($\mathbb{F}$ campo y V $\mathbb{F}$-ev)

Dfn Sea $S \neq \emptyset$ un subconjunto de V. El (subespacio) generado por S, denotado $\mathcal{L}(S)$ ó $\langle S \rangle$, es el subcto

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{s\in S} \lambda_s s \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall s \in S\,(\lambda_s \in \mathbb{F}) \\ \exists C \subseteq S \text{ finito } (\forall s \in S\setminus C,\ \lambda_s = 0) \end{array} \right\}$$

¿Realmente tiene sentido este cto (ie, es no vacío)?

Sí tiene sentido, porque:

Dada una suma en $\langle S \rangle$, $\sum\limits_{s\in S} \lambda_s s$. por defn. $\exists C \subseteq S$ finito tal que

$$\forall s \in S\setminus C,\ \lambda_s = 0.$$

Digamos que $C = \{ s_1, s_2, \dots, s_m \} \subseteq S \subseteq V$.

De la condición de "finitud" de $\{\lambda_s \mid s \in S\}$, se tiene

$$\sum_{s\in S} \lambda_s s = \sum_{s\in S\setminus C} \cancelto{0}{\lambda_s} s + \sum_{s\in C} \lambda_s s$$

$$= \sum_{s\in S} \lambda_s s = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{s_j} s_j$$

A partir de esta observación, podemos notar que

$$\langle S \rangle \subseteq \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \;\middle|\; \forall i \in \{1,\dots,m\} \begin{pmatrix} \lambda_i \in \mathbb{F} \\ v_i \in S \end{pmatrix},\ m \in \mathbb{N} \right\}}_{\mathcal{L}(S)}.$$

Resulta estos ctos son iguales.

$\supseteq$ | Sup. que tenemos $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \in cl(S)$.

En este caso, considere $C = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subseteq S$.

$\lambda_s = \lambda_i$ si $s = v_i$

Por ello,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \sum_{s \in C} \lambda_s s = \sum_{s \in S} \lambda_s s \text{, donde}$$

se define $\lambda_s = 0$ si $s \in S \setminus C$. ∎

Obs Como $\forall s_1 \in S$, $s_1 = 1 \cdot s_1 + 0 = 1 \cdot s_1 + \sum_{s \in S \setminus \{s_1\}} 0 \cdot s$,
se tiene $S \subseteq \langle S \rangle$.

Teo. Si $S \subseteq V$ es no vacío, ent. $\langle S \rangle$ es un subespacio vectorial de V.

Dem

$\neq \emptyset$ | Se sigue de la obs. previa.

CA | Pd. $u, v \in \langle S \rangle \Rightarrow u + v \in \langle S \rangle$.

Sup. que $u, v \in \langle S \rangle$. Ent. por def. de $\langle S \rangle$, se tiene que

$$u = \sum_{s \in S} \lambda_s s \quad \wedge \quad v = \sum_{s \in S} \mu_s s.$$

las sumas son finitas

Al sumar se tiene,

$$u + v = \sum_{s \in S} \lambda_s s + \sum_{s \in S} \mu_s s = \sum_{s \in S} (\lambda_s s + \mu_s s)$$

$$= \sum_{s \in S} (\lambda_s + \mu_s) s \in \langle S \rangle$$

Obs Para $u = \sum_{s\in S} \lambda_s s$ y $v = \sum_{s\in S} \mu_s s$, $\exists\, C, D \subseteq S$ finitos tq $\forall s \in S \setminus C$, $\lambda_s = 0$

$\forall s \in S \setminus D$, $\mu_s = 0$.

$$\Rightarrow \forall s \in (S\setminus C) \cap (S \setminus D) = S \setminus (C \cup D),\ \lambda_s = \mu_s = 0$$

CE Sup. $u = \sum_{s\in S} \lambda_s s \in \langle S\rangle$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Ent.

$$\lambda u = \lambda \sum_{s\in S} \lambda_s s = \sum_{s\in S} \underbrace{\lambda \lambda_s}_{\mu_s = \lambda\cdot\lambda_s} s \in \langle S \rangle$$

(argumento explicado con u y v)

$\therefore$ De lo anterior, $\langle S\rangle$ es un subespacio. ∎

Nota Si $W \subseteq V$ es subespacio, lo denotamos $W \leq V$.

Se tiene una formulación alternativa para el generado de un cto.

Teo Si $\emptyset \neq S \subseteq V$, ent.

$$\langle S \rangle = \bigcap \{ W \leq V \mid S \subseteq W \}$$

Requerimos la sigte

Prop. Si $\mathcal{W} = \{ W_\alpha \mid \alpha \in A\}$ es una colección no vacía de subespacios de V, ent.

$$\bigcap \mathcal{W} = \bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha$$

Dem

$\bar{0}$ Como $\forall \alpha \in A$, $W_\alpha \leq V$, ent. $\bar{0} \in W_\alpha\ \forall \alpha \in A$.

Por ello, $\bar{0} \in \bigcap_{\alpha\in A} W_\alpha$.

CA Sup que $u, v \in \bigcap \mathcal{W}$.

Por ello, $\forall \alpha \in A$, $u, v \in W_\alpha$.

Como los W_α son subespacios, se tiene que

$$\forall \alpha \in A \quad u+v \in W_\alpha.$$

Por ello, $u+v \in \bigcap \mathcal{W}$.

CE) Dados $u \in \bigcap \mathcal{W}$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, se tiene

$$\forall \alpha \in A, \quad \lambda u \in W_\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \lambda u \in \bigcap \mathcal{W}.$$

$$\therefore \bigcap \mathcal{W} \leq V. \quad \blacksquare$$

Dem (Teo)

Como $\langle S \rangle \leq V$ y $S \subseteq \langle S \rangle$, ent.

$$\langle S \rangle \in \mathcal{W} = \{ W \leq V \mid S \subseteq W \}$$

$$\Rightarrow \quad \bigcap \mathcal{W} = \bigcap_{\substack{W \leq V \\ S \subseteq W}} W \subseteq \langle S \rangle.$$

Recíprocamente, dado cualquier $v = \sum_{s \in S} \lambda_s s \in \langle S \rangle$, $\exists\, C \subseteq S$ finito tq

$$v = \sum_{s \in S} \lambda_s s = \sum_{s \in C} \lambda_s s \text{ con}$$

Al tomar cualquier $X \in \mathcal{W} = \{ W \leq V \mid S \subseteq W \}$, se tiene que

$$X \leq V \text{ y } S \subseteq X.$$

Como $C \subseteq S$ y $S \subseteq X$, ent. $C \subseteq X$. Más aún, esto junto con el hecho de que $X \leq V$, implican que

$$v = \sum_{s \in S} \lambda_s s \in X.$$

Como $X \in \mathcal{W}$ fue arbitrario, se sigue que $v \in \bigcap \mathcal{W}$.

Así, $\langle S \rangle \subseteq \bigcap \mathcal{W}$.

$$\therefore \langle S \rangle = \bigcap \{ W \leq V \mid S \subseteq W \}. \quad \blacksquare$$

Corolario $\langle S \rangle$ es el subespacio más $\subseteq$-pequeño que contiene a S.

Dem

Si $W \leq V$ y $S \subseteq W$, ent. $W \in \{ \overline{X} \leq V \mid S \subseteq \overline{X} \}$

Así,

$$\langle S \rangle = \bigcap \{ \overline{X} \leq V \mid S \subseteq \overline{X} \} \subseteq W$$

$$\Rightarrow \langle S \rangle \subseteq W. \quad \blacksquare$$

Nota/Convención Como $S = \emptyset$ está contenido en todos los subespacios de V, ent

$$\langle \emptyset \rangle = \{ \bar{0} \}.$$

$$\Big(\text{porque } \bar{0} \in \underbrace{\bigcap \{ \overline{X} \leq V \mid \emptyset \subseteq \overline{X} \}}_{= \langle \emptyset \rangle} \subseteq \{ \bar{0} \} \Big). \quad \blacksquare$$

Obs. Gracias a este concepto de subespacio generado, podemos fundamentar que

$$\mathbb{F}[x]$$

es $\mathbb{F}$-e.v.

Bosquejo

Primeramente, acordemos que $\forall n \in \omega,\ x^n = \delta_n$

$$\left(\text{idea } \mathbb{F}[x] \leq \omega_{\mathbb{F}} \right)$$

> $\delta_n : \omega \to \mathbb{F}$
> dada por
> $\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq n \\ 1 & \text{si } x = n \end{cases}$

Como

$$\mathbb{F}[x] = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \;\middle|\; \overset{n \in \omega}{\forall k \in \{0,1,\dots,n\}},\ a_k \in \mathbb{F} \right\},$$

ent.

$$\mathbb{F}[x] = \langle \{ \delta_n \mid n \in \omega \} \rangle \leq \omega_{\mathbb{F}}. \quad \blacksquare$$