9

Geometría Analítica I
Reposición del Primer Parcial

Pablo. Espina Heel
Gpo. 4072.

1. Dados dos vectores u y v en $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes, el paralelogramo que definen tiene como vértices los puntos $0, u, v$ y $u+v$ (como en la figura). Demuestra que sus diagonales, es decir, los segmentos de 0 a $u+v$ y de u a v se intersectan en su punto medio.

$v + w = a$

$\hookrightarrow w = u - v$

$\Rightarrow \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_{vu} = \{v + t(u-v) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_0 (u+v) = \{0 + s((u+v) - 0) \mid s \in \mathbb{R}\}$

Buscamos $x \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Es decir, buscamos un $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ t.q.

$\bar{x} = v + t(u-v)$

$\bar{x} = s(u+v)$

Igualamos las $\bar{x}$ entonces

$v + t(u-v) = s(u+v)$

$v + tu - tv = su + sv$

$v + tu - tv = su - sv = \bar{0}$

$v - tv - sv + t\,u - su = \bar{0}$

$v(1 - t - s) + u(t - s) = 0$

$t = 1 - s \quad + \quad t = s$

$2t = 1$

$t = 1/2 \qquad s = 1/2$

$\therefore$ Por lo tanto podemos afirmar que se intersecan en su punto medio pues se intersectan en $1/2$ //

2. Demuestra que tres puntos a, b y c son no colineales si y solo si, los vectores $u = (b-a)$ y $v = (c-a)$ son linealmente independientes.

$\Rightarrow$)

Por hipot. los puntos a, b, c, son no colineales. Esto significa que no están en una misma línea recta.

Recordemos que los puntos a, b, c son colineales si existe un escalar λ t.q. $c = a + \lambda(b-a)$. i.e. el vector $v = c - a$ es múltiplo escalar del vector $u = b - a$

Sin embargo sabemos que no son colineales por lo tanto v no es múltiplo escalar de u.

Ahora dos vectores son linealmente independ. si $\nexists \lambda$ t.q. $v = \lambda u$.

y como los puntos no son colineales entonces esta condición se cumple.

$\Leftarrow$)

Por hip. sabemos que $u = b - a$ y $v = c - a$ son lin. ind.

$\Rightarrow \nexists \lambda, \alpha \neq 0$ t.q. $\lambda u + \alpha v = 0$

Esto implica que v no es un múltiplo escalar de u, por lo tanto no son colineales

$\therefore$ a, b, c son no colineales $\Leftrightarrow$ u y v son linealmente independientes

3. Da una expresión paramétrica para el plano que pasa por los siguientes puntos $a=(2,0,1)$, $b=(0,1,1)$ y $c=(-1,2,0)$

$\vec{r} = a + t\vec{ab} + s\vec{ac}$

Buscamos $\vec{ab}$ y $\vec{ac}$

$\vec{ab} = \{(0,1,1) - (2,0,1) = (-2,1,0)\}$

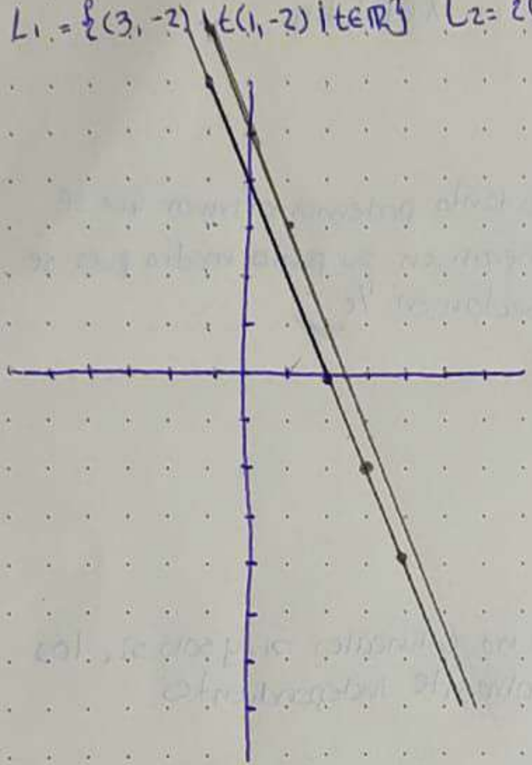
$\vec{ac} = \{(-1,2,0) - (2,0,1) = (-3,2,-1)\}$

Sustituimos y obtenemos

$\vec{r} = \{(2,0,1) + t(-2,1,0) + s(-3,2,-1)\} \rightarrow r = \{(2,0,1) + t(-2,1,0) + s(-3,-2,-1) \mid t,s \in \mathbb{R}\}$

4. Determina como se intersectan las rectas siguientes, usando únicamente el determinante

$L_1 = \{(3,-2) + t(1,-2) \mid t \in \mathbb{R}\}$ $L_2 = \{(1,3) + s(-2,4) \mid s \in \mathbb{R}\}$ $L_3 = \{(-1,6) + r(3,-6) \mid r \in \mathbb{R}\}$



Tomamos L_1 y L_2 sus vectores dirección $(1,-2)$ y $(-2,4)$

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4-(4) = 0$

Ahora tomemos L_2 y L_3 sus vectores dirección $(-2,4)$ y $(3,-6)$

b) $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 12-(12) = 0$

Ahora observando la gráfica y los cálculos podemos decir que L_1 y L_3 son la misma recta. y L_1 y L_2 son rectas paralelas.

5. Resuelva los siguientes incisos

a) Da una descripción paramétrica de la recta dada por la ecuación: $2x - y = 2$.

Suponemos $y=0$ entonces $x=1$ (ya tenemos un punto por donde pasa la recta. Tomamos los vectores dirección $(2,-1)$.

$\Rightarrow L_1 = \{(1,0) + t(2,-1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ #

b) Encuentra una ecuación normal para la recta que pasa por $(2,0)$ $(1,1)$

Ecuación Normal $Ax+By+C=0$

Primero saquemos una paramétrica

$\vec{v} = a + t\vec{ab}$

$\vec{ab} = (1,1) - (2,0) = (-1,1)$

$\vec{r} = \{(2,0) + t(-1,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Descripción normal

$x = 2, -t$

$y = 0, t$

$(2,0), (-1,1)$

Sacamos compadre

$(-1,1)^{\perp} = (1,1)$

$1x + 1y + C = 0$

$1(2) + 1(0) + C = 0$

$2 + 0 + C = 0$

$C = -2$ $\Rightarrow x + y = -2$ #