Subespacios vectoriales

Recordamos que para $S = \mathbb{R} = \mathbb{F}$, la sigte colección

$$S_{\mathbb{F}} = \mathbb{R}_{\mathbb{R}} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es función} \}$$

es un $\mathbb{R}$-esp. vectorial.

En este espacio tenemos un subconjunto algo conocido, a saber el espacio de funciones continuas

$$C(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}_{\mathbb{R}}.$$

Usamos la palabra espacio porque, ya hemos visto/notado que $C(\mathbb{R})$ es un $\mathbb{R}$-eV con las <u>mismas operaciones que tenemos en $\mathbb{R}_{\mathbb{R}}$</u>. En este caso, podemos escribir

$$C(\mathbb{R}) = \{ f \in \mathbb{R}_{\mathbb{R}} \mid \boxed{f \text{ es continua}} \}$$

Aquí tenemos una proposición lógica, a saber

$$C(f) : f \text{ es continua}$$

Es por ello que definimos lo que es una <u>condición lineal</u>

<u>Definición:</u> Decimos que una **<u>condición</u>** C (C es una prop. lógica) en un $\mathbb{F}$-eV V es **<u>lineal</u>** si cumple las dos condiciones siguientes

$$\text{CA) } \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \quad C(\vec{u}) \land C(\vec{v}) \Rightarrow C(\vec{u} + \vec{v})$$

$$\text{CE) } \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in V, \quad C(\vec{u}) \Rightarrow C(\lambda \vec{u})$$

<u>Ejemplos:</u>

En $V = \mathbb{R}_{\mathbb{R}}$ y $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, se tienen las sigtes <u>condiciones lineales</u>

a) $C(f)$: f es continua

b) $C(f)$: f evaluada en 0 es 0 $(f(0) = 0)$

Dem

Veamos que la cond $C(f): f(0)=0$ es lineal.

CA| Sup. f, g cumplen C. Así $f(0)=0=g(0)$. Por ello

$$0=0+0=f(0)+g(0)=(f+g)(0)$$

$\therefore C(f+g)$ es verdad

CE| Sup. que f cumple C y que $\lambda\in\mathbb{R}$. Ent.

$$(\lambda f)(0)=\lambda\cdot\underbrace{(f(0))}_{0}=\lambda\cdot 0=0$$

$\therefore C(\lambda f)$ es verdad

De lo anterior se verifica que C es lineal. ∎

c) $C(f)$: f es derivable (en todo $\mathbb{R}$)

c') $C(f)$: f es derivable en 0.

d) $C(f)$: f tiene forma lineal (i.e $\exists\,\alpha\in\mathbb{R}$ tq $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\alpha x$)

Dem

CA| Sup. f, g tienen forma lineal. Así,

$$\exists\,\alpha,\beta\in\mathbb{R} \text{ tq } \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\alpha x \wedge g(x)=\beta x.$$

En este caso, dado $x\in\mathbb{R}$

$$(f+g)(x)=\alpha x+\beta x=(\alpha+\beta)x.$$

Por lo tanto, la constante $\gamma:=\alpha+\beta$ satisface que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad (f+g)(x)=\gamma x$$

Y así concluimos que $C(f+g)$ es verdadera.

CE| Sup. que $f(x)=\alpha x$ y que $\lambda\in\mathbb{R}$. Ent. $\forall x\in\mathbb{R}$

$$(\lambda f)(x)=\lambda\,(f(x))=\lambda\,(\alpha x)=(\lambda\alpha)x.$$

$\therefore \exists\,\gamma=\lambda\alpha$ tq $(\lambda f)(x)=\gamma x\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Así, $C(\lambda f)$ es verdadera.

De lo anterior concluimos que C es condición lineal. $\blacksquare$

Para $S = \mathbb{N}$ y $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, en el esp. ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{F}$ la condición

① $C(x)$: $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$

$\left(x \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R} \iff x \in \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es función} \}\right)$

es lineal

② $C\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ converge

(que equivale a que sea acotada)

③ $C\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n^2 < +\infty$

Ejemplo sencillo

Sup. que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ son constantes. Entonces la condición (en $\mathbb{R}^3$)

$$C\left((x,y,z)\right): \ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

es lineal.

Dem

(A) Sup que $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$ cumplen C.

Ent.

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$$

$$\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = 0$$

De este modo, el vector suma

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

también cumple C porque

$$\alpha(x_1 + y_1) + \beta(x_2 + y_2) + \gamma(x_3 + y_3) = \underbrace{\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3}_{\to 0} + \underbrace{\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3}_{\to 0} = 0$$

$\therefore$ $C(\bar{x} + \bar{y})$ es verdad.

De todo lo anterior C es una condición lineal. $\blacksquare$

No-Ejemplos de condiciones lineales

a) En $V = \mathbb{R}$ (visto como $\mathbb{R}$ ev), la condición

$$C(x): \quad x > 0$$

NO es lineal.

$\neg$ CE) Porque si x cumple C, ent. $\underbrace{0}_{\lambda=0} \cdot x = 0$ no cumple C.

b) En $\mathbb{R}^2$ (visto como $\mathbb{R}$-ev), la condición

$$C(\bar{x}): \quad \bar{x} \in \mathbb{Z}^2.$$

Aunque C cumple CA, no cumple CE)

c) En $\mathbb{R}^2$ (visto como $\mathbb{R}$-ev), la condición

$$C(\bar{x}): \quad \bar{x} \in \mathbb{Q}^2$$

no es lineal, PERO esta misma condición sí es lineal si consideramos a $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{Q}$-ev.

Tarea: Demostrar estas afirmaciones.

d) En $\mathbb{R}$ (visto como $\mathbb{R}$-ev), la condición

$$C(x): \quad x^2 \in \mathbb{Q}$$

NO es lineal.

Gracias a las condiciones lineales, podemos definir lo que es un subespacio vectorial.

Dfn, Sean V un $\mathbb{F}$ev y $\mathcal{H} \subseteq V$. Decimos que $\mathcal{H}$ es un subespacio (vectorial) si

$\neg\emptyset$ | $\mathcal{H}$ es no vacío

$\exists C$ | Los vectores en $\mathcal{H}$ cumplen una condición lineal y además todo vector en V que cumpla la cond. lineal dicha también esté en $\mathcal{H}$. En símbolos

$$\exists C \text{ cond. lineal tq } \mathcal{H} = \{ v \in V \mid C(v) \}$$

Ejemplo de cond. lineal que <u>no</u> determina un subespacio:

Pendiente