10

Geometria Analitica I   Reposicion del primer parcial

Profesor: Ramón Reyes Carrión

Alumno: Ramón Yael Campos Chávez   No de cuenta: 320255784

1: Dados dos vectores U y V en $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes, el paralelogramo que definen tiene como vértices los puntos O, U, V y U+V. Demuestra que sus diagonales, es decir, los segmentos de O a U+V y de U a V se intersecan en su punto medio

Primero parametrizamos las ecuaciones de cada diagonal

- O con U+V tenemos $\underline{r_1(t) = t(U+V)}$ con $t \in [0,1]$

  con $t=0$ estamos en el origen

  $t=1$ estamos en U+V

- U con V tenemos $\underline{r_2(s) = (1-s)U + s \cdot V}$

Igualando ambas ecuaciones y expandiendo

$$r_1(t) = r_2(s)$$

$$t(U+V) = (1-s)U + s\cdot V$$

$$tu + tv = U - s\cdot U + s\cdot V$$

$$tu + tv = U(1-s) + s\cdot V$$

→ Así el coeficiente de U es $(1-s) = t$ y de V es $(s) = t$

Por lo que $t = 1-s$ y $t = s$

Sustituyendo $t = s$ en $t = 1-s$

$$\Rightarrow s = 1 - s \Rightarrow s + s = 2s = 1 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$ y como $s = t \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

Sustituyendo en $r_1(t)$

$$r_1(t) = \frac{1}{2}(U+V) = \frac{1}{2}\cdot U + \frac{1}{2}\cdot V = \frac{U+V}{2} = r_1(t)$$

Entonces con P como el punto de intersección tenemos que

$P = \frac{U+V}{2}$ ∴ las diagonales se cortan en su punto medio

2.- Demuestra que tres puntos a, b y c son no colineales sii los vectores $U = (b-a)$ y $V = (c-a)$ son linealmente independientes

Teniendo los vectores U y V, supongamos que son linealmente dependientes, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $V = \lambda U$

Sustituyendo

$\Rightarrow c - a = \lambda(b-a) \Rightarrow c = a + \lambda(b-a)$, lo cual significa que c está en la linea que pasa por a a b, lo que contradice que a, b, c son no colineales ∇

Ahora suponiendo que a, b, c son colineales tenemos que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.q.

$$c = a + \lambda(b-a)$$

$$-a$$

$\Rightarrow c - a = \cancel{a - a}^{0} + \lambda(b-a)$ como $U = (b-a)$ y $V = (c-a)$

dice que $V = \lambda(U)$ ∴ por lo que son linealmente dependientes

∴ Para que sean linealmente independientes, a, b y c deben ser no colineales

3.- Da una expresión paramétrica para el plano que pasa por los siguientes puntos

$a = (2, 0, 1)$ $b = (0, 1, 1)$ $c = (-1, 2, 0)$

Usamos la formula

$r(s,t) = p + sU + tV$ donde

$p = a$

$U = b - a = (0,1,1) - (2,0,1)$

$\underline{U = (-2, 1, 0)}$

$V = c - a = (-1,2,0) - (2,0,1)$

$\underline{V = (-3, 2, -1)}$

$\Rightarrow r(s,t) = (2,0,1) + s(-2,1,0) + t(-3,2,-1)$ y

$\Rightarrow r(s,t) = (2, 0, 1) + (-2s, s, 0) + (-3t, 2t, -t)$

$\Rightarrow r(s,t) = (2 - 2s - 3t, s + 2t, 1 - t)$

$$\begin{cases} x = 2 - 2s - 3t \\ y = s + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

4. Determina cómo se intersecan las rectas siguientes, usando únicamente el determinante

$L_1 = \{(3,-2) + t(1,-2) \mid t \in \mathbb{R}\}$ $\quad L_2 = \{(1,3) + s(-2,4) \mid s \in \mathbb{R}\}$

Dibujalas para entender qué está pasando. $\quad L_3 = \{(-1,6) + r(3,-6) \mid r \in \mathbb{R}\}$

Primero, sabemos que una recta se define como $L = \{P + td \mid t \in \mathbb{R}\}$

con P = Un punto en la recta

d = Vector dirección

y que si el $\det \neq 0$ las rectas no son paralelas y se intersecan en un solo punto

$\det = 0$ las rectas son paralelas o coincidentes

Entonces

	P	d
L_1	$(3,-2)$	$d_1 = (1,-2)$
L_2	$(1,3)$	$d_2 = (-2,4)$
L_3	$(-1,6)$	$d_3 = (3,-6)$

Entonces entre L_1 y L_2

$$\begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad\quad\quad x \quad y \\ \det(d_1, d_2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = 4 - (4) = 0 \end{array}$$

son paralelas o coincidentes

Entre L_1 y L_3

$$\det(d_1, d_3) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = -6 - (-6) = 0$$

Son paralelas o coincidentes

Entre L_2 y L_3

$$\det(d_2, d_3) = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = 12 - 12 = 0$$

Son paralelas o coincidentes

Veamos ahora si son paralelas o coincidentes

Entonces usamos el punto inicial de L_1 en L_2

$(3,-2) = (1,3) + s(-2,4)$

$\Rightarrow 3 = 1 - 2s \Rightarrow 3 - 1 = -2s \Rightarrow \frac{2}{-2} = s = -1$

$\Rightarrow -2 = 3 + 4s \Rightarrow -5 = 4s \Rightarrow -\frac{5}{4} = s$ $\quad \therefore L_1$ y L_2 son paralelas

Ahora L_1 y L_3

$(3,-2) = (-1,6) + r(3,-6)$

$\Rightarrow 3 = -1 + 3r \Rightarrow 3 + 1 = 4 = 3r \Rightarrow \frac{4}{3} = r$

$\Rightarrow -2 = 6 - 6r \Rightarrow -8 = -6r \Rightarrow \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3} = r$ $\quad \therefore L_1$ y L_3 son coincidentes

Por último L_2 y L_3

$(1,3) = (-1,6) + r(3,-6)$

$\Rightarrow 1 = -1 + 3r \Rightarrow 1 + 1 = 2 = 3r \Rightarrow \frac{2}{3} = r$ $\quad \therefore L_2$ y L_3 son paralelos

$\Rightarrow 3 = 6 - 6r \Rightarrow 3 - 6 = -3 = -6r \Rightarrow \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} = r$

5.- Resuelva los siguientes incisos

a) Da una descripción paramétrica de la recta dada por la ecuación

$2x - y = 2$

Primero despejamos y en términos de x

$\Rightarrow 2x - y = 2 \Rightarrow y = 2x - 2$. Con esto encontramos su pendiente-intersección con la formula $y = mx + b$

Entonces $m = 2$ y $b = -2$

com m = pendiente

b = Intersección con el eje y

Como su punto de intersección ocurre cuando $x = 0$

$\Rightarrow y = 2(0) - 2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow y = (0,2)$

Ahora parametrizamos la recta con $r(t) = p + td$ con P como un punto y d como vector dirección

Entonces para $2x - y = 2$, un punto sobre la recta es $P = (0,-2)$

Y el vector dirección se deduce con la pendiente dado que una recta es el cociente del cambio y entre el cambio x, entonces $V = (1,2)$

Entonces la descripción paramétrica es $r(t) = (0,-2) + t(1,2)$

con $x = t$, $y = -2 + 2t$ con $t \in \mathbb{R}$

b) Encuentra una ecuación normal para la recta que pasa por $(2,0)$ y $(1,1)$

La ecuación normal tiene la forma $ax + by + c = 0$

con (a,b) un vector normal y dado que pasa por $(2,0)$ y $(1,1)$

Obtenemos un vector dirección $d = (1-2, 1-0) = (-1,1) = d$

Ahora buscamos un vector normal (n) que sea perpendicular a d, tomamos $(1,1) = n$

Verificación

$(-1,1) \cdot (1,1)$

$\Rightarrow -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1$

$= -1 + 1 = 0$

Entonces usando el vector normal y un punto (x_0, y_0) como

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

Sustituimos el vector normal y el punto $(2,0)$

$1(x-2) + 1(y-0) = 0$

$\Rightarrow x - 2 + y = 0$

Reordenando

$x + y - 2 = 0$

∴ Así tenemos la ecuación normal