

# Primer examen de Geometría Analítica.

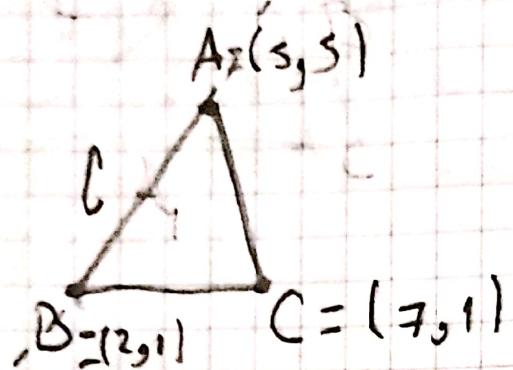
Integrantes:



- Axel Yael Peña Nuñez
- Itzel Alina Roldán Mora
- Erick del Toro Zarraga
- Santiago Hernandez Colin

A 28 de noviembre del año 2020

1. Encontrar la descripción paramétrica de  $C$ .



Notamos que la recta  $C$  pasa por los puntos  $A$  y  $B$ , donde podemos describir al vector direccional de la representación paramétrica de la siguiente forma.

$$(A - B)$$

Y como la recta  $C$  pasa por esos 2 puntos, podemos escoger  $B$  para especificar que trazaremos el vector  $(A - B)$  desde  $B$ . Por lo que nuestra expresión paramétrica es:

$$S_C = \{B + t(A - B) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Sustituimos por los valores ya conocidos

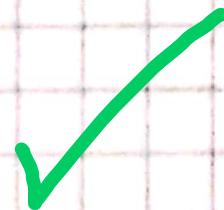
$$\mathcal{L}C = \{(2, 1) + t((5, 5) - (2, 1)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Procedemos a aplicar la suma de vectores

$$\mathcal{L}C = \{(2, 1) + t(3, 4) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Simplificamos

$$\mathcal{L}C = \{(2, 1) + t(3, 4) \mid t \in \mathbb{R}\}$$



Siendo ésta la representación paramétrica de la recta C.

Segunda pregunta: encuentra la ecuación normal  
de  $\mathcal{B}$

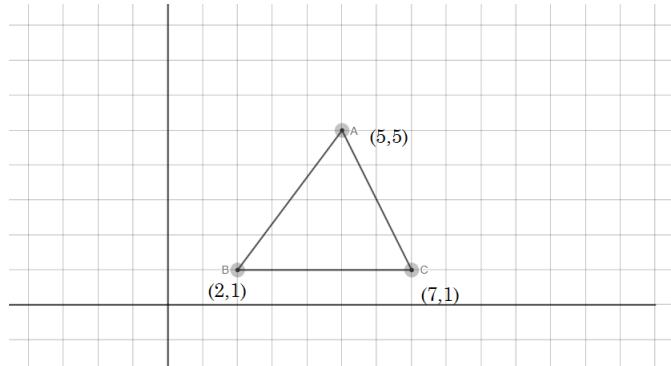
Santiago Hernández Colin

November 28, 2020

Considera los vértices del triángulo  $ABC$  y denota  $\mathcal{A}$  la recta que contiene al lado opuesto al vértice  $A$ , similarmente  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$ .

$$A = (5, 5), \quad B = (2, 1), \quad C = (7, 1),$$

2.) Encuentra la ecuación normal de  $\mathcal{B}$  la recta que va de  $\overline{AC}$



Primero hay que encontrar la recta paramétrica de  $\mathcal{B}$ , hay que obtener el vector director de  $\overline{AC}$  con la diferencia de vectores.

$$A - C = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ahora solo hay que hacer que este vector inicie en un punto  $P$  en la recta y entonces tenemos :

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Por uno de los teoremas visto en clase:

$$\mathcal{L} = \{P + tD \mid t \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid D^\perp \cdot \mathbf{x} = D^\perp \cdot P\}$$

Hay que obtener el compadre ortogonal de  $\overrightarrow{AC}$ :

$$\overrightarrow{AC}^\perp = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Por el teorema podemos sustituir directamente:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid D^\perp \cdot \mathbf{x} = D^\perp \cdot P\}$$

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AC}^\perp \cdot \mathbf{x} = \overrightarrow{AC}^\perp \cdot A\}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aquí podemos decir que hemos terminado el ejercicio, pues buscábamos una recta de la forma:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d$$

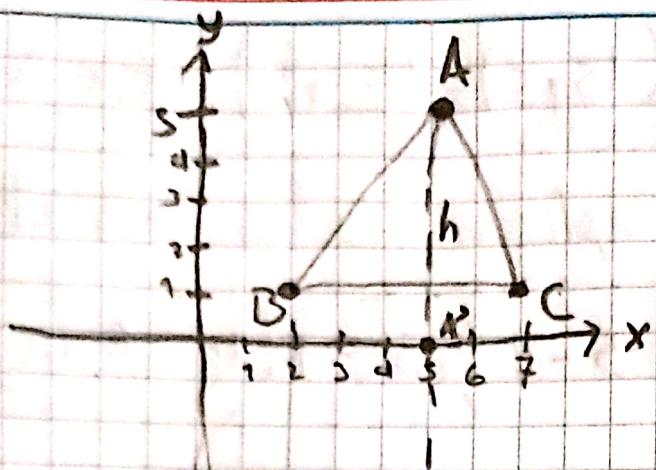
Por el producto punto:

$$-4x - 2y = -30$$

Esta es la ecuación normal de la recta  $\mathcal{B}$  que es opuesta al vértice  $B$ .



3.



Notemos que la altura (denominada  $h$ ) es perpendicular a  $\overline{BC}$ , sin embargo  $\overline{BC}$  es paralela al eje de la  $x$ . Por lo que al trazar la recta Ortogonal a  $\overline{BC}$  que pasa por A, la recta sería paralela al eje  $y$ , pues  $\overline{BC}$  es paralelo a  $x$ , con esto podemos decir que la intersección al eje de  $x$  es  $(5, 0)$ , debido a que al ser paralela a  $y$ , la primera entrada se mantiene constante, y al intersectar con el eje de los  $x$ , la segunda entrada es igual a cero. Con estos elementos escribimos nuestra expresión paramétrica de la siguiente manera:

$$L_h = \{ A^2 - t(A - A^*) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

Sustituyendo por valores conocidos

$$L_h = \{ (5,0) - t((5,5) - (5,0)) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

Suma de vectores

$$L_h = \{ (5,0) - t(5-5, 5-0) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

Simplificamos

$$L_h = \{ (5,0) - t(0,5) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

Por teorema sabemos que:

$$L = \{ P + tU \mid t \in \mathbb{R} \} = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid U^\perp \cdot \bar{x} = U^\perp \cdot P \}$$

Aplicando el teorema expresamos la ecuación normal

$$(0,5)^\perp \cdot (x,y) = (0,5)^\perp \cdot (5,0)$$

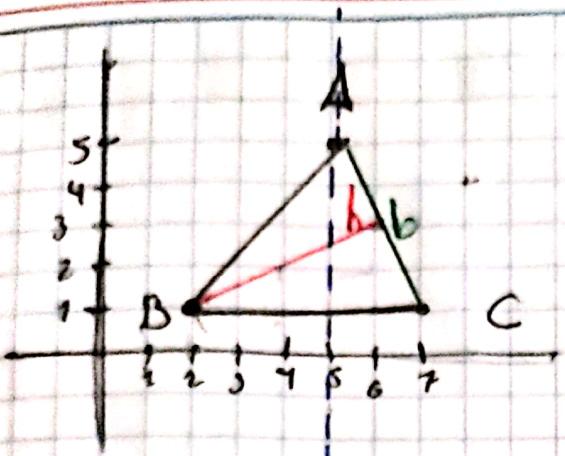
Aplicamos el ortogonal

$$(-5,0) \cdot (x,y) = (-5,0) \cdot (5,0)$$

Aplicamos el producto punto

$$(-5,0) \cdot (x,y) = -25$$

simplificar  
 $x = 5$



L<sub>h</sub> pregunta 3

Donde sabemos que la base es la distancia de A a C, es decir  $b = d(A, C)$

Pero podemos definir la distancia como el módulo de A menos el módulo de C, es decir

$$b = \|A - C\|$$

Sustituyendo por valores

$$b = \|(5, 5) - (7, 1)\|$$

Suma de vectores

$$b = \|(5-7, 5-1)\|$$

Simplificamos

$$b = \|(-2, 4)\|$$

Aplicamos el módulo

$$b = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

4)

Calcula las distancias  $b = d(A, C)$  y  $h = d(B, \ell)$ , para determinar el área  $bh/2$  y haz un dibujo del triángulo indicando  $h$  y la recta de la pregunta anterior

la distancia  $b$  es

$$d(A, C) = |A - C|$$

$$d((5, 5), (2, 1)) = \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2}$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (4)^2}$$

$$= \sqrt{4+16}$$

$$= \sqrt{20}$$

$$(2, -4)$$

La recta  $AC$  es  $d_1 = \{(5, 5) + s(2, -1) | s \in \mathbb{R}\}$

La recta normal  $AC$  que pasa por  $B$  es  $d_2 = \{(2, 1) + t(1, 2) | t \in \mathbb{R}\}$

El punto de intersección de  $d_1$  y  $d_2$  es  $P$ .

$$d_1 = \{(5, 5) + s(2, -1) | s \in \mathbb{R}\}$$

$$d_2 = \{(2, 1) + t(1, 2) | t \in \mathbb{R}\}$$

$$(5, 5) + s(2, -1) = (2, 1) + t(1, 2)$$

$$s(2, 1) - t(1, 2) = (2, 1) - (5, 5)$$

$$(2s - t, -s - 2t) = (-3, -4)$$

$$2s - t = -3 \quad t = 2s + 3$$

$$-4s - 2t = -4$$

$$-s - 4s - 6 = -4$$

$$\begin{aligned} 8s &= 2 \\ s &= \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{aligned} \quad t = \frac{5}{2}$$

substituyendo en  $t$ :

$$(5, 5) + \left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{21}{5}, \frac{27}{5}\right) = \left(\frac{9}{2}, 6\right)$$

La distancia  $h$  es

$$d(B, \ell) = |B - \ell|$$

$$d((2, 1), \left(\frac{21}{5}, \frac{27}{5}\right)) = \sqrt{\left(2 - \frac{21}{5}\right)^2 + \left(1 - \frac{27}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{11}{5}\right)^2 + \left(\frac{22}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{121+484}{25}}$$

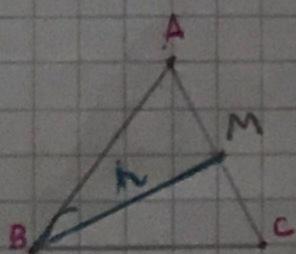
$$= \sqrt{\frac{605}{25}} = \sqrt{\frac{121}{5}}$$

la area  $\frac{b \cdot h}{2}$

$$\frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{\frac{121}{5}}}{2} = \frac{\sqrt{121 \cdot 4}}{2} = \frac{\sqrt{484}}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

X

el area es 11

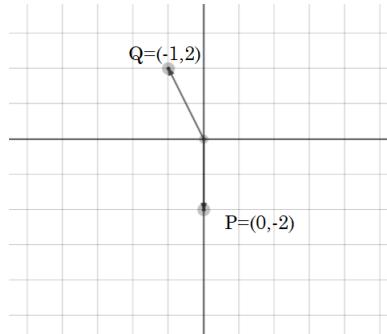


Quinta pregunta: Obtén las coordenadas polares de los puntos con coordenadas cartesianas

November 28, 2020

Encuentra las coordenadas polares de los siguientes puntos:

$$P = (0, -2), \quad Q = (-1, 2)$$



Para encontrar las coordenadas polares que son de forma  $R = (\theta, r)$  donde  $r$  es la norma del vector hay que recordar las siguientes definiciones:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

- $P = (0, -2)$

$$r = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = \arctan \frac{-2}{0} = INDF$$



La tangente solo está indefinida para cuando  $\theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{3\pi}{2}$  Y como tenemos que el punto está en  $(0, -2)$  entonces  $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$$P = \left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$$

- $Q = (-1, 2)$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\theta = \arctan \frac{2}{-1} = -63^\circ$$

Pero nosotros queremos cuento mide en un ángulo positivo y para esto vamos a sumar los 90 grados que ya sabemos que sobrepasa el punto y haremos la siguiente operación para ver qué angulo hay entre el eje  $y$  y nuestro punto.

$$\theta_1 = \arctan \frac{1}{2} = 26.565^\circ$$

$$\theta = 90^\circ + \theta_1$$

$$\theta = 116.565$$



$$Q = (116.565^\circ, \sqrt{5})$$

6) Dados dos vectores  $u$  y  $v$  en  $\mathbb{R}^n$  el paralelogramo que definen tiene como vértices los puntos  $0, u, v$  y  $u+v$ . Demuestra que sus diagonales, es decir, los segmentos  $\overline{O(u+v)}$  y  $\overline{uv}$  se intersectan en el punto medio.

Para encontrar el punto medio de los segmentos  $\overline{O(u+v)}$  y  $\overline{uv}$  ocuparemos la representación bárcentrica.

Entonces la recta generada por  $u+v$  en descripción bárcentrica

$$L_1 = \{ t(0) + s(u+v) : t, s \in \mathbb{R}; s+t=1 \}$$

Por lo que su punto medio es

$$L_1 = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(u+v) \text{ Por def. de punto medio}$$

$$L_1 = 0 + \left( \frac{u}{2} + \frac{v}{2} \right) \text{ Aplicando distributividad}$$

$$L_1 = \frac{u}{2} + \frac{v}{2}$$

,

y ahora para  $u+v$  en descripción bárcentrica

$$L_2 = \{ \lambda(u) + s(v) : \lambda, s \in \mathbb{R}; \lambda, s = 1 \}$$

Por lo que su punto medio es

$$L_2 = \frac{1}{2}(u) + \frac{1}{2}(v)$$

$$L_2 = \frac{u}{2} + \frac{v}{2}$$

Así llegamos a que los puntos medios de ambas rectas son los mismos ya que

$$L_1 = \frac{u}{2} + \frac{v}{2} \quad y \quad L_2 = \frac{u}{2} + \frac{v}{2}$$
$$\therefore L_1 = \frac{u}{2} + \frac{v}{2} = L_2$$



Así, podemos concluir que si las dos rectas comparten el mismo entonces existe una intersección.

Entonces como podemos ver los puntos medios de  $L_1$  y  $L_2$  son iguales, lo que significa que comparten el mismo punto medio y las segmentos se intersectan en este.