Examen 1

Arquieta Cortez Nestor Salvador
Falcón Hernández Karen Kin
López Juárez Aranza
Salvador Calderón Ismael Yahir
Yedra Cázares Daniel

1. Encuentra la descripción paramétrica de ℓ

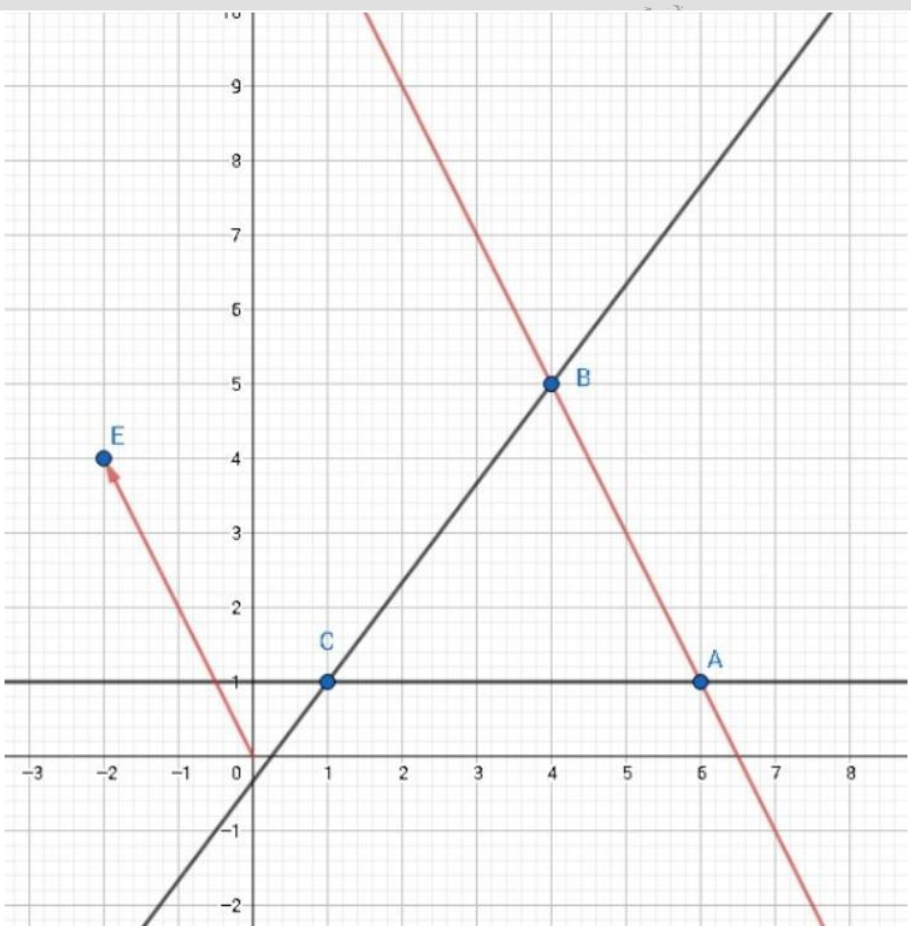
Sabemos que la definición de paramétrica es $\ell = \{P + tu \mid t \in \mathbb{R}\}$

Consideremos a $P = (6,1)$ que es el punto por donde va a pasar la recta y $u = B - A$, es decir:

$$\ell = \{(6,1) + t(B-A)\}$$

$$\ell = \{(6,1) + t((4,5) - (6,1)\}$$ se resta entrada por entrada

$$\ell = \{(6,1) + t(-2,4) \mid t \in \mathbb{R}\}$$



2- Encuentra la ecuación normal de B

Sabemos que la recta pasa por los puntos C y A entonces primero vamos a averiguar el vector dirección entre C y A.

Como $C = (1,1)$ y $A = (6,1)$, entonces facilmente podemos decir que el vector dirección es $(5,0)$. Para saber su ecuación normal necesitamos el ortogonal al vector $(5,0)$ de modo que $(5,0)^{\perp}$ es $(0,5)$.

De modo que ya tenemos todo para obtener la ecuación normal de B, que es el ortogonal al vector dirección y un punto que pase por la recta

$$\Rightarrow (0,5)\cdot(x,y) = (0,5)\cdot(1,1)$$

Siendo $(1,1)$ un punto por donde pasa la recta.

3.- Encuentra la ecuación normal de la altura por **A** (la perpendicular a **A** por A)

Basados en la descripción baricéntrica, el punto medio de dos coordenadas se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$PM = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2$$

Sustituyendo los valores de nuestros puntos B y C tenemos:

$$PM = \frac{1}{2}(4,5) + \frac{1}{2}(1,1)$$
$$PM = (2, 2.5) + (0.5, 0.5)$$
$$PM = (2.5, 3)$$

Así la recta que buscamos pasa por los puntos A y el punto medio entre B y C.

Basandonos en la ecuación normal de la recta tenemos:

$$\{P + td \mid t \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d^\perp \cdot x = d^\perp \cdot P\}$$

Donde

$d = (6,1) - (2.5,3) = (3.5,-2)$
$d^\perp = (2, 3.5)$
$P = (6,1)$

Así su ecuación normal se define como

$$\mathcal{L} = \{(x,y) - (2,3.5) = (2,3.5) \cdot (6,1)\}$$
$$\mathcal{L} = \{-2x - 3.5y = -12 - 3.5\}$$
$$\mathcal{L} = \{-2x - 3.5y = -15.5\}$$

4.- Calcula las distancias $b=d(A,C)$ y $h=d(B,b)$, para determinar el área $\frac{bh}{2}$ y haz un dibujo del triángulo, indicando h y la recta de la pregunta anterior.

Primero calcularemos las distancias del punto A al punto C.

Usaremos la ecuación normal de b que encontramos en el ejercicio anterior.

$$y = 1$$

Y en ecuación funcional

$$y - 1 = 0$$

Para encontrar la distancia usaremos la definición de la norma y los puntos A, C,

$$d = \sqrt{(1-6)^2 + (1-1)^2}$$

$A = (6, 1)$
$C = (1, 1)$

$$d = \sqrt{(-5)^2 + (0)^2}$$

$$d = \sqrt{(-5)^2}$$

$$d = |5|$$

$$d(A, C) = 5$$

Para la altura usaremos la definición de un punto a una recta, con los datos de b(recta) y B(punto), con la ecuación funcional multiplicado entrada por entrada con el punto B y sumando el término independiente, dividiendolo sobre la norma de la ecuación

$h = d(B, b)$

$B = (4,5)$

$y = 1$

$y - 1 = 0$

$$d = \frac{|0 \cdot 4 + 5 - 1|}{\sqrt{0 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{1^2}} = \frac{4}{1}$$

$$d(B,b) = 4$$

Ahora para el área únicamente usamos los datos dados por el profesor, $\text{área} = \frac{bh}{2}$

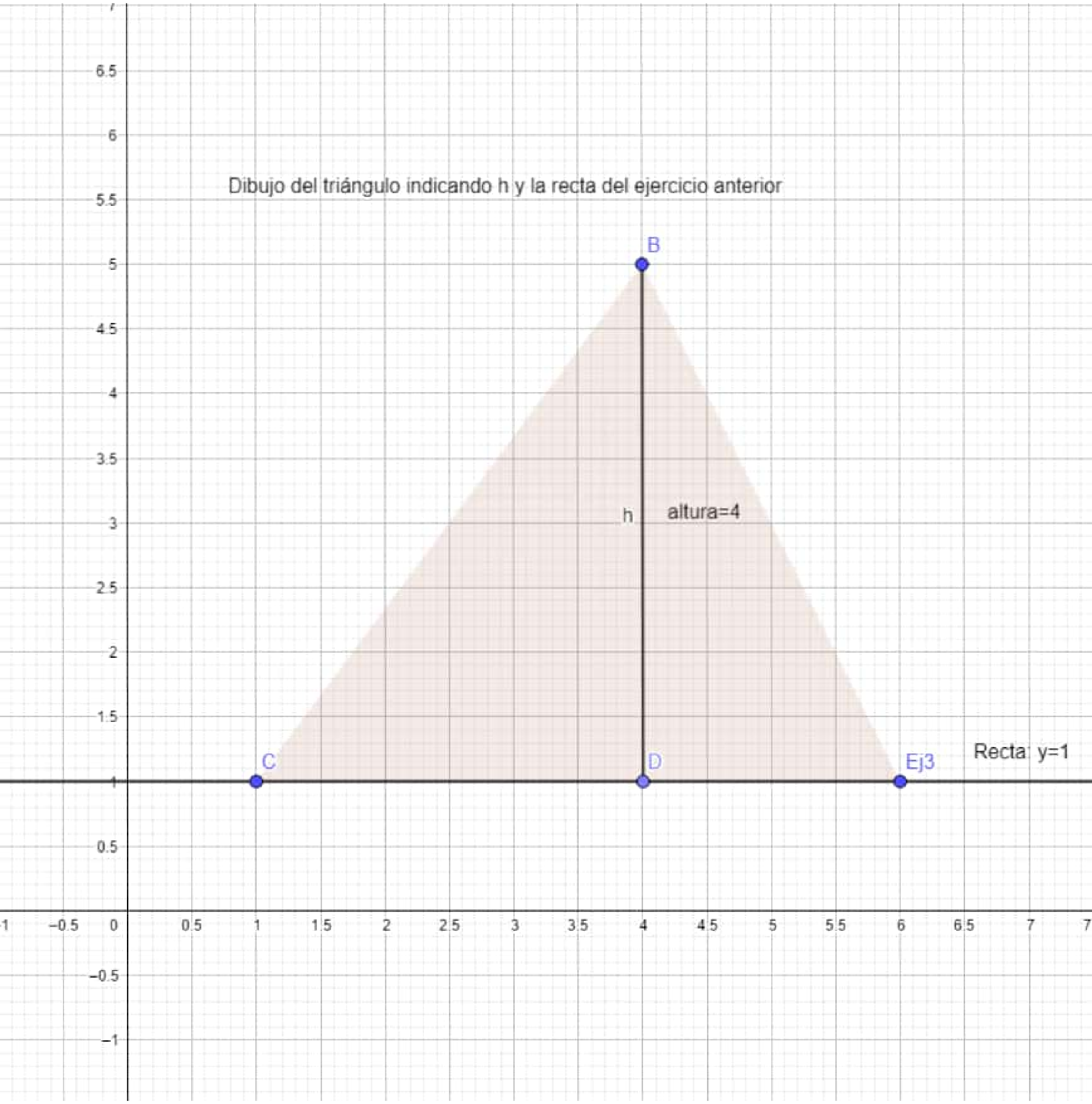
$b = 5$

$h = 4$

$$\text{área}_{ABC} = \frac{bh}{2}$$

$$= \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Por lo tanto el área del triángulo ABC es 10


Dibujo del triángulo indicando h y la recta del ejercicio anterior
B
h
altura=4
C
D
Ej3
Recta: y=1

5. Obten las coordenadas polares de los puntos con coordenadas cartesianos

$P = (1,1)$ y $Q(0,-2)$

Usamos teorema de Pitágoras para calcular la norma

$|P|^2 = 1^2 + 1^2$

$|P| = \sqrt{2}$

Usamos la función tangente para calcular el ángulo.

$\tan(\theta) = 1/1$

$\theta = \tan^{-1}(1/1) = \tan^{-1}(1)$

$\theta = 45°$

$\therefore$ las coordenadas polares son $(45°, |\sqrt{2}|)$

$Q = (0, -2)$

Usamos teorema de Pitágoras para calcular la norma

$$Q^2 = 0^2 + (-2)^2$$

$$Q = \sqrt{4} = 2$$

Usamos la función tangente para calcular el ángulo

$$\tan \theta = \frac{-2}{0}$$

$$\theta = \tan^{-1} 0 = 0$$

$\therefore$ las coordenadas polares son $(0, 121)$

6 Demuestra que dos vectores u y v son perpendiculares si y sólo si $|u+v| = |u-v|$.

Demostración:

Lo elevaremos al cuadrado, las normas:

$|u+v|^2 = u^2 + 2u \cdot v + v^2$

$|u-v|^2 = u^2 - 2u \cdot v + v^2$

$\Rightarrow$ Al suponer que u y v son perpendiculares, es decir, ortogonales, por definición el resultado de $u \cdot v = 0$, por lo que en las ecuaciones los $2u \cdot v$, sólo quedan sus normas al cuadrado y al factorizarlo nos da como resultado lo que buscamos.

$\therefore$ Si u, v son perpendiculares, entonces $|u+v| = |u-v|$

$\Leftarrow$ Si por hipótesis ambas ecuaciones son iguales; por lo anterior, tenemos que $2(u \cdot v) = -2u \cdot v$, al igualarlo a 0, queda de la forma:

$0 = -2u \cdot v - 2u \cdot v$

$0 = -4u \cdot v$

Pero ya sabemos que $u \cdot v = 0$, por lo que esto significa que u y v son perpendiculares.

$\therefore$ Si $|u+v| = |u-v|$, entonces los vectores son perpendiculares

$\therefore$ u, v son perpendiculares si y sólo si $|u+v| = |u-v|$ ∎