Examen 1

29 de noviembre

Equipo

Cano Navarro Fernando
Jiménez Rojo Paulina Daniela
Mariano Martínez Kevin
Márquez López Anayely
Pineda Béjar Daniel
Sánchez Benítez Eduardo.

Resuelve los siguientes problemas explicando con detalle tus respuestas

Considera los vértices de triángulo ABC y denota por $\mathcal{A}$ la recta que contiene al lado opuesto al vértice A, similarmente $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, para

$$A = (5, 5), \quad B = (7, 1), \quad C = (2, 1).$$

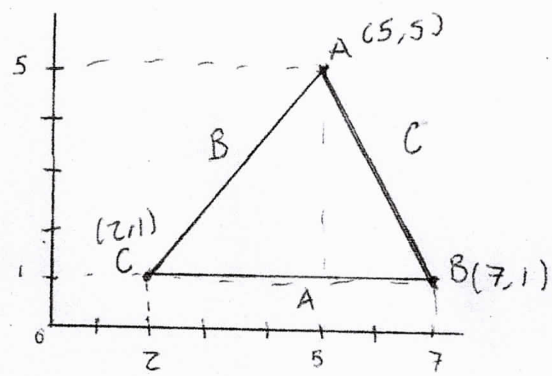
1. Encuentra la descripción paramétrica de $\mathcal{C}$.
2. Encuentra la ecuación normal de $\mathcal{B}$.
3. Encuentra la ecuación normal del la altura por A (la perpendicular a $\mathcal{A}$ por A).
4. Calcula las distancias $b = \mathrm{d}(A, C)$ y $h = \mathrm{d}(B, \mathcal{B})$, para determinar el área $\frac{bh}{2}$ y haz un dibujo del triángulo, indicando h y la recta de la pregunta anterior.
5. Obtén las coordenadas polares de los puntos con coordenadas cartesianas

$$P = (1, 1) \text{ y } Q = (-1, 2).$$

6. Demuestra que dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares si y sólo si $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$. Haz el dibujo.

Considera los vértices de triángulo ABC y denoto A la recta que contiene al lado opuesto al vértice A, similarmente B y C para $A=(5,5)$, $B=(7,1)$, $C=(2,1)$

1) Encuentra la descripción paramétrica de C



La descripción paramétrica es de la forma $\{p+tv \mid t\in\mathbb{R}\}$ donde "p" es un punto de la recta y "v" es el vector dirección.

Si nos fijamos en el dibujo, observamos que A y B están en la recta C por lo tanto la descripción paramétrica de la recta C es

$$C=\{B+t(A-B) \mid t\in\mathbb{R}\}$$

Ahora sustituimos los valores

$$C=\{(7,1)+t((5,5)-(7,1)) \mid t\in\mathbb{R}\}$$

Simplificamos

$$C=\{(7,1)+t(-2,4) \mid t\in\mathbb{R}\}$$

2: Encuentra la ecuación normal de B siendo B la recta opuesta al punto B.

Primero obtendremos la parametrica.

$C = (2,1)$

$A = (5,5)$

$$\{P + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

P = punto sobre la recta

$\bar{v}$ = vector director

$$B = \{C + t(C - A) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{(2,1) + t((2,1)-(5,5)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{(2,1) + t(-3,-4) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Para la normal ocuparemos

$$\{P + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d^{\perp} \cdot x = d^{\perp} \cdot P\}$$

$$\{(2,1) + t(-3,-4) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d^{\perp} \cdot \underset{(x,y)}{\underset{\downarrow}{x}} = d^{\perp} \cdot P\}$$

$$d = (-3,-4) \Rightarrow d^{\perp} = (4,-3)$$

por definición de ortogonal

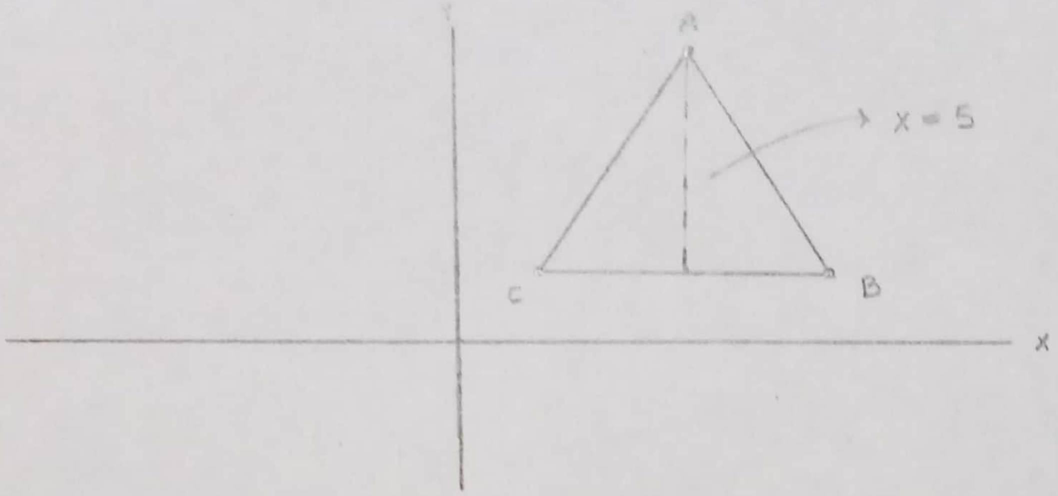
$$d = (a,b) \Rightarrow d^{\perp} = (-b,a)$$

Ahora bien

$$d^{\perp} \cdot x = d^{\perp} \cdot P \rightarrow \text{Ec. normal}$$

$$(4,-3) \cdot (x,y) = (4,-3)(2,1)$$

③ Encuentra la ecuación normal de la altura por A (la representación a A por A).



La recta punteada tiene como ecuación paramétrica

$L = A + (C - B)^{\perp}$, entonces tenemos que, $L = \{ A + \lambda (C - B)^{\perp} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

Por el teorema visto en clase, sabemos que:

$$p + tv \iff v^{\perp} \cdot x = v^{\perp} \cdot p$$

y tenemos lo siguiente:

$$L = (C - B)^{\perp\perp} \cdot x = (C - B)^{\perp\perp} \cdot A$$

y

$$L = (B - C) \cdot x = (B - C) \cdot A$$

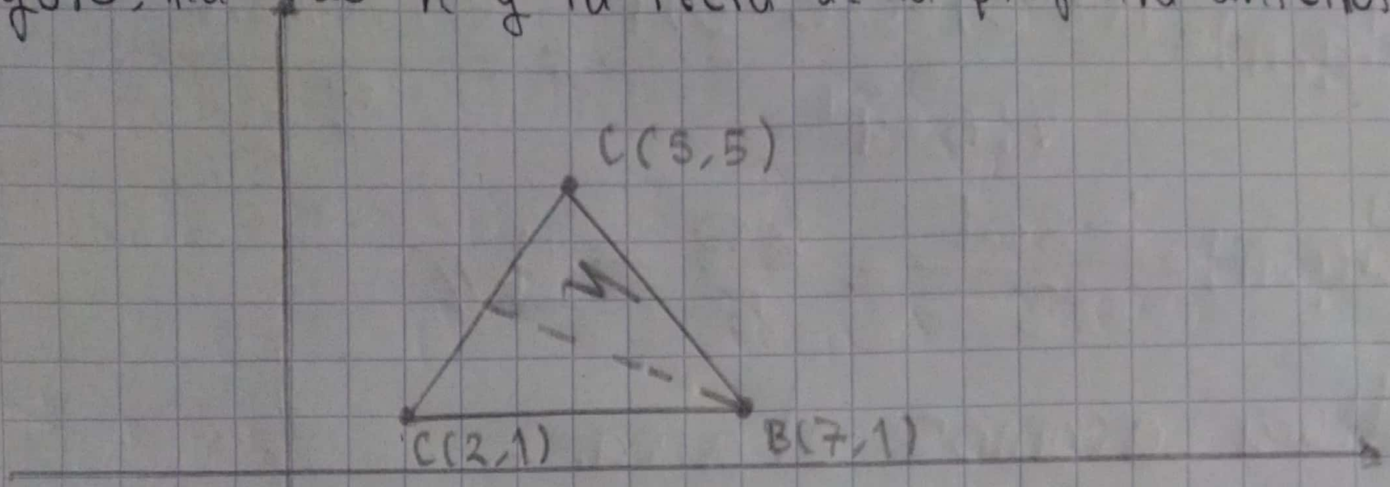
sustituyendo los valores, nos queda:

$$L = ((7,1) - (2,1)) \cdot (x,y) = ((7,1) - (2,1)) \cdot (5,5)$$

$$L = (5,0) \cdot (x,y) = (5,0) \cdot (5,5)$$

→ Por lo tanto: llemos encontrado la ecuación normal de la altura por A como se pedía en el ejercicio.

4. Calcula las distancias $b = d(A, C)$ y $h = d(B, \mathcal{B})$ para determinar el área $\frac{bh}{2}$ y haz un dibujo del triángulo, indicando h y la recta de la pregunta anterior.



Distancia $b = d(A,C)$

$A = (5,5) \quad C = (2,1)$

$\quad x_1 \; y_1 \qquad x_2 \; y_2$

$d_{\overline{AC}} = \sqrt{(2-5)^2 + (1-5)^2}$

$d_{(\overline{AC})} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$

$d_{(\overline{AC})} = 5$

Distancia $h = d(B, \mathcal{B})$

Obtengamos la recta de $\mathcal{B}$ primero.

$\mathcal{B} = C + \lambda(C - A)$

$\mathcal{B} = \{(2,1) + \lambda((2,1) - (5,5)) / \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{B} = \{(2,1) + \lambda(-3,-4) / \lambda \in \mathbb{R}$

El vector dirección $v = (-3,-4)$ le sacamos el compadre $v^{\perp} = (4,-3)$ y su ec. Normal.

$\mathcal{B} = (4,-3) \cdot x = (4,-3) \cdot (2,1)$

Ahora sí calculamos la distancia al punto B.

$$d_{(p,\pi)} = \frac{|(4,-3)\cdot(2,1) - ((4,-3)\cdot(7,1))|}{|4,-3|}$$

$$d_{(P,\pi)} = \frac{|(8-3)-(28-3)|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|(5)-(25)|}{5}$$

$$d_{(P,\pi)} = \frac{|-20|}{5} = \frac{20}{5} = \underline{4}_{/\!/}$$

Ahora sacamos el área.

$$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = \underline{10u^2}_{/\!/}$$

Examen 1

28/Noviembre/2020

Formula de cartesianas a polares

5 Obten las coordenadas polares de los puntos con coordenadas cartesianas

$P = (1,1)$ y $Q = (-1,2)$

$$\boxed{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{array}}$$

$P = (1,1)$

$r = \sqrt{1^2+1^2}$

$r = \sqrt{1+1}$

$r = \sqrt{2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)$

$\theta = \tan^{-1}(1)$

$\theta = 45^\circ$

$P = (\sqrt{2}, 45^\circ) = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ //

$Q = (-1,2)$

$r = \sqrt{-1^2+2^2}$

$r = \sqrt{1+4}$

$r = \sqrt{5}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{-1}\right)$

$\theta = \tan^{-1}(-2)$

$\theta = -63.44^\circ + 180^\circ = 116.56^\circ$

$Q = (\sqrt{5}, 116.56^\circ) = (\sqrt{5}, 0.647\pi)$ //

6. Demuestra que dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares si y sólo si $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| = |\mathbf{u}-\mathbf{v}|$. Haz el dibujo.

$\Rightarrow$) u y v son perpendiculares $\Rightarrow |u+v| = |u-v|$

Si elevamos al cuadrado las dos normas se tiene que

$|u+v|^2 = |u|^2 + 2uv + |v|^2$

$|u-v|^2 = |u|^2 - 2uv + |v|^2$

Pero por hipótesis se tiene que u y v son perpendiculares, es decir, $u \cdot v = 0$, entonces dicho esto, se verifica que $2 \cdot uv = 0$ y $-2uv = 0$, entonces se tiene que:

$$|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$$

$$|u-v|^2 = |u|^2 + |v|^2$$

$$\therefore |u+v|^2 = |u-v|^2$$

Aplicando raíz se tiene que

$$|u+v| = |u-v|$$

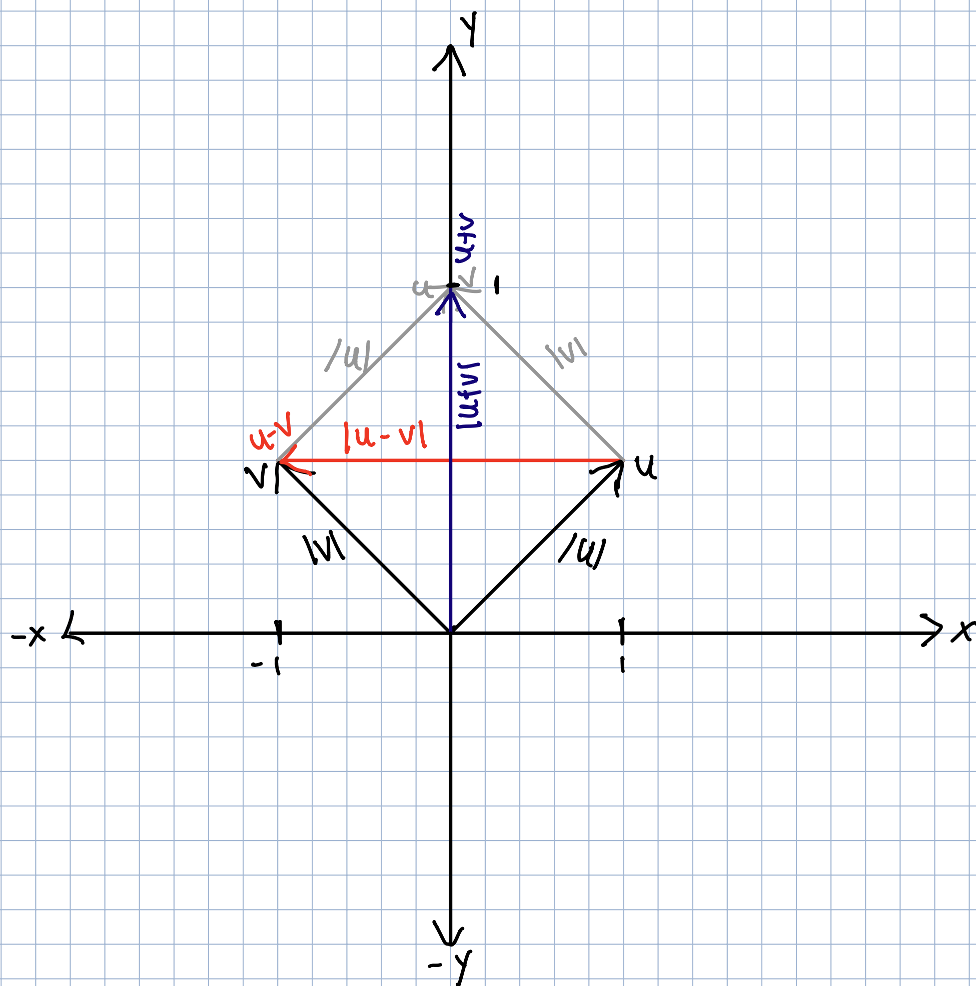
$\Leftarrow$) $|u+v| = |u-v| \Rightarrow$ u y v son perpendiculares

Si $|u+v| = |u-v|$, entonces $|u+v|^2 = |u-v|^2$, es decir que se verifica que $2 \cdot u v = -2u \cdot v$, es decir,

$2uv + 2uv = 0$,

$\Rightarrow 4\, u \cdot v = 0$, es decir, $u \cdot v = 0$

$\therefore$ u y v son perpendiculares



y
-y
x
-x
1
-1
u
v
|u|
|v|
u+v
|u+v|
u-v
|u - v|