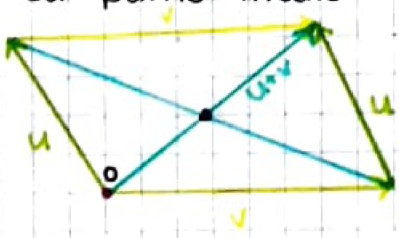
Gómez Hernández Ximena 10/Diciembre/2024

Grupo: 4012

10

# Geometría Analítica I
## Reposición del Primer Parcial

1 1. Dados dos vectores u y v en $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes, el paralelogramo que definen tiene como vértices los puntos O, u, v y u+v (como en la figura. Demuestra que sus diagonales, es decir los segmentos de O a u+v y de u a v se intersectan en su punto medio.




Sean:

$\mathcal{L}_1 = \{u + t(v-u) \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}_{uv}$

$\mathcal{L}_2 = \{0 + s((u+v)-0) \mid s \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}_{o(u+v)}$

Buscamos la intersección de ambas líneas, es decir, el punto $x \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, ie.

$x = u + t(v-u)$ y $x = s(u+v)$

$$\Rightarrow u + t(v-u) = s(u+v)$$
$$u + tv - tu = su + sv$$
$$u + tv - tu - su - sv = \bar{0}$$
$$u - tu - su + tv - sv = \bar{0}$$
$$u(1-t-s) + v(t-s) = \bar{0}$$

Igualando a cero

$\Rightarrow 1 - t - s = 0$ y $t - s = 0$

$1 = t + s$ ① $\qquad t = s$ ②

Sustituyendo ② en ①

$$\Rightarrow 1 = t + s$$
$$1 = s + s$$
$$1 = 2s$$
$$s = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow t = s = \frac{1}{2}$$

$\therefore x \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}$, así podemos concluir que sus diagonales se intersectan en el punto medio.

2. Demuestra que tres puntos a, b y c son no colineales si, y sólo si, los vectores $u=(b-a)$ y $v=(c-a)$ son linealmente independientes.

Veamos la expresión de la siguiente forma
"a, b y c son no colineales sii $u=(b-a)$ y $v=(c-a)$ son l.i."
Esto equivale a $p \Leftrightarrow q$
Así podemos usar su negación i.e. $\neg p \Leftrightarrow \neg q$,
"a, b y c son colineales sii $u=(b-a)$ y $v=(c-a)$ no son l.i."

DEM

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que a, b y c son colineales

$\Rightarrow$ c está en $\mathcal{L}_{ab}$ y es de la forma $c=a+t(b-a)$

$\Rightarrow c-a=t(b-a)$

$\Rightarrow 1\cdot\underbrace{(c-a)}_{v}+(-t)\underbrace{(b-a)}_{u}=0$

Consideremos a
$\mu v+\lambda u=0 \Rightarrow \mu=\lambda=\bar{0}$

$\Rightarrow 1\cdot v+(-t)\cdot u=0$

Y si tomamos $1=\mu$ y $(-t)=\lambda$, tenemos soluciones que no son 0

$\therefore$ u y v no son linealmente independientes

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $u=(b-a)$ y $v=(c-a)$ no son linealmente independientes

$\Rightarrow \exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ t.q. $\lambda u+\mu v=\bar{0}$ y $\lambda\neq 0$ ó $\mu\neq 0$

Si $\lambda\neq 0$

$\Rightarrow \lambda u+\mu v=\bar{0}$

$(\lambda u=-\mu v)\ {}^{1}/_{\lambda}$

$u=-\frac{\mu}{\lambda}v$

Y como $u=(b-a)$ y $v=(c-a)$

$\Rightarrow b-a=\left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)(c-a)$

$\Rightarrow b=a+\underbrace{\left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)}(c-a)$ $\qquad -\frac{\mu}{\lambda}=t$

$b=a+t(c-a)$

$\Rightarrow$ b es un punto sobre la recta que determinan a y c.

$\therefore$ a, b y c son colineales.

Si $\mu\neq 0$

$\Rightarrow \lambda u+\mu v=0$

$(\mu v=-\lambda u)\ {}^{1}/_{\mu}$

$v=-\frac{\lambda}{\mu}u$ $\qquad -\frac{\lambda}{\mu}=t$

Y como $u=(b-a)$ y $v=(c-a)$

$\Rightarrow c-a=\left(-\frac{\lambda}{\mu}\right)(b-a) \Rightarrow c=a+\underbrace{\left(-\frac{\lambda}{\mu}\right)}(b-a) \Rightarrow c=a+t(b-a)$

$\Rightarrow$ c es un punto sobre la recta que determinan a y b

$\therefore$ a, b y c son colineales. ∎

1

3. Da una expresión paramétrica para el plano que pasa por los siguientes puntos $a = (2, 0, 1)$, $b = (0, 1, 1)$ y $c = (-1, 2, 0)$.

Utilizando

$\mathcal{L}: p + t\vec{v} + s\vec{u}$

Podemos verla como

$\pi: a + t(b-a) + s(c-a)$

$b - a$
$= (0, 1, 1) - (2, 0, 1)$
$= (-2, 1, 0)$

$c - a$
$= (-1, 2, 0) - (2, 0, 1)$
$= (-3, 2, -1)$

Así la expresión paramétrica se ve como:

$\pi: a + t(b-a) + s(c-a)$
$\pi: (2, 0, 1) + t(-2, 1, 0) + s(-3, 2, -1)$
$= (2, 0, 1) + (-2t, t, 0) + (-3s, 2s, -s)$
$= (2 - 2t - 3s, t + 2s, 1 - s)$
$\Rightarrow \pi: (2 - 2t - 3s, t + 2s, 1 - s)$

$\therefore \pi: \{(2 - 2t - 3s, t + 2s, 1 - s) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$

4. Determina cómo se intersectan las rectas siguientes, usando únicamente el determinante.

$\mathcal{L}_1 = \{(3, -2) + t(1, -2) \mid t \in \mathbb{R}\}$
$\mathcal{L}_2 = \{(1, 3) + s(-2, 4) \mid s \in \mathbb{R}\}$
$\mathcal{L}_3 = \{(-1, 6) + r(3, -6) \mid r \in \mathbb{R}\}$

Dibújalas para entender qué está pasando.

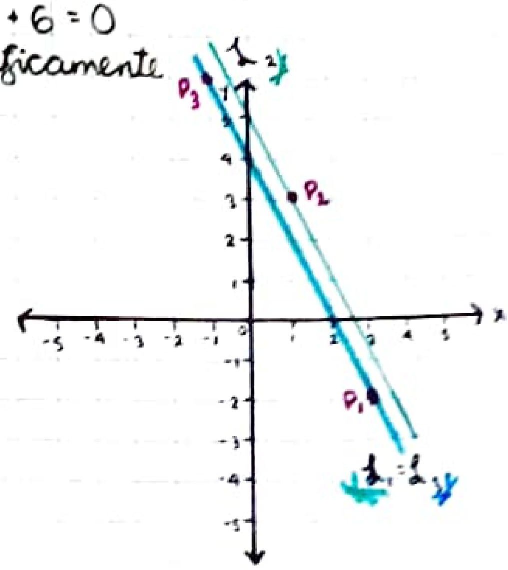
Sean

$u = (1, -2)$ $\quad v = (-2, 4)$ $\quad w = (3, -6)$
$u^{\perp} = (-2, -1)$ $\quad v^{\perp} = (-4, -2)$ $\quad w^{\perp} = (-6, -3)$

Calculando el determinante

$\mathcal{L}_1 = \det(u \cdot v^{\perp}) = (1, -2)(-4, -2) = -4 + 4 = 0$
$\mathcal{L}_2 = \det(v \cdot w^{\perp}) = (-2, 4)(-6, -3) = 12 - 12 = 0$
$\mathcal{L}_3 = \det(w \cdot u^{\perp}) = (3, -6)(-2, -1) = -6 + 6 = 0$

Gráficamente




Dado que los determinantes resultan 0, podemos decir:

* Las rectas no se intersectan ya que son paralelas o son la misma.

En este caso podemos ver que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_3$ son la misma recta

$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_3$

$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_3$ son paralelas a $\mathcal{L}_2$

$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_3 \parallel \mathcal{L}_3$

5. Resuelva los siguientes incisos

a) Da una descripción paramétrica de la recta dada por la ecuación: $2x - y = 2$

Sean

$\vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $\qquad \mathcal{L} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{x} \cdot \vec{v}^{\perp} = \vec{p} \cdot \vec{v}^{\perp}\}$ (Forma normal)

$\vec{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ $\qquad \mathcal{L} = \{\vec{p} + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ (Forma parametrizada)

En este caso $2x - y = \underbrace{(2, -1)}_{\vec{v}^{\perp}} \cdot \underbrace{(x, y)}_{\vec{x}} = \vec{v}^{\perp} \cdot \vec{x}$, obteniendo

$v = (-1, -2)$

$v^{\perp} = (2, -1)$

Así

$$2 = \vec{p} \cdot \vec{v}^{\perp}$$
$$= (p_1, p_2) \cdot (2, -1)$$

Propongamos $p = (1, 0)$

$$\Rightarrow 2 = (1, 0) \cdot (2, -1)$$
$$2 = 2 + 0$$
$$2 = 2 \checkmark$$

Así

$$\mathcal{L} = \{\vec{p} + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathcal{L} = \{(1, 0) + t(-1, -2) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$\therefore$ La descripción paramétrica de $2x - y = 2$ es

$$\mathcal{L} = \{(1, 0) + t(-1, -2) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

b) Encuentra una ecuación normal para la recta que pasa por los puntos $(2, 0)$ y $(1, 1)$

La ecuación paramétrica está dada por

$$\mathcal{L} : \{(2, 0) + t((1, 1) - (2, 0)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Es decir

$$\mathcal{L} : \{(2, 0) + t(-1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Recordemos que la forma normal es $\vec{x} \cdot \vec{v}^{\perp} = \vec{p} \cdot v^{\perp}$ y en este caso

$v = (-1, 1)$

$v^{\perp} = (1, 1)$

$$\Rightarrow (1, 1) \cdot (x, y) = (1, 1) \cdot (2, 0)$$
$$x + y = 2 + 0$$
$$x + y = 2$$

$\therefore$ La ecuación normal es $x + y = 2$