EXAMEN 1

Equipo

1. Ortega Hernández Midori Alondra 311241301
2. Ramírez Ochoa Aileen Giselle 318110000
3. Rosas León Diego 318227377
4. Saucedo Avila Octavio 318239460
5. Serrano Mejía Yorleny Bianeth 318113551.

Resuelve los siguientes problemas explicando con detalle sus respuestas.

Considera los vértices del triángulo ABC y denota por A la recta que contiene al lado opuesto al vértice A, similarmente B y C, para

$$A=(5,5),\ B=(1,7),\ C=(1,2).$$

1. Encuentra la descripción paramétrica de $\mathcal{L}_C$

La linea recta en dirección del vector $\vec{u}$ que pasa por el punto P está dada por $\mathcal{L} = \{P + \lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$

De igual manera, dados 2 puntos P y Q existe una recta que pasa por ellos, $\mathcal{L} = \{P + \lambda(Q-P) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

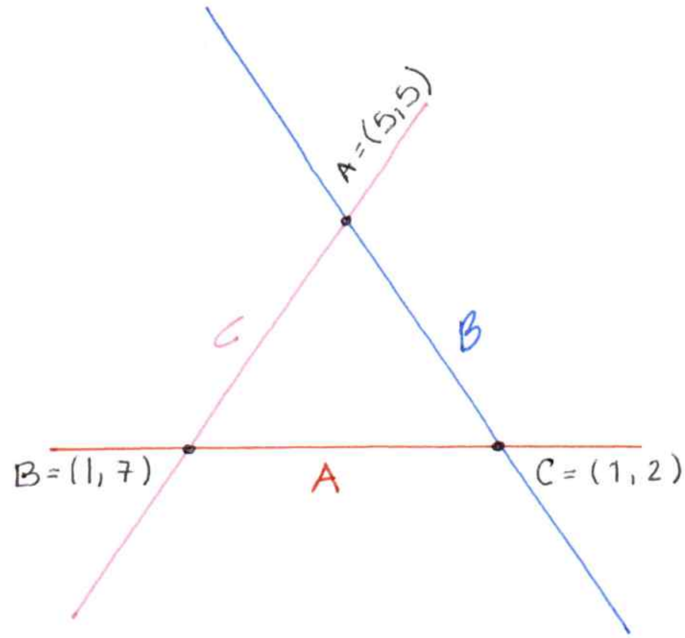
Sea $\mathcal{L}_C$ la recta que contiene al lado opuesto del vértice C. Como son los vértices del triángulo ABC, podemos asegurar que A y B son 2 puntos que se encuentran en $\mathcal{L}_C$.

De está manera
$$\begin{aligned}\mathcal{L}_C &= \{(5,5) + \lambda[(1,7)-(5,5)] \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(5,5) + \lambda(-4,2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(5-4\lambda,\ 5+2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Por lo tanto, su representación parametrica es.

$$\mathcal{L}_C = \{(5,5) + \lambda(-4,2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

2. Encuentra la ecuación normal de $\mathcal{B}$



Primero debemos obtener la ecuación paramétrica.

Para esto necesitamos un vector dirección.

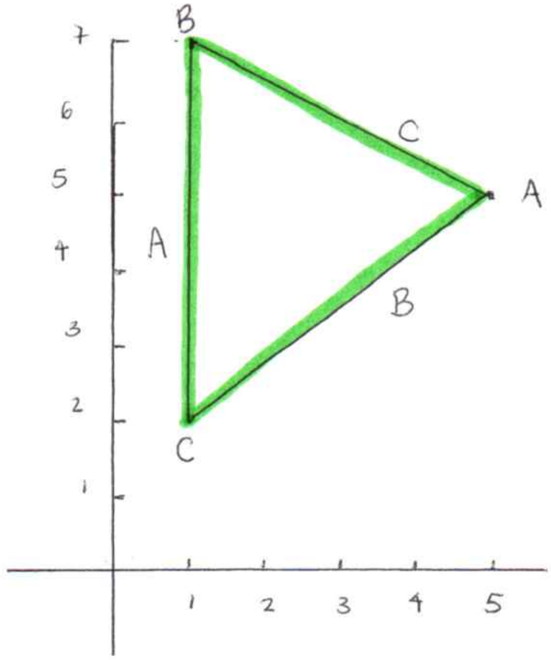
$$\overrightarrow{AC} = A - C = (5,5) - (1,2) = (5-1, 5-2) = (4,3)$$

$$\mathcal{L}_B : (x,y) = \{(1,2) + \lambda(4,3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \rightarrow \text{Ec. paramétrica}$$

Notamos que la ecuación tiene como vector director a $(4,3)$ y además pasa por el punto $(1,2)$. Así su ecuación normal esta dada por.

$$(4,3)^{\perp} \cdot x = (4,3)^{\perp} \cdot (1,2)$$

3. Encuentra la ecuación normal de la mediatriz del segmento $\overline{BC}$.



La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que pasa por el punto medio de dicho segmento.

Para esto daremos la descripción baricéntrica de la recta que pasa por B y por C

$$\mathcal{L}_{BC} = \{ s(1,7) + t(1,2) : s, t \in \mathbb{R}, s+t=1 \}$$

Y sabemos que el punto medio entre $(1,7)$ y $(1,2)$ (B y C) es cuando sus coordenadas baricéntricas (s,t) son $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Así $$M_{BC} = \frac{1}{2}(1,7) + \frac{1}{2}(1,2)$$

$$= \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{7}{2} + \frac{2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

$$\therefore M_{BC} = \left(1, \frac{9}{2}\right)$$

Ya solo nos basta encontrar un vector ortogonal a la recta.
El vector de la recta que pasa por B y C es

$$(B - C) = [(1,7) - (1,2)] = (1-1, 7-2) = (0,5)$$

Este vector $(0,5)$ es ortogonal a la mediatriz pues es el vector de la recta a la que la mediatriz es ortogonal.

Así, la ecuación normal de la mediatriz es

$$(0,5) \cdot X = (0,5) \cdot \left(1, \frac{9}{2}\right)$$

$$(0,5)\cdot x = 0(1) + 5\left(\frac{9}{2}\right)$$

$$(0.5)\cdot x = 0 + \frac{45}{2}$$

$$(0.5)\cdot x = \frac{45}{2}$$

4. Calcula las distancias $b = d(A, C)$ y $h = d(B, \mathcal{B})$, para determinar el área $\frac{bh}{2}$, haz un dibujo del triángulo, indicando h, y la recta de la pregunta anterior.

$$b = d(A, C) = |C - A| = |(1,2) - (5,5)| = |(-4,-3)|$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \rightarrow d(A, C) = 5.$$

$$h = d(B, \mathcal{B})$$

Para esta distancia necesitamos la ecuación paramétrica de la recta $\mathcal{B}$, la cual pasa por el punto $C = (1,2)$ y tiene vector dirección $(A - C) = (5,5) - (1,2) = (4,3)$

$$\therefore \mathcal{B} = \{ C + t(4,3) \mid t \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ (1,2) + t(4,3) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

De la fórmula para la distancia de un punto a una recta:

$$d(B, \mathcal{B}) = \frac{|V^{\perp} \cdot P - V^{\perp} \cdot B|}{|V^{\perp}|}$$

Sabemos que $V^{\perp}$ es el compadre ortogonal del vector dirección de la recta B, P es un punto de la recta, en este caso, usaremos C; y $\mathcal{B}$ es el punto desde el cual queremos medir la distancia.

Así, si $v = (4,3)$ entonces $V^{\perp} = (-3,4)$

$$d(B,\beta) = \frac{|(-3,4)\cdot(1,2) - (-3,4)\cdot(1,7)|}{|(-3,4)|}$$

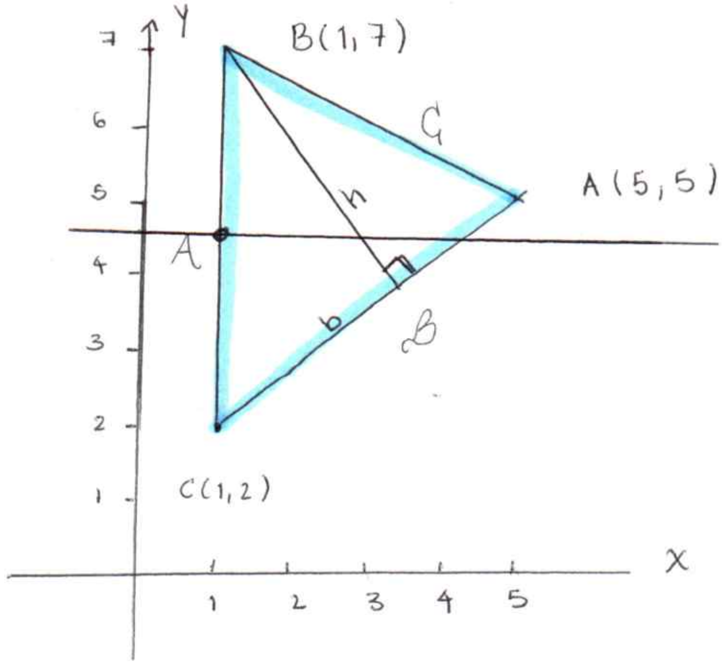
$$d(B,\beta) = \frac{|(-3+8) - (-3+28)|}{\sqrt{(-3)^2+(4)^2}}$$

$$d(B,\beta) = \frac{|5-25|}{\sqrt{9+16}}$$

$$d(B,\beta) = \frac{|-20|}{5} = \frac{20}{5} = 4.$$

Como $b = d(A,C) = 5$ y $h = d(B,B) = 4$ entonces

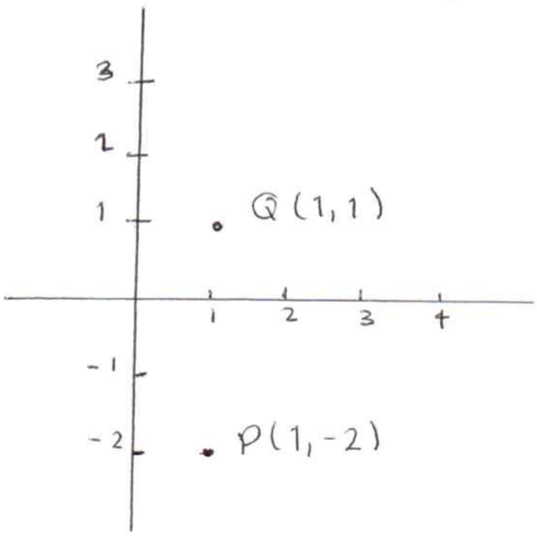
$$\frac{bh}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10\,u^2$$



$(0.5)\cdot x = \frac{45}{2}$: M

5. Obtén la coordenadas polares de los puntos con coordenadas cartesianas

$$P = (1, -2) \quad y \quad Q = (1, 1)$$



Para encontrar el valor:

$P = (1, -2)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$r = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2}$$
$$r = \sqrt{1 + 4}$$
$$r = \sqrt{5}$$
$$r = 2.23$$

$Q = (1, 1)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2}$$
$$r = \sqrt{1 + 1}$$
$$r = \sqrt{2}$$
$$r = 1.41.$$

Teniendo las distancias, ahora sacamos el ángulo.

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{-2}{1}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{2}{1}\right)$$

$$\theta = -70.4°$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{1}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)$$

$$\theta = 50°$$

también se puede expresar como:

$$\theta = 289.6°$$

En coordenadas polares queda:

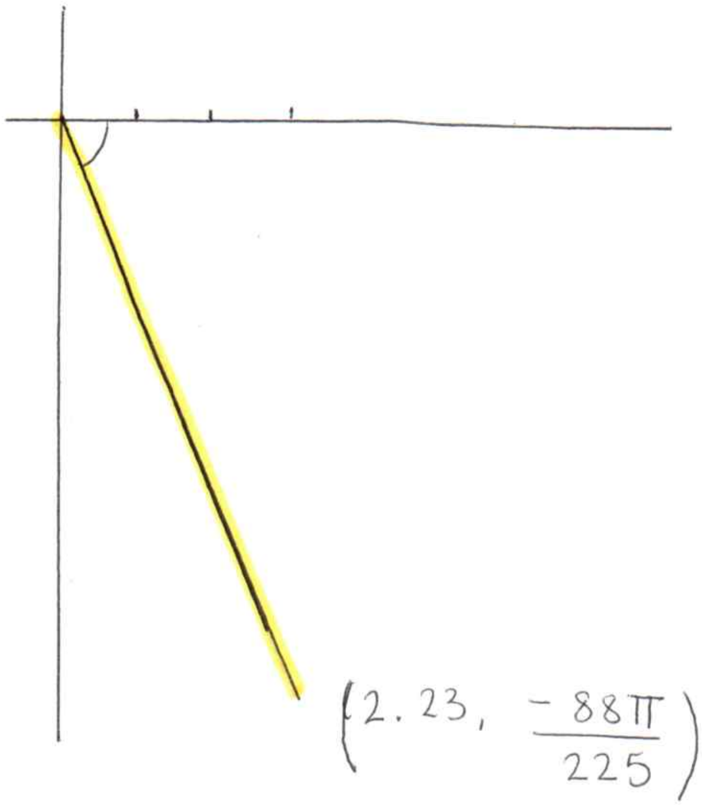
$$P = \left(2.23, \frac{-88\pi}{225}\right) \quad y \quad Q = \left(1.41, \frac{5\pi}{18}\right)$$

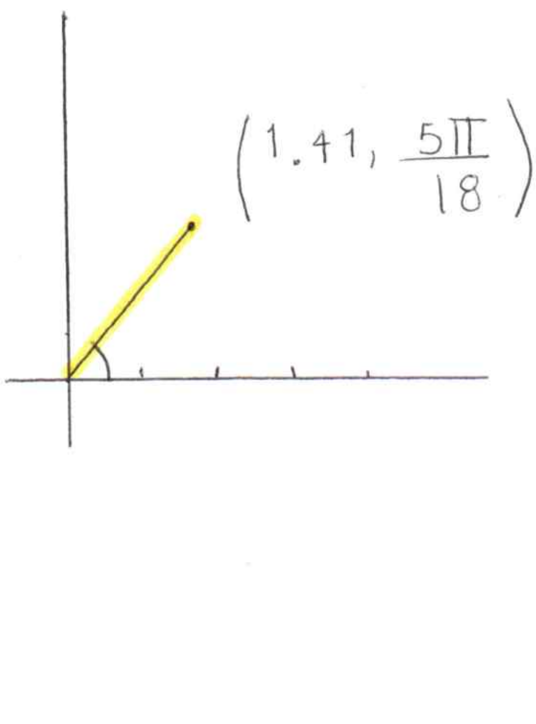
De grados a radianes

$$-70.4°\left(\frac{\pi}{180°}\right) = -\frac{88\pi}{225}$$

$$50°\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{5}{18}\pi$$

$$289.6°\left(\frac{\pi}{180°}\right) = 1\frac{137}{225}\pi$$


(2.23, -88π/225)


(1.41, 5π/18)

6. Sean u y v dos vectores no nulos. Demuestra que tienen la misma norma si y sólo si $u+v$ y $u-v$ son ortogonales.

$\Rightarrow$

Primero demostremos que si u y v tienen la misma norma entonces $u+v$ y $u-v$ son ortogonales

Por hipótesis $\|u\| = \|v\|$. Como u y v son no nulos, podemos sacar el cuadrado en ambos lados así.

$$|u|^2 = |v|^2$$

$$\rightarrow \quad |u|^2 - |v|^2 = 0$$

$$\rightarrow \quad |u|^2 - |v|^2 + 0 = 0 + 0$$

$$\rightarrow \quad |u|^2 + 0 - |v|^2 = 0$$

$$\rightarrow \quad |u|^2 - v \cdot u + v \cdot u - |v|^2 = 0$$

$$\rightarrow \quad u \cdot u - v \cdot u + u \cdot v - v \cdot v = 0$$

$$\rightarrow \quad u \cdot (u-v) + v \cdot (u-v) = 0$$

$$\rightarrow \quad (u+v) \cdot (u-v) = 0$$

Como $(u+v) \cdot (u-v) = 0$ entonces $u+v$ y $u-v$ son ortogonales.

$\Leftarrow)$

P. D $(u+v)\cdot(u-v)=0 \Longrightarrow \|u\|=\|v\|$

$$(u+v)\cdot(u-v) = u\cdot u - \cancel{v\cdot u} + \cancel{v\cdot u} - v\cdot v = 0$$
$$= \|u\|^2 - \|v\|^2$$

$\rightarrow \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$

$\rightarrow \|u\|^2 = \|v\|^2$

$\|u\| = \|v\|$

$\therefore (u+v)\cdot(u-v)=0 \Longrightarrow \|u\|=\|v\|$

$\therefore \|u\|=\|v\| \Longleftrightarrow (u+v)\cdot(u-v)=0$ $\blacksquare$