

Examen 1

November 2020

1 Equipo

Alanis González Sebastián

Temich Piaga Paula

Hernández Trinidad Nicolás

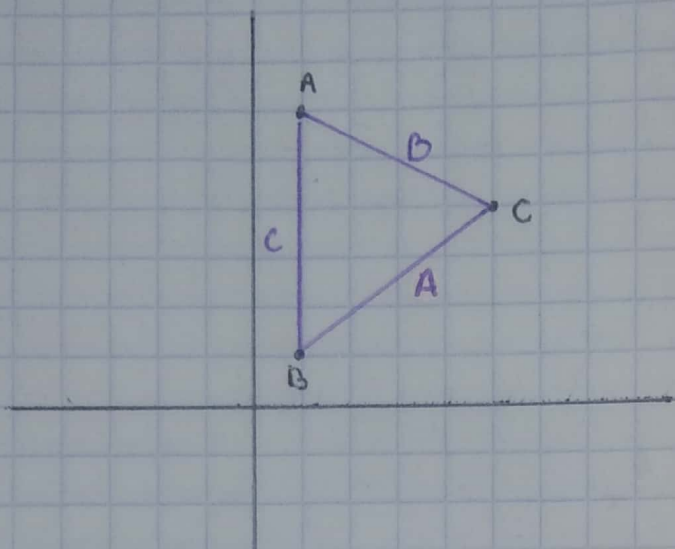
Carmona Cruz Jaqueline Andrea

González Zamudio Sara

Mendoza León Videl Nefertari

Considera los vértices de triángulo ABC y denotado por A la recta que contiene al lado opuesto al vértice A , similarmente B y C , para:

$$A = (1, 6), B = (1, 1), C = (5, 4)$$



1. Encuentra la descripción paramétrica de c

Primero encontremos el vector director de la recta BA (C) usando los puntos $A = (1, 6)$ y $B = (1, 1)$

El vector director que va de \overrightarrow{BA} es igual a $\overrightarrow{BA}: A - B \Rightarrow \overrightarrow{BA}: (1, 6) - (1, 1) = (0, 5)$

Recordemos que la fórmula de la representación paramétrica es:

$$\mathcal{L} = \{P + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Tomando como P al punto $A = (1, 6)$ y sustituyendo a v por el vector director antes encontrado entonces tenemos que la representación paramétrica de la recta C es:

$$\mathcal{L}_C = \{(1, 6) + t(0, 5) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

② Encuentra la ecuación normal de B

Sabiendo que la recta B pasa por los puntos $A = (1, 6)$ y $C = (5, 4)$, tomando como punto de referencia a $(1, 6)$

Por el teorema 1.8.2 tenemos que:

$$\{p + td \mid t \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d^\perp \cdot x = d^\perp \cdot p\}$$
$$d^\perp \cdot x = d^\perp \cdot (1, 6)$$

Y para cumplir con el teorema necesito un vector director que se obtiene de la resta del punto $C - A$ entonces

$$(5, 4) - (1, 6) = (4, -2)$$

Y el vector director de $(4, -2)$ sería

$$(4, -2)^\perp = (2, 4)$$

Si se aplica el teorema con $x = (x, y)$ entonces:

$$d^\perp \cdot x = d^\perp \cdot p$$

$$(2, 4) \cdot (x, y) = (2, 4) \cdot (1, 6)$$

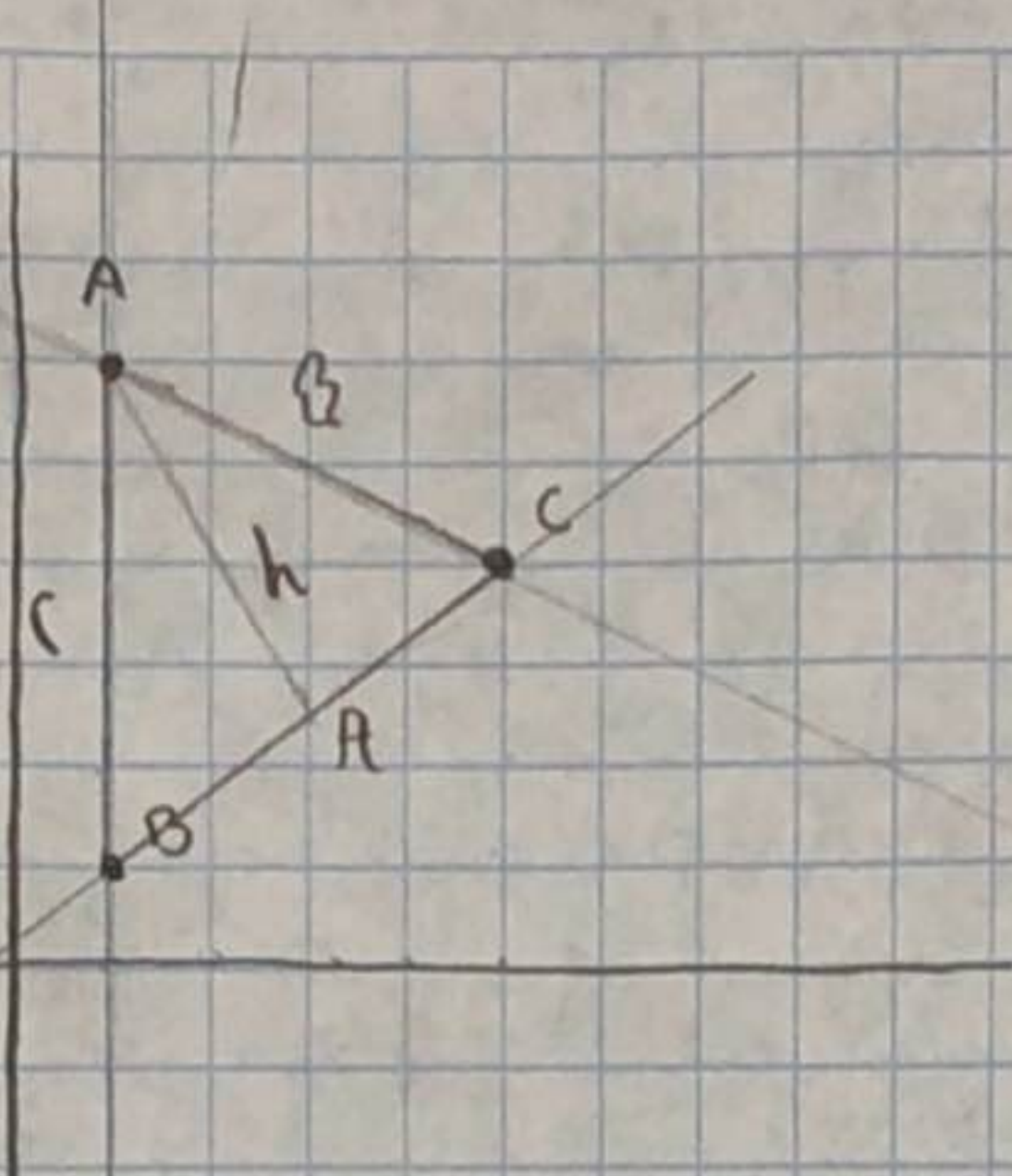
$$2x + 4y = 2 + 24$$

$$2x + 4y = 24$$

∴ la ecuación normal de B sería

$$2x + 4y = 24$$

- ③ Encuentra la ecuación normal de la altura por A
(la perpendicular de A por A).



$$A = (1, 6)$$

$$B = (1, 1)$$

$$C = (5, 4)$$

$$C - B = (5, 4) - (1, 1)$$

$$h: (C-B) \cdot x = (C-B) \cdot A \quad \text{donde: } C-B = (5, 4) - (1, 1) = (4, 3)$$

$$h: (4, 3) \cdot (x, y) = (4, 3) \cdot (1, 6)$$

$$h: 4x + 3y = 22$$

Notemos que el problema se resuelve con las propiedades algebraicas del producto punto, vemos que podemos distribuir el producto punto al lado derecho.

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid (q-p)^+ \cdot x = q^+ \cdot p - p \cdot p\}$$

$$\therefore h: (q-p)^+ \cdot x = q^+ \cdot p$$

$$\therefore h: 4x + 3y = 22$$

4) Calcular las distancias $b = d(A, C)$ y $h = d(B, l)$, para determinar el área $\frac{bh}{2}$ y haz el dibujo del triángulo, indicando h y la recta de la pregunta anterior.

Tenemos $A(1,6)$, $B(1,1)$, $C(5,4)$.

Sabemos que si tenemos un punto y una recta podemos sacar la distancia de un punto a una recta

Entonces sacamos la ecuación paramétrica de la recta \overline{AC}

Si tomamos el punto $A(1,6)$ y tenemos que sacar el vector director que es $Q - P$.

$A(1,6)$ y $C(5,4)$

$$Q - P = C - A$$

Obtenemos que el vector

$$V = (5,4) - (1,6)$$

$$V = (5-1, 4-6)$$

$$V = (4, -2)$$

y la ecuación paramétrica es $L = \{P + tV \mid t \in \mathbb{R}\}$

Sustituimos y queda

$$L_{AC} = \{(1,6) + t(4,-2) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

de la misma ecuación paramétrica podemos obtener la normal

La ecuación normal es

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d^\perp \cdot x = d^\perp \cdot p\}$$

Entonces sabemos que su vector director es $(4,-2)$

el compadre ortogonal es $(2,4)$

El punto es $(1,6)$

Como $d^\perp \cdot x = d^\perp \cdot p$ sustituimos

$$(2,4) \cdot x = (2,4) \cdot (1,6)$$

$$(2,4) \cdot x = (2+24)$$

$$(2,4) \cdot x = 26$$

Para encontrar la distancia de una recta a un punto tenemos

Punto $B=(1,1)$

Tenemos que $n=(2,4)$ y $C=26$
y la distancia se saca

$$d = \frac{|C - (n \cdot p)|}{|n|} \quad \text{Sustituyendo obtenemos}$$

$$d_{(B,B)} = \frac{|26 - (2,4) \cdot (1,1)|}{|(2,4)|}$$

$$d_{(B,B)} = \frac{|26 - (2+4)|}{|\sqrt{(2)^2 + (4)^2}|}$$

$$d_{(B,B)} = \frac{|26 - 6|}{|\sqrt{4 + 16}|}$$

$$d_{(B,B)} = \frac{|20|}{|\sqrt{20}|}$$

$$d_{(B,B)} = \frac{20}{\sqrt{20}}$$

luego sacamos la distancia $b = d(A,C)$ y $h = d(B,B)$

$$\begin{aligned} d(A,C) &= |A-C| = |(1,6) - (5,4)| = |(1-5, 6-4)| = |-4, 2| \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \end{aligned}$$

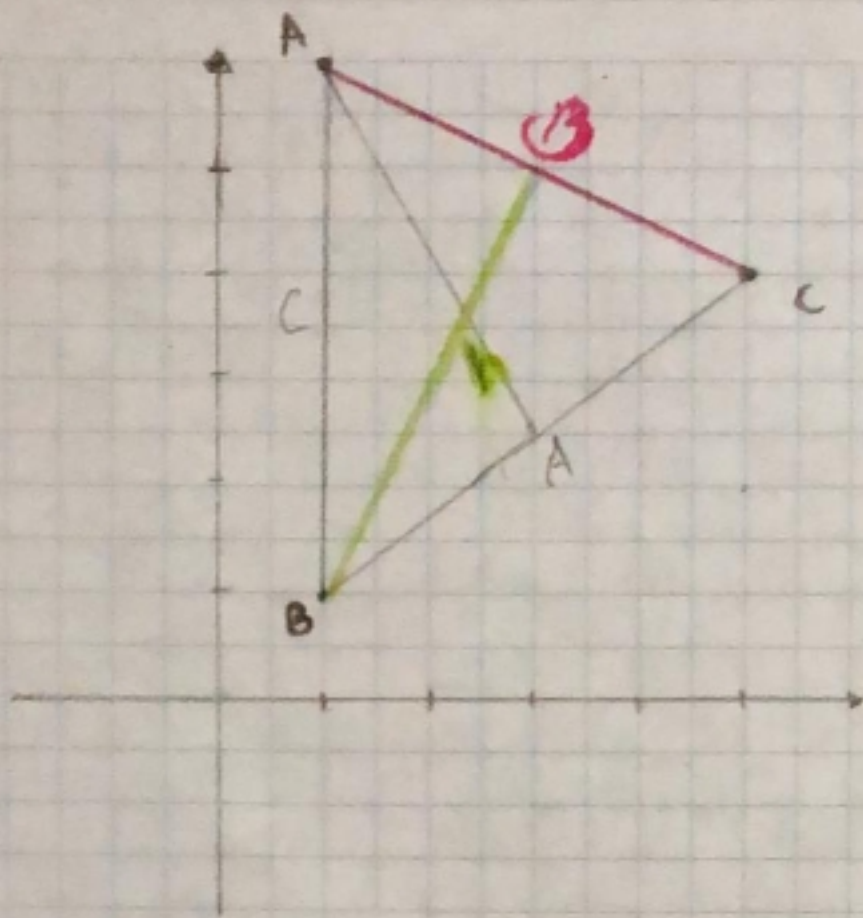
Para sacar el area tenemos $\frac{bh}{2}$ entonces

tenemos que $b = \sqrt{20}$ y $h = \frac{20}{\sqrt{20}}$ sustituyendo

$$A = \frac{\sqrt{20} \left(\frac{20}{\sqrt{20}} \right)}{2}$$

$$A = \frac{20}{2}$$

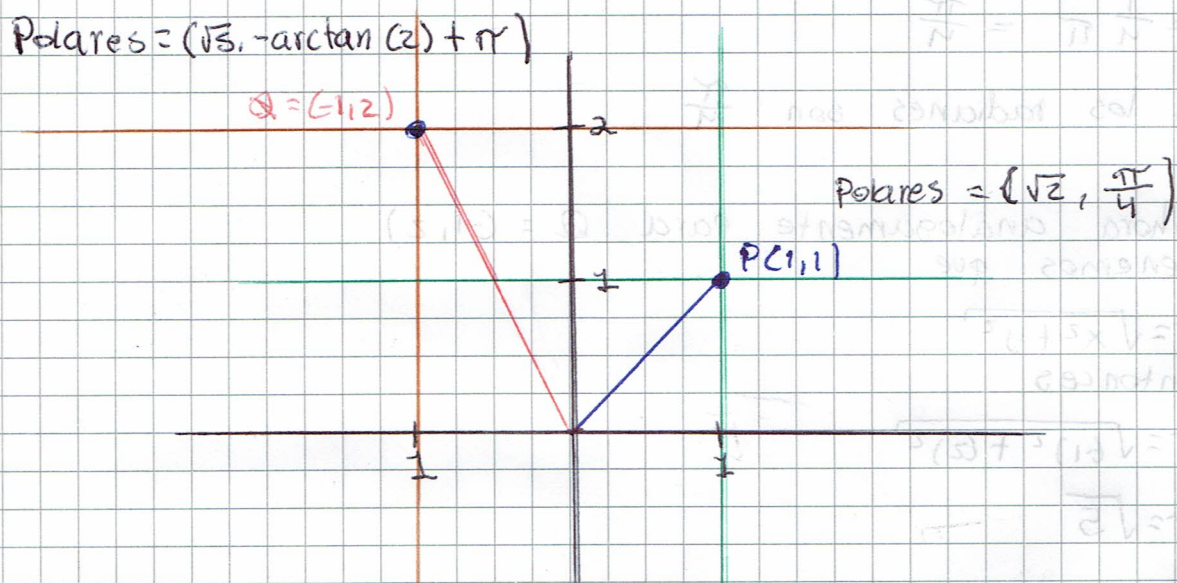
$$A = 10$$



⑤ obtén las coordenadas polares de los puntos con coordenadas cartesianas

$$P = (1, 1) \text{ y } Q = (-1, 2)$$

$$\text{Polares} = (\sqrt{5}, -\arctan(2) + \pi)$$



$$P(x, y) \rightarrow P(1, 1)$$

Lo que queremos es $P(r, \theta)$

Utilizando el teorema de pitágoras donde $c^2 = a^2 + b^2$ y donde buscamos r , esto es $r = c$ como conocemos x, y , entonces podemos sustituir como $x = a$ y $y = b$, entonces:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

sustituyendo

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Para el ángulo directamente usamos:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

entonces

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1)$$

$$\theta = 45^\circ$$

Sabemos que el radio cabe siempre 2π veces en la circunferencia, entonces podemos decir que:

$$\frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ}$$

Por lo tanto

$$\frac{45(2)}{360} \pi = \frac{90}{360} \pi$$
$$= \frac{1}{4} \pi = \frac{\pi}{4}$$

∴ los radianes son $\frac{\pi}{4}$

Ahora análogamente para $Q = (-1, 2)$
Tenemos que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Entonces

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2}$$

$$r = \sqrt{5}$$

Nuevamente para el ángulo usamos

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

entonces

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2}{-1} \right)$$

$$\theta = -63.4349^\circ$$

Como es negativa podemos ponerlo como

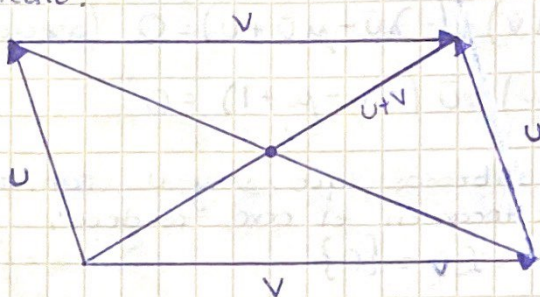
$$\theta = \arctan \left(\frac{2}{-1} \right) + \pi$$

$$\theta = -\arctan(2) + \pi$$

∴ los radianes son $(\sqrt{5}, -\arctan(2) + \pi)$

6. Dados dos vectores \bar{u} y \bar{v} en \mathbb{R}^n , el paralelogramo que definen tiene como vértices los puntos O, \bar{u}, \bar{v} y $\bar{u} + \bar{v}$. Demuestra que sus diagonales, es decir, los segmentos $\overline{O(\bar{u} + \bar{v})}$ y $\overline{\bar{u}\bar{v}}$ se intersecan en su punto medio.

Por demostrar: los segmentos O a $\bar{u} + \bar{v}$ y de \bar{u} a \bar{v} se intersecan en su punto medio.



Demostración.

Si partimos de la representación paramétrica de las diagonales, tenemos:

- denotando L_1 al segmento $\overline{u\bar{v}}$,
entonces:

Como la recta paramétrica está expresada de la siguiente manera

$$L = \{v_1 + \lambda v_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Sustituyendo:

$$L_1 = \{\bar{u} + \lambda(\bar{v} - \bar{u}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Análogamente para el segmento $\overline{O(\bar{u} + \bar{v})}$, si denotamos L_2 , tenemos:

$$L_2 = \{0 + \mu(\bar{u} + \bar{v}) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$$

La intersección de estas dos rectas está dada por los parámetros λ y μ tales que:

$$P + \lambda \bar{v} = Q + \mu \bar{u}$$

los cuales encontramos resolviendo el sistema de ecuaciones equivalente a

$$\lambda \bar{v} - \mu \bar{u} = Q - P$$

como lo visto anteriormente en clase.

Ahora, si sustituimos valores:

$$\lambda(\bar{v} - \bar{u}) - \mu(\bar{u} + \bar{v}) = 0 - \bar{u}$$

igualando a cero,

$$\lambda(\bar{v} - \bar{u}) - \mu(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{u} = 0$$

desarrollando,

$$(\lambda \bar{v} - \lambda \bar{u}) - (\mu \bar{u} + \mu \bar{v}) + \bar{u} = 0$$

$$\lambda \bar{v} - \lambda \bar{u} - \mu \bar{u} - \mu \bar{v} + \bar{u} = 0$$

así,

$$\lambda \bar{v} - \mu \bar{v} - \lambda \bar{u} - \mu \bar{u} + \bar{u} = 0 \quad (\text{prop. conmutativa}).$$

$$(\lambda \bar{v} - \mu \bar{v}) + (-\lambda \bar{u} - \mu \bar{u} + \bar{u}) = 0 \quad (\text{asociatividad}).$$

$$\bar{v}(\lambda - \mu) + \bar{u}(-\lambda - \mu + 1) = 0$$

Como implícitamente sabemos que \bar{v} y \bar{u} son linealmente independientes pues solo se tocan en el cero, es decir,

$$\mathcal{L}\bar{u} \cap \mathcal{L}\bar{v} = \{0\}$$

Siendo linealmente independientes, los escalares deben ser igual a cero para que así, se puedan tocar en el punto del origen, entonces:

$$\bar{v}(\lambda - \mu) + \bar{u}(-\lambda - \mu + 1) = 0.$$

reescribiendo:

$$\bar{v}(\lambda - \mu) - \bar{u}(\lambda + \mu - 1) = 0$$

$$\bar{v}(\lambda - \mu) = \bar{u}(\lambda + \mu - 1)$$

Si $\omega = \bar{v}(\lambda - \mu)$, entonces se sigue que $\omega \in \mathcal{L}\bar{u}$ y a su vez, $\omega = \bar{u}(\lambda + \mu - 1)$, así que $\omega \in \mathcal{L}\bar{v}$.

Por lo tanto,

$$\omega \in (\mathcal{L}\bar{u} \cap \mathcal{L}\bar{v})$$

y como $(\mathcal{L}\bar{u} \cap \mathcal{L}\bar{v}) = \{0\}$ (por ser linealmente independientes), entonces $\omega = 0$.

Así, podemos escribir que

$$(\lambda - \mu) = 0 \quad \text{y} \quad (\lambda + \mu - 1) = 0$$

lo cual nos da un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\lambda - \mu = 0 \quad \dots (1)$$

$$\lambda + \mu - 1 = 0 \quad \dots (2)$$

Resolviendo,

encontrando el valor de λ en (1).

$$\lambda - \mu = 0$$

$$\lambda = \mu$$

Sustituyendo el valor de λ en (2)

$$\lambda + \mu - 1 = 0$$

$$\mu + \mu - 1 = 0$$

$$2\mu = 1$$

$$\mu = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo el valor de μ en (1) tenemos:

$$\lambda - \mu = 0$$

$$\lambda - \frac{1}{2} = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

Comprobando:

$$\lambda - \mu = \lambda + \mu - 1$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1$$

$$0 = 1 - 1$$

$$0 = 0.$$

Con lo anterior podemos concluir que las diagonales L_1 y L_2 se intersectan en su punto medio, es decir, donde los escalares λ y μ son iguales a $1/2$. ■