Profesor: Ramón Reyes Carrión
Ayudante: Emmanuel I. González Celio

Fecha de entrega: Martes 29 de agosto de 2023

La cantidad de ejercicios relacionados a los campos finitos no es para hacerles sufrír, sino para que se familiarice con estos objetos que tienen aplicaciones en la "vida real".

Instrucciones: Resuelva 5 ejercicios. Puede **trabajar en equipo**, sin embargo cada persona debe entregar su propia respuesta (la cual puede estar inspirada en la colaboración que haya hecho, pero no puede haber dos respuestas iguales). Preferentemente entregue su tarea de manera presencial.

1. Sean $\mathbb{F}$ un campo y $n \in \mathbb{N}$. Denotemos $\overline{\mathbf{n}} = \{1, \ldots, n\}$. Demuestre que se puede identificar las funciones de ${}^{\overline{\mathbf{n}}}\mathbb{F}$ con las n-adas de $\mathbb{F}^n$ de tal manera que se corresponden las operaciones de espacio vectorial.

2. Sean $\mathbb{F}$ un campo, V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y $\mathcal{A}$ un conjunto arbitrario y no vacío. Demuestre que la colección de funciones de $\mathcal{A}$ en V, a la cual denotamos por ${}^{\mathcal{A}}V$ tiene[1] una estructura de $\mathbb{F}$-espacio vectorial.

3. Sea $\mathbb{F}$ un campo.
   - Encontrar un subconjunto $C \subseteq \mathbb{F}^2$ que sea cerrado bajo la multiplicación por escalar, pero no bajo la suma de vectores.
   - Encontrar un subconjunto $A \subseteq \mathbb{C}^2$ que sea cerrado bajo la suma de vectores, pero no bajo multiplicación por escalar.

4. Consideremos $V = \mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ con las operaciones definidas por $\boxplus\colon V \times V \to V$, dada por $x \boxplus y = x \cdot y$ (la multiplicación ordinaria en $\mathbb{R}$), y $\boxdot\colon \mathbb{R} \times V \to V$, dada por $\alpha \boxdot x = x^{\alpha}$. Demuestre que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con estas operaciones. ¿Cuál es el neutro de $\boxplus$ y cómo son los inversos de esta operación?

   Observación: Este ejercicio nos muestra que un espacio vectorial puede tener operaciones "raras". Por ejemplo, aquí la suma no es *entrada a entrada* (ni siquiera es una suma usual, já), ni el producto por escalar se ve como una multiplicación usual.

5. Sea $\mathbb{F}$ un campo. Demuestre que $\mathbb{Z}$ con su estructura usual (la suma y la multiplicación de toda la vida) **no puede ser un $\mathbb{F}$-espacio vectorial**.

6. Sea $\mathbb{F}$ un campo con q elementos.
   - ¿Cuántos vectores hay en el $\mathbb{F}$-espacio vectorial $\mathbb{F}^n$?
   - Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ constantes. ¿Cuántas soluciones $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ hay en $\mathbb{F}^n$ que satisfagan la ecuación $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$?

   Sugerencia: En el primer inciso debe usar un poquitito de combinatoria. En el segundo, considere dos casos según sea $\alpha_1 = 0$ o no.

7. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. La ***complejificación*** de V se define como $V_{\mathbb{C}} := V \times V$, identificando (u, v) con $u + iv$. Defina la multiplicación por escalares complejos $\cdot\colon \mathbb{C} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ que hace a $(V_{\mathbb{C}}, +, \cdot)$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y ***demuestre que, en efecto, es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial***.

[1] Es decir, debe exhibir las operaciones y demostrar que cumplen las propiedades de espacio vectorial.