Jiménez Álvarez José Fernando - Geometría Analítica I - Grupo: 4072

REPOSICIÓN PRIMER PARCIAL

1) Sean $\mathcal{L}_{u+v} = \{\lambda(u+v) \mid \lambda \in [0,1]\}$ y $\mathcal{L}_{u,v-u} = \{u + \mu(v-u) \mid \lambda \in [0,1]\}$

Busquemos $\mathcal{L}_{u+v} \cap \mathcal{L}_{u,v-u}$ (como no son paralelas, entonces sabemos que sí se intersecan)

Para esto, busquemos λ y μ t.q. $\lambda(u+v) = u + \mu(v-u)$

$\lambda(u+v) = u + \mu(v-u)$

$\Rightarrow \underline{\lambda} u + \underline{\lambda} v = u + \mu v - \mu u = \underline{(1-\mu)} u + \underline{\mu} v$

De aquí notemos que los coeficientes deben ser los mismos

$$\begin{cases} \lambda = 1-\mu & \text{(Para } u\text{)} \\ \lambda = \mu & \text{(Para } v\text{)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda = 1 - \lambda \Rightarrow 2\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} = \mu$

$\Rightarrow \mathcal{L}_{u+v} \cap \mathcal{L}_{u,v-u} = \{\frac{1}{2}(u+v)\} = \{u + \frac{1}{2}(v-u)\}$

Estos puntos son el punto medio de los dos segmentos de recta

$\therefore$ Las diagonales se intersecan en su punto medio $\dashv$

2) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ y $u = b - a$, $v = c - a$

$\Rightarrow$) Sup. que a, b, c no son colineales. P.D. u y v son linealmente independientes

DEM (Por contradicción):

Sup. u y v linealmente dependientes, i.e., $u = \lambda v$

$\Rightarrow b - a = \lambda(c-a)$

$\Rightarrow b = \underbrace{a}_{p} + \lambda \underbrace{(c-a)}_{v}$

Notemos que b se puede expresar de forma paramétrica tomando $p = a$ y $v = c - a$ (pertenecen a la misma recta)

$\Rightarrow a, b, c$ son colineales $\blacktriangledown$

$\therefore u$ y v son lin. independientes $\dashv$

$\Leftarrow$] Sup. que u y v son lin. independientes

P.D. a, b, c no son colineales

DEM (Por Contradicción):

Sup. a, b, c colineales. Al ser colineales, podemos expresar a b como

$$b = a + \lambda(c-a)$$

pues pertenecen a la misma recta

$\Rightarrow$ $b - a = \lambda(c-a)$

$\Rightarrow$ $u = \lambda v$ $\Rightarrow$ u y son lin. dependientes !

$\therefore$ a, b, c no son colineales $\dagger$

3) $a = (2,0,1)$, $b = (0,1,1)$ y $c = (-1,2,0)$

Tomemos $p = a$, $u = b - a$, $v = c - a \in \mathbb{R}^3$

Así, el plano que pasa por estos puntos está dado por

$$\Pi_{p,u,v} = \{p + \lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{a + \lambda(b-a) + \mu(c-a) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Calculemos u y v

$u = b - a = (0,1,1) - (2,0,1) = (-2,1,0)$

$v = c - a = (-1,2,0) - (2,0,1) = (-3,2,-1)$

$\Rightarrow \Pi_{p,u,v} = \{(2,0,1) + \lambda(-2,1,0) + \mu(-3,2,-1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

$\therefore \Pi_{p,u,v} = \{(2 - 2\lambda - 3\mu, \lambda + 2\mu, 1 - \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

4) ¿$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_3$, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3$?

Sean $u=(1,-2)$, $v=(-2,4)$, $w=(3,-6)$ vectores directores de $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_3$ respectivamente.

① $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$:

$$\det(u,v) = u \cdot v^{\perp} = (1,-2)\cdot(-4,-2) = -4+4 = 0$$

② $\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_3$:

$$\det(v,w) = v \cdot w^{\perp} = (-2,4)\cdot(6,3) = -12+12 = 0$$

③ $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3$:

$$\det(u,w) = u \cdot w^{\perp} = (1,-2)\cdot(6,3) = 6-6 = 0$$

Esto nos indica que, o las rectas son paralelas (no tienen intersección), o bien, que son la misma recta.
Para averiguar esto, tomemos algún punto de alguna de las líneas y veamos si está en las otras.

a) $(3,-2) \in \mathcal{L}_1$

¿$(3,-2) \in \mathcal{L}_2$?

Sup. que sí

$\Rightarrow (3,-2) = (1,3) + s(-2,4)$ p.a. $s \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = 1-2s \Rightarrow s = \frac{1-3}{2} = -1 \\ -2 = 3+4s \Rightarrow s = \frac{-2-3}{4} = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow -1 = -\frac{5}{4}$

$\Rightarrow (3,-2) \notin \mathcal{L}_2 \quad \therefore \mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$

b) $(1,3) \in \mathcal{L}_2$ ¿$(1,3) \in \mathcal{L}_3$?

sup. que sí

$\Rightarrow (1,3) = (-1,6) + r(3,-6)$ p.a. $r \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = -1+3r \Rightarrow r = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3} \\ 3 = 6-6r \Rightarrow r = \frac{6-3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow (1,3) \notin \mathcal{L}_3 \quad \therefore \mathcal{L}_2 \parallel \mathcal{L}_3$

c) $(-1,6) \in \mathcal{L}_3$ ¿$(-1,6) \in \mathcal{L}_1$?

sup. que sí

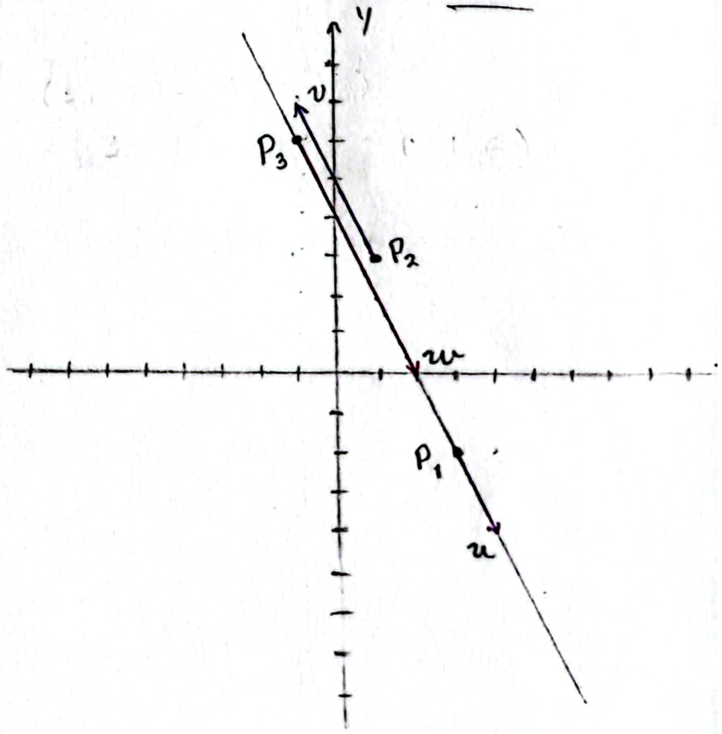
$\Rightarrow (-1,6) = (3,-2) + t(1,-2)$ p.a. $t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 = 3+t \Rightarrow t = -1-3 = -4 \\ 6 = -2-2t \Rightarrow t = \frac{6+2}{-2} = -4 \end{cases}$$

$\Rightarrow -4 = -4$ ✓ $\Rightarrow (-1,6) \in \mathcal{L}_1$

$\therefore \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_3$

$P_1 = (3,-2)$
$P_2 = (1,3)$
$P_3 = (-1,6)$



5)

a) $\mathcal{L}: 2x - y = 2$

$\Leftrightarrow (x,y)\cdot(2,-1) = 2 = p\cdot(2,-1)$ con $p \in \mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$

Si v es vector director de $\mathcal{L}$

$\Rightarrow v^{\perp} = (2,-1) \Rightarrow v = (-1,-2)$

Ahora $p\cdot(2,-1) = 2$

Proponiendo $p = (1,0)$

$(1,0)\cdot(2,-1) = 2$

Tomando $p = (1,0)$ y $v = (-1,-2)$ para la forma paramétrica de $\mathcal{L}$:

$\Rightarrow \mathcal{L}_{p,v} = \{p + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow \mathcal{L} = \{(1,0) + \lambda(-1,-2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\therefore \mathcal{L} = \{(1-\lambda, -2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

b) $a = (2,0)$ y $b = (1,1)$

Tomemos $p = a$ y $v = b - a = (1,1) - (2,0) = (-1,1)$

$\Rightarrow \mathcal{L}: p + \lambda v \Rightarrow \mathcal{L}: a + \lambda(b-a)$

Para llegar a la forma normal, utilizamos la sig. ecuación

$\mathcal{L}: \bar{x}\cdot u^{\perp} = p\cdot u^{\perp}$ con $p \in \mathcal{L}$ y $u \perp v$

Tomando $p = a$ y $u = v^{\perp}$

$\Rightarrow p = (2,0)$ y $u = (-1,-1)$

$\Rightarrow \mathcal{L}: (x,y)\cdot(-1,-1) = (2,0)\cdot(-1,-1)$

Desarrollemos la ecuación de $\mathcal{L}$

$(x,y)\cdot(-1,-1) = (2,0)\cdot(-1,-1)$

$\Leftrightarrow -x - y = -2 + 0$

$\overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} x + y = 2$

$\therefore$ la ecuación normal de $\mathcal{L}$ está dada por $x + y = 2$ //