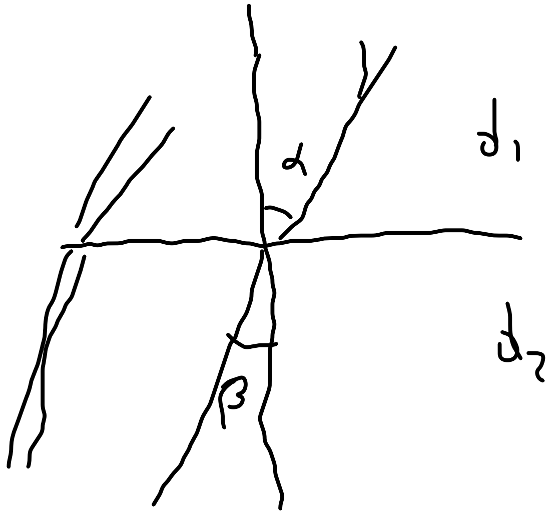
Modelos de Poincaré

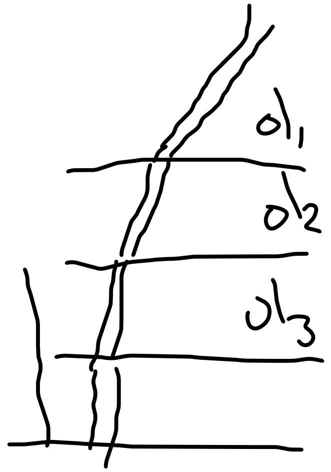
Δ disco

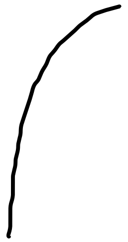
H^+ semi plano sup.

Ley de refracción de Snell

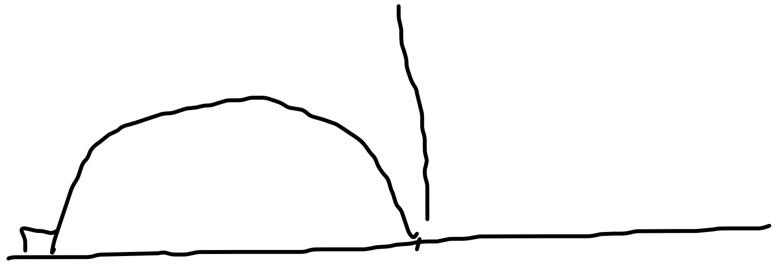


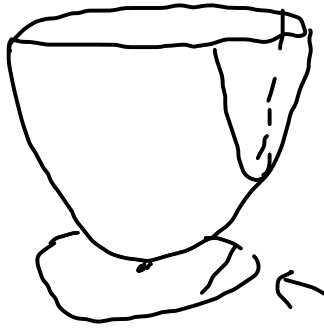
$$d_1 \operatorname{sen}\alpha = d_2 \operatorname{sen}\beta$$





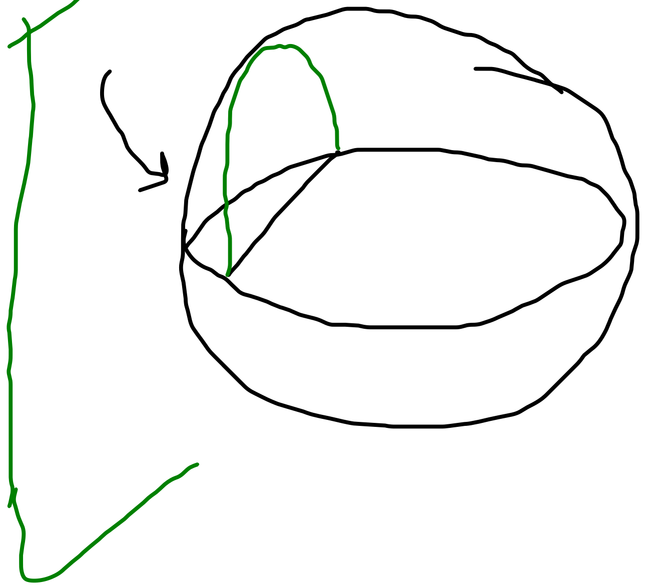
$$d(x,y) = \frac{1}{y}$$





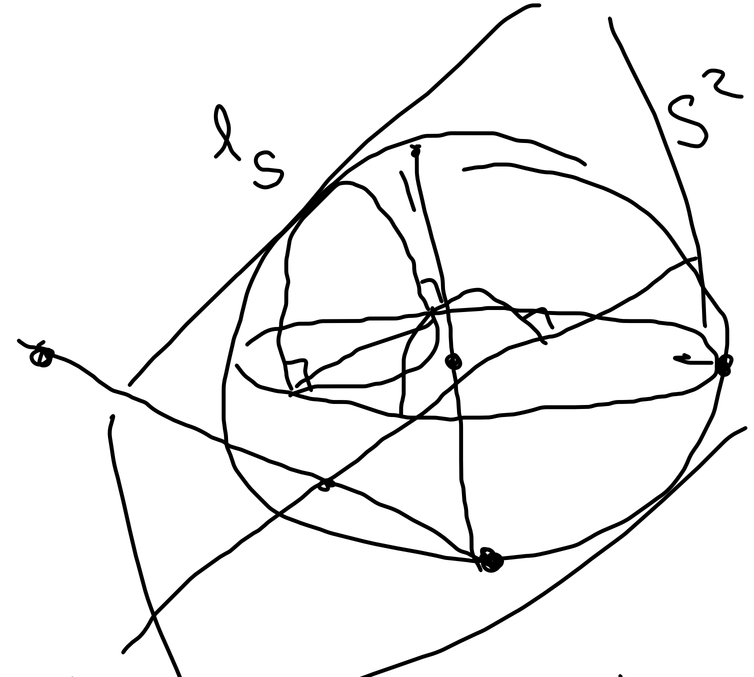
proyectivos

Δ klein



Π_ℓ plano vertical que contiene a ℓ

$$\ell_S = \Pi_\ell \cap S^2_+$$



<u>Obs</u> $l_S \perp$ ecuador

Proy. estereográfica desde polo $(0,0,0)$ sur al plano del ecuador

$S^2_+ \longrightarrow \Delta$

$l_S \longrightarrow l_\Delta \perp$ ecuador

Proy. estereográfica desde $(0,1,1)$ al plano X-Z

$S^2_+ \longrightarrow H^+$ $z>0$

$\Delta_p \longrightarrow H^+$

líneas en líneas

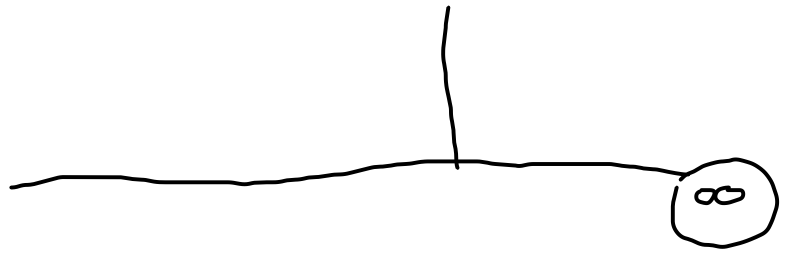
es conforme

$\Delta_k \longrightarrow \Delta_p$

líneas $\longmapsto$ líneas

Δ_p $\quad H^+$

conformes



S^1

$\Delta, H^+ \subset \hat{\mathbb{C}} =$

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|<1\}$$

$$H^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

$$H^+ \longrightarrow \Delta$$

$$f(z) = \frac{z-i}{-iz+1} \in \text{Transf de Möbius}$$

Transf de Möbius.

$PGL(2, \mathbb{C})$

$PSL(2, \mathbb{C})$

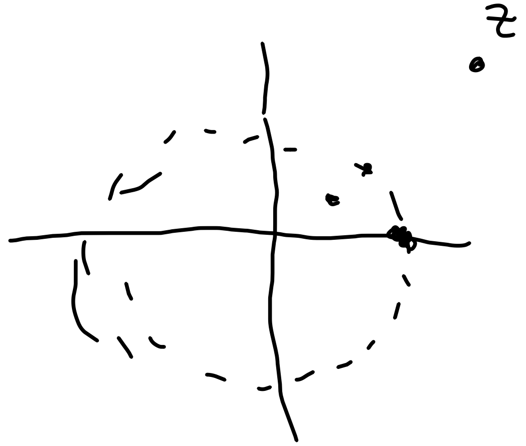
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

$\det = 1$

se componen de

- az una rotación y una homotecia $a = re^{i\theta}$ rotación, homotecia
- $+b$ traslación
- $1/z$ una inversión en S^1
  reflexion en eje X.

preservan ángulos y su sentido



Corolario

Las transf. de Möbius preservan ángulos y su sentido.

Def Las isometrías que preservan orientación en cada modelo son las transformaciones de Möbius que fijan al modelo

$$\mathrm{Iso}^+(\Delta) = \{ f \in PSL(2,\mathbb{C}) \mid f(\Delta) = \Delta \}$$
$$\quad H^+ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad H^+ \quad H^+$$

Af Iso^+ llevan líneas en líneas.

Lema

$f \in PSL(2,\mathbb{C})$

llevan círculos$^+$ en círculos$^+$

Reflexión

en $\Delta \longrightarrow \Delta$

$z \longmapsto \bar{z}$

reflexión en eje real.

$H^+ \longrightarrow H^+$

$z \longmapsto -\bar{z}$

Ej reflexión en eje imaginario