9

GEOMETRÍA ANALÍTICA

REPOSICIÓN PRIMER PARCIAL

GRUPO: 4072 SEMESTRE 2025-1

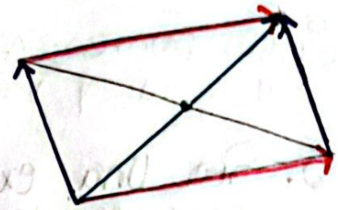
PROFESOR: RAMÓN REYES

MARTES 10 DICIEMBRE 2024.

EMYLI FERNANDA DÍAZ ORTIZ.

INSTRUCCIONES: Resuelve los 5 ejercicios indicados debajo. Cada uno vale 2 puntos. Para el segundo ejercicio puede elegir entre 2) y 2'), y análogamente para el tercero. El examen es individual. Cualquier conducta que falte a las normas de honestidad academica, y etica universitaria anulará la entrega del examen.

1.- Dados los vectores u y v en $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes, el paralelogramo que definen tiene como vertices los puntos 0, u, v y u+v (como en la figura). Demuestra que sus diagonales, es decir, los segmentos de 0 a u+v y de u a v se intersectan en su punto medio.



$V + W = u$

$L_1 = L_{UV} = \{v + t((a.v) - 0) \mid s \in \mathbb{R}\}$

$L_2 = L_{0(u+v)} = \{0 + s((u-v) - 0) \mid s \in \mathbb{R}\}$

Buscamos $x \in L_1 \cap L_2$, es decir

$\bar{x} = v + t(u - v)$

$\bar{x} = s(u + v)$

Los incognitas de estas ecuaciones son s y t, vamos a igualar.

$v + t(u - v = s(u + v)$

$v + (u - tv) = su + sv$

$\underbrace{v + (t)v + (s)u}, + t + u - su = 0$

$\underbrace{1 - t - (s)u}_{0} + \underbrace{(t - s)}_{0} = 0$

$1 - t - s = 0 \; \#$

$* \; t - s = 0 \quad \rightarrow t = s$

Sustituimos $*$ en $\#$

$0 = 1 - t - s = 1 - t - t$

$0 = 1 - 2t \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

$s = t = \frac{1}{2}$

2.- Demuestra que tres puntos a, b, c son no colineales, si y solo si, los vectores $u = (b-a)$ y $v = (c-a)$ son linealmente independientes.

Dado que $u = b - a$ y $v = c - a$, estos vectores representan las direcciones desde el punto a hacia el punto b y c respectivamente.
Los vectores u y v son linealmente independientes si no existe un escalar k t.q. $u = kv$ o $v = ku$. Esto significa que no se puede escribir uno de los vectores como multiplo del otro.
Si los vectores u y v son linealmente independientes, entonces los puntos a, b, c no están en la misma recta, no son colineales.
analiticamente
Esto se debe a que la independencia lineal implica que no hay una única dirección en la que se encuentran todos los puntos.
Si los puntos a, b, c son no colineales, entonces no hay una línea única que pase por los tres puntos. Esto implica que los vectores u y v no son proporcionales y por lo tanto, son linealmente independientes.

$\therefore$ Los puntos a, b, c son no colineales, si y solo si los vectores $u = b - a$ y $v = c - a$ son linealmente independientes.

3.- Da una expresión paramétrica para el plano que pasa por los siguientes puntos $a = (2,0,1)$, $b = (0,1,1)$ y $c = (-1,2,0)$.

Seleccionamos uno de los puntos.
$a = (2,0,1)$

Calculamos 2 vectores con los puntos dados.
1 er vector = $b - a$
$\vec{v_1} = b - a = (0,1,1) - (2,0,1) = (-2,1,0)$
2do vector = $c - a$
$\vec{v_2} = c - a = (-1,2,0) - (2,0,1) = (-3,2,-1)$
Usamos el punto a y $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ para la ecuación.

Ecuación paramétrica del plano.

$r(s,t) = (2,0,1) + s(-2,1,0) + t(-3,2,-1)$
donde s y t son parametros reales.

4.- Determina como se intersectan las rectas siguientes, usando únicamente el determinante.

$L1 = \{(3,-2) + t(1,-2) \mid t \in \mathbb{R}\}$ $L2 = \{(1,3) + s(-2,4) \mid s \in \mathbb{R}\}$

$L3 = \{(-1,6) + r(3,-6) \mid r \in \mathbb{R}\}$

Dibujalas para entender que esta pasando.

$L1 = (x,y) = (3+t, -2-2t)$

$L2 = (x,y) = (1-2s, 3+4s)$

$L3 = (x,y) = (-1+3r, 6-6r)$

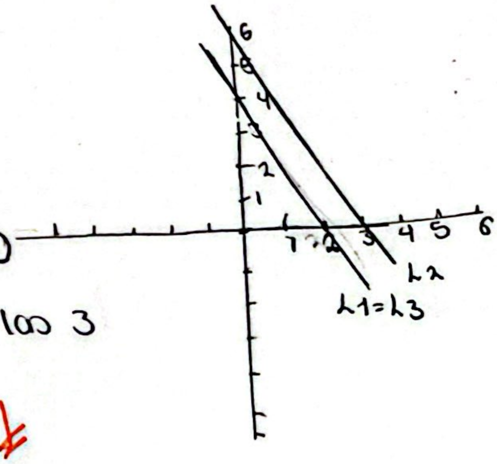
$u = (1,-2)$ $v = (-2,4)$ $w = (3,-6)$

$u^{\perp} = (-2,1)$ $v^{\perp} = (-4,-2)$ $w^{\perp} = (-6,-3)$

$L1 = \det(u \cdot v^{\perp}) = (1,-2)(-4,-2) = 4-4 = 0$

$L2 = \det(v \cdot w^{\perp}) = (-2,4)(-6,-3) = 12-12 = 0$

$L3 = \det(w \cdot v^{\perp}) = (3,-6)(-2,-1) = -6+6 = 0$



El determinante de las 3 es 0.

∴ No se intersectan.

5.- Resuelva los siguientes incisos.

a) Da una descripción paramétrica de la recta dada por la ecuación: $2x - y = 2$

$2x - y = 2$

reescribimos $\rightarrow y = 2x - 2$

asignamos un parámetro t para x.

$x = t$, $y = 2t - 2$

y la representación queda

$r(t) = (x,y) = (t, 2t-2)$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Encuentra una ecuación normal para la recta que pasa por los puntos. $(2,0)$ y $(1,1)$.

Calculamos pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{1-2} = -1$$

Usamos la formula de ecuación punto pendiente. con $(x_1, y_1) = (2,0)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

Sustituyendo

$y - 0 = -1(x-2)$

$y = -x + 2$

La ecuación tiene forma

$Ax + By + C = 0$

∴ $x + y - 2 = 0$