9

Examen 1

November 2020

1 Equipo

Alanis González Sebastián

Temich Piaga Paula

Hernández Trinidad Nicolás

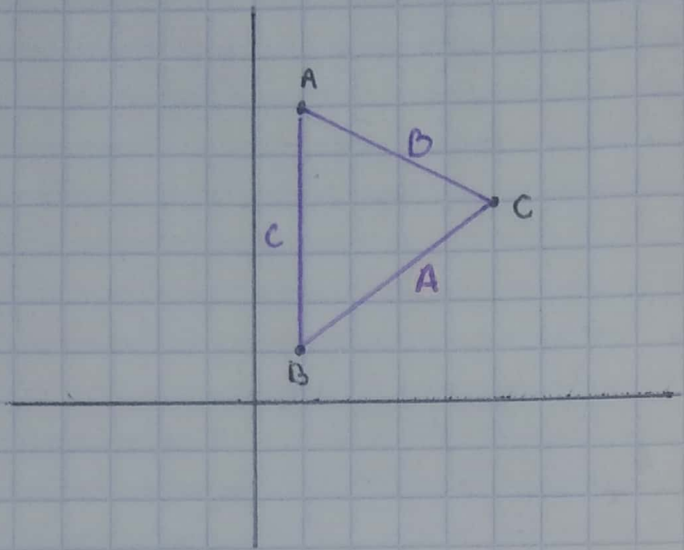
Carmona Cruz Jaqueline Andrea

González Zamudio Sara

Mendoza León Videl Nefertari

Considera los vértices de triángulo ABC y denotado por A la recta que contiene al lado opuesto al vértice A, similarmente B y C, para:

$$A=(1,6) \quad , \quad B=(1,1) \quad , \quad C=(5,4)$$



1. Encuentra la descripción paramétrica de c

Primero encontremos el vector director de la recta BA (C) usando los puntos $A=(1,6)$ y $B=(1,1)$

El vector director que va de $\overrightarrow{BA}$ es igual a $\overrightarrow{BA}$: $A-B \Rightarrow$
$\overrightarrow{BA}: (1,6)-(1,1) = (0,5)$

Recordemos que la fórmula de la representación paramétrica es:

$$\mathcal{L} = \{P + tu \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Tomando como P al punto $A=(1,6)$ y sustituyendo a u por el vector director antes encontrado entonces tenemos que la representación paramétrica de la recta C es:

$$\mathcal{L}_C = \{(1,6) + t(0,5) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

② Encuentra la ecuación normal de $\mathcal{B}$

Sabiendo que la recta $\mathcal{B}$ pasa por los puntos $A = (1,6)$ y $C = (5,4)$, tomando como punto de referencia a $(1,6)$

Por el teorema 1.8.2 tenemos que:

$$\{p + td \mid t \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d^\perp \cdot x = d^\perp \cdot p\}$$

$$d^\perp \cdot x = d^\perp \cdot (1,6)$$

Y para cumplir con el teorema necesito un vector director que se obtiene de la resta del punto $C - A$ entonces

$$(5,4) - (1,6) = (4,-2)$$

Y el vector diretor de $(4,-2)$ sería

$$(4,-2)^\perp = (2,4)$$

Si se aplica el teorema con $X = (x,y)$ entonces:

$$d^\perp \cdot x = d^\perp \cdot p$$

$$(2,4) \cdot (x,y) = (2,4) \cdot (1,6)$$

$$2x + 4y = 2 + 24$$

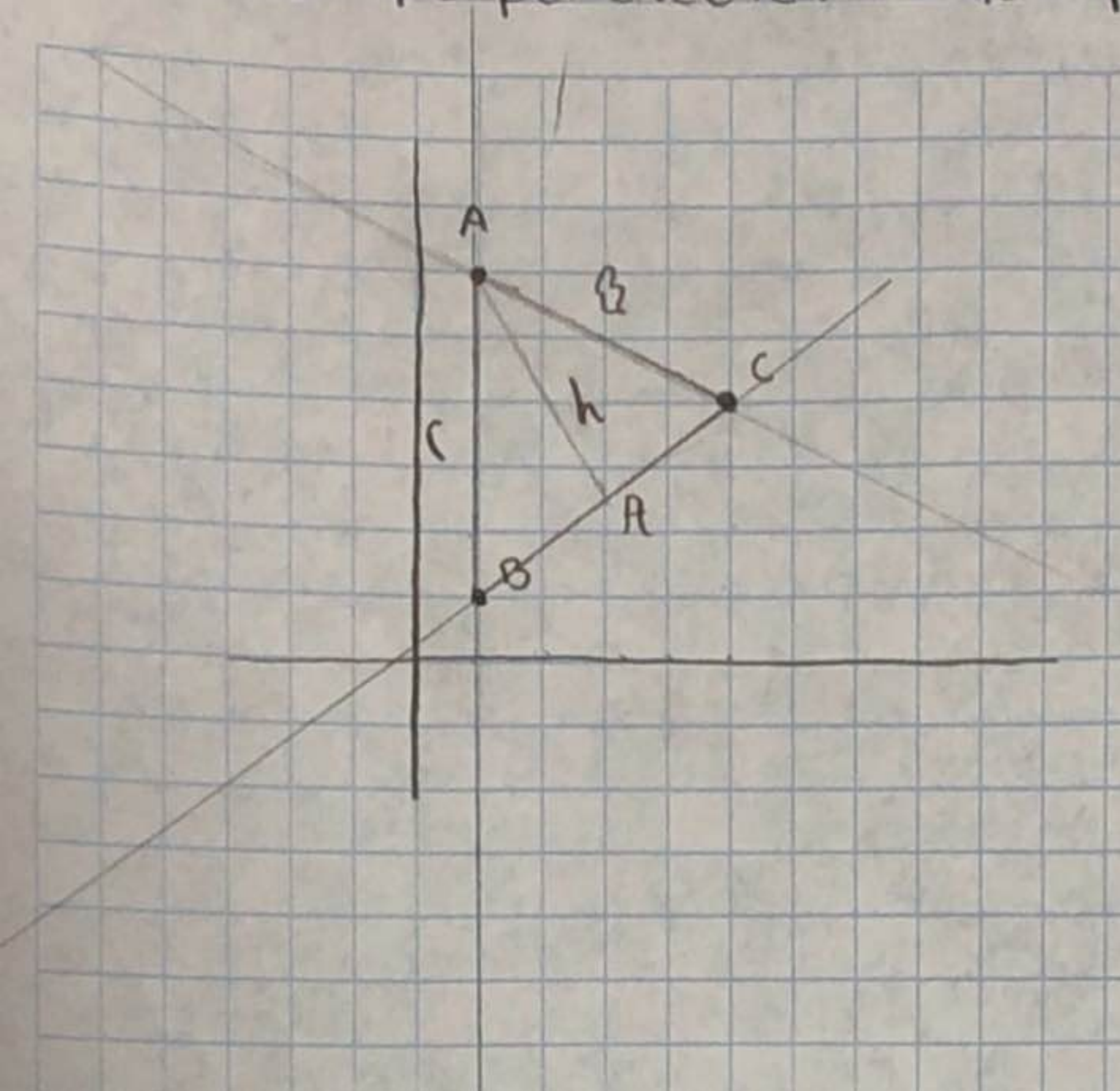
$$2x + 4y = 24$$

$24 + 2 \neq 24$

∴ la ecuación normal de $\mathcal{B}$ sería

$$2x + 4y = 24$$

③ Encuentra la ecuación normal de la altura por A (la perpendicular de A por A).



$A = (1,6)$

$B = (1,1)$

$C = (5,4)$

$h: (C-B)\cdot X = (C-B)\cdot A$ donde $C-B = (5,4)-(1,1)$
$= (4,3)$

$h: (4,3)\cdot(x,y) = (4,3)\cdot(1,6)$

$h: 4x+3y = 22$

Notemos que el problema se resuelve con las propiedades algebraicas del producto punto, vemos que podemos distribuir el producto punto al lado derecho.

$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid (q-p)^t \cdot x = q^t \cdot p - p\cdot p\}$

$\therefore\ \ell: (q-p)^t \cdot x = q^t \cdot p$

✓

$\therefore\ h: 4x+3y = 22$

4) Calcular las distancias $b = d(A,C)$ y $h = d(B,B)$, para determinar el area a $\frac{bh}{2}$ y haz el dibujo del triangulo, indicando h y la recta de la pregunta anterior.

Tenemos $A(7,6)$, $B(-1,-1)$, $C=(5,4)$.

Sabemos que si tenemos un punto y una recta podemos sacar la distancia de un punto a una recta

Entonces sacamos la ecuación parametrica de la recta $\overline{AC}$

Si tomamos el punto $A(7,6)$ y tenemos que sacar el vector director que es $Q-P$.

$\overset{P}{A}(7,6)$ y $\overset{Q}{C}(5,4)$

$Q - P = C - A$

Obtenemos que el vector

$V = (5,4 - 7,6)$

$V = (5-7, 4-6)$

$V = (4,-2)$ y la ecuación parametrica es $L = \{P + tV \mid t \in \mathbb{R}\}$

Sustituimos y queda

$L_{AC} = \{(7,6) + t(4,-2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

de la misma ecuación parametrica podemos obtener la normal

La ecuación normal es

$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d^{\perp} \cdot x = d^{\perp} \cdot p\}$

Entonces sabemos que su vector director es $(4,-2)$

el compadre ortogonal es $(2,4)$

El punto es $(7,6)$

Como $d^{\perp} \cdot x = d^{\perp} \cdot p$ sustituimos

$(2,4) \cdot X = (2,4) \cdot (7,6)$

$(2,4) \cdot X = (2+24)$

$(2,4) \cdot X = 26$

Para encontrar la distancia de una recta a un punto tenemos

Punto $B=(7,7)$
Tenemos que $n=(2,4)$ y $C=26$
y la distancia se saca

$$d=\frac{|c-(n\cdot p)|}{|n|}$$ Sustituyendo obtenemos

$$d_{(B,B)}=\frac{|26-(2,4)\cdot(7,7)|}{|(2,4)|}$$ $$d_{(B,B)}=\frac{|26-(2+4)|}{|\sqrt{(2)^2+(4)^2}|}$$

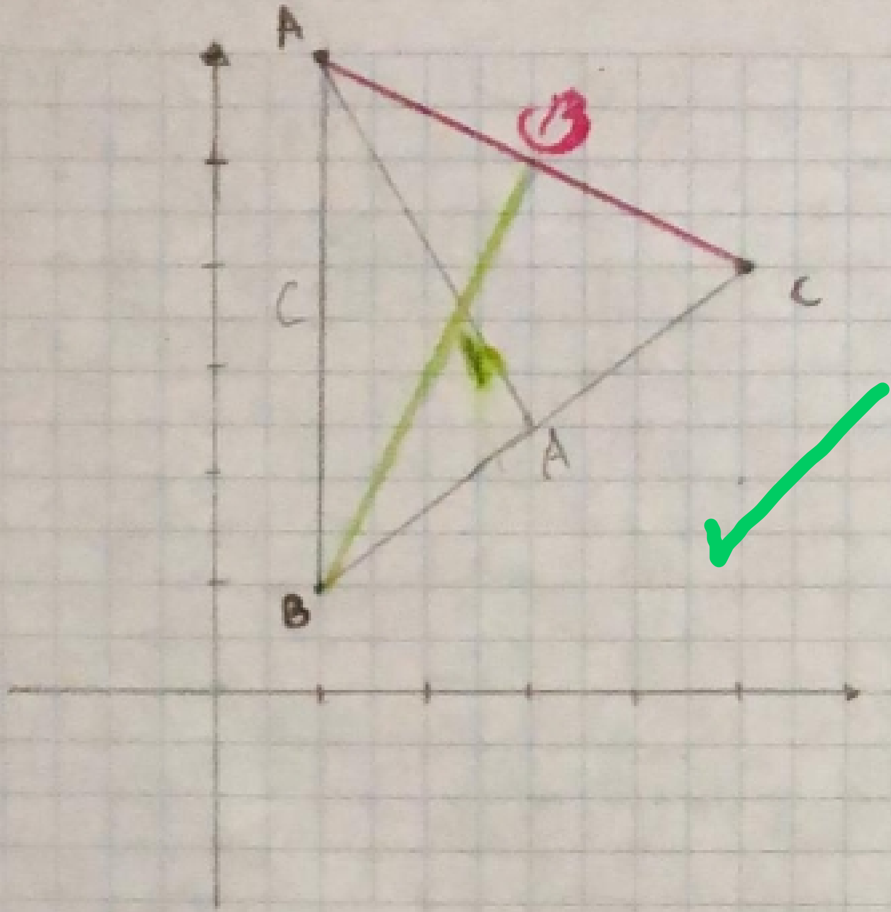
$$d_{(B,B)}=\frac{|26-6|}{|\sqrt{4+16}|}$$ $$d_{(B,B)}=\frac{|20|}{|\sqrt{20}|}$$ $$d_{(B,B)}=\frac{20}{\sqrt{20}}$$

luego sacamos la distancia $b=d(A,C)$ y $h=d(B,B)$

$$d(A,C)=|A-C|=|(1,6)-(5,4)|=|(1-5,6-4)|=|-4,2|$$
$$=\sqrt{(-4)^2+(2)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$$

Para sacar el area tenemos $\frac{bh}{2}$ entonces
tenemos que $b=\sqrt{20}$ y $h=\frac{20}{\sqrt{20}}$ sustituyendo

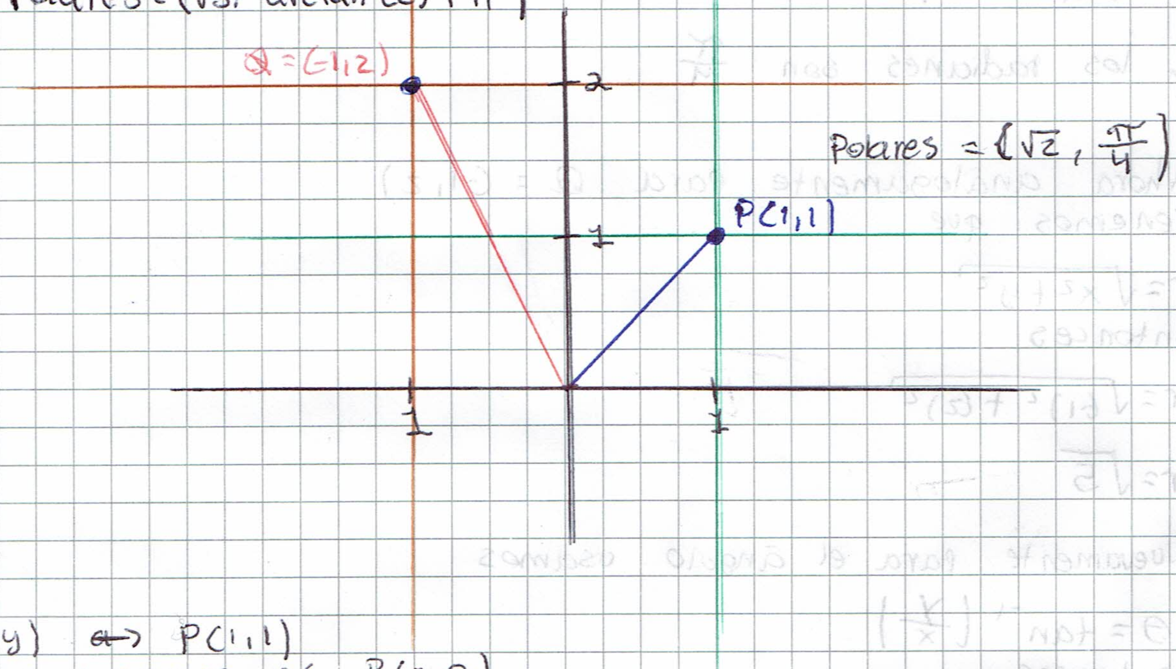
$$A=\frac{\sqrt{20}\left(\frac{20}{\sqrt{20}}\right)}{2}$$ $$A=\frac{20}{2}$$ $$A=10$$


A
B
C
c
a
b

(5) obtén las coordenadas polares de los puntos con coordenadas cartesianas

$P = (1,1)$ y $Q = (-1,2)$

Polares $= (\sqrt{5}, -\arctan(2) + \pi)$



$P(x,y) \leftrightarrow P(1,1)$
Lo que queremos es $P(r,\theta)$

Utilizando el teorema de pitágoras donde $c^2 = a^2 + b^2$ y donde buscamos r, esto es $r = c$
como conocemos x, y, entonces podemos sustituir como $x = a$ y $y = b$, entonces:

$r^2 = x^2 + y^2$
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
sustituyendo
$r = \sqrt{1^2 + 1^2}$
$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Para el ángulo directamente usamos:

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$
entonces

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1)$
$\theta = 45°$

sabemos que el radio cabe siempre 2π veces en la circunferencia, entonces podemos decir que:
$\frac{2\pi \text{ rad}}{360°}$

Por lo tanto

$\frac{45(2)}{360°}\pi = \frac{90}{360}\pi$

$= \frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ los radianes son $\frac{\pi}{4}$ $= \left(\sqrt{2}, \pi/4\right)$

Ahora análogamente para $Q = (-1, 2)$
Tenemos que

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Entonces

$r = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2}$

$r = \sqrt{5}$

Nuevamente para el ángulo usamos

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

entonces

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{-1}\right)$

$\theta = -63.4349°$

Como es negativa podemos ponerlo como

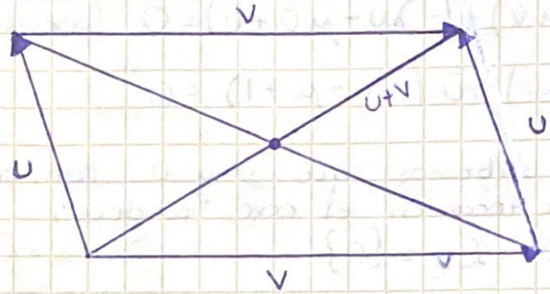
$\theta = \arctan\left(\frac{2}{-1}\right) + \pi$

$\theta = -\mathrm{arct}(2) + \pi$

$\therefore$ los radianes son $(\sqrt{5}, -\arctan(2) + \pi)$

6. Dados dos vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ en $\mathbb{R}^n$, el paralelogramo que definen tiene como vértices los puntos $0, \bar{u}, \bar{v}$ y $u+v$. Demuestra que sus diagonales, es decir, los segmentos $\overline{0(u+v)}$ y $\overline{uv}$ se intersecan en su punto medio.

Por demostrar: los segmentos 0 a $\bar{u}+\bar{v}$ y de $\bar{u}$ a $\bar{v}$ se intersecan en su punto medio.



Demostración.
Si partimos de la representación paramétrica de las diagonales, tenemos:

- denotando L_1 al segmento $\overline{uv}$,
  entonces:
Como la recta paramétrica está expresada de la siguiente manera

$$L = \{v_1 + \lambda v_2 \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Sustituyendo:

$$L_1 = \{\bar{u} + \lambda(\bar{v} - \bar{u}) / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Análogamente para el segmento $\overline{0(u+v)}$, si denotamos L_2, tenemos:

$$L_2 = \{0 + \mu((\bar{u}+\bar{v})) \,/\, \mu \in \mathbb{R}\}$$

La intersección de estas dos rectas está dada por los parámetros λ y μ tales que:

$$P + \lambda\bar{v} = Q + \mu\bar{u}$$

los cuales encontramos resolviendo el sistema de ecuaciones equivalente a

$$\lambda\bar{v} - \mu\bar{u} = Q - P.$$

como lo visto anteriormente en clase.

Ahora, si sustituimos valores:

$$\lambda(\bar{v}-\bar{u}) - \mu(\bar{u}+\bar{v}) = 0 - \bar{u}$$

igualando a cero,

$$\lambda(v-\bar{u}) - \mu(\bar{u}+\bar{v}) + \bar{u} = 0$$

desarrollando:

$$(\lambda \bar{v} - \lambda \bar{u}) - (\mu \bar{u} + \mu \bar{v}) + \bar{u} = 0$$

$$\lambda \bar{v} - \lambda \bar{u} - \mu \bar{u} - \mu \bar{v} + \bar{u} = 0$$

así,

$$\lambda \bar{v} - \mu \bar{v} - \lambda \bar{u} - \mu \bar{u} + \bar{u} = 0 \text{ (prop. conmutativa).}$$

$$(\lambda \bar{v} - \mu \bar{v}) + (-\lambda \bar{u} - \mu \bar{u} + \bar{u}) = 0 \text{ (asociatividad).}$$

$$\bar{v}(\lambda - \mu) + \bar{u}(-\lambda - \mu + 1) = 0$$

Como implícitamente sabemos que v y u son linealmente independientes pues solo se tocan en el cero, es decir,

$$\mathcal{L}\bar{u} \cap \mathcal{L}\bar{v} = \{0\}$$

Siendo linealmente independientes, los escalares deben ser igual a cero para que así, se puedan tocar en el punto de origeen, entonces:

$$\bar{v}(\lambda - \mu) + \bar{u}(-\lambda - \mu + 1) = 0.$$

reescribiendo:

$$\bar{v}(\lambda - \mu) - \bar{u}(\lambda + \mu - 1) = 0$$

$$\bar{v}(\lambda - \mu) = \bar{u}(\lambda + \mu - 1)$$

Si $w = \bar{v}(\lambda - \mu)$, entonces se sigue que $w \in \mathcal{L}\bar{u}$ y a su vez, $w = \bar{u}(\lambda + \mu - 1)$, así que $w \in \mathcal{L}\bar{v}$.

Por lo tanto,

$$w \in (\mathcal{L}\bar{u} \cap \mathcal{L}\bar{v})$$

y como $(\mathcal{L}\bar{u} \cap \mathcal{L}\bar{v}) = 0$ (por ser linealmente independientes), entonces $w = 0$.

Así, podemos escribir que

$$(\lambda - \mu) = 0 \quad y \quad (\lambda + \mu - 1) = 0$$

lo cual nos da un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\lambda - \mu = 0 \quad \ldots (1)$$
$$\lambda + \mu - 1 = 0 \quad \ldots (2)$$

Resolviendo,

encontrando el valor de λ en (1).

$$\lambda - \mu = 0$$
$$\lambda = \mu$$

Sustituyendo el valor de λ en (2)

$$\lambda + \mu - 1 = 0$$
$$\mu + \mu - 1 = 0$$
$$2\mu = 1$$
$$\mu = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo el valor de μ en (1) tenemos:

$$\lambda - \mu = 0$$
$$\lambda - \frac{1}{2} = 0$$
$$\lambda = \frac{1}{2}$$

Comprobando:

$$\lambda - \mu = \lambda + \mu - 1$$
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1$$
$$0 = 1 - 1$$
$$0 = 0.$$

Con lo anterior podemos concluir que las diagonales L_1 y L_2 se intersecan en su punto medio, es decir, donde los escalares λ y μ on iguales a $1/2$. ∎