Álgebra Lineal I — Tarea II

Grupo 4145 — Semestre 2024-1

Profesor: Ramón Reyes Carrión
Ayudante: Emmanuel I. González Celio

Fecha de entrega: Miércoles 13 de septiembre de 2023

Instrucciones: Resuelva **6 ejercicios**, incluyendo el 1 y el 4. Puede **trabajar en equipo**, sin embargo cada persona debe entregar su propia respuesta (la cual puede estar inspirada en la colaboración que haya hecho, pero no puede haber dos respuestas iguales). Preferentemente entregue su tarea de manera presencial. A lo largo de esta lista de ejercicios, $\mathbb{F}$ representa un campo y V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial.

1. Sea $\mathcal{S}$ un conjunto arbitrario. Determine cuáles de las siguientes condiciones son *lineales* en el $\mathbb{F}$-espacio vectorial de funciones de ${}^{\mathcal{S}}\mathbb{F}$

   a) f se anula en un punto dado, digamos ξ, de $\mathcal{S}$.

   b) f toma el valor l en un punto dado de $\mathcal{S}$.

   c) f se anula en cuando menos un punto de un subconjunto $\mathcal{S}_0 \subseteq S$.

   En los siguientes tres incisos $\mathcal{S} = \mathbb{F} = \mathbb{R}$.

   d) $f(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$.

   e) $f(x) \to 1$ cuando $|x| \to \infty$.

   f) f tiene a lo más un número finito de puntos de discontinuidad.

2. Considera el suconjunto $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$ de vectores de $\mathbb{R}^3$, donde se tiene $\mathbf{u}_1 = (1,0,1), \mathbf{u}_2 = (1,1,0), \mathbf{u}_3 = (1,-1,3), \mathbf{u}_4 = (2,-1,0), \mathbf{u}_5 = (1,3,4)$.

   a) Prueba que vector $\mathbf{v} = (1,2,1)$ es un elemento de $\langle \mathcal{S} \rangle$, dando los coeficientes de la combinación lineal correspondiente.

   b) ¿Es cierto que $\mathbf{v} \in \langle \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \rangle$? Justifica tu respuesta.

3. Considera el vector $\mathbf{v} = (k,4,2,2) \in \mathbb{R}^4$ y el subconjunto $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, donde se tiene $\mathbf{u}_1 = (1,k,1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,1,k,1), \mathbf{u}_3 = (1,1,1,k)$. Determina todos los valores de k para los cuales $\mathbf{v} \in \langle \mathcal{S} \rangle$

4. Sean X, Y dos subespacios de V. Definimos la *suma algebraica* de X y Y como

$$X + Y = \{x + y \in V \mid x \in X \ \wedge \ y \in Y\}.$$

   i. Demuestre que $X \cap Y$ y $X + Y$ son subespacios de V.

   ii. Demuestre que $X \cap Y \subseteq X \cup Y \subseteq X + Y$.

   iii. Explique las contenciones del inciso anterior de manera geométrica considerando rectas y planos que pasan por el origen de $\mathbb{R}^3$.

   iv. Encuentre condiciones suficientes y necesarias para que $X \cup Y$ sea un subespacio de V. Dé un ejemplo donde $X \cup Y$ no sea subespacio de V.

   v. Demuestre que $X+Y$ es el subespacio más $\subseteq$-pequeño que contiene a X y Y. Concluya que $X+Y = \langle X \cup Y \rangle$.

5. Encuentra un conjunto de generadores, con 3 elementos, de $\mathbb{R}^3$ donde todas las coordenadas de los vectores de esta son ± 1. ¿Se puede hacer lo mismo en $(\mathbb{Z}_2)^3$?

6. ¿Es posible encontrar un conjunto de generadores $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ de $\mathbb{F}^n$, tal que la i-ésima coordenada de todos los vectores es cero?

7. Tuve que quitar este ejercicio porque todavía no vemos independencia lineal.

8. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, considere los siguientes subconjuntos[1]

$$X = \{f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} \mid f \text{ es par}\} \quad \text{y} \quad Y = \{g \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} \mid g \text{ es impar}\}$$

   Demuestre que X y Y son subespacios de V y, más aún, $V = X + Y$ con $X \cap Y = \{\mathbf{0}\}$.

9. Recordemos que $\omega = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Pruebe que

   - $\mathbb{F}[X]$ es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial, ya sea identificándolo con un subespacio de ${}^{\omega}\mathbb{F}$ (especificando con cuál y por qué la identificación es óptima) o exhibiendo las operaciones, en cualquier caso, demuestre sus afirmaciones.
   - Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{F}[X]^{\leq n} := \left\{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k : \forall k \in \{0,1,\ldots,n\} \ (\alpha_k \in \mathbb{F})\right\}$ es subespacio de $\mathbb{F}[X]$.

[1] Recordemos que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es par si, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$; e impar si, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(-x)$.