UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Examen II

Equipo

Alanis González Sebastian
Carmona Cruz Jaqueline Andrea
González Zamudio Sara
Hernández Trinidad Nicolás
Mendoza Leon Videl Nefertari
Temich Piaga Paula

PROFESOR

Ramón Reyes Carrión

ASIGNATURA

Geometría Analítica I

21 de enero de 2021

1) Sea la recta

$\hat{r} = \langle 3-3k \quad 5k \rangle$

Que tomando en cuenta la matriz de rotacion por $\pi/2$ tendriamos

$$M_{\pi/2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Que multiplicandola por la recta en su forma de matriz seria.

$$\begin{bmatrix} 3-3k \\ 5k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -5k \\ 3-3k \end{pmatrix}$$

A continuacion si multiplicamos por el eje de X (osea su matriz) tendriamos

$T(x, y : x, -y)$

Entonces $\begin{pmatrix} -5k \\ -3+3k \end{pmatrix}$

Ahora con la reflexion por el eje Y quedaria de la manera

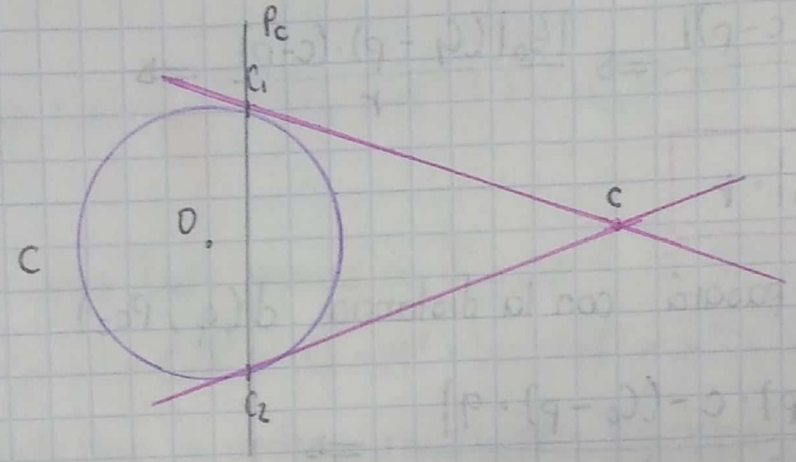
$t_2(x, y) : (-x, y)$ lo que es igual a

$$\begin{pmatrix} 5k \\ -3+3k \end{pmatrix}$$

∴ el resultado seria $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5k \\ -3+3k \end{pmatrix}$

2- Demuestra que si c es un punto exterior (al círculo C con centro en P) entonces su recta a P bisecta sus dos tangentes a C. Y además que las distancias a sus pies en C (Es decir, a los puntos de tangencia) son iguales.

Primero hagamos una representación geométrica para tener mayor detalle:



llamemos C_1 y C_2 a las intersecciones de P_c con la circunferencia C.

sabemos que tales puntos tienen como rectas polares a:

$$P_{C_1}: (C_1 - p) \cdot x = r^2 + p \cdot (c - p)$$

$$P_{C_2}: (C_2 - p) \cdot x = r^2 + p \cdot (c - p)$$

Así la recta que une a O con c es la bisectriz de P_{C_1} y P_{C_2}

Parametrizamos a $L: c + t(p - c)$

si $q \in L \cdot q = c + t_0 (p - c)$ es cualquier elemento.

$\Rightarrow q - c = t_0 (p - c)$ Por demostrar que $d(q, P_{C_1}) = d(q, P_{C_2})$

Como $c \in P_{C_1} \Rightarrow P_{C_1}: (C_1 - p) \cdot x = (C_1 - p) \cdot c$

$$d(q, P_{C_1}) = \frac{|(C_1 - p) \cdot c - (C_1 - p) \cdot q|}{|C_1 - p|} \Rightarrow d(q, P_{C_1}) = \frac{|(C_1 - p) \cdot (c - q)|}{|C_1 - p|} \Rightarrow$$

Como $z \in L = c + t(p-c)$, sustituimos:

$$\Rightarrow \frac{|(C_1 - p) \cdot (-t_0 (p-c))|}{|C_1 - p|} \Rightarrow \frac{-t_0 (C_1 - p) \cdot (p-c)}{|C_1 - p|}$$

Como sabemos $C_1 - p$ es igual a r, por lo que sustituimos y cambiamos un menos por mas.

$$= \frac{|t_0 ((C_1 - p) \cdot (c-p))|}{r} \Rightarrow \frac{|t_0|(C_1 - p) \cdot (c-p)}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{|t_0| \cdot r^2}{r} \Rightarrow \boxed{|t_0| \cdot r}$$

Analogamente esto pasará con la distancia $d(q, P_{C_2})$

$$d(q, P_{C_2}) = \frac{|(C_2 - p) \cdot c - (C_2 - p) \cdot q|}{|C_2 - p|} \Rightarrow$$

$$d(q, P_{C_2}) = \frac{|(C_2 - p) \cdot (c-q)|}{|C_2 - p|}$$

Como $z \quad L = c + t(p-c)$, sustituimos:

$$\Rightarrow \frac{|(C_2 - p) \cdot (t_0 (p-c))|}{|C_2 - p|} \Rightarrow \frac{|-t_0 (C_2 - p) \cdot (p-c)|}{|C_2 - p|} \Rightarrow$$

$$\frac{t_0 (C_2 - p) \cdot (c-p)}{r} \Rightarrow \frac{|t_0|(C_2 - p) \cdot (c-p)}{r} \Rightarrow \frac{|t_0| \cdot r^2}{r} \Rightarrow$$

$$\boxed{|t_0| \cdot r}$$

Como $|t_0| \cdot r = |t_0| \cdot r \Rightarrow d(q, P_{C_1}) = d(q, P_{C_2})$ ■

Como L está contenida en la bisectriz de P_{C_1}, P_{C_2} ya que la bisectriz tiene puntos en común. Así $L \subset B$ (que es la bisectriz) y está última que es una recta, tenemos que: $B = L$

Obteniendo las distancias de P a C:

Como $C_1 - p \perp c - C_1$, tenemos

$$|C_1 - p + c - C_1|^2 = |C_1 - p|^2 + |c - C_2|^2 \Rightarrow r^2 + |c - C_1|^2$$

y por otro lado vemos a $C_2 - p \perp c - C_2$ y entonces:

$$\| C_2 - p + c - C_2 \|^2 = |C_2 - p|^2 + |c - C_2|^2 = r^2 + |c - C_2|^2$$

si igualamos a ambos resultados llegamos a:

$$r^2 + |c - C_1|^2 = r^2 + |c - C_2|^2$$

y esto implicaría que:

$$|c - C_1| = |c - C_2| \blacksquare$$

Ejercicio 3. Halla la ecuación del conjunto de puntos $\mathcal{G}$ que tienen la propiedad de que la suma de las distancias de cada punto $P \in \mathcal{G}$ a los puntos $(0,3)$ y $(0,-3)$ vale $6\sqrt{3}$.

Tenemos que

$|d(x,p) + d(x,q)| = 2a$ sustituyendo los valores se tiene

$|d(x,(0,3)) + d(x,(0,-3))| = 6\sqrt{3}$ donde tomamos a

$p = (0,3)$ y $q = (0,-3)$ con $2a = 6\sqrt{3}$

para saber cuanto vale a despejamos $a = \frac{6\sqrt{3}}{2}$

Sacamos los valores de $b^2 = a^2 - c^2$ y para se que es la distancia de los focos a la elipse

$$2c = |d(a,b) = \|(0,3)-(0,-3)\| = \|(0,6)\| = \sqrt{(6)^2} = 6$$

$$2c = 6$$
$$c = \frac{6}{2} \quad c = 3$$

$$b^2 = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - (3)^2} = \sqrt{27-9} = \sqrt{18}$$

$$b^2 = 18 \text{ y } a^2 = 27 \qquad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\therefore \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{27} = 1$$

(4) Demuestra que la ecuación $|d(x,P) - d(x,Q)| = 2a$ define:

1 ▷ La mediatriz de P y Q para $a=0$.

Buscamos puntos que cumplan que $x \in \mathbb{R}$ tales que:

$$|d(x,P) - d(x,Q)| = 0$$

$$d(x,P) - d(x,Q) = 0$$

Así de manera análoga y por definición de mediatriz podemos decir que la mediatriz de P y Q para $a=0$ es:

$d(x,P) = d(x,Q)$ ∎

2 ▷ Los rayos complementarios del segmento $\overline{PQ}$ para $a=c$.

Sabemos que un rayo complementario es aquel que convierte un segmento en recta, así tomamos cualquier valor c que satisfaga:

$$c = \frac{1}{2} d(P,Q)$$

Así buscamos los puntos que cumplen que

$|d(x,P) - (d(x,Q)| = 2c = d(P,Q)$. Así

$d(x,P) - d(x,Q) = d(P,Q) \rightarrow d(x,P) =$

$= d(x,Q) + d(P,Q) \rightarrow d(x,Q) + d(P,Q)$

$\longleftrightarrow$ $\underline{Q \in \overline{Px}}$, lo que nos queda que

$d(x,P) - d(x,Q) = -d(P,Q) \rightarrow d(x,P) + d(P,Q) +$

$d(x,Q) \rightarrow d(x,P) + d(P,Q) \longleftrightarrow$ $\underline{P \in \overline{xQ}}$ ∎

3 ▷ El conjunto vacío para $a>c$ Sabiendo que

$a = |d(x,P) - d(x,Q)| = 2a$, $c = \frac{1}{2} d(P,Q)$ buscamos los puntos que cumplen

$$|d(x,P) - d(x,Q)| = 2a > d(P,Q)$$

Caso 1

$d(x,P) - d(x,Q) > 2(P,Q) \rightarrow d(P,Q) + d(x,Q) < d(x,P)$

$\rightarrow d(x,P) \leq d(P,Q) + d(x,Q)$! contradicción

Caso 2

$d(x,P) - d(x,Q) > (P,Q) \rightarrow d(x,Q) - (x,P) > d(P,Q)$

$\rightarrow d(x,Q) > d(x,P) + d(x,Q)$

$\rightarrow d(x,P) + d(P,Q) \geq d(x,Q)$! contradicción

$\therefore$ es vacío ya que no hay una x que lo satisfaga ▪

5.- Encontrar la transformación afín $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple:

① $f(2) = 5$ y $f(5) = 2$

Una transformación afín está dada de la forma

$$y = f(x) = Ax + b$$

Sin embargo en una dimensión se pierde la parte vectorial, por lo tanto se escribe como:

$$f(x) = ax + b$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y cuando $a \neq 0$ es una transformación afín.

Entonces $f(2) = 5$ esto es $f(2) = 2a + b$, igualando $2a+b=5$

Para $f(5) = 2$ esto es $f(5) = 5a + b$, igualando $5a+b=2$

obtenemos el sig. sistema de ecuaciones:

$$2a + b = 5 \quad --- ①$$
$$5a + b = 2 \quad --- ②$$

Multiplicamos por $-a$ ①

$$\begin{aligned} -2a - \cancel{b} &= -5 \\ 5a + \cancel{b} &= 2 \\ \hline 3a &= -3 \end{aligned}$$

$$a = \frac{-3}{3}$$

$$a = -1$$

Para b

$$5(-1) + b = 2$$
$$b = 2 + 5$$
$$b = 7$$

Comprobamos

- Para $2a + b = 5$

$$2(-1) + 7 = 5$$
$$5 = 5$$

- Para $5a + b = 2$

$$5(-1) + 7 = 2$$
$$2 = 2$$

Por lo tanto podemos sust. a y b en $f(x) = ax + b$ obteniendo la trans. afín

$\therefore f(x) = -1x + 7 = \boxed{f(x) = -x + 7}$ la trans. afín que buscabamos

② $f(1) = -2$ y $f(2) = 2$

De la misma manera que en el anterior que $f(x) = ax + b$

$f(1) = -2$ es igual a $f(1) = 1a + b$, igualando $a + b = -2$

Para $f(2) = 2$, $f(2) = 2a + b$, igualando $2a + b = 2$

Tenemos un sist. de ecuación

$$a + b = -2 \text{ --- } ①$$
$$2a + b = 2 \text{ --- } ②$$

Despejando b de ①

$b = -2 - a$

sust. b en ②

$2a - 2 - a = 2$

$a = 2 + 2$

$a = 4$

Para b

$4 + b = -2$

$b = -2 - 4$

$b = -6$

Comprobando

- Para $a + b = -2$

$4 - 6 = -2$

$-2 = -2$

- Para $2a + b = 2$

$2(4) - 6 = 2$

$2 = 2$

Por lo tanto podemos sustituir a y b en $f(x) = ax + b$ obteniendo la transformación afín

$\therefore$ $\boxed{f(x) = 4x - 6}$ es la trans. afín que buscabamos

6. Demuestra, usando la fórmula, que la inversa de cualquier reflexión en $\mathbb{R}^2$ es ella misma.

Como sabemos, la matriz asociada a una reflexión es:

$$E_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Así, la matriz inversa de esta última es

$$E_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Pero $E_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} = E_\theta^{-1}$,

entonces podemos concluir que $E_\theta = E_\theta^{-1}$ y, por lo tanto, la inversa de cualquier reflexión en $\mathbb{R}^2$ es ella misma. ∎