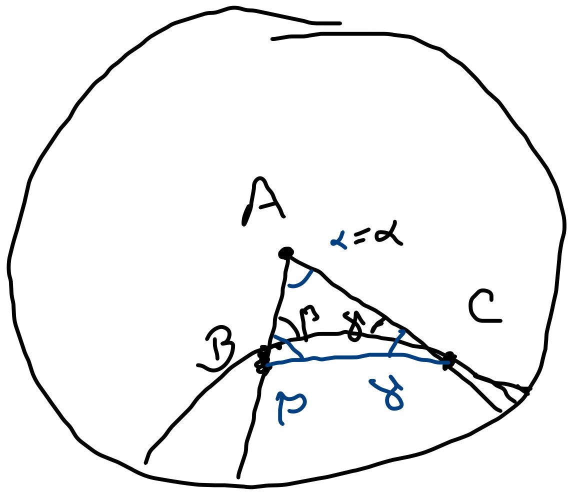
Triangulos en $\mathbb{H}$

G. Saccheri (1667-1733)

La suma de los ángulos de un triángulo hiperbólico es menor que dos rectos.



$\beta < \beta$ $\qquad$ $\gamma < \gamma$

Dem en Δ de Poincaré, sea ΔABC el triángulo consideramos una isometría que nos lleva $A \to O$

AC, AB son radios

Lambert (1723 -1812)

La diferencia de la suma de los ángulos interiores de un polígono euclidiano, menos la suma de los ángulos interiores de un polígono hiperbólico con los mismos vértices es proporcional al área hiperbólica del polígono.

Caso del Triangulo

$$\text{Area} = \sum \text{ángulos} - \pi$$

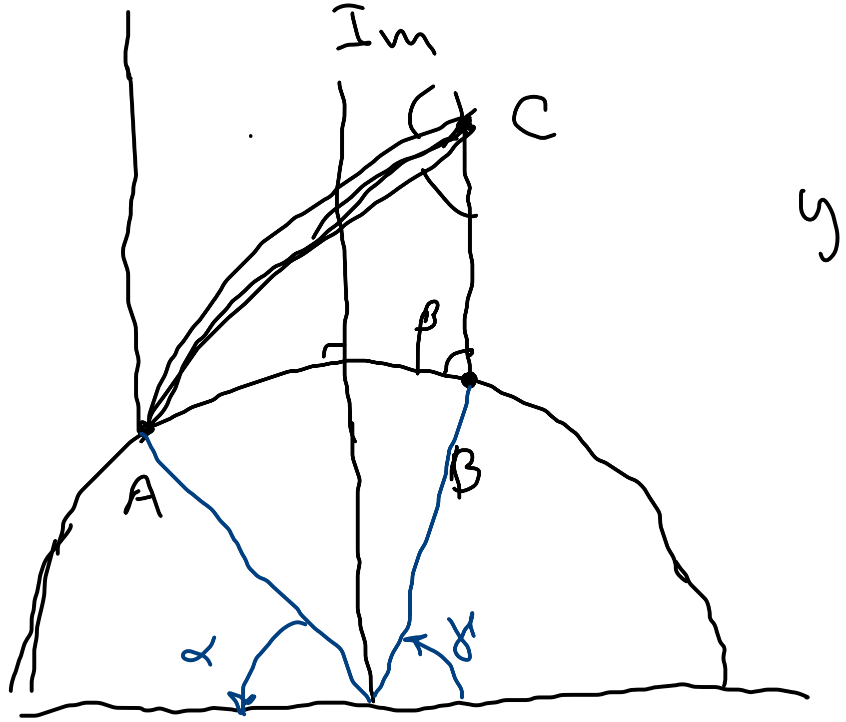
H^+ Im y

$\frac{1}{y}$ long

$\frac{1}{y^2}$ area

$$ABC = \frac{}{\,AB\infty - AC\infty\,}$$

ABC



y varía de

$\sqrt{1-x^2} \to \infty$

Area $\Delta AB\infty$

x varía de $\cos(\pi - \alpha)$ a $\cos\gamma$

$$\text{Area } \Delta AB\infty = \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\gamma} \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx$$

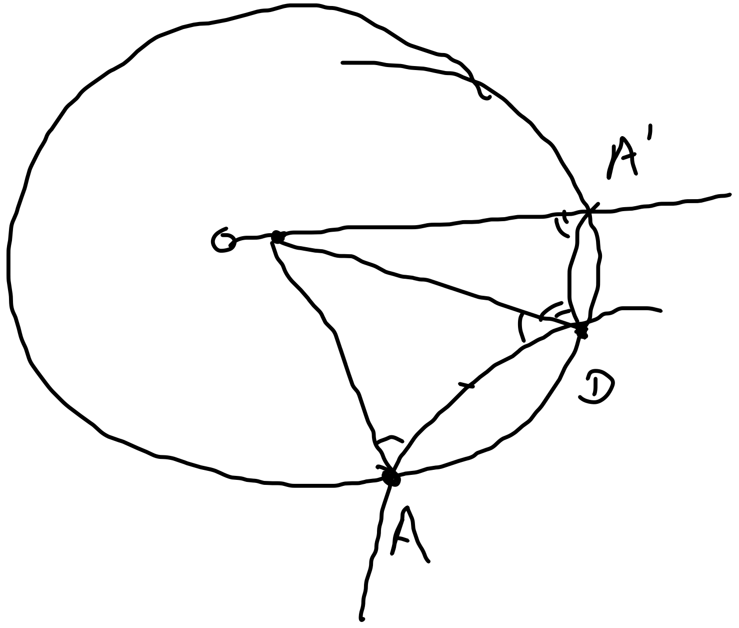
$$= \pi - (\alpha + \gamma)$$

Gauss (1777 - 1855)

Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de las rectas de un haz correspondientes a un punto fijo D.

Def

Dado un haz con vertice O decimos que un punto A en una de las rectas del haz es un punto correspondiente al punto D, si A es tal que OA y OD forman angulos iguales en el mismo lado de AD



Dem

En un triangulo (euclidianos, hiperbólicos)

2 angulos iguales $\Leftrightarrow$ 2 lados iguales

Corolario

Una transformación conforme lleva circulos en circulos.