor: Ramón Reyes Carrión

Introcciones: Resuelve los 5 ejercicos indicados abajo, para el segundo ejercicio puede elegir entre 2) y 2') y analogamente para el tercero, el examen es individual, cualquier conducta que falte a las normas de honestidad académica y ética anulara la entrega del examen.

1) Dados dos vectores u y v en $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes, el paralelogramo que definen tiene como vértices los puntos O, u, v y $u+v$. Demuestra que sus diagonales, es decir, los segmentos de O a $u+v$ y de u a v se intersectan en su punto medio.



Veamos para empezar que dos vectores son linealmente independiente cuando ninguno de ellos puede ser expresado como una combinación lineal del otro.
Con esto veamos lo siguiente

$v+w=u \Rightarrow w=u-v$ Veamos que $L_1 = L_{vu} = \{v+t(u-v) \mid t \in \mathbb{R}\}$

y $L_2 = L_0(u+v) = \{0+s((u+v)-0) \mid s \in \mathbb{R}\}$ de un $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ tq.
Dados s y t como escalares, buscamos $x \in L_1 \cap L_2$ y si las
Tengamos $\bar{x} = v+t(u-v)$ y $\bar{x} = s(u+v)$ tendremos
igualamos ambas $\bar{x}$

$$v+t(u-v)=s(u+v)$$
$$v+tu-tv=su+sv$$
$$v+tu-tv=sv-sv=\vec{0}$$
$$v-tv-sv+(tu-su)=\vec{0}$$
$$v(1-t-s)+u(t-s)=0$$
$$t=1-s+t=s$$
$$2t=1 \quad y \quad 2s=1$$
$$t=\frac{1}{2} \qquad s=\frac{1}{2}$$

2). Demuestra que tres puntos a, b y c son no colineales si y solo si los vectores $u=(b-a)$ y $v=(c-a)$ son linealmente independientes.

2'). Usando coordenadas demuestra que dos vectores u y v en $\mathbb{R}^2$ son perpendiculares si $v \parallel u^{\perp}$.

Primero que nada recordemos la condición de perpendicularidad: Dos vectores $u=(u_1, u_2)$, $v=(v_1, v_2)$ son perpendiculares si el producto punto es 0 $\Rightarrow$ $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$

Ahora bien, veamos que $u^{\perp} = (-u_2, u_1)$

Recordemos la condición de paralelismo: Dos vectores v y u son paralelos si $\exists$ un escalar λ t.q. $v = \lambda u^{\perp} = \lambda(-u_2, u_1)$.

Ahora apliquemos estas condiciones a la demostración

$\Rightarrow$] Veamos para u y v si son perpendiculares:
Véase que si los vectores u y v son perpendiculares, entonces $u \cdot v = 0 \Rightarrow (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$; queremos demostrar que $v \parallel u^{\perp}$, si $v = (v_1, v_2) \Rightarrow \exists \lambda$ t.q. $(v_1, v_2) = \lambda(-u_2, u_1)$
$\Rightarrow v_1 = -\lambda u_2$ y $v_2 = \lambda u_1$; sustituyendo en la ecuación del producto punto tendremos: $u_1(-\lambda u_2) + u_2(\lambda u_1) = -\lambda u_1 u_2 + \lambda u_2 u_1 = 0$ $\therefore$ lo que demuestra que $v \parallel u^{\perp}$.

$\Leftarrow$]
Ahora bien veamos para $v \parallel u^{\perp}$; Sup. $v = \lambda u^{\perp} \Rightarrow$
Tenemos que $v = \lambda(-u_2, u_1)$ p.d. $u \cdot v = 0$, sustituimos v en el Producto Punto: $u \cdot v = u_1(-\lambda u_2) + u_2(\lambda u_1) = -\lambda u_1 u_2 + \lambda u_2 u_1 = 0$
$\therefore$ con esto vemos que u y v son perpendiculares.

Con esto demostramos que u y $v \in \mathbb{R}^2$ son perpendiculares si $v \parallel u^{\perp}$.

3) Da una expresión paramétrica para el plano que pasa por los siguientes puntos $a = (2,0,1)$, $b = (0,1,1)$ y $c = (-1,2,0)$

La formula para sacar la expresión paramétrica de un plano es:

$$\vec{r}(s,t) = \vec{a} + t\,\vec{ab} + s\,\vec{ac}$$

donde t y s son escalares

Para sacar $\vec{ab}$ y $\vec{ac}$ restamos punto final menos inicial, ie:

$$\vec{ab} = (0,1,1) - (2,0,1) = (-2,1,0)$$
$$\vec{ac} = (-1,2,0) - (2,0,1) = (-3,2,-1)$$

Una vez obtenido esto sustituimos los vectores $\vec{ab}$ y $\vec{ac}$ en la formula paramétrica, y tenemos

$$\underbrace{\vec{r}(s,t) = (2,0,1) + t(-2,1,0) + s(-3,2,-1)}_{\text{Esta es la ecuación paramétrica del plano}}$$

Ahora bien, para llegar a las ecuaciones hacemos lo siguiente:

operamos:

Multiplicamos los escalares por los vectores

$$\vec{r}(s,t) = (2,0,1) + (-2t, t, 0) + (-3s, 2s, -s)$$

Sumamos

$$\vec{r}(s,t) = (2 - 2t - 3s,\ 0 + t + 2s,\ 1 + 0 - s)$$

Las separamos y obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 - 2t - 3s \\ y = 0 + t + 2s \\ z = 1 + 0 - s \end{cases}$$

1) Determina como se intersectan las rectas siguientes usando, usando únicamente el determinante:

$L_1 = \{(3,-2) + t(1,-2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$L_2 = \{(1,3) + s(-2,4) \mid s \in \mathbb{R}\}$

$L_3 = \{(-1,6) + r(3,-6) \mid r \in \mathbb{R}\}$

Primero determinemos el origen y el vector director de cada recta:

$L_1 = (3,-2)$ vector director $(1,-2)$

$L_2 = (1,3)$ vector director $(-2,4)$

$L_3 = (-1,6)$ vector director $(3,-6)$

Seguimos con los determinantes (usamos los vectores directores)

a) Para L_1 y L_2

$\begin{matrix}(1,-2)\\(-2,4)\end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix} = 4-4=0$ Como es 0 significa que son paralelas.

b) Para L_1 y L_3

$\begin{matrix}(1,-2)\\(3,-6)\end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -6\end{pmatrix} = -6-(-6)=0$ En este caso tenemos que son coincidentes

c) Para L_2 y L_3

$\begin{matrix}(-2,4)\\(3,-6)\end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & -6\end{pmatrix} = 12-12=0$ Como es 0 significa que son paralelas

Para b).

$\begin{cases} t-3r=-4 \ldots ① \\ -2t+6r=8 \ldots ② \end{cases}$

Multiplicamos ① por ②

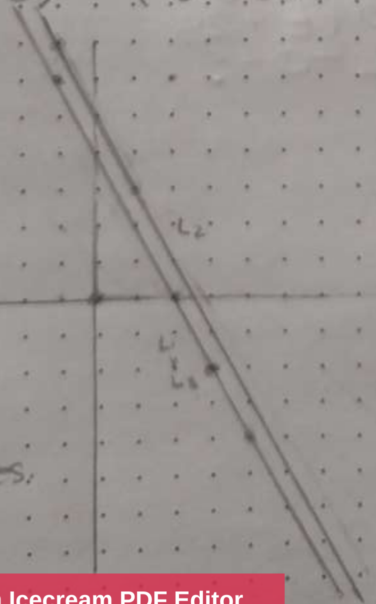
$[2t-6r=-8]$

Tenemos

$[2t-6r=-8]$ y $[-2t+6r=8]$

Las sumamos y nos queda $0=0$

∴ es una identidad y por ende son coincidentes.



Para a) y c) vemos que tenemos los sig. sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 3+t = 1-2s \ ① \\ -2-2t = 3+4s \ ② \end{cases} \longrightarrow t=-2-2s$ sustituimos en ②

$-2-2(-2-2s)=3+4s$

$-2+4+4s=3+4s$

$2=3$! ∴ son paralelas

c) $\begin{cases} -2s+3r=-2 \ ① \\ 4s+6r=3 \ ② \end{cases} \longrightarrow$ Multiplicamos ① por ②

$[-4s+6r=-4]$.

Tenemos $[-4s+6r=-4]$ y $[4s+6r=3]$

sumamos ambas ecuaciones y queda $0=-1$! ∴ son paralelas

5) Resuelve los siguientes incisos:

a) Da una descripción paramétrica de la recta dada por la ecuación: $2x-y=2$

Veamos que $(2,-1)=d^{\perp} \Rightarrow (d^{\perp})^{\perp}=d$ i.e. $d=(-1,-2)$ con d siendo el vector director.

Sup: $x=0$, despejamos y obtenemos que:

$$-y = 2-2x$$
$$-y = 2-0$$
$$-y = 2$$
$$y = -2$$

con esto vemos que el punto es $(0,-2)$ y sustituimos en la formúla paramétrica:

$p+\lambda v$ quedando $p=(0,-2)$ y $v=(-1,-2)$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}=\{(0;-2)+\lambda(-1;-2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

b) Encuentra una ecuación normal para la recta que pasa por los puntos $(2,0)$ y $(1,1)$

Veamos a $(2,0)$ y $(1,1)$ como P y Q.

Ahora bien, recordemos la formú de la ecuación normal que es:

$$ax+by=c$$

Veamos que $Q-P=-1,1$ i.e $(1,1)-(2,0)=-1,1$

Notemos que un vector normal a la recta es:

$$v=[(2,0)-(1,1)]^{\perp}=(1,-1)^{\perp}=(1,1)$$

Una vez obtenido esto tenemos que podemos hallar la ecuación normal de la recta, usando un un punto en la recta y el vector normal, sea $(x,y)\in\mathcal{L}$

$$\Rightarrow P+t(Q-P)=(2,0)+t(-1,1)$$

$$\Rightarrow x=2$$
$$y=0$$

Ahora bien veamos que $d^{\perp}=(-1,1)^{\perp}=(1,1)$ que son los coeficientes de $ax+by$ con esto vemos que $x+y=2$ puesto que $2+0=2$

$x+y=2$ es la ecuación normal de la recta.