Miguel Emiliano Aceituno Márquez 11/12/2024

Repo 2

1. Considera los puntos $P_1=(2,2)$, $P_2(4,6)$, $Q_1=(-2,1)$ y $Q_2=(-3,2)$.

a) Da ecuaciones normales para las mediatrices $M_{P_1P_2}$ y $M_{Q_1Q_2}$.

Obtenemos punto medio $M_{P_1P_2}$

$M_{P_1P_2}=\left(\frac{2+4}{2},\frac{2+6}{2}\right)=(3,4)$

Pendiente de P_1P_2: $m=\frac{6-2}{4-2}=2$

m mediatriz $=-\frac{1}{2}$ por perpendicular

Ahora para la ec de la mediatriz

Usamos la ec. punto pendiente $y-y_1=m(x-x_1)$

$\rightarrow y-4=-\frac{1}{2}(x-3)$

$\rightarrow y-4=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

$\rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}+4$

$\rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$ Ec de la mediatriz $M_{P_1P_2}$

Ahora la mediatriz de Q_1Q_2

Obtenemos punto medio

$M_{Q_1Q_2}=\left(\frac{-2+(-3)}{2},\frac{1+2}{2}\right)=\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$

Pendiente de Q_1Q_2

$m=\frac{2-1}{-3-(-2)}=\frac{1}{-1}=-1$

m mediatriz $=1$

Ahora para la ec. de la mediatriz

$$y - \frac{3}{2} = 1\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

$$y - \frac{3}{2} = x + \frac{5}{2}$$

$$y = x + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}$$

$y = x + 4$ Ec de la mediatriz MQ_1Q_2

b) Encuentra la intersección de las mediatrices previas, llamemos a este punto A.

Igualamos las ecuaciones para encontrar el punto de intersección

$$\rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2} = x + 4$$

$$\rightarrow -x + 11 = 2x + 8$$

$$\rightarrow 11 - 8 = 2x + x$$

$$3x = 3$$

$$\rightarrow x = 1$$

Sustituimos $x = 1$ en alguna ecuación

$$\rightarrow y = x + 4$$

$$\rightarrow y = 1 + 4 = 5$$

$$\therefore A = (1, 5)$$

c) Encuentra la distancia de A a las rectas $L_{P_1Q_1}$ y $L_{P_2Q_2}$

1. Ecuación de $L_{P_1Q_1}$

Los puntos son $P_1 = (2,2)$ y $Q_1 = (-2,1)$

$$m = \frac{1-2}{-2-2} = \frac{1}{4}$$

Ecuación:

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x-2)$$

$$y - 2 = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

2. Distancia de $A = (1,5)$ a $L_{P_1Q_1}$

$$d = \frac{\left|\frac{1}{4}(1) + 5 - \frac{3}{2}\right|}{\sqrt{(-\frac{1}{4})^2 + 1^2}}$$

$$d = \frac{\left|-\frac{1}{4} + \frac{10}{2} - \frac{3}{2}\right|}{\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{16}{16}}}$$

$$d = \frac{\left|-\frac{1}{4} + \frac{7}{2}\right|}{\sqrt{\frac{17}{16}}} = \frac{13}{\sqrt{17}}$$

Ahora la ecuación de $L_{P_2Q_2}$

$$m = \frac{2-6}{-3-4} = \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$$

Ecuación $L_{P_2Q_2}$

$$y - 6 = \frac{4}{7}(x-4)$$

$$\to y - 6 = \frac{4}{7}x - \frac{16}{7}$$

$$\to y = \frac{4}{7}x - \frac{16}{7} + 6$$

$$\to y = \frac{4}{7}x + \frac{18}{7}$$ Ecuación de $L_{P_2Q_2}$

Ahora la distancia de $A = (1,5)$ a $L_{P_2Q_2}$

$$d = \frac{\left|\frac{4}{7}(1) - 5 + \frac{18}{7}\right|}{\sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)^2 + (-1)^2}}$$

$$d = \frac{\left|\frac{4}{7} + \frac{18}{7} - 5\right|}{\sqrt{\frac{16}{49} + \frac{49}{49}}} = \frac{13}{\sqrt{65}}$$

2. Sea n el último dígito de su número de cuenta distinto de 0. Considera el vector $v_0 = (2, n)$

a) Normaliza v_0 denotemos al vector resultante como v_1 y encuentra un vector v_2, tal que $\{v_1, v_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Dem que forman una base ortonormal que satisfacen $v_i \cdot v_j = \delta^i_j$.

Sea $v_0 = (2, 2)$

$\Rightarrow \|v_0\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

El vector normalizado es

$$v_1 = \frac{v_0}{\|v_0\|} = \left(\frac{2}{2\sqrt{2}}, \frac{2}{2\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Para encontrar v_2, necesitamos un vector ortogonal a v_1, se puede obtener intercambiando las coordenadas y el signo

$$\Rightarrow v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Verificamos

$$v_1 \cdot v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow v_1 \cdot v_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Verificació de normalización

$$\|v_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

Por otro lado

$$\|v_2\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

Ambos vectores están normalizados. $\therefore$ es base ortonormal de $\mathbb{R}^2$

b) ¿Cuántos vectores $w \in \mathbb{R}^2$ cumplen que $\{u_1, w\}$ es una base ortonormal?

Condiciones para base ortonormal

1. Normalización: El vector w debe tener norma 1:

$\|w\| = 1$

2. Ortogonalidad: $u_1 \cdot w = 0$

1. $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ya está fijo como parte de la base.

2. Para que w sea ortogonal a u_1, debe pasar esto

$\frac{1}{\sqrt{2}} w_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} w_2 = 0$

$\rightarrow w_1 + w_2 = 0$

3. Los vectores $w = (w_1, w_2)$ que cumplen esta ecuación son del tipo: $w = (w_1, -w_1)$

4. La condición de normalización $(\|w\| = 1)$ implica:

$\sqrt{w_1^2 + (-w_1)^2} = 1$

$\sqrt{2 w_1^2} = 1 \rightarrow w_1^2 = \frac{1}{2}$

$\therefore w_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad w_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

5. Esto da 2 soluciones para w:

$w_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad w_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

c) Escribe a los vectores (1,1), (7,4) y (-3,5) como combinación lineal de u_1 y u_2.

Dado $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $u_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ usamos:

$a = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$

1. Para (1, 1):

$a = \frac{1+1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, $b = \frac{1-1}{\sqrt{2}} = 0$

$(1,1) = \sqrt{2}\,u_1 + 0\,u_2$

2. Para (7, 4)

$a = \frac{7+4}{\sqrt{2}} = \frac{11}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{4-7}{\sqrt{2}} = \frac{-3}{\sqrt{2}}$

$(7,4) = \frac{11}{\sqrt{2}}\,u_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}\,u_2$

3. Para (-3, 5):

$a = \frac{-3+5}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, $b = \frac{5-(-3)}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

$(-3,5) = \sqrt{2}\,u_1 + 4\sqrt{2}\,u_2$

d) Refleja al punto (7, 4) con respecto a la recta generada por u_1. Escribe a este punto reflejado como C.L. de u_1 y v_2. ¿Qué puedes notar de estos coeficientes con respecto a los de (7,4)?

Paso 1. Proyectamos del punto sobre u_1

$Proy_{u_1}(7, 4) = \left(\frac{v \cdot u}{u_1 \cdot u_1}\right) u_1$

donde $v = (7, 4)$. Calculamos

1. $v \cdot u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 7 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 4 = \frac{7+4}{\sqrt{2}} = \frac{11}{\sqrt{2}}$

2. $u_1 \cdot u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}^2 = 1$

$\rightarrow Proy_{u_1}(7,4) = \frac{\frac{11}{\sqrt{2}}}{1} \cdot u_1 = \frac{11}{\sqrt{2}} \cdot u_1$

La proyección es:

$Proy_{u_1}(7,4) = \left(\frac{11}{\sqrt{2}}, \frac{11}{\sqrt{2}}\right)$

Paso 2: Reflexión respecto a u_1 (7,4)

v reflejado $= 2 \cdot Proy_{u_1}(7,4) - (7,4)$

$\rightarrow 2 \cdot Proy_{u_1}(7,4) = 2 \cdot \left(\frac{11}{\sqrt{2}}, \frac{11}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{22}{\sqrt{2}}, \frac{22}{\sqrt{2}}\right)$

Sustraemos (7,4):

v reflejado $= \left(\frac{22}{\sqrt{2}}, \frac{22}{\sqrt{2}}\right) - (7, 4)$.

$\rightarrow v$ reflejado $= \left(\frac{22}{\sqrt{2}} - 7, \frac{22}{\sqrt{2}} - 4\right)$

Norma

Ahora escribimos como C.L. de v_1 y v_2

Sabemos que (7,4) ya es

$$(7,4) = \frac{11}{\sqrt{2}} v_1 - \frac{3}{\sqrt{2}} v_2.$$

Para el reflejo, el coeficiente de v_1 permanece igual, mientras que el de v_2 cambia de signo

$$V \text{ reflejado} = \frac{11}{\sqrt{2}} v_1 + \frac{3}{\sqrt{2}} v_2$$

3. Sea C la circunferencia $x^2+y^2-6x+8y=0$

a) Encuentra el centro, a, y el radio, r, de C. Escríbela en la forma $(x-a)\cdot(x-a)=r^2$.

1. Agrupar

$(x^2-6x)+(y^2+8y)=0$

2. Completar cuadrados

$\to (x-3)^2-9+(y+4)^2-16=0$

$\to (x-3)^2+(y+4)^2-25=0$

$\to (x-3)^2+(y+4)^2=25$

Centro: $(3,-4)$ y Radio: 5

b) Encuentra las rectas tangentes a C que pasan por el punto $P=(37/4,-4)$, sus ecuaciones y los puntos de tangencia

Sean (x_1, y_1) los puntos de la tangencia en la circunferencia. Una recta tangente desde P debe cumplir que la distancia entre $C=(3,-4)$ y la recta es igual al radio $r=5$.

$\to$ Ec de recta tangente: $mx-y-m\frac{37}{4}-4=0$

La distancia del centro $C=(3,-4)$ a esta recta es igual al radio. La fórmula de distancia de un punto a una recta $Ax+By+C=0$ es:

$$\text{distancia}=\frac{|A(x_0)+B(y_0)+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Sustituimos e igualamos al radio

$$\text{Distancia} = \frac{\left| m(3) - (-4) - m\frac{37}{4} - 4 \right|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 5$$

Ahora resolvemos la ecuación

$$3m + 4 - m\frac{37}{4} - 4 = 3m - m\frac{37}{4}$$

$$= m\left(3 - \frac{37}{4}\right) = m\left(\frac{12}{4} - \frac{37}{4}\right) = m\left(-\frac{25}{4}\right) = -\frac{25m}{4}$$

La ecuación queda:

$$\frac{\left| -\frac{25m}{4} \right|}{\sqrt{m^2+1}} = 5$$

$$\rightarrow \frac{25|m|}{4} = 5\sqrt{m^2+1}$$

$$25|m| = 20\sqrt{m^2+1}$$

$$5|m| = 4\sqrt{m^2+1}$$

$$(5|m|)^2 = \left(4\sqrt{m^2+1}\right)^2$$

$$\rightarrow 25m^2 = 16(m^2+1)$$

$$25m^2 = 16m^2 + 16$$

$$9m^2 = 16$$

$$m^2 = \frac{16}{9}$$

$$m = \pm\frac{4}{3}$$

Ahora las ecuaciones de las rectas tangentes

para $m = \frac{4}{3}$

$$y + 4 = \frac{4}{3}\left(x - \frac{37}{4}\right)$$

$$y + 4 = \frac{4}{3}x - \frac{148}{12}$$

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{148}{12} - 4 = \frac{4}{3}x - \frac{196}{12} = \frac{4}{3}x - \frac{49}{3}$$

Para $m = -\frac{4}{3}$

$$y + 4 = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{37}{4}\right)$$

$$y + 4 = -\frac{4}{3}x + \frac{148}{12}$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{148}{12} - 4 = -\frac{4}{3}x + \frac{100}{12} = -\frac{4}{3}$$

Las ec. de las tangentes son:

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{49}{3}$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$$

Paso siguiente: Puntos de tangencia

vamos a encontrar los puntos de tangencia sustituyendo cada recta en la ecuación $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$

$$\rightarrow (x-3)^2 + \left(\frac{4}{3}x - \frac{49}{3} + 4\right)^2 = 25$$

$$(x-3)^2 + \left(\frac{4}{3}x - \frac{49}{3} + \frac{12}{3}\right) = 25$$

$$\rightarrow (x-3)^2 + \left(\frac{4}{3}x - \frac{37}{3}\right)^2 = 25$$

Expandiendo los términos

1. $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

2. $\left(-\frac{4}{3}x + \frac{37}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}x^2 - \frac{296}{9}x + \frac{1369}{9}$

Sustituimos

$x^2 - 6x + 9 + \frac{16}{9}x^2 - \frac{296}{9}x + \frac{1369}{9} = 25$

$\to 9x^2 - 54x + 81 + 16x^2 - 296x + 1369 = 225$

$\to 25x^2 - 350x + 1225 = 0$

$25(x^2 - 14x + 49) = 0$

$25(x-7)^2 = 0$

$x = 7$

Sustituimos $x = 7$ en $y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$

$\to y = -\frac{4}{3}(7) + \frac{25}{3} = -\frac{28}{3} + \frac{25}{3} = -\frac{3}{3} = -1$

Conclusión

Recta tangente 1: $y = \frac{4}{3}x - \frac{49}{3}$

P. tangencia: $T_1 = (7, -7)$

Recta tangente 2: $y = \left(-\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}\right)$

P. tangencia: $T_2 = (7, -1)$

Norma

Miguel Emiliano Arcadio Moreno 11/12/2023
Grupo 2

c) Elige un punto c intermedio en el segmento de recta que conecta a los puntos de tangencia, encuentra la ecuación de su recta polar, P_c, y verifica que p está en dicha polar

$T_1 = (7, -7)$ y $T_2 = (7, -1)$

El segemento de recta que conecta a estos puntos es una línea vertical porque las coordenadas x son iguales en ambos puntos. $\therefore x = 7$

El punto intermedio en el segmento se encuentra promedando T_1 y T_2

$\rightarrow C = \left(\frac{7+7}{2}, \frac{-7+(-1)}{2}\right) = (7, -4)$

Ahora la ec de la recta polar

$a(x-a) + b(y-b) = r^2$

Sustituimos

$3(x-3) + (-4)(y+4) = 25$

$\rightarrow 3x - 9 - 4y - 16 = 25$

$\rightarrow 3x - 4y - 50 = 25$

$\rightarrow 3x - 4y = 75$ Ec de la recta polar

Verificamos $P = \left(\frac{37}{4}, -4\right)$ en $3x - 4y = 75$

$\rightarrow 3\left(\frac{37}{4}\right) - 4(-4) = 75$

$\rightarrow \frac{111}{4} + 16 = 75$

$\rightarrow \frac{111}{4} + \frac{64}{4} = 75$

$\rightarrow \frac{175}{4} = 75$

Norma

4. Sean $p = (-1, 3)$ y $q = (3, -1)$.

a) Encuentra la ec. vectorial de la circunferencia que tiene al segmento $\overline{pq}$ como diámetro.

El centro de la circunferencia es el punto medio del segmento Pq. La fórmula para el punto medio es:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Sustituimos $P = (-1, 3)$ y $q = (3, -1)$:

$$\rightarrow M = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = (1, 1)$$

El radio es la mitad de la distancia entre p y q.

La fórmula de la distancia entre dos puntos es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Sustituimos $p(-1, 3)$ y $q(3, -1)$:

$$\rightarrow d = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$$

El radio es la mitad del diámetro, por lo que:

$$r = \frac{d}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

La ec. general de una circunferencia con centro (h, k) y radio r es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

sustituyendo $(h, k) = (1, 1)$ y $r = 2\sqrt{2}$

$$\rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

$$\rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$$

b) Elije un número $T \in (0,1)$, $r \neq \frac{1}{2}$ y considera el punto $a = p + T(q-p)$. Encuentra el conjugado armónico de a.

Sea $T = \frac{1}{3}$

1. Coordenadas del punto A

El punto A esta definido como:

$A = p + T(q-p)$

Sustituimos $P = (-1,3)$, $q = (3,-1)$ y $T = \frac{1}{3}$

$\to Q - P = (3-(-1), -1-3) = (4,-4)$

$A = (-1,3) + \frac{1}{3}(4,-4) = \left(-1 + \frac{4}{3}, 3 - \frac{4}{3}\right)$

$A = \left(\frac{-3+4}{3}, \frac{9-4}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

2. Conjugado armónico A'

$A' = P + \frac{1}{T}(Q-P)$

$\to A' = (-1,3) + \frac{1}{\frac{1}{3}}(4,-4) = (-1,3) + 3(4,-4)$

$A' = (-1+12, 3-12) = (11,-9)$