Cone

Definições

Cone:

- $\dot{C}_b$ – Centro da base do cone
- $\vec{d}_c$ – Direção do eixo do cone
- h – Altura do cone
- r – Raio da base do cone
- $\dot{V}$ – Vértice do cone: $\dot{V} = \dot{C}_b + h\vec{d}_c$

Matrizes:

- $\mathbf{Q}$ – Matriz de projeção sobre ao eixo $\vec{d}_c : \mathbf{Q} = \vec{d}_c^{\,t}\vec{d}_c$
- $\mathbf{M}$ – Matriz de projeção ortogonal ao eixo $\vec{d}_c : \mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{Q}$

Raio:

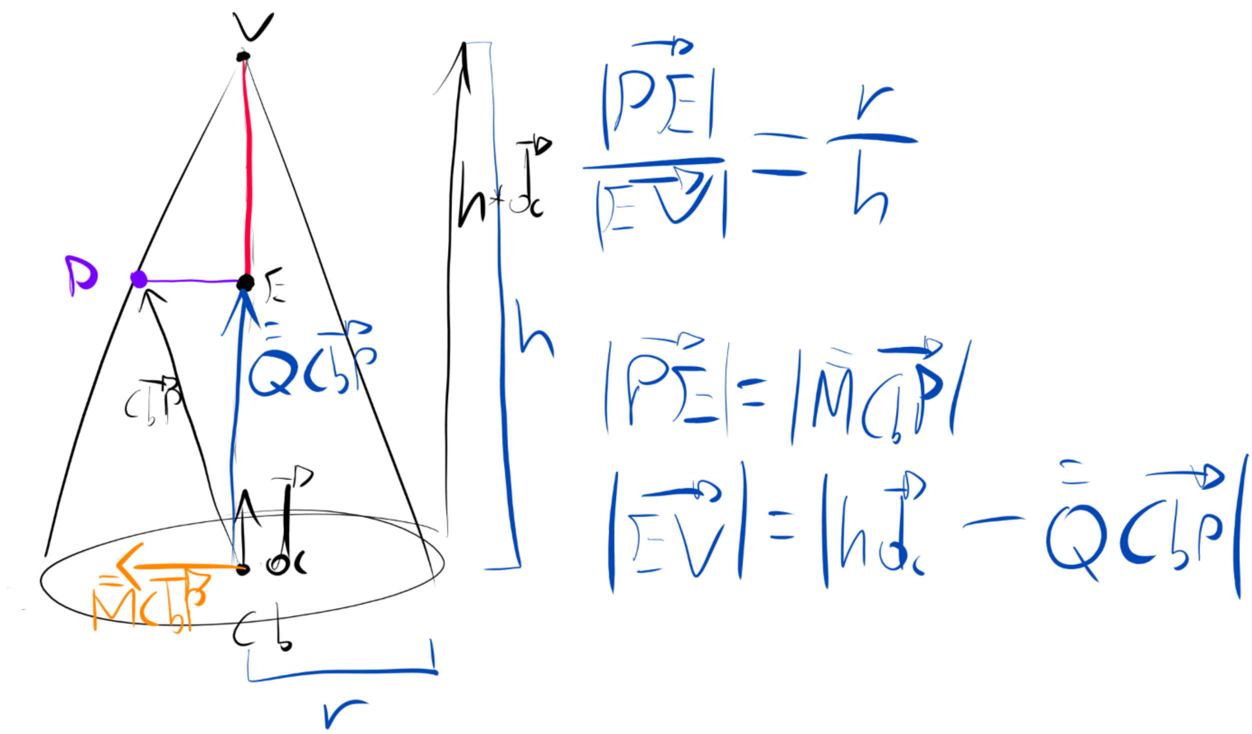
- $R(t) = \dot{P}_0 + \vec{d}_r t$ – The trustworthy equação do raio
- $\dot{P} = R(t)$ – Um ponto de colisão hipotético do raio com as superfícies calculadas

Superfície cônica

Desenvolvimento

Para um ponto P na superfície de um cone de base C_b, altura h, e raio r, temos por semelhança de triângulos que:

$$\frac{|M\vec{C_bP}|}{|h\vec{d}_c - Q\vec{C_bP}|} = \frac{r}{h}$$



Como $\vec{C_bP} = R(t) - C_b = P_0 + t\vec{d_r} - C_b = (P_0 - C_b) + t\vec{d_r}$
Definimos $\vec{w} = (P_0 - C_b)$, e assim:

$$\frac{|M\vec{w} + tM\vec{d_r}|}{|h\vec{d_c} - (Q\vec{w} + tQ\vec{d_r})|} = \frac{r}{h}$$

$$\implies \left(\frac{|M\vec{w} + tM\vec{d_r}|}{|h\vec{d_c} - (Q\vec{w} + tQ\vec{d_r})|}\right)^2 = \left(\frac{r}{h}\right)^2$$

$$\implies h^2(\mathbf{M}\vec{w} + t\mathbf{M}\vec{d_r}) \cdot (\mathbf{M}\vec{w} + t\mathbf{M}\vec{d_r}) = r^2(h\vec{d_c} - (\mathbf{Q}\vec{w} + t\mathbf{Q}\vec{d_r})) \cdot (h\vec{d_c} - (\mathbf{Q}\vec{w} + t\mathbf{Q}\vec{d_r}))$$

Lado esquerdo:

$$h^2(\mathbf{M}\vec{w} + t\mathbf{M}\vec{d_r}) \cdot (\mathbf{M}\vec{w} + t\mathbf{M}\vec{d_r})$$

$$\implies {\color{red} t^2h^2\mathbf{M}\vec{d_r} \cdot \mathbf{M}\vec{d_r}} + {\color{green} t2h^2\mathbf{M}\vec{d_r} \cdot \mathbf{M}\vec{w}} + {\color{blue} h^2\mathbf{M}\vec{w} \cdot \mathbf{M}\vec{w}}$$

Coeficientes da equação do segundo grau:

$$a = {\color{red} h^2\mathbf{M}\vec{d_r} \cdot \mathbf{M}\vec{d_r}}, \quad b = {\color{green} 2h^2\mathbf{M}\vec{d_r} \cdot \mathbf{M}\vec{w}}, \quad c = {\color{blue} h^2\mathbf{M}\vec{w} \cdot \mathbf{M}\vec{w}}$$

Lado direito:

$$r^2((\mathbf{Q}\vec{w} + t\mathbf{Q}\vec{d_r}) - h\vec{d_c}) \cdot ((\mathbf{Q}\vec{w} + t\mathbf{Q}\vec{d_r}) - h\vec{d_c})$$

Definindo $A = (\mathbf{Q}\vec{w} + t\mathbf{Q}\vec{d_r})$, temos:

$$r^2(A - h\vec{d_c}) \cdot (A - h\vec{d_c})$$

$$\implies r^2 A \cdot A - 2r^2 hA \cdot \vec{d_c} + r^2 h^2 \vec{d_c} \cdot \vec{d_c}$$

Expandindo:

$$r^2(\mathbf{Q}\vec{w} + t\mathbf{Q}\vec{d_r}) \cdot (\mathbf{Q}\vec{w} + t\mathbf{Q}\vec{d_r}) - 2r^2 h(\mathbf{Q}\vec{w} + t\mathbf{Q}\vec{d_r}) \cdot \vec{d_c} + r^2 h^2 \vec{d_c} \cdot \vec{d_c}$$

$$r^2 t^2 \mathbf{Q}\vec{d_r} \cdot \mathbf{Q}\vec{d_r} + t2r^2 \mathbf{Q}\vec{d_r} \cdot \mathbf{Q}\vec{w} + r^2 \mathbf{Q}\vec{w} \cdot \mathbf{Q}\vec{w} - t2r^2 h\mathbf{Q}\vec{d_r} \cdot \vec{d_c} - 2r^2 h\mathbf{Q}\vec{w} \cdot \vec{d_c} + r^2 h^2 \vec{d_c} \cdot \vec{d_c}$$

Passando pro lado esquerdo, os coeficientes serão invertidos

$$a = -r^2 \mathbf{Q}\vec{d_r} \cdot \mathbf{Q}\vec{d_r}, \quad b = 2r^2 \mathbf{Q}\vec{d_r} \cdot (h\vec{d_c} - \mathbf{Q}\vec{w}), \quad c = r^2(-\mathbf{Q}\vec{w} \cdot \mathbf{Q}\vec{w} + 2h\mathbf{Q}\vec{w} \cdot \vec{d_c} - h^2 \vec{d_c} \cdot \vec{d_c})$$

Expandindo C:

$$c = -r^2(\mathbf{Q}\vec{w} \cdot \mathbf{Q}\vec{w} - 2h\mathbf{Q}\vec{w} \cdot \vec{d_c} + h^2 \vec{d_c}\vec{d_c})$$

$$\implies -r^2(\mathbf{Q}\vec{w} - h\vec{d_c}) \cdot (\mathbf{Q}\vec{w} - h\vec{d_c})$$

Coeficientes finais:

$$a = h^2 \mathbf{M}\vec{d_r} \cdot \mathbf{M}\vec{d_r} - r^2 \mathbf{Q}\vec{d_r} \cdot \mathbf{Q}\vec{d_r}$$

$$b = 2(h^2 \mathbf{M}\vec{d_r} \cdot \mathbf{M}\vec{w} + r^2 \mathbf{Q}\vec{d_r} \cdot (h\vec{d_c} - \mathbf{Q}\vec{w}))$$

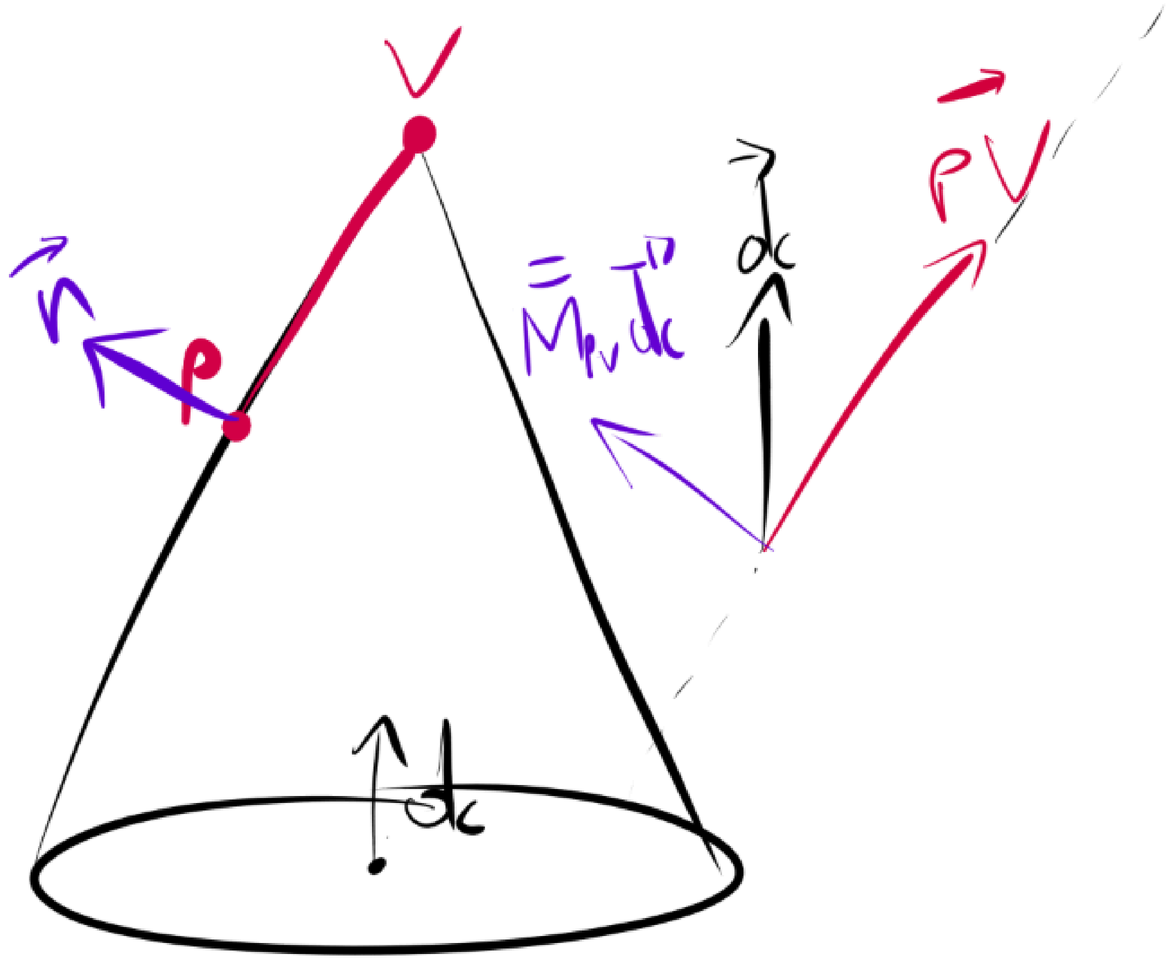
$$c = h^2 \mathbf{M}\vec{w} \cdot \mathbf{M}\vec{w} - r^2(\mathbf{Q}\vec{w} - h\vec{d_c}) \cdot (\mathbf{Q}\vec{w} - h\vec{d_c})$$

Daí é ver se $\Delta \geq 0$, pegar a raíz (t) não-negativa mais próxima ($t < 0$ significa que o ponto de colisão está atrás do observador), e checar se o ponto de colisão $\dot{P} = r(t)$ está entre a base e o topo do cone.

$$0 \leq \vec{C_b P} \cdot \vec{d_c} \leq h$$

Vetor normal:

Dado o ponto $\dot{P}$ que obtemos com $R(t)$, é fácil ver que a normal vai ser um vetor ortogonal a $\vec{PV}$
Pra pegar esse vetor a gente pode só fazer a matriz de projeção ortogonal de $\vec{PV}$ e projetar $\vec{d_c}$ com ela.



Definindo $\vec{u}$ como o vetor $\vec{PV}$ normalizado:

$$\vec{u} = \frac{\vec{PV}}{|\vec{PV}|}$$

$$\mathbf{M}_{\vec{PV}} = \mathbf{I} - u^t u$$

$$\vec{n} = \mathbf{M}\vec{d}_c$$

Base do cone

Desenvolvimento

Podemos usar a técnica de teste de colisão com um plano:

- Ponto conhecido do plano: $\dot{C}_b$
- Normal do plano: $\vec{n_{base}} - \vec{d}_c$
- $\vec{w} = \dot{P}_0 - \dot{C}_b$

$$t = -\frac{\vec{w} \cdot -\vec{d}_c}{-\vec{d}_c \cdot \vec{d}_r}$$

(Não esquecer de checar se $\vec{n} \cdot \vec{d_r} \neq 0$ e se $t > 0$)
($t < 0$ significa que o ponto de colisão está atrás do observador)

Ademais, devemos checar se a distância do ponto $\dot{P}$ dado por $R(t)$ até o centro da base é menor ou igual ao raio r da base do cone. O ponto pertecer ao *plano da base do cone* não significa que ele pertence à **base do cone em si**.

$$|\dot{P} - \dot{C_b}| \leq r$$

(não confundir $\dot{P}$ com $\dot{P_0}$).

Por fim, checar qual a colisão mais próxima (a da superfície ou a da base do cone), etc.