Gráfico de polinomios cuadráticos (parábolas)

Ramiro Rebolledo

7 de enero de 2024

1. Objetivos de la unidad

- Dibujar gráficos de polinomios cuadráticos (parábolas) en el plano cartesiano.
- Calcular y comprender gráficamente las intersecciones del polinomio cuadrático con el eje X (sus raíces o ceros).
- Determinar gráficamente los intervalos donde el polinomio cuadrático es positivo y los intervalos donde es negativo.
- Decidir a partir de la ecuación cuadrática cuando su gráfica es cóncava hacia arriba y cuando es cóncaba hacia abajo.

2. Definición de polinomio cuadrático

Un polinomio cuadrático se define como

$$p(x) = ax^2 + bx + c,$$

donde a, b, y c son constantes con $a \neq 0$. Cuando $a = 0$, la ecuación corresponde a un polinomio lineal.

- a, b y c se denominan **coeficientes** del polinomio.
- Los coeficientes del polinomio son **independientes** de la variable.
- a se denomina **coeficiente principal**, y determina el **grado** del polinomio.
- c se denomina **término libre**.

Observación: Cuando $a = 0$, la ecuación corresponde a un polinomio lineal (polinomio de primer grado). Por este motivo, excluimos este caso del análisis.

Ejemplos: Ejemplos de polinomios de segundo grado.

- $p(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b son constantes y $a \neq 0$.
- $p(x) = 2x^2 + x + 1$

- $p(x) = 1 + x + 2x^2$
- $f(x) = 0{,}7x^2 - 12{,}3x + \dfrac{3}{2}$
- $p(w) = -3w^2$
- $p(x) = -x - 3x^2$
- $p(t) = 2t^2 + t + 1$
- $p(t) = 3 + 5t - 7t^2$
- $y(t) = y_0 + v_{0y}t + \dfrac{1}{2}gt^2$, donde y_0, v_{0y} y g son constantes.
- $p(x) = x^2 + \dfrac{2}{x} + 1$ **no es un polinomio**.
- $p(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 1}$ **no es un polinomio**.

3. Gráfico de polinomios cuadráticos

Analizaremos el gráfico del polinomio

$$p(x) = ax^2 + bx + c\,,$$

donde $a \neq 0$.

Sabemos que

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

lo que gráficamente quiere decir que, cuando $b^2 - 4ac \geq 0$, el polinomio interseca al eje X en los puntos con abcisa

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3.1. Ceros o raíces de polinomios cuadráticos

Las raíces de un polinomio cuadrático $p(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, son

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

3.2. Concavidad

La concavidad de la gráfica de un polinomio cuadrático depende del signo de a. Si $a > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba, y si $a < 0$, la parábola es cóncava hacia abajo. Más información, puede revisar el libro [1].

Referencias

[1] Dennis G Zill et al. Precálculo: con avances de cálculo. 2008.