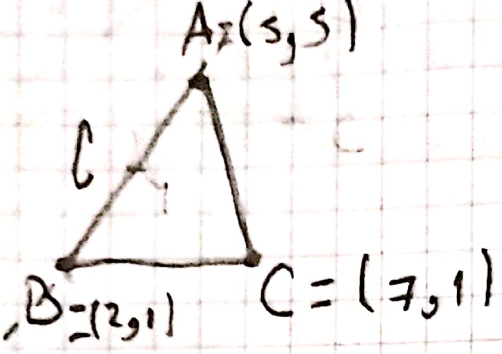
Primer examen de Geometría Analítica.

Integrantes:

- Axel Yael Peña Nuñez
- Itzel Alina Roldán Mora
- Erick del Toro Zarraga
- Santiago Hernandez Colin

A 28 de noviembre del año 2020

1. Encontrar la descripción paramétrica de C.



Notamos que la recta C pasa por los puntos A y B, donde podemos describir al vector direccional de la representación paramétrica de la siguiente forma

$$(A-B)$$

Y como la recta C pasa por esos 2 puntos, podemos escoger B para especificar que trazaremos el vector (A-B) desde B. Por lo que nuestra expresión paramétrica es:

$$\mathcal{L}_C = \{ B + t(A-B) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

Sustituimos por los valores ya conocidos

$$\mathcal{L}_C = \{(2,1) + t((5,5)-(2,1)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Procedemos a aplicar la suma de vectores

$$\mathcal{L}_C = \{(2,1) + t(5-2, 5-1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Simplificamos

$$\mathcal{L}_C = \{(2,1) + t(3,4) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Siendo está la reprecentación paramétrica de la recta C.

Segunda pregunta: encuentra la ecuación normal de $\mathcal{B}$

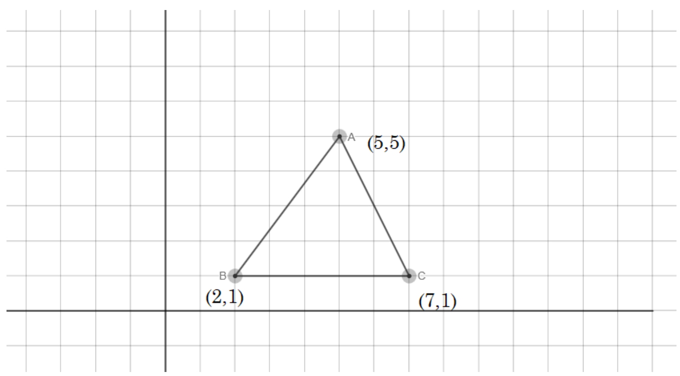
Santiago Hernández Colin

November 28, 2020

Considera los vértices del triángulo ABC y denota $\mathcal{A}$ la recta que contiene al lado opuesto al vértice A, similarmente $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.

$$A = (5,5), \quad B = (2,1), \quad C = (7,1),$$

2.)Encuentra la ecuación normal de $\mathcal{B}$ la recta que va de $\overline{AC}$



Primero hay que encontrar la recta paramétrica de $\mathcal{B}$, hay que obtener el vector director de $\overline{AC}$ con la diferencia de vectores.

$$A - C = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ahora solo hay que hacer que este vector inicie en un punto P en la recta y entonces tenemos :

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Por uno de los teoremas visto en clase:

$$\mathcal{L} = \{P + tD \mid t \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid D^\perp \cdot \mathbf{x} = D^\perp \cdot P\}$$

Hay que obtener el compadre ortogonal de $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC}^\perp = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Por el teorema podemos sustituir directamente:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid D^\perp \cdot \mathbf{x} = D^\perp \cdot P\}$$

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AC}^\perp \cdot \mathbf{x} = \overrightarrow{AC}^\perp \cdot A\}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aqui podemos decir que hemos terminado el ejercicio, pues buscabamos una recta de la forma:

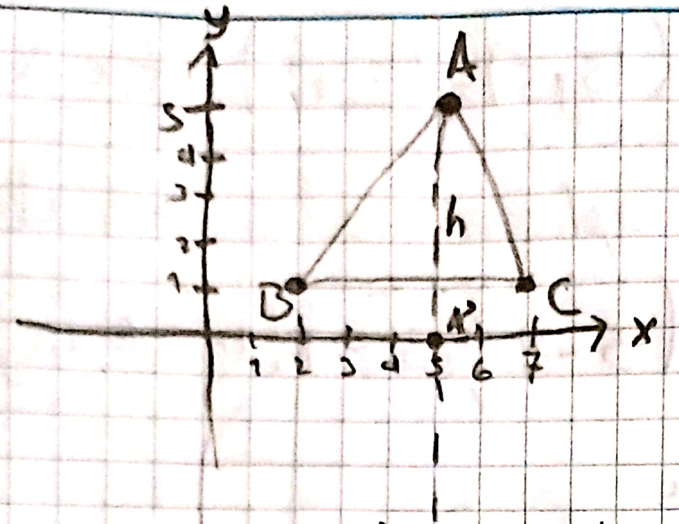
$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d$$

Por el producto punto:

$$-4x - 2y = -30$$

Esta es la ecuación normal de la recta $\mathcal{B}$ que es opuesta al vértice B.

3.



Notemos que la altura (denominada h) es perpendicular a $\overline{BC}$, sin embargo $\overline{BC}$ es paralelo a el eje de la x. Por lo que al trazar la recta ortogonal a $\overline{BC}$ que pasa por A, la recta sería paralela al eje y, pues $\overline{BC}$ es paralelo a x, con esto podemos decir que la intersección al eje de x es (5,0), debido a que al ser paralela a y, la primera entrada se mantiene constante, y al intersectar con el eje de los x, la segunda entrada es igual a cero. Con estos elementos, escribimos nuestra expresión paramétrica de la siguiente manera:

$\mathcal{L}_h = \{ A' - t(A - A') \mid t \in \mathbb{R} \}$

Sustituyendo por valores conocidos

$\mathcal{L}_h = \{ (5,0) - t((5,5) - (5,0)) \mid t \in \mathbb{R} \}$

Suma de vectores

$\mathcal{L}_h = \{ (5,0) - t(5-5, 5-0) \mid t \in \mathbb{R} \}$

Simplificamos

$\mathcal{L}_h = \{ (5,0) - t(0,5) \mid t \in \mathbb{R} \}$

Por teorema sabemos que:

$\mathcal{L} = \{ P + tu \mid t \in \mathbb{R} \} = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid u^{\perp} \cdot \bar{x} = u^{\perp} \cdot P \}$

Aplicando el teorema expresamos la ecuación normal

$(0,5)^{\perp} \cdot (x,y) = (0,5)^{\perp} \cdot (5,0)$

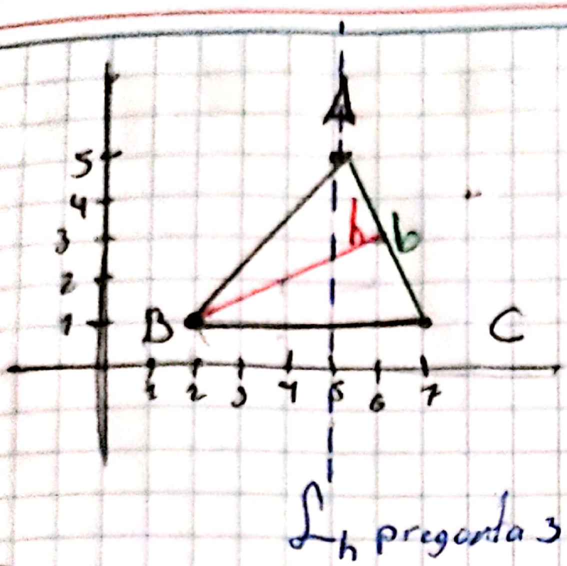
Aplicamos el ortogonal

$(-5,0) \cdot (x,y) = (-5,0) \cdot (5,0)$

Aplicamos el producto punto

$(-5,0) \cdot (x,y) = -25$

$\square$



Donde sabemos que la base es la distancia de A a C, es decir

$$b = d(A, C)$$

Pero podemos definir la distancia como el módulo de A menos el modulo de C, es decir

$$b = \| A - C \|$$

Sustituyendo por valores

$$b = \| (5, 5) - (7, 1) \|$$

Suma de vectores

$$b = \| (5-7, 5-1) \|$$

Simplificamos

$$b = \| (-2, 4) \|$$

Aplicamos el modulo

$$b = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

4)

Calcula las distancias $b = d(A, C)$ y $h = d(B, Q)$, para determinar el area $bh/2$ y haz un dibujo del triangulo indicando h y la recta de la pregunta anterior

la distancia b es

$d(A,C) = |A - C|$

$d((5,5),(7,1)) = \sqrt{(5-7)^2 + (5-1)^2}$

$= \sqrt{(-2)^2 + (4)^2}$

$= \sqrt{4+16}$

$= \sqrt{20}$

La recta AC es $\mathcal{L}_1 = \{(5,5) + s(2,-1) \mid s \in \mathbb{R}\}$

La recta normal AC que pasa por B es $\mathcal{L}_2 = \{(2,1) + t(1,2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

El punto de intersección de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ es Q

$\mathcal{L}_1 = \{(5,5) + s(2,-1) \mid s \in \mathbb{R}\}$
$\mathcal{L}_2 = \{(2,1) + t(1,2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$(5,5) + s(2,-1) = (2,1) + t(1,2)$

$s(2,-1) - t(1,2) = (2,1) - (5,5)$

$(2s - t, -s - 2t) = (-3, -4)$

$2s - t = -3 \qquad t = 2s + 3$

$-s - 2t = -4$

$-s - 2(2s+3) = -4$

$-s - 4s - 6 = -4$

$-5s = 2$

$s = -\frac{2}{5}$

substituyendo en $\mathcal{L}_1$

$(5,5) + \left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{21}{5}, \frac{27}{5}\right)$

La distancia h es

$d(B - Q) = |B - Q|$

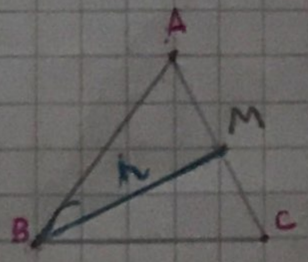
$d\left((2,1),\left(\frac{21}{5},\frac{27}{5}\right)\right) = \sqrt{\left(2 - \frac{21}{5}\right)^2 + \left(1 - \frac{27}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{11}{5}\right)^2 + \left(\frac{22}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{121 + 484}{25}}$

$= \sqrt{\frac{605}{25}} = \sqrt{\frac{121}{5}}$

la area $\frac{b \cdot h}{2}$

$$\frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{\frac{121}{5}}}{2} = \frac{\sqrt{121 \cdot 4}}{2} = \frac{\sqrt{484}}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

el area es 11

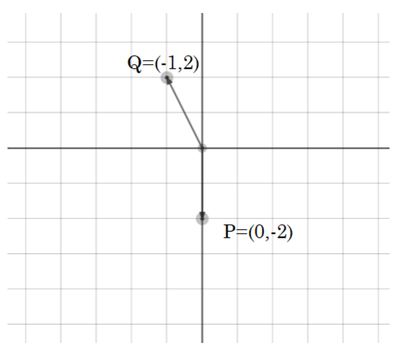


Quinta pregunta: Obtén las coordenadas polares de los puntos con coordenadas cartesianas

November 28, 2020

Encuentra las coordenadas polares de los siguientes puntos:

$$P = (0, -2), \quad Q = (-1, 2)$$



Para encontrar las coordenadas polares que son de forma $R = (\theta, r)$ donde r es la norma del vector hay que recordar las siguientes definiciones:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

- $P = (0, -2)$

$$r = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = \arctan \frac{-2}{0} = INDF$$

La tangente solo está indefinida para cuando $\theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{3\pi}{2}$ Y como tenemos que el punto está en $(0, -2)$ entonces $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$$P = (\frac{3\pi}{2}, 2)$$

- $Q = (-1, 2)$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\theta = \arctan \frac{2}{-1} = -63^\circ$$

Pero nosotros queremos cuanto mide en un ángulo positivo y para esto vamos a sumar los 90 grados que ya sabemos que sobrepasa el punto y haremos la siguiente operación para ver qué angulo hay entre el eje y y nuestro punto.

$$\theta_1 = \arctan \frac{1}{2} = 26.565^\circ$$

$$\theta = 90^\circ + \theta_1$$

$$\theta = 116.565$$

$$Q = (116.565^\circ, \sqrt{5})$$

6) Dados dos vectores u y v en $\mathbb{R}^n$, el paralelogramo que definen tiene como vertices los puntos $0, u, v$ y $u+v$. Demuestra que sus diagonales, es decir, los segmentos $\overline{0(u+v)}$ y $\overline{uv}$ se intersectan en el punto medio

Para encontrar el punto medio de los segmentos $\overline{0(u+v)}$ y $\overline{uv}$ ocuparemos la representación baricentrica

Entonces la recta generada por $u+v$ en descripción baricentrica

$$L_1 = \{t(0) + s(u+v) : t, s \in \mathbb{R} ; s+t = 1\}$$

Por lo que su punto medio es

$$L_1 = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(u+v) \quad \text{Por def. de punto medio}$$

$$L_1 = 0 + \left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}\right) \quad \text{Aplicando distributividad}$$

$$L_1 = \frac{u}{2} + \frac{v}{2}$$

Y ahora para u a v en descripción baricentrica

$$L_2 = \{\lambda(u) + s(v) : \lambda, s \in \mathbb{R} ; \lambda, s = 1\}$$

Por lo que su punto medio es

$$L_2 = \frac{1}{2}(u) + \frac{1}{2}(v)$$

$$L_2 = \frac{u}{2} + \frac{v}{2}$$

Así llegamos a que los puntos medios de ambas rectas son los mismos ya que

$$L_1 = \frac{u}{2} + \frac{v}{2} \quad y \quad L_2 = \frac{u}{2} + \frac{v}{2}$$

$$\therefore L_1 = \frac{u}{2} + \frac{v}{2} = L_2$$

Así, podemos concluir que si las dos rectas comparten el mismos entonces existe una ntersección.

Entonces como podemos ver los puntos medios de L_1 y L_2 son iguales, lo que significa que comparten el mismo punto medio y las segmentos se intersectan en este