Examén 2

- Xavier Andres Correa Reynoso
- Daniel Yedra Cázares
- Daniela Aline Gomez Jardon
- Emily Andrea Cervantes Dominguez
- Wembley Emanuel Ibarra Tepato
- Braulio Tadeo Ramirez Chavez

① Si $\vec{r} = (3-3K, 5K)$ se le aplica una $R(\frac{\pi}{2})$ entonces

$$T = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3-3K \\ 5K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3-3K \\ 5K \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} -5K \\ 3-3K \end{pmatrix}$$

Si $\vec{r}\,' = (-5K, 3-3K)$ se le aplica la matriz vista en clase para la reflexión sobre el eje "x" se tiene que

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5K \\ 3-3K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5K \\ 3K-3 \end{pmatrix}$$

Si $\vec{r}\,'' = (-5K, 3K-3)$ se le aplica la matriz vista en clase para la reflexión sobre el eje "y" se tiene que

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5K \\ 3K-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5K \\ 3K-3 \end{pmatrix}$$

Finalmente se tiene que la recta estará dada como $\vec{r}^{\,*} = (5K, 3K-3)$.

2. Demuestra que si c es un punto exterior (al círculo C con centro P) entonces su recta a P biserta sus dos tangentes a C y además que las distancias a sus pies en C (es decir, a los puntos de tangencia) son iguales.

Primero vamos a nombrar c_1 y c_2 a las intersecciones de P_c con la circunferencia. Sabemos que estos puntos tienen como rectas polares

$P_{c_1}: (c_1-P)\cdot(x-p)=r^2$ $\qquad$ $P_{c_1}: (c_2-p)\cdot(x-p)=r^2$

P.d. Que la recta que une a p con c es bisectriz de P_{c_1} y P_{c_2}

$\mathcal{L}: p+t(c-p)$

Ahora si $q \in 1 \Rightarrow q = p+t(c-p)$

Entonces queremos demostrar que $d(q,\mathcal{L}) = \frac{c-n\cdot p}{n}$

$$d(q, P_{c_1}) = \frac{1(c_1-p)\cdot c-(c_1-p)\cdot q}{|c_1-p|} = \frac{|c_1-p|\cdot(c-q)|}{|c_1-p|} = \frac{|c_1-p\cdot(t_0(p-c))|}{|c_1-p|}$$

$$= \frac{t_0\,(c_1-p)\cdot(c-p)}{r} - \frac{|t_0|\,(c_1-p\cdot(c-p))}{r} = \frac{|t_0|\,r^2}{r} = |t_0|\cdot r$$

Aplicamos el mismo procedimiento para c_2

$\Rightarrow d(q, p_{c_1}) = d(q, P_{c_2}) \Rightarrow \mathcal{L}$ está contenida en la bisectriz de P_{c_1} y P_{c_2}

Como $\mathcal{L}$ esta contenida en B y ésta es una recta, tenemos que $B=\mathcal{L}$ ■

③ Si $|d(\bar{x},P) - d(\bar{x},Q)| = 2a$ tal que $\bar{x}=(x,y)$, $P=(0,3)$, $Q=(0,-3)$, $a=3\sqrt{3}$ y $x,y \in \mathbb{R}$ entonces

$\sqrt{x^2+(y-3)^2} + \sqrt{x^2+(y+3)^2} = 6\sqrt{3}$

$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = 6\sqrt{3} - \sqrt{x^2+(y+3)^2}$

$x^2+y^2-6y+9 = 108 - 12\sqrt{3}\sqrt{x^2+(y+3)^2} + x^2+y^2+6y+9$

$12\sqrt{3}\sqrt{x^2+(y+3)^2} = 108+12y$

$(9+y)^2 = 3[x^2+y^2+6y+9]$

$81+18y+y^2 = 3x^2+3y^2+18y+27$

$3x^2+2y^2 = 54$

4. Demuestre que la ecuación

$$|d(x,P)-d(x,Q)|=2a$$

define

i) la mediatriz de P y Q para $a=0$

Sea $a=0$ se tiene que

$$|d(x,P)-d(x,Q)|=0$$

Utilizando las propiedades del valor absoluto tenemos que

$$\sqrt{(d(x,P)-d(x,Q))^2}=0$$

$$\Rightarrow \pm(d(x,P)-d(x,Q))=0$$

Ya que la operación es igual a 0 es irrelevante el signo

$$\therefore\ d(x,P)-d(x,Q)=0 \Rightarrow d(x,P)=d(x,Q)$$

Y ya que a la mediatriz nosotros la definimos como

Mediatriz de $\overline{PQ}=\{X(x,y)\mid d(X,P)=d(X,Q)\}$

Se tiene que $a=0$ define la mediatriz de P,Q

- los rayos complementados del segmento $\overline{PQ}$ para $a = c$

Sea $a = c$ se tiene que

$$|d(x,P) - d(x,Q)| = 2c$$

$$\Rightarrow \sqrt{[d(x,P) - d(x,Q)]^2} = 2c$$

$$(d(x,P) - d(x,Q))^2 = 4c^2$$

$$\therefore \pm (d(x,P) - d(x,Q)) = \pm 2c$$

Si $2c > 0$ se tiene que

$$d(x,P) - d(x,Q) = 2c$$

Esto de una relación con la elipse ya que por su definición

$$E = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid |PF_2| + |PF_1| = 2c\}$$

la elipse se define a partir

y ya que de los rayos que van de P a Q para el caso de que $2c < 0$ los rayos van en dirección contraria

$\therefore$ concluimos que si $a = c$ definen los rayos complementados entre ambos puntos

Recordemos que para las secciones cónicas se define la excentricidad como

$$e = \frac{c}{a}$$

Si $a > c$ entonces $e < 0$

$$a > 0$$

$$0 > \frac{c}{a}$$

$$0 > e$$

Pero llegamos a un absurdo porque $e \geq 0$ y $\therefore$ nos queda el conjunto vacío

5- Encuentra la transformación afín $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple:

1. $f(2) = 5$ y $f(5) = 2$

Siguiendo la formula $f(x) = Ax + B$

$f(2) = 2A + B = 5$

$f(5) = 5A + B = 2$

$B = 5 - 2A$
$B = 2 - 5A$

$5 - 2A = 2 - 5A$

$-2A + 5A = 2 - 5$

$3A = -3$

$A = -1$

sustituimos: $B = 5 - 2(-1) = 7$

$\therefore f(x) = -x + 7$

2. $f(1) = -2$ y $f(2) = 2$

$f(1) = 1A + B = -2$

$f(2) = 2A + B = 2$

$B = -2 - A$
$B = 2 - 2A$

$A = 2 + 2$

$A = 4$

$B = -2 - 4$

$B = -6$

$\therefore f(x) = 4x - 6$

6- Demuestra, usando la formula que la inversa de cualquier reflexión en $\mathbb{R}^2$ es ella misma

Supongamos que $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una reflexión con respecto a la recta $l = u \cdot x = c$ con u como un vector unitario $(|u|=1)$. Entonces por lo visto en clase tenemos:

$$\varphi(x) = x + 2(c - u \cdot x)u$$

Entonces desenvolviendo $f(f(x))$ tenemos

$$\begin{aligned}
f(f(x)) &= f(x) - 2(c - u \cdot f(x))u \\
&= x + 2(c - u \cdot x)u + 2(c - u(x + 2((c - u \cdot x)u)))u \\
&= x + 2uc - 2u^2x + 2u(c - u(x + 2uc - 2u^2x) \\
&= x + 2uc - 2u^2x + 2u(c - ux - 2uc + 2u^3x) \\
&= x + 2uc - 2u^2x + 2uc - 2u^2x - 4u^2c + 4u^3x
\end{aligned}$$

Y sabemos que u es unitario entonces nos queda:

$$x + 2c - \cancel{2x} + 2c - \cancel{2x} - \cancel{4c} + \cancel{4x} = x$$