Reposición 1er Parcial Geo Analítica Angel Ruiz Bautista

10

1) Dados 2 vectores u y v en $\mathbb{R}^n$...

Sean: $O=(0,0)$; $u=(u_1,u_2)$; $v=(v_1,v_2)$

$\Rightarrow u+v=(u_1+v_1,\ u_2+v_2)$

Sean sus diagonales las rectas de O a $u+v$ y la recta de u a v.

Sea la diagonal de O a $u+v$: $D_1(t)=(1-t)O+t(u+v)=t(u+v)$

$\Rightarrow D_1(t)=(t(u_1+v_1),\ t(u_2+v_2))$

la diagonal de u a v: $D_2(s)=(1-s)u+sv \Rightarrow D_2(s)=((1-s)u_1+sv_1,(1-s)u_2+sv_2)$

Desarrollemos ahora. Si igualamos $D_1(t)$ y $D_2(s) \Rightarrow (t(u_1+v_1),\ t(u_2+v_2))=((1-s)u_1+sv_1,(1-s)u_2+sv_2)$

De aquí obtenemos:

1: $t(u_1+v_1)=(1-s)u_1+sv_1$; 2: $t(u_2+v_2)=(1-s)u_2+sv_2$

Resolvamos t y s el 1

$\Rightarrow t(u_1+v_1)=u_1-su_1+sv_1 \Rightarrow t(u_1+v_1)=u_1+s(v_1-u_1) \Rightarrow t(u_1+v_1)=u_1+s(v_1-u_1)$

$\Rightarrow s=\dfrac{t(u_1+v_1)-u_1}{v_1-u_1}$

De aquí obtenemos que $t=\frac{1}{2}$. Para $D_1(t)=D_1(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(u+v)$

Si igualamos en la ecuación inicial tenemos que:

$x=\frac{1}{2}(u_1+v_1)=(1-s)u_1+sv_1$; $y=\frac{1}{2}(u_2+v_2)=(1-s)u_2+sv_2$

Resolviendo se tiene que $s=\frac{1}{2}$

Sustituimos $s = \frac{1}{2}$ en $D_2(s)$

$\Rightarrow D_2(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v) = \frac{1}{2}(u+v)$

$\therefore$ El punto de intersección de las diagonales es el punto medio de u, v =

$P = \frac{1}{2}(u, v)$

② Demostrar que tres puntos a, b y c son no colineales...

$u = (b-a)$ $v = (c-a)$

Dem: Supongamos que a, b y c colineales

$v = tu$

$\Rightarrow c$ está en $\mathcal{L}(a,b)$ $\Rightarrow c$ es de la forma: $c = a + t(b-a) \Rightarrow c - a = t(b-a)$

$\Rightarrow c - d - t(b-a) = 0$

$\Rightarrow 1 \cdot (c-a) + (-t)(b-a) = 0$. es decir; $1 \cdot v + (-t) \cdot u = \bar{0}$

Así u y v no son linealmente independientes.

$\mu v + \lambda u = \bar{0} \Rightarrow \mu = \lambda = 0$ ⚡ No es lo que se quiere.

Supongamos ahora que $u = b - a$ y $v = c - a$ no son linealmente independientes $\Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ t.q.

$\lambda u + \mu v = \bar{0}$ y $\lambda \neq 0$ ó $\mu \neq 0$

Veamos que si $\lambda \neq 0 \Rightarrow$ podemos despejar a u, obteniendo:

$\frac{1}{\lambda}(\lambda u = -\mu v) \Rightarrow u = \frac{-\mu}{\lambda} v$

Como $u = b - a$ y $v = c - a$, entonces la igualdad se convierte en:

$b - a = (\frac{-\mu}{\lambda})(c - a) \Rightarrow b = a + (\frac{-\mu}{\lambda})(c - a)$

$a + t(c - a)$

$\Rightarrow b$ es un punto que está sobre la recta que determinan a y c.

$\therefore a, b$ y c son colineales

Si $\mu \neq 0$ entonces $\lambda u + \mu v = 0 \Rightarrow \mu v = -\lambda u \Rightarrow v = \frac{-\lambda}{\mu} u$

$(c-a) = \frac{(-\lambda)}{\mu}(b-a) \Rightarrow c = a + \left(\frac{-\lambda}{\mu}\right)(b-a) \Rightarrow c \in \mathcal{L}\, ab.$ //

③ Expresión paramétrica para el plano que pasa por:

$a = (2,0,1)$, $b = (0,1,1)$; $c = (-1,2,0)$

$\mathcal{L}: p + t\vec{v} + s\vec{u}$ $\qquad a + t\underbrace{(b-a)}_{\vec{u}} + s\underbrace{(c-a)}_{\vec{v}}$

$u = b - a = (0,1,1) - (2,0,1) = (-2,1,0)$

$v = c - a = (-1,2,0) - (2,0,1) = (-3,2,-1)$

Obtenemos ahora la expresión paramétrica buscada:

$\pi: a + t(b-a) + s(c-a),\ /\ (2,0,1) + t(-2,1,0) + s(-3,2,-1)$

$= (2,0,1) + (-2t, t, 0) + (-3s, 2s, -s) =$

$= (2-2t-3s,\ t+2s,\ 1-s);\ s,t \in \mathbb{R}$ //

④ Determina como se intersectan... $\mathcal{L}_1 = \{(5,-2) + t(1,-2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{L}_2 = \{(1,3) + s(-2,4) \mid s(-2,4) \mid s \in \mathbb{R}\}$; $\mathcal{L}_3 = \{(-1,6) + r(3,-6) \mid r \in \mathbb{R}\}$

Si $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq \mathcal{L}$ y $\mathcal{J}$ se intersectan exactamente en un punto.

Si $\det(\vec{u}, v) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}$ y $\mathcal{J}$ son paralelas. $\mathcal{L} = \mathcal{J}$; $\mathcal{L} \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$

$\mathcal{L}_1 = (2,0) + t(1,-2)$

$\mathcal{L}_2 = (2,1) + s(-2,4)$

$\mathcal{L}_3 = (1,2) + r(3,-6)$

Det

$= ((1,-2),(-2,4))$

$= (1,-2)\cdot(-4,-2)$

$= -4 + (-2)(-2) = 0$ $\quad \mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas

$(2,0) \in \mathcal{L}_1 \Rightarrow ¿(2,0) \in \mathcal{L}_2?$

$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ tq. $(2,0) = (2,1) + \lambda(-2,4)$

$= (2-2\lambda, 1+4\lambda)$

$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c$ y $b = d$

$\Rightarrow 2 = 2 - 2\lambda \Rightarrow \lambda = 0 \quad \Rightarrow 0 = 1 + 4\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4}$!!

$\therefore \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$

$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_3$

$\det((1,-2),(3,-6)) = (1,-2)\cdot(3,-6) = (1,-2)\cdot(6,3)$

$= (6 + (-2)3) = \emptyset$

$\Rightarrow \mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_3$ son paralelas $\Rightarrow \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_3$ ó $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3 = \emptyset$

$\exists\, \mu \in \mathbb{R}$ tq. $(1,2) = (2,0) + \mu(1,-2) = (2+\mu, 0-2\mu)$

$\Rightarrow 1 = 2 + \mu \Rightarrow \mu = -1$

$\therefore (1,2) \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3 \Rightarrow \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3 \neq \emptyset \quad \underline{\Rightarrow \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_3}$

$\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_3$

$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_1 = \emptyset$

$\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_1 = \emptyset \quad \Rightarrow \mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_3$ son paralelas y no se intersectan.

⑤ a) Da una descripción paramétrica de la recta dada por la ecuación:

$2x-y=2$

Buscamos dos puntos distintos en la recta, para ello tomamos:

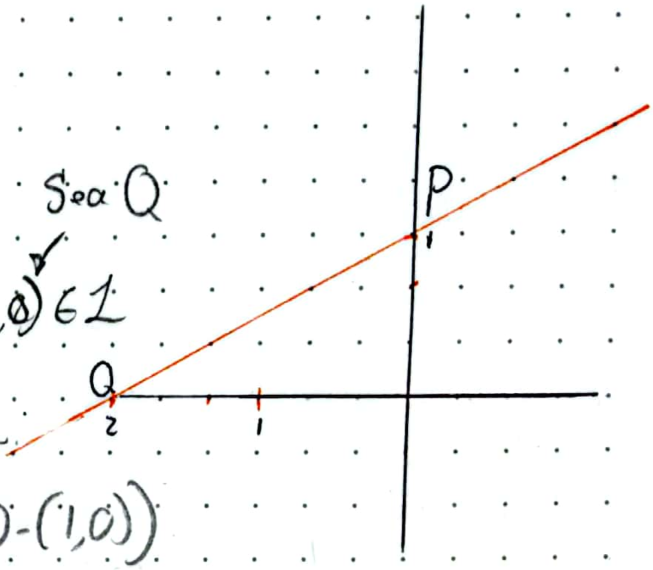
$x=0 \Rightarrow 2(0)-y=2 \Rightarrow -y=2 \Rightarrow y=-2$

Si $x=0 \Rightarrow (0,-2)\in \mathcal{L}$ ← Sea P

Sea Q

Tomemos ahora $y=0$

$\Rightarrow 2x-0=2 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)\in\mathcal{L}$



Así tenemos que P y Q están en $\mathcal{L}$

$\therefore \mathcal{L} = P + t(Q-P) = (1,0)+t((0,-2)-(1,0))$

$=(1,0)+t(-1,-2) = (1-t,\ 2-t)$ //

b) Dar la ecuación normal de la recta que pasa por $(2,0)$; $(1,1)$

$\mathcal{L}: (2,0)+t((1,1)-(2,0)) = \underbrace{(2,0)}_{P}+t\underbrace{(-1,1)}_{V}$

$\vec{d}\cdot\vec{x} = \vec{d}\cdot P$, con $\vec{d} = (\vec{v})^{\perp}$

$\vec{v}=(1,1) \Rightarrow (\vec{v})^{\perp} = (-1,1)^{\perp} = (-1,-1)$

$(-1,-1)\cdot\vec{x} = (-1,-1)\cdot(2,0)$ i.e. $(-1,-1)\cdot(x,y) = -2$

$\Rightarrow -x-y=-2 \Rightarrow x+y=2$ //