Examen 1.
Geometría Analítica II

(Grupo 4101 - Semestre 2022-2)

Profesor: Ramón Reyes Carrión

Martes 5 de abril de 2022

Resuelve a tu elección, sólo uno de los problemas que tienen el mismo número

1. Demuestre que, si dos planos Π_1, Π_2 en $\mathbb{R}^3$ tienen un punto en común, entonces tienen una infinidad de puntos en común. ¿Lo mismo es cierto en $\mathbb{R}^4$?[1]

   Definición: En $\mathbb{R}^4$, un *hiperplano* $\mathcal{H}$ es un conjunto de forma $\mathcal{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c\}$, donde $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^4$ es un vector no nulo y $c \in \mathbb{R}$ es una constante. En este caso, a $\mathbf{n}$ se le llama *vector normal* al hiperplano $\mathcal{H}$.

1. Demuestre que cualesquiera dos hiperplanos, en $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ **cuyos vectores normales son linealmente independientes**, tienen intersección no vacía. Más aún, pruebe que dicha intersección contiene un plano[2].

1. Define lo que debería ser un *hiperplano paramétrico* en $\mathbb{R}^4$ y demuestra que todo hiperplano "normal"[3] es un hiperplano paramétrico. Dando por hecho la noción del Ejercicio 7, también demuestra el recíproco (es decir, de que todo hiperplano paramétrico es un hiperplano normal).

2.
   - ¿Cuáles de las siguientes cuartetas de puntos son *coplanares*[4]? En caso que lo sean, encuentra la ecuación normal del plano en el que están.
     a) $\mathbf{a} = (2, -1, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 2, -2)$ $\mathbf{c} = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{d} = (4, -1, -1)$.
     b) $\mathbf{a} = (2, -1, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 2, -2)$ $\mathbf{c} = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{d} = (3, -1, -1)$.
   - Encuentra un criterio general para saber si cuatro puntos $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ son coplanares o no, y demuéstralo.

3. Demuestre la siguiente proposición, que puede pensarse como un *Principio de Inducción en* $\mathbb{R}^3$: Sea P una propiedad sobre vectores en $\mathbb{R}^3$ tal que:

   - $P(\mathbf{e}_1)$, $P(\mathbf{e}_2)$ y $P(\mathbf{e}_3)$ son verdaderas.
   - Cada vez que se tienen dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$ de modo que $P(u)$ y $P(v)$ son verdaderas, $P(u+v)$ también es verdadera.
   - Cada vez que se tienen un vector $u \in \mathbb{R}^3$ de modo que $P(u)$ es verdadera y $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda u)$ también es verdadera.

   Entonces P es verdadera en cualquier vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

   Nota: Así como en el conjunto de los Números Naturales, $\mathbb{N}$, tenemos el *Principio de Inducción*, en este ejercicio tenemos una especie de Inducción en $\mathbb{R}^3$.

[1] En este caso, piense a los planos descritos de manera *paramétrica o baricéntrica*.
[2] Nuevamente, piense al plano descrito de manera *paramétrica o baricéntrica*.
[3] Como en la definición que dimos anteriormente.
[4] Coplanar, en este casi, quiere decir que existe un plano que tiene a los cuatro puntos.

3. *a*) Sean $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ un vector arbitrario y $k \in \mathbb{R}$ una constante. Si $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ son soluciones a la ecuación $\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} = k$, entonces cualquier combinación afín de estos puntos también es solución a la misma ecuación.

   b) Usando el inciso anterior, demuestre que toda recta que pase por dos puntos de un plano Π se queda contenida en dicho plano.

   c) Sean $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{\mathbf{0}\}$ un vector arbitrario y $k \in \mathbb{R}$ una constante. Si $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c},\ \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ son soluciones a la ecuación $\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} = k$, entonces cualquier combinación afín de estos puntos también es solución a la misma ecuación.

   d) Usando el inciso anterior, demuestre que todo plano que pase por tres puntos de un hiperplano $\mathcal{H}$ se queda contenida en dicho hiperplano.

4. Generalice el producto cruz de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$. Esto es: dados tres vectores en $\mathbb{R}^4$ linealmente independientes[5], encontrar un cuarto vector que sea perpendicular a ellos. Justifique su razonamiento y demuestre que su propuesta cumple lo deseado.

4.
   - Suponga $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3 \in \mathbb{R}^3$ forman una base ortonormal. Demuestre que si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ son escalares tales que:
   $$\alpha\mathbf{f}_1 + \beta\mathbf{f}_2 + \gamma\mathbf{f}_3 = \mathbf{0},$$
   necesariamente se tendrá que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
   - Exhiba un procedimiento con el cual:
     a) A partir de un vector $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, se obtenga una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.
     b) A partir de dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$ linealmente independientes, se obtenga una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.
     c) A partir de tres vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^4$ linealmente independientes, se obtenga una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.

5. Encuentre las descripciones

   a) Paramétrica y normal del plano (en $\mathbb{R}^3$) que pasa por los puntos $\mathbf{a} = (1,2,3)$, $\mathbf{b} = (-1,7,0)$ y $\mathbf{c} = (0,6,8)$.

   b) Baricéntrica y paramétrica del plano (en $\mathbb{R}^3$) $\Pi : 3z - x = 6$. ¿Te sirvió el *truco* de intersecar con los ejes? ¿Por qué?

5. Resuelva los siguientes ejercicios:

   - Encuentra una descripción paramétrica para la recta de intersección de las siguientes parejas de planos:
   $$\begin{array}{llcll} \Pi_1 : & 2x + y - z = 1 & \text{y} & \Pi_2 : & -2x + y - 3z = 3. \\ \Pi_1 : & x - y - z = 0 & \text{y} & \Pi_2 : & x + y - z = 1. \\ \Pi_1 : & 2x + y - z = 2 & \text{y} & \Pi_2 : & -x + y - 2z = 2. \\ \Pi_1 : & 2x + z = 1 & \text{y} & \Pi_2 : & -2x + z = 3. \end{array}$$
   - Describe las siguientes rectas intrínsecamente, es decir, como las soluciones de dos ecuaciones lineales:
   $$\ell_1 = \{(2+t, 1-2t, 3t-3) \mid t \in \mathbb{R}\}$$
   $$\ell_2 = \{(s, 2-3s, 2s-3) \mid s \in \mathbb{R}\}$$

[5] Es decir, que no existe un plano por el origen que tenga a esos tres vectores.

6. Sea Π el plano dado por la ecuación $\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} = c$ y sea ℓ la recta $\{\mathbf{p}+t\mathbf{d} \mid t \in \mathbb{R}\}$. Demuestra (sustituyendo la expresión de los puntos de ℓ en la ecuación de Π) que Π y ℓ se intersectan en un único punto *si, y sólo si*, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{d} \neq 0$. Observa que si no es así (es decir, si $\mathbf{n}\cdot\mathbf{d} = 0$) entonces la dirección $\mathbf{d}$ es paralela al plano; por tanto demostraste que un plano y una recta se intersectan en un único punto *si, y sólo si*, la direccion de la recta no es paralela al plano.

7. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ tres vectores tales que $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \neq 0$. Demuestra que tres planos normales a $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ respectivamente se intersectan en un único punto.

7. Resuelva los siguientes ejercicios:

   - Demuestra que el determinante cumple las siguientes propiedades

     a) $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = -\det(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u})$.

     b) $\det(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$

     c) $\det(t\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = t\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$

     d) $\det(\mathbf{u} + \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \det(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$

   - Demuestra, usando únicamente el ejercicio anterior, que el determinante no cambia si sumamos un múltiplo de un vector a alguno de los otros, es decir, que

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v} + t\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$