UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPARTAMENTO DE AGROINDUSTRIAS

Listado 3: Sistemas de ecuaciones
ÁLGEBRA LINEAL

1. Escriba los siguientes sistemas de ecuaciones en forma matricial y resuélvalos utilizando el método de eliminación de Gauss.

$a)$ $$\left\{\begin{array}{rcl} -x_1 + x_3 + 2x_4 & = & 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 & = & -1 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 & = & 2 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

$b)$ COMPLETAR

2. Considere A y $\vec{b}$, matrices y vector de coeficiente reales, respectivamente, definidos por

$$A = \begin{pmatrix} -a & 2 & 0 & 1 \\ a & -3 & 2 & -1 \\ a & -2 & -1 & 1 \\ 2a & -2 & -4 & b \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ a+b+2 \end{pmatrix}$$

$a)$ Determine los valores de a yb para los cuales el sistema $A\vec{x} = b$, con $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, sea compatible determinado, compatible indeterminado, o indeterminado.

$b)$ Para $a = 1$ y $b = -1$, encuentre las soluciones del sistema.

3. Considere el sistema de ecuaciones

COMPLETAR

Encuentre el o los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que el sistema sea compatible determinado. En cada uno de los casos, encuentre la solución de este sistema.

4. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considere el sistema de ecuaciones de incógnitas $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x + y + \alpha z &= 0 \\ x + y + \beta z &= 0 \\ \alpha x + \beta y + z &= 0 \end{aligned}$$

$a)$ Determine α y β tales que la solución de este sistema de ecuaciones sea única. ¿Cuál es dicha solución?

$b)$ Determine α y β tales que el sistema tenga solución no trivial, y su respectivo conjunto solución.

5. Encuentre los valores de $\alpha, \beta, k \in \mathbb{R}$ para que el sistema de ecuaciones

   COMPLETAR

   a) Tenga solución única
   b) Sea incompatible

6. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considere el siguiente sistema de ecuaciones.

   COMPLETAR

   a) Determine el o los valores de α y β tales que este sistema de ecuaciones sea compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible
   b) Para $\alpha = 1$ y $\beta = 2$, determine el conjunto solución.

7. Considere los puntos $A = (-1, 0, 1)$, $B = (0, 1, 2)$ y $C = (1, 1, 1)$, y los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OA}$ y $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, donde $O = (0, 0, 0)$.

   a) Calcule $d(A, B)$, $d(A, C)$, $d(B, C)$, $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$, $\|\vec{c}\|$, $(2\vec{a}) \cdot \vec{b}$, $\left(-\vec{b}\right) \times \vec{c}$ y $\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$.
   b) Determine los ángulos entre $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.
   c) Describa el conjunto de los vectores $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tales que
      1) $\vec{x}$ es paralelo a $\vec{c}$ y $\|\vec{x}\| = 1$.
      2) $\vec{x}$ es perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{c}$.
      3) $\|\vec{x} - \vec{a}\| = \|\vec{x} - \vec{b}\|$.

8. Determine un vector $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ tal que

   a) $\|\vec{r}\| = 4$, el ángulo entre $\vec{r}$ e $\hat{\imath}$ es de $\dfrac{\pi}{4}$ y el ángulo entre $\vec{r}$ y $\hat{\jmath}$ es de $\dfrac{\pi}{3}$.
   b) $\vec{r}$ es perpendicular a $[1, 2, 2]$, el ángulo entre $\vec{r}$ e $\hat{\imath}$ es de $\dfrac{\pi}{6}$ y el ángulo entre $\vec{r}$ y $\hat{k}$ es de π .
   c) $\vec{r}$ es paralelo a $[0, -1, 2]$, el ángulo entre $\vec{r}$ e $\hat{\imath}$ es de $\dfrac{\pi}{2}$ y el ángulo entre $\vec{r}$ y $\hat{k}$ es de π .