Álgebra Lineal I — Tarea III

Grupo 4145 — Semestre 2024-1

Profesor: Ramón Reyes Carrión
Ayudante: Emmanuel I. González Celio

Fecha de entrega: Lunes 25 de septiembre de 2023

Aviso: **El Primer Examen Parcial se llevará a cabo a finales de la semana del 25 de septiembre (uno de los días 28 ó 29)**. Acordaremos en clase cuál día de estos será.

Instrucciones: Resuelva **5 ejercicios**, incluyendo el 1. Puede **trabajar en equipo**, sin embargo cada persona debe entregar su propia respuesta (la cual puede estar inspirada en la colaboración que haya hecho, pero no puede haber dos respuestas iguales). Preferentemente entregue su tarea de manera presencial. A lo largo de esta lista de ejercicios, $\mathbb{F}$ representa un campo y V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial.

Recordatorio: Una base en un espacio vectorial V es un conjunto de generadores donde las combinaciones lineales son únicas.

1. Encuentra una base de los siguientes espacios:

   a) El espacio de polinomios de grado $\leq p$ en n variables. Los elementos de este espacio son sumas de la forma $\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\ell} \alpha_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$, donde $\ell \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ y la suma de los grados de cada monomio es menor o igual que p.

   b) El espacio de polinomios homogéneos[1] de grado p en n variables.

2. Dada una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$, considere el subconjunto $V_A = \{X \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F}) \ : \ AX = XA\}$, equipado con la suma y multiplicación escalar usuales en las matrices.

   a) Demuestre que V_A es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$.

   b) Tomando $n = 3$ y $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, encuentre V_A si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   c) Encuentre una base para el espacio del inciso previo.

3. Considera la función $f\colon M_{2\times 3}(\mathbb{F}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{F})$, definida por

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Demuestra que f es lineal.

4. Supóngase que $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es lineal y que $f(1,0) = (1,4)$ y $f(1,1) = (2,5)$. ¿Cuál es el valor de $f(2,3)$? ¿És f inyectiva?

5. Sean V y W espacios vectoriales con subespacios $V_1 \subseteq V$ y $W_1 \subseteq W$. Si $f\colon V \to W$ es lineal, probar que $f[V_1] = \operatorname{Im}\left(f|_{V_1}\right) = \{f(v) \mid v \in V_1\}$ es subespacio de W y $f^{-1}[W_1] = \{x \in V \mid f(x) \in W_1\}$ es subespacio de V.

6. Sean V, W y $\tilde{V}$, $\mathbb{F}$-espacios vectoriales. Considera $T \in \operatorname{Hom}(V, \tilde{V})$ y demuestra que las *funciones de composición*

$$R_T\colon \operatorname{Hom}(\tilde{V}, W) \to \operatorname{Hom}(V, W), \quad L_T\colon \operatorname{Hom}(W, V) \to \operatorname{Hom}(W, \tilde{V})$$

   dadas por $L_T(F) = T \circ F$ y $R_T(F) = F \circ T$, son lineales.

7. Una función $f\colon V \to W$ entre espacios vectoriales V y W se dice ***aditiva*** si, para cualesquiera vectores $x, y \in V$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Demuestra que si V y W son espacios vectoriales sobre $\mathbb{Q}$, entonces cualquier función aditiva entre V y W es lineal.

[1] Un polinomio es homogéneo de grado p si (i) no tiene término independiente y (ii) todos sus monomios tienen grado **igual** a p.