

Listado 3: Sistemas de ecuaciones
ÁLGEBRA LINEAL

1. Escriba los siguientes sistemas de ecuaciones en forma matricial y resuélvalos utilizando el método de eliminación de Gauss.

$$a) \begin{cases} -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2 \end{cases}$$

2. Considere A y \vec{b} , matrices y vector de coeficiente reales, respectivamente, definidos por

$$A = \begin{pmatrix} -a & 2 & 0 & 1 \\ a & -3 & 2 & -1 \\ a & -2 & -1 & 1 \\ 2a & -2 & -4 & b \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ a + b + 2 \end{pmatrix}$$

- a) Determine los valores de a y b para los cuales el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, con $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, sea compatible determinado, compatible indeterminado, o indeterminado.
b) Para $a = 1$ y $b = -1$, encuentre las soluciones del sistema.

3. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 9a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Encuentre el o los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que el sistema sea compatible determinado. En cada uno de los casos, encuentre la solución de este sistema.

4. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considere el sistema de ecuaciones de incógnitas $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x + y + \alpha z &= 0 \\ x + y + \beta z &= 0 \\ \alpha x + \beta y + z &= 0 \end{aligned}$$

- a) Determine α y β tales que la solución de este sistema de ecuaciones sea única. ¿Cuál es dicha solución?
b) Determine α y β tales que el sistema tenga solución no trivial, y su respectivo conjunto solución.

5. Encuentre los valores de $\alpha, \beta, k \in \mathbb{R}$ para que el sistema de ecuaciones

$$x + y + kz = \alpha$$

$$z + ky + z = \beta$$

$$kx + y + z = \alpha$$

a) Tenga solución única

b) Sea incompatible

6. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considere el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{ccccccc} x & +y & -z & +w & = & 2 \\ 2x & +3y & +\alpha z & -2w & = & 1 \\ x & +\alpha y & +3z & & = & 2 \\ 2x & +2y & -2z & -\beta w & = & 0 \end{array}$$

$$$$

a) Determine el o los valores de α y β tales que este sistema de ecuaciones sea compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible

b) Para $\alpha = 1$ y $\beta = 2$, determine el conjunto solución.

7. Considere los puntos $A = (-1, 0, 1)$, $B = (0, 1, 2)$ y $C = (1, 1, 1)$, y los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ y $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, donde $O = (0, 0, 0)$.

a) Calcule $d(A, B)$, $d(A, C)$, $d(B, C)$, $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$, $\|\vec{c}\|$, $(2\vec{a}) \cdot \vec{b}$, $(-\vec{b}) \times \vec{c}$ y $\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$.

b) Determine los ángulos entre \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} .

c) Describa el conjunto de los vectores $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tales que

1) \vec{x} es paralelo a \vec{c} y $\|\vec{x}\| = 1$.

2) \vec{x} es perpendicular a \vec{a} y \vec{c} .

3) $\|\vec{x} - \vec{a}\| = \|\vec{x} - \vec{b}\|$.

8. Determine un vector $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ tal que

a) $\|\vec{r}\| = 4$, el ángulo entre \vec{r} e \hat{i} es de $\frac{\pi}{4}$ y el ángulo entre \vec{r} y \hat{j} es de $\frac{\pi}{3}$.

b) \vec{r} es perpendicular a $[1, 2, 2]$, el ángulo entre \vec{r} e \hat{i} es de $\frac{\pi}{6}$ y el ángulo entre \vec{r} y \hat{k} es de π .

c) \vec{r} es paralelo a $[0, -1, 2]$, el ángulo entre \vec{r} e \hat{i} es de $\frac{\pi}{2}$ y el ángulo entre \vec{r} y \hat{k} es de π .