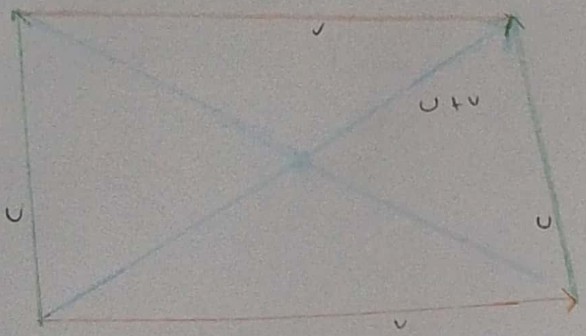
8

Reposición del primer parcial
Geometría analítica
Profesor: Ramón Reyes Carrión
Alumna: Trejo Martínez Ana Sofía

1. Dados dos vectores u y v en $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes, el paralelogramo que definen tienen como vértices los puntos 0, u, v y u+v. Demuestra que sus diagonales, es decir, los segmentos de 0 a u+v y de u a v se intersectan en su punto medio



$L_{u+v} = \{\lambda(u+v) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
$L_{u,v-u} = \{u + \mu(v-u) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$
necesitamos $L_{u+v} \cap L_{u,v-u}$
$\Rightarrow \lambda(u+v) = u + \mu(v-u)$
$\Rightarrow \lambda u + \lambda v = u(1-\mu) + \mu v$
Para u
$\boxed{\lambda = 1-\mu} \rightarrow (1)$
Para v
$\boxed{\lambda = \mu} \rightarrow (2)$
Sustituyendo (2) en (1)
$\lambda = 1 - \lambda$
$\lambda + \lambda = 1$
$2\lambda = 1$
$\lambda = \frac{1}{2} = \mu$

$\Rightarrow L_{u+v} \cap L_{u,v-u} = \left\{ \begin{array}{l} \lambda(u+v) = \frac{1}{2}(u+v) \\ u + \mu(v-u) = u + \frac{1}{2}(v-u) \end{array} \right\}$

∴ Se intersectan en su punto medio

2. Demuestra que tres puntos a, b y c son no colineales si y solo si, los vectores $u=(b-a)$ y $v=(c-a)$ son linealmente independientes

$\Rightarrow$ Supongamos que a, b, c no son colineales
P. d. u y v son linealmente independientes
Por contradicción:
Si u y v son linealmente dependientes
$\Rightarrow v = ku$
$\Rightarrow c-a = k(b-a)$
$\Rightarrow c-a = kb-ka$
$\Rightarrow c=(1-k)a+kb \leftarrow$ c es una combinación lineal de a y b
$\Rightarrow$ a, b, c son colineales ‼
$\therefore$ u y v son linealmente independientes
$\Leftarrow$ Sup. que u y v son linealmente independientes
P.d a, b, c no son colineales
Dem. Por contradicción:
Si a, b, c son colineales
$\Rightarrow c = k_1a + k_2b$
$\Rightarrow c-a = k(b-a)$
$\Rightarrow v = ku$
$\Rightarrow$ u y v son linealmente dependientes ‼
$\therefore$ a, b, c no son colineales

3. Da una expresión paramétrica para el plano que pasa por los siguientes puntos $a=(2,0,1)$, $b=(0,1,1)$ y $c=(-1,2,0)$
$\Pi_{p,u,v} = \{p + \lambda u + \mu v\}$
para $p=a$, $u=(b-a)$, $v=(c-a)$
$\Rightarrow \Pi_{p,u,v} = \{a+\lambda(b-a)+\mu(c-a) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow b-a = (0,1,1)-(2,0,1) = (-2,1,0)$
$c-a = (-1,2,0)-(2,0,1) = (-3,2,-1)$

$\Rightarrow \Pi_{a,b-a,c-a} = \{(2,0,1)+\lambda(-2,1,0)+\mu(-3,2,-1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

5. Resuelva los siguientes incisos

a) da una descripción paramétrica de la recta dada por la ecuación:

$2x - y = 2$

$2x - y = \overbrace{(x, y)}^{\bar{x}} \cdot \overbrace{(2, -1)}^{v^{\perp}}$

$\Rightarrow v = (-1, -2)$, $v^{\perp} = (2, -1)$

$\Rightarrow 2 = (p_1, p_2) \cdot (2, -1)$

Proponemos $p = (1, 0)$

$\Rightarrow 2 = (1, 0) \cdot (2, -1) = (1)(2) + (0)(-1) = 2 + 0 = 2$

$\mathcal{L}_{p,v} = \{ p + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathcal{L}_{p,v} = \{ (1, 0) + \lambda(-1, -2) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

b) Encuentra una ecuación normal para la recta que pasa por los puntos $(2, 0)$ y $(1, 1)$

Sea $p = (2, 0)$ y $v = (1, 1) - (2, 0) = (-3, 1)$

$\Rightarrow v^{\perp} = (-1, -3)$

$\mathcal{L}_{p,v} = \{ \bar{x} \mid \bar{x} \cdot v^{\perp} = p \cdot v^{\perp} \}$

$\Rightarrow \bar{x} \cdot v^{\perp} = p \cdot v^{\perp}$

$\Rightarrow (x \cdot y) \cdot (-1, -3) = (2, 0) \cdot (-1, -3)$

$\Rightarrow -x - 3y = (2)(-1) + (0)(-3) = -2 + 0 = -2$

$\Rightarrow -x - 3y = -2$ ✓