9

Examen #1

Geometría Analítica

28 de Noviembre 2020

Integrantes:

García Hernández Rodrigo Emmanuel

Juárez López Gerson Neftaly

Martínez Loredo Abel Alejandro

Sandoval Hernández Erik Daniel

Toscano Montoya Johanna Lizeth

Vidales Astudillo Héctor Daniel

Examen I Geometría

1) Resuelve los siguientes problemas explicando con detalle tus respuestas. Considera los vertices del triangulo ABC y denota por $\mathcal{A}$ la recta que contiene al lado opuesto al vertice A, similarmente B y C para:

$$A=(5,5),\quad B=(1,2),\quad C=(1,7)$$

Encuentra la descripción parametrica de $\mathcal{C}$

Tenemos que $\mathcal{C}$ tiene el vector director $A-B$ y pasa por el punto B, por lo que

$$\mathcal{L}=\{B+t(A-B)\mid t\in\mathbb{R}\}$$

Sustituyendo tenemos:

$$\mathcal{L}=\{(1,2)+t((5,5)-(1,2))\mid t\in\mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{L}=\{(1,2)+t(4,3)\mid t\in\mathbb{R}\}$$ ✓

2) Encuentra la ecuación normal de B

Primero hallamos el vector director de la recta

$A - C = (5,5) - (1,7) \longrightarrow A - C = (4,-2) = \vec{d}$

Luego tomemos el ortogonal a $\bar{d}$, este es

$$d^{\perp} = (2,4)$$

Sabemos que la ecuación normal de la recta es de la forma $U \cdot X = U \cdot p$, donde en nuestro caso $U = d^{\perp}$ y p es un punto sobre la recta, tomemos $p = A$, entonces nos queda la ecuación normal:

$$(2,4) \cdot X = (2,4) \cdot (5,5)$$

$$2x + 4y = 10 + 20$$

$$2x + 4y = 30$$

Es la ecuación normal

3. Encuentra la ecuación normal del segmento $\overline{BC}$.

Definición:

La mediatriz de un segmento es la línea recta perpendicular a dicho segmento que se traza por su punto medio.

Entonces tenemos que el punto medio del segmento $\overline{BC}$, que llamaremos M, está dado por

$$M = \frac{1}{2}(B + C)$$
$$= \frac{1}{2}[(1,2)+(1,7)]$$
$$= \frac{1}{2}[(2,9)]$$
$$= (\frac{1}{2}\cdot(2), \frac{1}{2}\cdot 9)$$
$$= (1, 9/2)$$

Así, el punto medio de $\overline{BC}$ es $(1, 9/2)$.

Ahora, el vector normal de la recta perpendicular es el vector que va del punto M al vértice C, es decir

$$n = C - M$$
$$n = (1,7) - (1, 9/2)$$
$$n = (0, 5/2)$$

Por lo tanto, la ecuación normal está dada por

$$n \cdot x = n \cdot M$$

Despejando

$$(0, 5/2)\cdot(x,y) = (0, 5/2)\cdot(1, 9/2)$$
$$(0, 5/2)\cdot(x,y) = (0, 45/4) \rightarrow y = \frac{9}{2}$$

Que es la ecuación normal de la mediatriz

4. Calcula las distancia $b=d(A,C)$ y $h=d(B\mathcal{B})$, para determinar el área $\frac{bh}{2}$ y haz un dibujo de triángulo, indicando h y la recta de la pregunta anterior.

$$A=(5,5),\ B=(1,2),\ C=(1,7)$$

La ecuación normal de la recta $\mathcal{B}$ es:

$$\mathcal{B}=\{(2,4)\cdot x=(2,4)\cdot(5,5)$$

$$(2,4)\cdot\bar{x}=10+20=30$$

Usando la fórmula de distancia entre dos punto

$$d(x_1,y_1),(x_2,y_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

Sustituyendo queda:

$$\wedge\ b=\sqrt{(5-1)^2+(5-7)^2}$$

$$=\sqrt{(4)^2+(-2)^2}$$

$$=\sqrt{16+4}$$

$$=\sqrt{20}\quad o\ 4.47u\ \text{aprox.}$$

Para $h=d(B\mathcal{B})$

Usando la fómula de distancia entre un punto y una recta

$$d(p,\mathcal{L})=\frac{|c-(n\cdot p)|}{|n|}$$

Sustituyendo queda

$$h=\frac{|30-(2,4)\cdot(1,2)|}{|(2,4)|}$$

$$=\frac{|30-(2\cdot1+4\cdot2)|}{|(2,4)|}$$

$$=\frac{|30-(2+8)|}{\sqrt{(2)^2+(4)^2}}$$

$$=\frac{|30-10|}{\sqrt{4+16}}$$

$$= \frac{20}{\sqrt{20}}$$ ó 4.47 redondeando

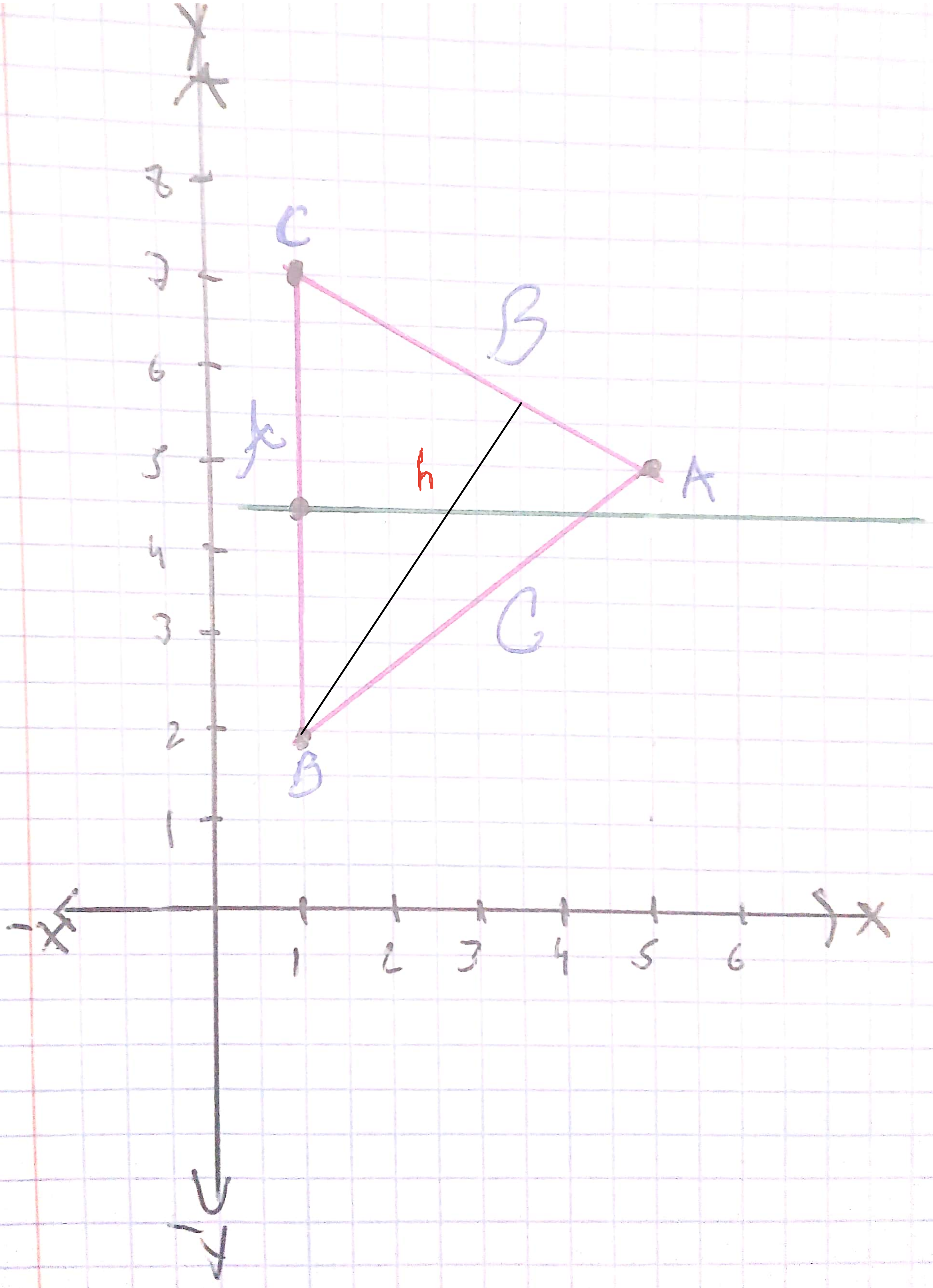
Para sacar el area sabemos que la formula es $\frac{b \cdot h}{2}$

$b = 4.47 \quad h = 4.47$

Sustituyendo

$$A = \frac{(\sqrt{20})\left(\frac{20}{\sqrt{20}}\right)}{2}$$

$$A = 10\ u^2$$



Y
8
7
6
5
4
3
2
1
-X
1
2
3
4
5
6
X
-Y
C
B
A
B
C
h

5. obten las coordenadas polares de los puntos con coordenadas cartesianas

a) $P=(1,-2)$ Polares (r,θ)

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{-2}{1}\right)=-63.43^\circ$$

pasando los grados a positivos: $-63.43^\circ+360^\circ=296.57$

convirtiendo a radianes: $296.57^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}=1.64\pi$ ✓

Polares $=\left(\sqrt{5},\,1.64\pi\right)$ ó $\left(1.64\pi,\,\sqrt{5}\right)$

b) $Q=(0,-2)$

$$r=\sqrt{0^2+(-2)^2}=\sqrt{4}=2$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{-2}{0}\right)=\tan^{-1}(0)=0^\circ$$

Polares $=\left(0^\circ,2\right)$ ó $\left(2,0^\circ\right)$ ✗

en cartesianas es $(2,0)$.

necesitas $\theta=\frac{3\pi}{2}$ para $(0,-2)$

6. Demuestra que dos vectores U y V son perpendiculares si y sólo si

$$|U+V|^2 = |U|^2 + |V|^2$$

Demostración:

Supongamos que U y V son ortogonales esto es $U \circ V = 0$

($\Rightarrow$) Desarrollando el lado izquierdo de:

$$|U+V|^2 = |U|^2 + |V|^2$$

$$|U|^2 + 2U \circ V + |V|^2 = |U|^2 + |V|^2$$

Como por Hip. $U \circ V = 0$ tenemos

$$|U|^2 + |V|^2 = |U|^2 + |V|^2$$

($\Leftarrow$) Para el regreso supongamos que

$$|U+V|^2 = |U|^2 + |V|^2$$

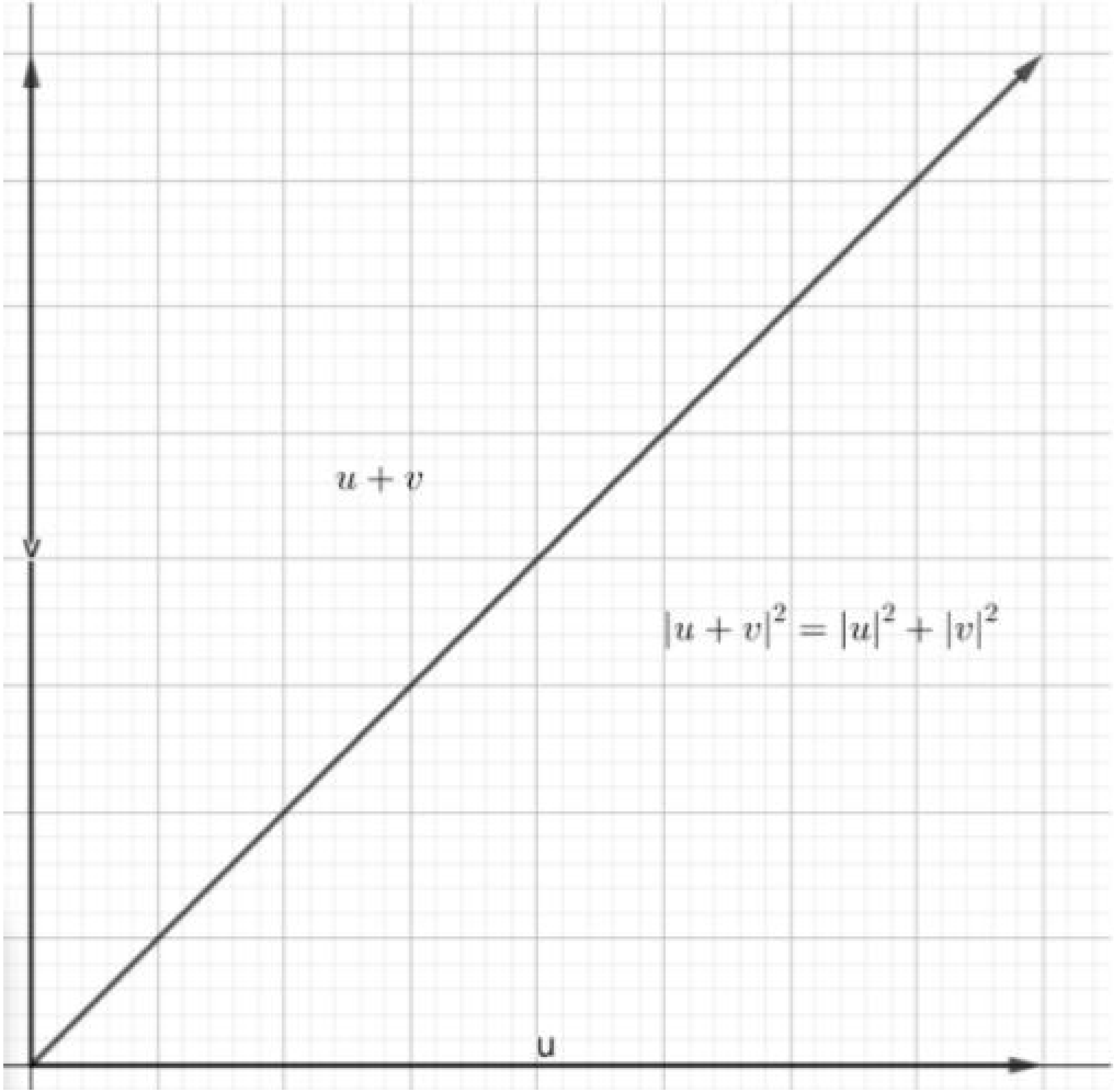
Desarrollando $|U|^2 + 2U \circ V + |V|^2 = |U|^2 + |V|^2$

Despejando todo de un mismo lado $\cancel{|U|^2} + 2U \circ V + \cancel{|V|^2} - \cancel{|U|^2} - \cancel{|V|^2} = 0$

tenemos $2 \circ U \circ V = 0$

$\therefore$ U y V son perpendiculares $\Leftrightarrow |U+V|^2 = |U|^2 + |V|^2$

✓


v
$u + v$
$|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$
u