Geometría Analítica

4072.

Alumno: Cerveira Pérez Kevin Leonardo

Reposición (Segundo parcial.)

1. Considera los puntos $P_1=(2,2)$, $P_2=(4,6)$, $Q_1=(-2,1)$ y $Q_2=(-3,2)$.

a) Da las ecuaciones normales para las mediatrices $M_{P_1P_2}$ y $M_{Q_1Q_2}$.

Denotamos la mediatriz como dados dos puntos en $\mathbb{R}^2$

$$\{x\in\mathbb{R}^2 \mid d(p,x)=d(q,x)\}$$

Desarrollando $d(p,x)^2=d(q,x)^2$, tenemos que

$$(p-x)\cdot(p-x)=(q-x)\cdot(q-x)$$

$$\Rightarrow (p-q)\cdot x=(p-q)\cdot\left(\frac{1}{2}(p+q)\right).$$

Obtener $M_{P_1P_2}$:

$$(x-2)^2+(y-2)^2=(x-4)^2+(y-6)^2$$

$$(x^2-4x+4)+(y^2-4y+4)=(x^2-8x+16)+(y^2-12y+36)$$

$$-4x-4y+8=-8x-12y+52$$

$$4x+8y=44$$

$$\Rightarrow x+2y=11 \quad \text{es } M_{P_1P_2}$$

Obtener $M_{Q_1Q_2}$:

$$(x+2)^2+(y-1)^2=(x+3)^2+(y-2)^2$$

$$(x^2+4x+4)+(y^2-2y+1)=(x^2+6x+9)+(y^2-4y+4)$$

$$4x-2y+5=6x-4y+13$$

$$-2x+2y=8$$

$$\Rightarrow x-y=-4 \quad \text{es } M_{Q_1Q_2}$$

b) Encuentra la intersección de las mediatrices previas. Llamemos a este punto "A".

Sean ① $M_{P_1P_2}$ y ② $M_{Q_1Q_2}$: ① $x+2y=11$
② $x-y=-4$.

Encontrar $M_{P_1P_2} \cap M_{Q_1Q_2}$: resolvemos el sist. de ec.

$$\begin{array}{r} x+2y=11 \\ -\quad x-y=-4 \\ \hline 0+3y=15 \end{array}$$

$$\Rightarrow y=5$$

Ahora, sustituimos en ①

$$x+2(5)=11$$
$$x=11-10$$
$$x=1$$

$$\therefore M_{P_1P_2} \cap M_{Q_1Q_2} = A = (1,5)$$

c) Encuentra la distancia de A a las rectas $l_{P_1Q_1}$ y $l_{P_2Q_2}$.

Sea $l_{P_1Q_1}$. Usando los pasos anteriores: $(p-q)\cdot x = (p-q)\cdot\left(\frac{1}{2}(p+q)\right)$

Sean $P_1=(2,2)$ y $Q_1=(-2,1)$

$$\Rightarrow (2-(-2),\ 2-1)=(4,1).$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}((2+(-2)),(2+1))=\frac{1}{2}(0,3)=(0,1.5).$$

$$\Rightarrow (4,1)\cdot(x,y)=(4,1)\cdot(0,1.5).$$

$$(\cdot 2) \Rightarrow 4x+y=1.5 \quad \cdot(2)$$

$$\Rightarrow 8x+2y=3$$

Para $l_{P_2Q_2}$:

$$(x-4)^2+(y-6)^2=(x+3)^2+(y-2)^2$$
$$(x^2-8x+16)+(y^2-12y+36)=(x^2+6x+9)+(y^2-4y+4)$$
$$-4x-8y+39=0$$

$$\Rightarrow 4x+8y=39$$

Para encontrar la distancia de $1_{P_1Q_1}$ a A.

Usando $d = \frac{|8(1)+2(5)-3|}{\sqrt{8^2+2^2}}$

$$d = \frac{|8+10-3|}{\sqrt{64+4}} = \frac{15}{\sqrt{68}}$$

Para $1_{P_2Q_2}$: $7x+4y=39$

$$d = \frac{|7(1)+4(5)-39|}{\sqrt{7^2+4^2}}$$

$$d = \frac{|8|}{\sqrt{49+16}} = \frac{8}{\sqrt{65}}$$

$\therefore$ distancia de A a $1_{P_1Q_1} = \frac{15}{\sqrt{68}}$, y

distancia de A a $1_{P_2Q_2} = \frac{8}{\sqrt{65}}$

2. Sea n el último dígito de su número de cuenta distinto de 0. Considera el vector $u_0=(2,n)$.

a) Normaliza u_0, denotemos al vector resultante como u_1 y encuentra al vector u_2, t.q. $\{u_1,u_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Demuestra explícitamente que forman una base ortonormal, i.e, que satisfacen $u_i \cdot u_j = \delta_j^i$.

Usando la norma de u_0.

$$\|u_0\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2^2+9^2} = \sqrt{85} \quad t.q. \quad u_1 = \frac{u_0}{\|u_0\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{85}}, \frac{9}{\sqrt{85}}\right)$$

Ahora, encontrar la base ortonormal, con $u_1 = (-9,2) = u_0^{\perp}$

Sea

$$\|u_1\| = \sqrt{(-9)^2+2^2} = \sqrt{85}$$

$$u_2 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(-\frac{9}{\sqrt{85}}, \frac{2}{\sqrt{85}}\right)$$

Si $u_1 \cdot u_2 = 0 \Rightarrow$ es base ortonormal.

Sea $\left(\frac{2}{\sqrt{85}}, \frac{9}{\sqrt{85}}\right) \cdot \left(-\frac{9}{\sqrt{85}}, \frac{2}{\sqrt{85}}\right) = \frac{-18}{85} + \frac{18}{85} = 0$ $\quad \therefore \{u_1,u_2\}$ es base ortonormal.

b) ¿Cuántos vectores $w \in \mathbb{R}^2$ cumplen que $\{u/|u|, w\}$ es una base ortonormal?

Dado $u = (2,9)$ y $w \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{u}{|u|} = \left(\frac{2}{\sqrt{85}}, \frac{9}{\sqrt{85}}\right), \text{ y por lo visto anteriormente,}$$

$$u_2 = \left(\frac{u}{|u|}\right)^{\perp} = \left(-\frac{9}{\sqrt{85}}, \frac{2}{\sqrt{85}}\right), \text{ i.e. son ortogonales.}$$

$$\Rightarrow w_1 = \left(-\frac{9}{\sqrt{85}}, \frac{2}{\sqrt{85}}\right) \quad y \quad w_2 = \left(\frac{9}{\sqrt{85}}, -\frac{2}{\sqrt{85}}\right)$$

Ya que si $u_2 \cdot w = 0 \Rightarrow$ es ortogonal

$$\Rightarrow u_2 \cdot w_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{85}}, \frac{9}{\sqrt{85}}\right) \cdot \left(\frac{9}{\sqrt{85}}, -\frac{2}{\sqrt{85}}\right) = \frac{18}{85} - \frac{18}{85} = 0$$

$\therefore$ es base ortonormal.

c) Escribe los vectores $(1,1)$, $(7,4)$ y $(-3,5)$ como combinación lineal de u_1 y u_2.

Sean $u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{85}}, \frac{9}{\sqrt{85}}\right)$ y $u_2 = \left(-\frac{9}{\sqrt{85}}, \frac{2}{\sqrt{85}}\right)$. La combinación lineal $a = c_1 u_1 + c_2 u_2$.

$\Leftrightarrow a \cdot u_1 = c_1$ y $a \cdot u_2 = c_2$

Sea $a_1 = (1,1)$.

$$\Rightarrow c_1 = a_1 \cdot u_1 = 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{85}} + 1 \cdot \frac{9}{\sqrt{85}} = \frac{2}{\sqrt{85}} + \frac{9}{\sqrt{85}} = \frac{11}{\sqrt{85}}.$$

$$\Rightarrow c_2 = a_1 \cdot u_2 = 1 \cdot -\frac{9}{\sqrt{85}} + 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{85}} = -\frac{7}{\sqrt{85}}$$

$$\therefore a_1 = \frac{11}{\sqrt{85}} u_1 - \frac{7}{\sqrt{85}} u_2.$$

Igualmente para $a_2 = (7,4)$.

$$\Rightarrow c_1 = a_2 \cdot u_1 = 7 \cdot \frac{2}{\sqrt{85}} + 4 \cdot \frac{9}{\sqrt{85}} = \frac{50}{\sqrt{85}}$$

$$\Rightarrow c_2 = a_2 \cdot u_2 = 7 \cdot -\frac{9}{\sqrt{85}} + 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{85}} = \frac{-55}{\sqrt{85}}$$

$$\therefore a_2 = \frac{50}{\sqrt{85}} u_1 - \frac{55}{\sqrt{85}} u_2$$

Para $a_3 = (-3,5)$

$$\Rightarrow c_1 = a_3 \cdot u_1 = -3 \cdot \frac{2}{\sqrt{85}} + 5 \cdot \frac{9}{\sqrt{85}} = \frac{39}{\sqrt{85}}$$

$$\Rightarrow c_2 = a_3 \cdot u_2 = -3 \cdot -\frac{9}{\sqrt{85}} + 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{85}} = \frac{37}{\sqrt{85}}$$

$$\therefore a_3 = (-3,5) = \frac{39}{\sqrt{85}} u_1 + \frac{37}{\sqrt{85}} u_2$$

d) Refleja al punto $(7,4)$ con respecto a la recta generada por u_1. Escribe a este punto reflejado como combinación lineal de u_1 y u_2. ¿Qué puedes notar de estos coeficientes respecto a los de $(7,4)$?

Sea $u_1 = (v \cdot u_1) u_1$ con $v = (7,4)$ y $u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{85}}, \frac{9}{\sqrt{85}}\right)$.

$v \cdot u_1 = 7 \cdot \frac{2}{\sqrt{85}} + 4 \cdot \frac{9}{\sqrt{85}} = \frac{50}{\sqrt{85}}$, y su proyección en $u_1 =$

$$\left(\frac{50}{\sqrt{85}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{85}}, \frac{9}{\sqrt{85}}\right) = \left(\frac{100}{85}, \frac{450}{85}\right) = \left(\frac{20}{17}, \frac{90}{17}\right)$$

Su reflexión es dos veces la proyección menos v.

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{20}{17}, \frac{90}{17}\right) - (7,4) = \underline{\left(-\frac{79}{17}, \frac{112}{17}\right)}.$$

Como combinación lineal: aplicamos el inciso c)

$$\Rightarrow c_1 = v \cdot u_1 = \frac{-79}{17} \cdot \frac{2}{\sqrt{85}} + \frac{112}{17} \cdot \frac{9}{\sqrt{85}} = \frac{10\sqrt{85}}{17}$$

$$\Rightarrow c_2 = v \cdot u_2 = \frac{-79}{17} \cdot \left(-\frac{9}{\sqrt{85}}\right) + \frac{112}{17} \cdot \frac{2}{\sqrt{85}} = \frac{11\sqrt{85}}{17}$$

Posiblemente se encuentren mal los cálculos, pero la reflexión de $(7,4)$ debería ser una isometría respecto a $(7,4)$, ya que solo reflejamos sobre u_1.

3. Sea C la circunferencia $x^2+y^2-6x+8y=0$

a) Encuentra el centro, a, y el radio, r, de C. Escríbela como $(x-a)\cdot(x-a)=r^2$.

Completamos el cuadrado de la ec. original.

$$\Rightarrow x^2-6x = (x-3)^2-9 \qquad y \qquad y^2+8y = (y+4)^2-16$$

Tenemos: $(x-3)^2 - 9 + (y+4)^2 - 16 = 0$

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 - 25 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25.}$$

$a = (3, -4)$ y $r = \sqrt{25} = 5.$

b) Encuentra las rectas tangentes a C que pasan por el punto $p = \left(\frac{37}{4}, -4\right)$, sus ecuaciones y los puntos de tangencia.

Sea $C = (x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$ y $p = (x_0, y_0) = \left(\frac{37}{4}, -4\right)$.

La recta tangente es de la forma: $(x_0 - a)(x-a) + (y_0 - b)(y-b) = r^2$.

Sust. $\left(\frac{37}{4} - 3\right)(x-3) + (-4-(-4))(y-(-4)) = 5^2$

$$\frac{37}{4}x - \frac{101}{4} - 3x + 9(-4 + 16 \cdot y + 4) = 25$$

$$\frac{25}{4}(x-3) =$$

$(\cdot 4)$

$$\Rightarrow 25(x-3) = 100$$

$$x - 3 = 4$$

$$x = 7$$

Sust. $x = 7$ en C

$$\Rightarrow (7-3)^2 + (y+4)^2 = 25$$

$$(4)^2 + (y^2 + 8y + 16) = 25$$

$$(y+4)^2 = 9$$

$$y + 4 = 3$$

$$y = 7$$

$\therefore$ Los puntos de tangencia son $(7, -1)$ y $(7, -7)$

c) Elige un punto c intermedio en el segmento de recta que conecta a los puntos de tangencia, encuentra la ecuación de su recta polar, P_c, y verifica que p esté en dicha polar.

Sean $(7, -1)$ y $(7, -7)$ puntos de tangencia, su punto intermedio es $(7, -4)$

$$c = \left(\frac{7+7}{2}, \frac{-1+(-7)}{2}\right) = (7, -4).$$

Su recta polar $\mathcal{P}_c = (x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$.

$$\Rightarrow (7-3)(x-3)+(-4-(-4))(y-(-4))=5^2$$
$$4(x-3)+(0)\cdot(y+4)=25$$
$$\Rightarrow 4(x-3)=25$$
$$x-3=\frac{25}{4}.$$
$$\Rightarrow x=\frac{37}{4}$$

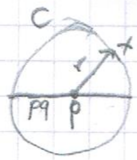
$\therefore$ p está en $\mathcal{P}_C$, ya que al sustituir, obtuvimos uno de sus puntos.

4. Sean $p=(-1,3)$ y $q=(3,-1)$

a) Encuentra la ecuación vectorial de la circunferencia que tiene al segmento $\overline{pq}$ como diámetro.

Sea $C=\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right)=(1,1)$ (ya que es la mitad de $\overline{pq}$)

$C=(1,1)$



b) Elije un número $r\in(0,1)$, $r\neq\frac{1}{2}$ y considera el punto $a=p+r(q-p)$. Encuentra el conjugado armónico de a.

Sea $\frac{|a-p|}{|a-q|}=\frac{|q-p|}{|q-a|}$ el conjugado armónico de p y q.

$a=p+r(q-p)$ $\Rightarrow$ El conjugado armónico de a es de la forma.

$=(1-r)p+rq$

$$a=p+\frac{(1-r)}{r}(q-p).$$

Si escogemos $r=\frac{1}{3}$, el punto a es,

$$a=p+\frac{1}{3}(q-p)=\frac{2}{3}p+\frac{1}{3}q$$

Usando la anterior fórmula:

$$a = p + \frac{1-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}(q-p) = p + \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}(q-p) = p + 2(q-p).$$

$$\Rightarrow a = p + 2(q-p) = -p + 2q.$$

$\therefore$ El conjugado armónico de $a = \frac{2}{3}p + \frac{1}{3}q$ es $a = -p + 2q$.