Examen 2

Integrantes

- Midori Alondra Ortega Hérnandez
- Jonathan Reyes Vela
- Aileen Giselle Ramírez Ochoa
- Yorleny Bianeth Serrano Mejía
- Diego Rosas Léon
- Octavio Saucedo Ávila

Resuelve los siguientes problemas explicando con detalle tus respuestas

1. Supongamos que tenemos una recta en $\mathbb{R}^2$ definida en su forma vectorial como $\vec{r} = \langle 3 - 3k, 5k \rangle$. Todos los puntos que están en esta recta experimentan una rotación de $\frac{\pi}{2}$ en el sentido inverso a las manecillas del reloj. Luego, experimentan una reflexión sobre el eje X y finalmente experimentan otra reflexión sobre el eje Y. Dá la ecuación (vectorial o funcional) de la recta que quedó después de aplicarle las tres transformaciones a la recta original.

$\vec{r} = (3-3k, 5k)$

Sea $k=0$, $k=1$ entonces tenemos que $(0,5), (3,0) \in \mathcal{L}$

La matriz asociada a la rotación de $\frac{\pi}{2}$ en el sentido inverso a las manecillas del reloj es de la forma:

$$R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

ya que $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ y $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$

Además, la matriz asociada a la reflexión respecta al eje X en $\mathbb{R}^2$ es de la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y respecto al eje Y es de la forma $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Así, realicemos las transformaciones en ambos puntos:

- $(0,5) \longrightarrow (5,0)$

  Rotación: $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

  Reflexión sobre X: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

  Reflexión sobre Y: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $(3,0) \longrightarrow (0,-3)$

  Rotación: $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

  Reflexión sobre X: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

  Reflexión sobre Y: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Ahora encontremos la recta que pasa por los puntos $(5,0)$ y $(0,-3)$

Dados 2 puntos existe una recta que pasa por ellos:

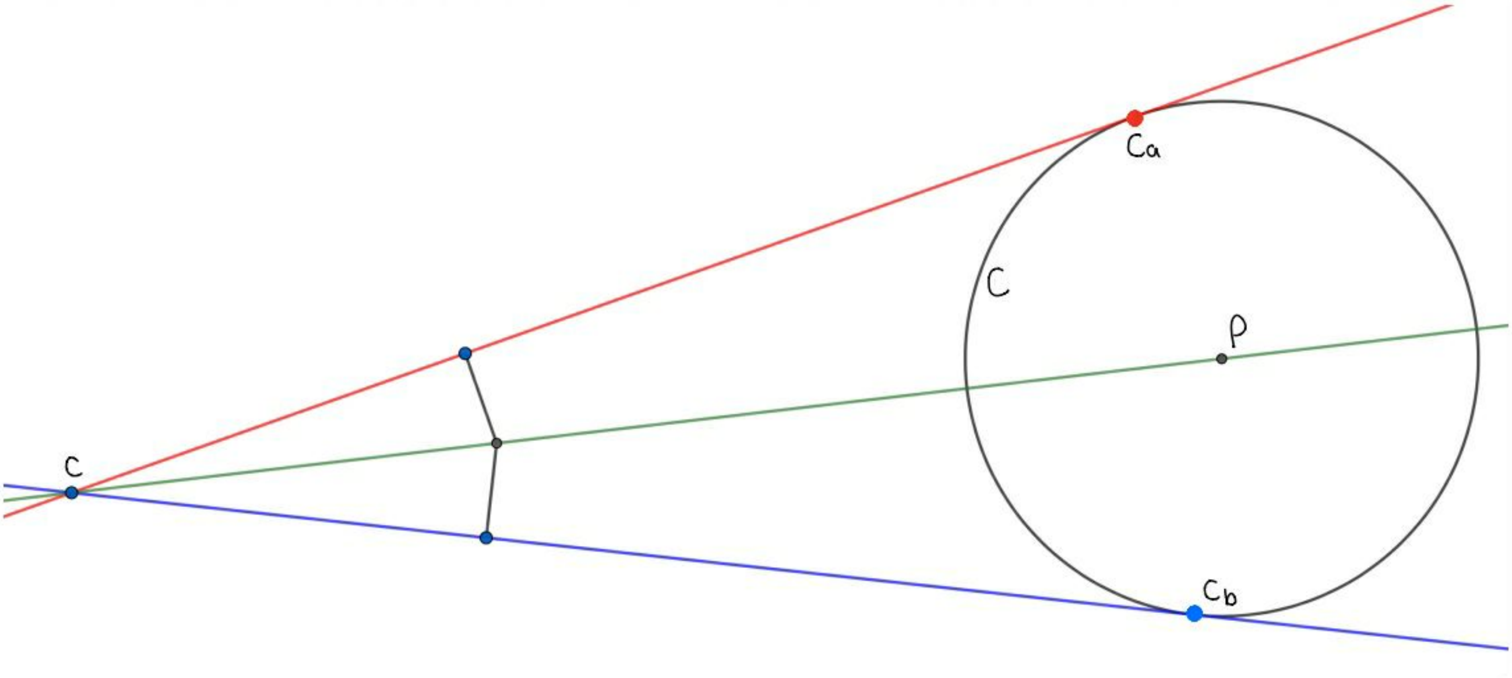
$$\mathcal{L} = \{(5,0) + \lambda[(0,-3) - (5,0)] \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(5,0) + \lambda(-5,-3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(5-5\lambda, -3\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Por lo tanto, su representación paramétrica es

$$\mathcal{L} = \{(5,0) + \lambda(-5,-3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

con vector dirección $(-5,-3)$.

2. Demuestra que si $\mathbf{c}$ es un punto exterior (al círculo $\mathcal{C}$ con centro P) entonces su recta a P bisecta sus dos tangentes a $\mathcal{C}$. Y además que las distancias a sus pies en $\mathcal{C}$ (es decir, a los puntos de tangencia) son iguales.



Sea C el círculo con radio r y centro P

Debido a que c es un punto en el exterior del círculo, su recta polar, que llamaremos P_c, corta la circunferencia en dos puntos.

Sean C_a y C_b los puntos de tangencia a la circunferencia C.
las rectas polares a los puntos de tangencia son

$$P_{C_a} : (c_a - P)\cdot(x - P) = r^2$$

$$P_{C_b} : (c_b - P)\cdot(x - P) = r^2$$

Buscamos ver que la recta que une a c con P, es bisectriz de la polar de c_a, P_{ca}, y de la polar de c_b, P_{cb} ; ya que son tangentes a la circunferencia C que pasan por el punto c.

Tomemos la descripción paramétrica de la recta que une a c con P

$$\mathcal{L}_{cP} : \{ c + t(P - c) : t \in \mathbb{R} \}$$

Tomando a $q \in \mathcal{L}$

Como $q \in \mathcal{L}$, entonces q es de la forma, $q = c + t_1(P-c)$, $t_1 \in \mathbb{R}$

$$\implies q - c = t_1(P-c) \implies c - q = -t_1(P-C)$$

Ahora demostraremos que q está a la misma distancia de $\mathcal{P}_{C_a}$ como de $\mathcal{P}_{C_b}$, notemos que q puede ser cualquier punto en $\mathcal{L}$

Para ello veamos cual es la distancia de $\mathcal{P}_{C_a}$ a q

Tenemos que $c \in \mathcal{P}_{C_a}$

Por lo cual podemos tener la ecuación de $\mathcal{P}_{C_a}$ como:

$$\mathcal{P}_{C_a}: \ (C_a - P) \cdot x = (C_a - P) \cdot C$$

Ahora, sacando la distancia de q a $\mathcal{P}_{C_a}$

$$d(q, \mathcal{P}_{C_a}) = \frac{|(C_a - P) \cdot C - (C_a - P) \cdot q|}{|C_a - P|}$$

$$= \frac{|(C_a - P) \cdot (C - q)|}{|C_a - P|}$$

Sustituyendo $C - q = -t_1 (P - C)$

$$= \frac{|(C_a - P) \cdot (-t_1 (P - C))|}{|C_a - P|}$$

$$= \frac{|t_1 (C_a - P) \cdot (-(P - C))|}{|C_a - P|}$$

$$= \frac{|t_1| \, |(C_a - P) \cdot (C - P)|}{|C_a - P|}$$

$|C_a - P|$ es la distancia del centro a un punto en la circunferencia es decir, el radio. Así $|C_a - P| = r$

Además, $(C_a - P) \cdot (C - P) = r^2$, sustituimos

$$= \frac{|t_1| \, |r^2|}{r}$$

Además $r^2 > 0$, por lo que $|r^2| = r^2$

$$= \frac{|t_1| \, r^2}{r}$$

Así, $d(q, \mathcal{P}_{C_a}) = |t_1| r$

Ahora, veamos cual es la distancia de $\mathcal{P}_{c_b}$ a q

Tenemos que $c \in \mathcal{P}_{c_b}$

Por lo cual podemos tener la ecuación de $\mathcal{P}_{c_a}$ como:

$$\mathcal{P}_{c_a}: \ (c_b - p) \cdot x = (c_b - p) \cdot c$$

Ahora, sacando la distancia de q a $\mathcal{P}_{c_b}$

$$d(q, \mathcal{P}_{c_b}) = \frac{|(c_b - p) \cdot c - (c_b - p) \cdot q|}{|c_b - p|}$$

$$= \frac{|(c_b - p) \cdot (c - q)|}{|c_b - p|}$$

Sustituyendo $c - q = -t_1 (p - c)$

$$= \frac{|(c_b - p) \cdot (-t_1 (p - c))|}{|c_b - p|}$$

$$= \frac{|t_1 (c_b - p) \cdot (-(p - c))|}{|c_b - p|}$$

$$= \frac{|t_1| \, |(c_b - p) \cdot (c - p)|}{|c_b - p|}$$

$|c_b - p|$ es la distancia del centro a un punto en la circunferencia es decir, el radio. Así $|c_b - p| = r$

Además, $(c_b - p) \cdot (c - p) = r^2$, sustituimos

$$= \frac{|t_1| \, |r^2|}{r}$$

Además $r^2 > 0$, por lo que $|r^2| = r^2$

$$= \frac{|t_1| \, r^2}{r}$$

Así, $d(q, \mathcal{P}_{c_b}) = |t_1| r$

Tenemos $d(q, \mathcal{P}_{c_a}) = |t_1| r$ y $d(q, \mathcal{P}_{c_b}) = |t_1| r$ por transitividad de la igualdad

$$d(q, \mathcal{P}_{c_a}) = d(q, \mathcal{P}_{c_b})$$

Entonces, q está a la misma distancia de $\mathcal{P}_{c_a}$ como de $\mathcal{P}_{c_b}$

Entonces, tenemos que $\mathcal{L}$ está contenida en la bisectriz de P_{C_a} y P_{C_b}

Definiendo $\mathcal{B}$ como la bisectriz de P_{C_a} y P_{C_b}.

Es decir, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B}$

Sabemos que $P \in \mathcal{L}$ y $c \in \mathcal{L}$

y como $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B}$, $P \in \mathcal{B}$ y $c \in \mathcal{B}$

Es decir, $\mathcal{L}$ y $\mathcal{B}$ tienen dos puntos en común y 2 rectas no tienen dos puntos en común a menos que sean la misma recta

Por lo cual, $\mathcal{L} = \mathcal{B}$

Ahora, veamos que la distancia de C a C_a es igual a la distancia de C a C_b

(5) $u \perp v \iff |u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$
demostrado en la tarea 5

Tenemos que $C_a - P \perp C - C_a$ y por (5)

$$|C_a - P + C - C_a|^2 = |C_a - P|^2 + |C - C_a|^2$$

$$|C - P|^2 = |C_a - P|^2 + |C - C_a|^2$$

Además $C_b - P \perp C - C_b$ y por (5)

$$|C_b - P + C - C_b|^2 = |C_b - P|^2 + |C - C_b|^2$$

$$|C - P|^2 = |C_b - P|^2 + |C - C_b|^2$$

Por transitividad de la igualdad

$$|C_a - P|^2 + |C - C_a|^2 = |C_b - P|^2 + |C - C_b|^2$$

Recordando que $|C_a - P| = r$ y $|C_b - P| = r$, sustituyendo

$$\cancel{r^2} + |C - C_a|^2 = \cancel{r^2} + |C - C_b|^2$$

$$|C - C_a|^2 = |C - C_b|^2$$

Como las distancias son positivas, podemos sacar raíz cuadrada sin problema

$$|C - C_a| = |C - C_b| \quad \text{que es} \quad d(C, C_a) = d(C, C_b)$$

Por lo tanto la distancia de C a C_a es igual a la distancia de C a P_{C_b}, en otras palabras las distancias de C a sus puntos de tangencia son iguales.

3. Halla la ecuación del conjunto de puntos G que tienen la propiedad de que la suma de las distancias de cada punto $P \in G$ a los puntos $(0,3)$ y $(0,-3)$ vale $6\sqrt{3}$.

$\boxed{3}$

$$d(P,(0,3)) + d(P,(0,-3)) = 6\sqrt{3}$$

$$d((x,y),(0,3)) + d((x,y),(0,-3)) = 6\sqrt{3}$$

$$\sqrt{(y-3)^2+x^2} + \sqrt{(y+3)^2+x^2} = 6\sqrt{3}$$

$$\left(\sqrt{(y-3)^2+x^2}\right)^2 = \left(6\sqrt{3} - \sqrt{(y+3)^2+x^2}\right)^2$$

$$(y-3)^2+x^2 = 108 - 12\sqrt{3}\sqrt{(y+3)^2+x^2} + (y+3)^2 + x^2$$

$$\cancel{y^2} - 6y \cancel{+9} \cancel{+x^2} = 108 - 12\sqrt{3}\sqrt{(y+3)^2+x^2} + \cancel{y^2} + 6y \cancel{+9} \cancel{+x^2}$$

$$-6y - 6y - 108 = -12\sqrt{3}\sqrt{(y+3)^2+x^2}$$

$$-12y - 108 = -12\sqrt{3}\sqrt{(y+3)^2+x^2}$$

$$12y + 108 = 12\sqrt{3}\sqrt{(y+3)^2+x^2} \quad // \div 12$$

$$y + 9 = \sqrt{3}\sqrt{(y+3)^2+x^2} \quad // (\ )^2$$

$$(y+9)^2 = 3(y^2+6y+9+x^2)$$

$$y^2 \cancel{+18y} + 81 = 3y^2 \cancel{+18y} + 27 + 3x^2$$

$$2y^2 + 3x^2 + 27 - 81 = 0$$

$$\boxed{3x^2+2y^2-54=0}$$

Y de esta manera, esta es la ecuación de una elipse

Y la ecuación canónica es:

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{27} = 1$$

4. Demuestra que la ecuación

$$|\mathrm{d}(\mathbf{x}, P) - \mathrm{d}(\mathbf{x}, Q)| = 2a,$$

define,

- la mediatriz de P y Q para $a = 0$;
- los rayos complementarios del segmento $\overline{PQ}$ para $a = c$, y
- el conjunto vacío para $a > c$.

<u>la mediatriz de P y Q para a=0</u>

Buscamos los puntos $x \in \mathbb{R}^2$ tales que cumplan:

$$|d(x,P) - d(x,Q)| = 2(0) \quad , \text{ puesto que } a=0$$

$$|d(x,P) - d(x,Q)| = 0$$

Sabemos que $|x| = 0 \iff x=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Además las distancias son reales y la resta de dos reales es un real por lo cual, teniendo

$$|d(x,P) - d(x,Q)| = 0,$$

entonces $d(x,P) - d(x,Q) = 0$

De donde:

$$d(x,P) = d(x,Q)$$

Que es precisamente la definición de mediatriz.

$\therefore$ $|d(x,P) - d(x,Q)| = 2a$ define la ecuación de una mediatriz cuando $a=0$.

$\blacksquare$

<u>los rayos complementarios del segmento $\overline{PQ}$ para a=c</u>

Tomando $c = \frac{1}{2} d(P,Q)$

Buscamos los puntos $x \in \mathbb{R}^2$ que cumplan:

$$|d(x,P) - d(x,Q)| = 2c \quad , \text{ puesto que } a=c$$

Como $c = \frac{1}{2} d(P,Q)$, tenemos

$$|d(x,P) - d(x,Q)| = 2\left(\tfrac{1}{2} d(P,Q)\right)$$

Simplificando

$$|d(x,P) - d(x,Q)| = d(P,Q)$$

Así, tenemos dos casos:

1) $d(x,P) - d(x,Q) = d(P,Q)$
2) $d(x,P) - d(x,Q) = -d(P,Q)$

1) $d(x,P) - d(x,Q) = d(P,Q)$

$\Longrightarrow d(x,P) = d(x,Q) + d(P,Q)$

$d(x,P) = d(P,Q) + d(Q,x) \iff Q \in \overline{Px}$

Lo anterior, por el ejercicio 8 de la tarea 5

Geométricamente, significa que x se encuentra a la derecha de Q, donde x es un punto que pasa por la recta que pasa por P y Q.

Entonces los puntos que satisfacen $d(x,P) - d(x,Q) = d(P,Q)$, son todos los puntos que están en la recta que pasa por P y Q, y que se encuentran a la derecha de Q

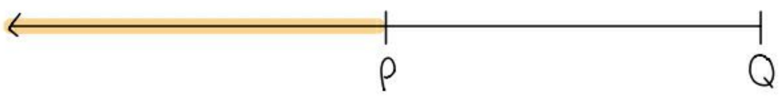
2) $d(x',P) - d(x',Q) = -d(P-Q)$

$d(x',P) + d(P-Q) = d(x',Q) \iff P \in \overline{Qx}$

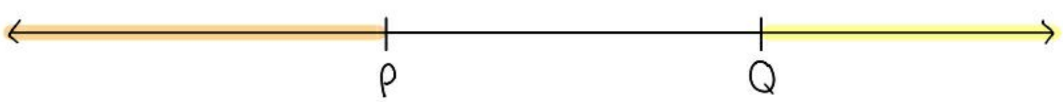
Lo anterior, por el ejercicio 8 de la tarea 5

Geométricamente, significa que P se encuentra a la derecha de x', donde x' es un punto que pasa por la recta que pasa por P y Q.

Entonces los puntos que satisfacen $d(x,P) - d(x,Q) = -d(P,Q)$, son todos los puntos que están en la recta que pasa por P y Q, y que se encuentran a la izquierda de P



De ambos casos tenemos los rayos complementarios del segmento $\overline{PQ}$



$\therefore$ $|d(x,P) - d(x,Q)| = 2a$ define la ecuación de los rayos complementarios del segmento $\overline{PQ}$ para $a = c$ ■

el conjunto vacío para $a>c$

Sea $c=\frac{1}{2}d(P,Q)$

$\Longrightarrow \quad a>\frac{1}{2}d(P,Q)$

$2a>2\left(\frac{1}{2}d(P,Q)\right)$ mantenemos la desigualdad

$2a>1\,d(P,Q)$ por inverso multiplicativo

$2a>d(P,Q)$ por neutro multiplicativo

Buscamos los puntos que satisfagan:

$$|d(x,P)-d(x,Q)|=2a>d(P,Q)$$

Además, $|x|>y \Longleftrightarrow y<x$ ó $r<-a$. Por lo que tenemos dos casos.

1) $d(x,P)-d(x,Q)>d(P,Q)$
2) $-(d(x,P)-d(x,Q))>d(P,Q)$

1) $d(x,P)-d(x,Q)>d(P,Q)$

$\Longrightarrow \quad d(P,Q)+d(x,Q)<d(x,P)$

Así, $d(P,Q)+d(Q,x)<d(P,x)\quad\ldots\quad 6$

De la desigualdad del triangulo tenemos

$d(P,x)\leq d(P,Q)+d(Q,x)\quad\ldots\quad 7$

Por transitividad de la desigualdad, de 6 y 7 tenemos

$d(P,Q)+d(Q,x)<d(P,Q)+d(Q,x)$!

Llegamos a una contradicción ya que no existe x tal que $x<x$.

$\therefore$ Ningún punto cumple $d(x,P)-d(x,Q)>d(P,Q)$

2) $-(d(x,P)-d(x,Q))>d(P,Q)$

$\Longrightarrow \quad d(x,Q)-d(x,P)>d(P,Q)$

Así, $d(x,Q)>d(x,P)+d(P,Q)\quad\ldots\quad 8$

De la desigualdad del triangulo tenemos

$$d(x,P) + d(P,Q) \geqslant d(x,Q) \quad \cdots \quad (9)$$

Por transitividad de la desigualdad, de (8) y (9) tenemos

$$d(P,Q) + d(Q,x) < d(P,Q) + d(Q,x) \quad !$$

Llegamos a una contradicción ya que no existe X tal que $X < X$.

$\therefore$ Ningún punto cumple $-(d(x,P) - d(x,Q)) > d(P,Q)$

Como ambos casos son vacío, se sigue que:

$\{x \in \mathbb{R}^n : |d(x,P) - d(x,Q)| = 2a > d(P,Q)\}$ es vacío.

$\blacksquare$

5. Encuentra la transformación afín $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple:

1. $f(2) = 5$ y $f(5) = 2$
2. $f(1) = -2$ y $f(2) = 2$

1. $f(2) = 5$ y $f(5) = 2$

Como f es una transformación afín entonces $f(x) = ax + b$

Así, $f(2) = 2a + b$ y $f(5) = 5a + b$.

Por transitividad de la igualdad

$$2a + b = 5 \quad \cdots \quad (1)$$
$$5a + b = 2 \quad \cdots \quad (2)$$

De (1)

$2a + b = 5$

$b = 5 - 2a$

Sustituyendo en (2)

$5a + (5 - 2a) = 2$

$3a + 5 = 2$

$3a = -3$

$a = -1$

Sustituyendo en (1)

$2(-1) + b = 5$

$-2 + b = 5$

$b = 7$

Así $a = -1$, $b = 7$

$\therefore$ Su transformación afín es:

$$f(x) = 7 - x$$

2. $f(1) = -2$ y $f(2) = 2$

Como f es una transformación afín entonces $f(x) = ax + b$

Así, $f(1) = a + b$ y $f(2) = 2a + b$.

Por transitividad de la igualdad

$$a + b = -2 \quad \cdots \quad ③$$
$$2a + b = 2 \quad \cdots \quad ④$$

De ③

$$b = -2 - a$$

Sustituyendo en ④

$$2a + (-2 - a) = 2$$
$$a - 2 = 2$$
$$a = 4$$

Sustituyendo en ③

$$4 + b = -2$$
$$b = -6$$

$\therefore$ Su transformación afín es:

$$f(x) = 4x - 6$$

6. Demuestra, usando la fórmula, que la inversa de cualquier reflexión en $\mathbb{R}^2$ es ella misma.

Demostración:

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una reflexión respecto a la recta $\mathcal{L} : u \cdot x = c$ con u un vector unitario.

Como se vio en clase $f(x) = x - 2(c - x \cdot u)u$

Si f es su propia inversa, se sigue que $f \circ f = Id_{\mathbb{R}^2}$

Es decir, $f \circ f(x) = x$.

$$
\begin{aligned}
f \circ f(x) &= f(f(x)) \\
&= f(x - 2(c - x \cdot u)u) \\
&= [x - 2(c - x \cdot u)u] - 2[c - (x - 2(c - x \cdot u)u) \cdot u]u \\
&= x - 2\{[(c - x \cdot u)u] + [c - (x - 2(c - x \cdot u)u) \cdot u]u\} \\
&= x - 2\{cu - (x \cdot u)u + \{c - x \cdot u + [2(c - x \cdot u)u] \cdot u\}u\} \\
&= x - 2\{cu - (x \cdot u)u + cu - (x \cdot u)u + \{[2(c - x \cdot u)u] \cdot u\}u\} \\
&= x - 2\{cu - (x \cdot u)u + cu - (x \cdot u)u + \{[2cu - 2(x \cdot u)u] \cdot u\}u\} \\
&= x - 2\{2cu - 2(x \cdot u)u + [2cu \cdot u - (2(x \cdot u)u) \cdot u]u\} \\
&= x - 2\{2cu - 2(x \cdot u)u + [2c(u \cdot u) - (2(x \cdot u))(u \cdot u)]u\}
\end{aligned}
$$

Como u es unitario $|u| = 1$, recordando que $u \cdot u = |u|^2$, de donde $u \cdot u = 1$, por lo que tenemos

$$
\begin{aligned}
&= x - 2\{2cu - 2(x \cdot u)u + [2c(1) - (2(x \cdot u))(1)]u\} \\
&= x - 2\{2cu - 2(x \cdot u)u + [2c - 2(x \cdot u)]u\} \\
&= x - 2\{2cu - 2(x \cdot u)u + 2cu - 2(x \cdot u)u\} \\
&= x - 2\{4cu - 4(x \cdot u)u\}
\end{aligned}
$$

Notemos que $x \cdot u = u \cdot x$, pues el producto interior es conmutativo, además $u \cdot x = c$, se sigue que $x \cdot u = c$, así tenemos

$$
\begin{aligned}
&= x - 2\{4cu - 4cu\} \\
&= x - 2(0) \\
&= x - 0
\end{aligned}
$$

Así tenemos que $f \circ f(x) = x$, por lo tanto $f \circ f = Id_{\mathbb{R}^2}$.

Por lo cual, la inversa de cualquier reflexión en $\mathbb{R}^2$ es ella misma.

∎