UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPARTAMENTO DE AGROINDUSTRIAS

Listado 5: Funciones exponencial y logaritmo
Álgebra y Trigonometría

1. Escribir la expresión indicada en una forma logarítmica equivalente:

   a) $9^{-1/2} = 1/3$
   b) $8^{-1/3} = 1/2$
   c) $4^0 = 1$
   d) $\left(2^3\right)^{-2} = 1/64$
   e) $5^y = x$
   f) $\sqrt[x]{2} = 3$
   g) $e^{2u} = 3v$
   h) $y = e^x$

2. Escribir la expresión indicada en una forma exponencial equivalente:

   a) $\log_2 8 = 3$
   b) $\log_4 1/2 = -1/2$
   c) $\log_9 1 = 0$
   d) $\log_t u = -s$
   e) $x \log_{10} 5 = \log_{10} 7$
   f) $\ln(2z) = 3w$

3. Sin utilizar calculadora, encontrar el valor de los siguientes logaritmos:

   a) $\log_{10} 0{,}00001$
   b) $\log_2 1/64$
   c) $\log_5 \sqrt[3]{25}$
   d) $\log_{\sqrt{3}} 9$
   e) $\log_8 1/16$
   f) $\log_{\sqrt[3]{6}} 216$

4. En cada caso, despejar la incógnita:

   a) $\log_a 64 = 3$
   b) $\log_{10} n = -3$
   c) $\log_7 1/x = -3$
   d) $\log_6 36^c = 18$
   e) $3 \log_{27} z = 1$
   f) $\log_b 8 = -1$
   g) $\log_2 8^y = 6$
   h) $\log_2 x^{-3} = 3$

5. Para cada una de las siguientes expresiones, simplificar y reducir a un solo logaritmo:

   a) $\log_6 3 + \log_6 2$
   b) $\dfrac{1}{3}\log_3 64 - \dfrac{1}{2}\log_3 25 + 20\log_3 1$
   c) $\ln(x^4 - 1) - \ln(x^2 + 1)$
   d) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) - 3\ln\left(a^2\right) + \ln\left(b^{-2}\right)$

6. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales con $x \in \mathbb{R}$:

   a) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2x}\left(\dfrac{8}{3}\right)^{2x} = 2^{x-3}$
   b) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{3x+1} 2^{x-4} = \dfrac{1}{8}$
   c) $3^{x^2-5} = 81$
   d) $4^x = \sqrt{32}$
   e) $10^{2x-1} - 10^x = 0$
   f) $2 \cdot 3^{x-1} + 3^{2x} = \dfrac{1}{3}$
   g) $2 \cdot 9^x = 3^x + 1$
   h) $9^x - 2 \cdot 3^x = 8$
   i) $\dfrac{(25)^{x+1} + 1}{5^x} = 10$
   j) $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$
   k) $4^x - 2^x = 2$
   l) $4 \cdot 5^{2x} - 4 \cdot 5^x + 1 = 0$
   m) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$
   n) $2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4} + 2^{x+5} + 2^{x+6} = 31$

7. Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas con $x \in \mathbb{R}$:

   a) $\log_{10} x^5 + \log_{10}^2 x + 6 = 0$
   b) $\log_2 x\,(\log_2 x + 1) = 2$
   c) $\log_{10} x + \log_{10}(x+3) = 1$
   d) $\log_{10}(7x-9)^2 + \log_{10}(3x-4)^2 = 2$
   e) $\ln|x+1| + \ln|x+3| = \ln 8$
   f) $\sqrt[x]{2} = 3$
   g) $\log_x 10 - \log_{10} x^2 = 1$
   h) $\log_2\left(9^{x-1}+7\right) = 2 + \log_2\left(3^{x-1}+1\right)$
   i) $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x-2} \leq \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2x+8}$
   j) $1 < \sqrt[x-1]{32^{2x+5}}$
   k) $e^{3x} + 2e^{2x} - 8e^x < 0$
   l) $\log_3(x^2-3x-4) < 1$
   m) $\log_2(\log_{\frac{1}{2}}(x+1)) > 1$

8. Determinar el dominio de las siguientes funciones reales:

   a) $f(x) = 4^x + 2$
   b) $f(x) = (1/2)^x$
   c) $f(x) = 3^{2-x}$
   d) $f(x) = \ln(x^2-1)$
   e) $f(x) = \ln(8-x^3)$
   f) $f(x) = \sqrt{\log_a(x+1)}$, $0 < a < 1$
   g) $f(x) = \ln(x^2-9)$
   h) $f(x) = \ln(||x|-1|-1)$
   i) $f(x) = e^{\sqrt{\log_3(x^2-4)}}$
   j) $f(x) = e^{\ln x}$
   k) $f(x) = \ln(e^x)$

9. Para las funciones del problema anterior, decidir si existe la función inversa, en caso negativo, hacer las restricciones que sean necesarias de modo de ella exista y definir dicha inversa; además, para las tres primeras, esbozar los gráficos de f y f^{-1}.

10. Se dice que una variable A posee un crecimiento exponencial, si $A(t) = A_0 e^{k\,t}$, donde A_0 es el valor inicial y $k > 0$ es una constante. Si un cierto tipo de bacteria tiene un crecimiento exponencial e inicialmente hay 100 bacterias presentes y cinco horas más tarde hay 300 bacterias presentes. ¿Cuántas habrá diez horas después del inicio? **R:** 900 bacterias

11. La Ley de enfriamiento de Newton establece que la temperatura T de un cuerpo enfriándose está dada por $T(t) = Ce^{-kt} + T^*$, donde T^* es la temperatura del medio que lo rodea, con C y k constantes. Usar esta ley para resolver el siguiente problema:

    Se ha cometido un asesinato. El cadáver fue encontrado a las 13:00 horas, momento en que se le tomó la temperatura, siendo de $32°C$. Dos horas más tarde la temperatura fue nuevamente registrada, siendo de $29°C$. La temperatura del lugar del lugar donde se encontraba el cuerpo era constante y de $28°C$. Si la temperatura de un cuerpo en *estado normal* es de $36°C$, ¿a qué hora se cometió el asesinato?

    a) Considerando que $T(0) = 32$, determinar el valor de la constante C.
    b) Con el valor de C antes obtenido y considerando que $T(2) = 29$, determinar el valor de la constante k.
    c) Con los valores de C y k ya conocidos, resolver la ecuación $T(t_a) = 36$.
    d) A partir del valor de t_a, determinar la hora del asesinato. **R:** A las 12:00 horas.

Ramiro Rebolledo Cormack
Última edición de este documento: 29 de septiembre de 2022