Углублённый уровень

АЛГЕБРА

и начала математического анализа

А. Г. Мерзляк
Д. А. Номировский
В. М. Поляков

10

МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

вентана граф

российский учебник

А. Г. Мерзляк
Д. А. Номировский
В. М. Поляков

Математика:
алгебра и начала
математического анализа,
геометрия

АЛГЕБРА
и начала математического анализа

10 класс

Углублённый уровень

Учебное пособие

2-е издание, стереотипное

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2019

От авторов

Дорогие десятиклассники!

Вы начинаете изучать новый школьный предмет — **алгебру и начала анализа**.

Этот предмет необычайно важен. Наверное, нет сегодня такой области науки, в которой не применялись бы достижения этого раздела математики. Физики и химики, астрономы и биологи, географы и экономисты, даже языковеды и историки используют «математический инструмент».

Алгебра и начала анализа — полезный и очень интересный предмет, который развивает аналитическое и логическое мышление, исследовательские навыки, математическую культуру, сообразительность.

Мы надеемся, что вы не разочаруетесь, избрав нелёгкий путь — изучать математику по углублённой программе. Это не просто. Нужно быть настойчивым и увлечённым, внимательным и аккуратным, а самое главное — не быть безразличным к математике и любить эту красивую науку. Надеемся, что вы с интересом будете приобретать новые знания и вам поможет учебник, который вы держите в руках. Ознакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Учебник разделён на пять глав, каждая из которых состоит из параграфов. В параграфах изложен теоретический материал. Особое внимание обращайте на текст, выделенный **жирным** шрифтом. Уделите внимание словам, напечатанным *курсивом*.

В этой книге вы ознакомитесь с целым рядом важных теорем. К некоторым из них приведены полные доказательства. В тех же случаях, когда доказательства выходят за пределы рассматриваемого курса, мы ограничивались только формулировками теорем.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи (особенно те, которые обозначены ).

Если после выполнения домашних заданий остаётся свободное время и вы хотите узнать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный там, непрост. Но тем интереснее испытать свои силы!

Для тех, кто в 7—9 классах изучал курс алгебры по углублённой программе, некоторые темы этого учебника не являются новыми. При необходимости можно обратиться к ним в качестве повторения ранее изученного материала.

Учебник содержит раздел «Упражнения для повторения курса 10 класса», материал которого в первую очередь предназначен тем, кто только начинает изучать математику углублённо. Он также может быть использован для повторения и систематизации знаний.

Дерзайте! Желаем успеха!

Условные обозначения

◆ Простые задачи

◆◆ Задачи средней сложности

◆◆◆ Сложные задачи

Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

Окончание доказательства теоремы

Окончание решения задачи

5.6. Задания, рекомендованные для устной работы

5.7. Задания, рекомендованные для домашней работы глава

1 Повторение и расширение сведений о множествах, математической логике и функциях

В этой главе вы повторите основные сведения о множествах и функциях, уравнениях и неравенствах; узнаете, какую функцию называют обратимой, какие функции называют взаимно обратными; ознакомитесь с новыми методами построения графиков функций с помощью преобразований.

§ 1 Множества. Операции над множествами

С понятием множества вы ознакомились в курсе алгебры 8 класса. Напомним и уточним основные сведения.

Часто в повседневной жизни объединённые по некоторому признаку объекты мы называем *группой, объединением, коллекцией, совокупностью* и т. п. Для этих слов в математике существует синоним — **множество**.

Приведём несколько примеров множеств:

- множество учеников вашей школы;
- множество городских округов Алтайского края.

Отдельным важнейшим множествам присвоены общепринятые названия и обозначения:

- множество точек плоскости — **геометрическая фигура**;
- множество натуральных чисел, которое обозначают буквой $\boldsymbol{N}$;
- множество целых чисел, которое обозначают буквой $\boldsymbol{Z}$;
- множество рациональных чисел, которое обозначают буквой $\boldsymbol{Q}$;
- множество действительных чисел, которое обозначают буквой $\boldsymbol{R}$.

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут: $a \in A$ (читают: «a принадлежит множеству A»). Если элемент b не принадлежит множеству A, то пишут: $b \notin A$ (читают: «b не принадлежит множеству A»).

Например, $12 \in \boldsymbol{N}$, $-3 \notin \boldsymbol{N}$, $\frac{2}{3} \in \boldsymbol{Q}$, $\frac{2}{3} \notin \boldsymbol{Z}$, $\sqrt{2} \in \boldsymbol{R}$, $a \in \{a, b, c\}$.

Множества часто задают одним из двух следующих способов.

Первый способ состоит в том, что множество задают указанием (перечислением) всех его элементов. Например, если M — множество натуральных чисел, меньших 5, то пишут: $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

Второй способ состоит в том, что указывается **характеристическое свойство элементов множества**, то есть свойство, которым обладают все элементы данного множества, и только они.

Если x — произвольный элемент множества A, которое задано с помощью характеристического свойства его элементов, то пишут: $A = \{x \mid \dots \}$. В данной записи после вертикальной черты указывают условие, которому должен удовлетворять элемент x, чтобы принадлежать множеству A.

Рассмотрим несколько примеров.

- $\{x \mid x = 3n,\ n \in \boldsymbol{N}\}$ — множество натуральных чисел, кратных 3.
- $\{x \mid x(x^2 - 1) = 0\}$ — множество корней уравнения $x(x^2 - 1) = 0$.

Определение

Множество B называют подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A.

Это записывают так: $B \subset A$ или $A \supset B$ (читают: «множество B — подмножество множества A» или «множество A содержит множество B»).

Рассмотрим примеры:

- $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$; $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$; $\boldsymbol{Q} \supset \boldsymbol{N}$; $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$;
- $\{x \mid 2x - 1 = 0\} \subset \left\{x \mid x^2 = \frac{1}{4}\right\}$;
- $\{a\} \subset \{a, b\}$.

Для иллюстрации соотношений между множествами пользуются схемами, называемыми **диаграммами Эйлера**.

На рисунке 1.1 изображены множество A (больший круг) и множество B (меньший круг, полностью содержащийся в большем). Эта схема означает, что $B \subset A$.

На рисунке 1.2 с помощью диаграмм Эйлера показано соотношение между множествами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$.

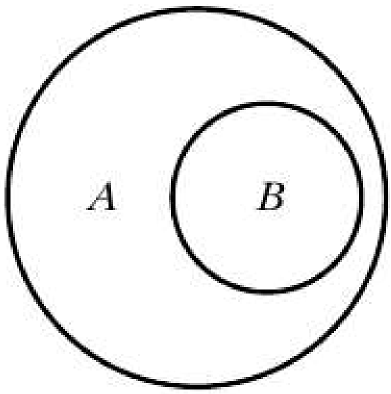

Рис. 1.1

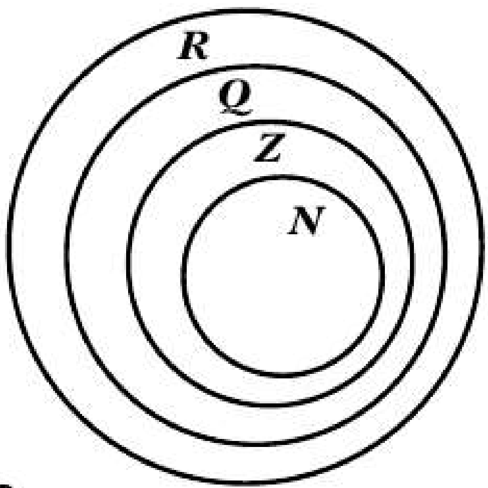

Рис. 1.2

Отметим, что если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$.

Пустое множество считают подмножеством любого множества, то есть для любого множества A справедливо утверждение: $\varnothing \subset A$.

Любое множество A является подмножеством самого себя, то есть $A \subset A$.

Определение

Если $B \subset A$ и $B \neq A$, то множество B называют собственным подмножеством множества A.

Например, множество $\boldsymbol{Z}$ является собственным подмножеством множества $\boldsymbol{Q}$.

Определение

Пересечением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B.

Пересечение множеств A и B обозначают так: $A \cap B$. Из определения следует, что

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Если множества A и B не имеют общих элементов, то их пересечением является пустое множество, то есть $A \cap B = \varnothing$. Также заметим, что $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Из определения пересечения двух множеств следует, что если $A \subset B$, то $A \cap B = A$, в частности, если $B = A$, то $A \cap A = A$.

Например, $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z} \cap \boldsymbol{R} = \boldsymbol{Z}$.

Пересечение множеств удобно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера. На рисунке 1.3 заштрихованная фигура изображает множество $A \cap B$.

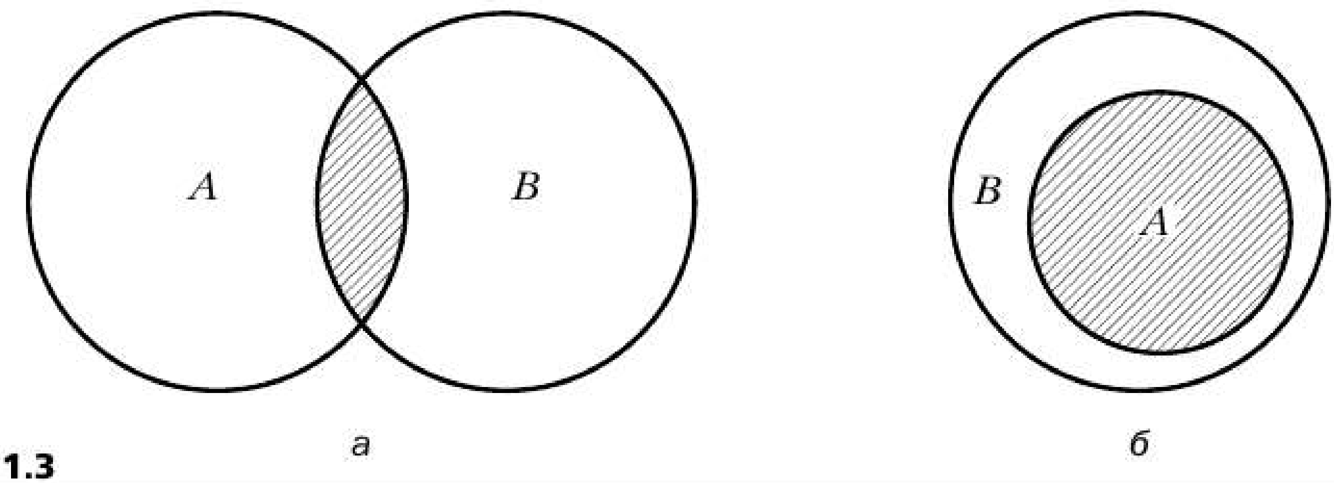

Рис. 1.3

Определение

Объединением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств: или множеству A, или множеству B.

Объединение множеств A и B обозначают так: $A \cup B$. Из определения следует, что

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Заметим, что для любого множества A выполняется равенство $A \cup \varnothing = A$.

Из определения объединения двух множеств следует, что если $A \subset B$, то $A \cup B = B$, в частности, если $B = A$, то $A \cup A = A$.

Объединение множеств удобно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера. На рисунке 1.4 заштрихованная фигура изображает множество $A \cup B$.

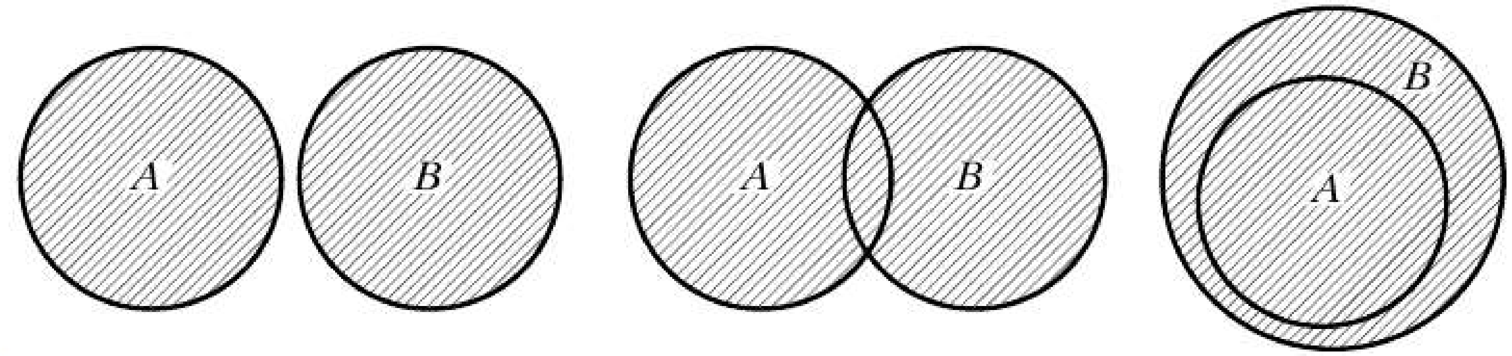

Рис. 1.4

Часто приходится рассматривать пересечение и объединение трёх и более множеств.

Пересечение множеств A, B и C — это множество всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B, и множеству C (рис. 1.5).

Объединение множеств A, B и C — это множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств: или множеству A, или множеству B, или множеству C (рис. 1.6).

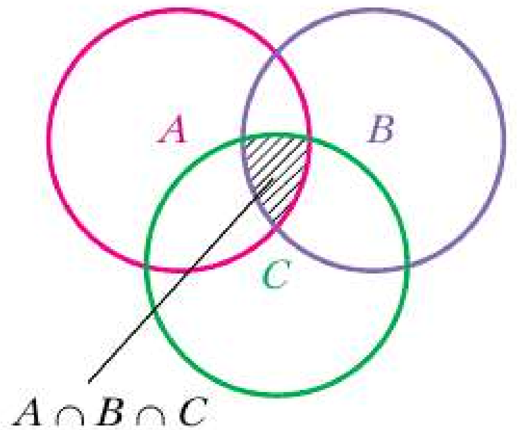

Рис. 1.5

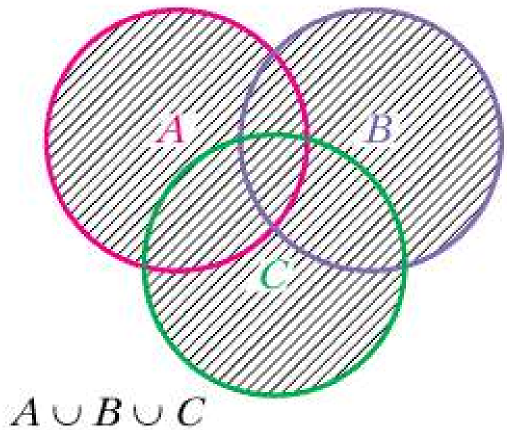

Рис. 1.6

Например, объединение множеств остроугольных, тупоугольных и прямоугольных треугольников — это множество всех треугольников.

Если из множества $\boldsymbol{Z}$ исключить множество $\boldsymbol{N}$, то получим множество целых неположительных чисел. Оно состоит из всех элементов множества $\boldsymbol{Z}$, которые не принадлежат множеству $\boldsymbol{N}$. Говорят, что множество целых неположительных чисел является **разностью** множеств $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{N}$.

Определение

Разностью множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B.

Разность множеств A и B обозначают так: $A \setminus B$. Из определения следует, что

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Заметим, что для любого множества A выполняется равенство $A \setminus \varnothing = A$.

Из определения разности двух множеств следует, что если $A \subset B$, то $A \setminus B = \varnothing$, в частности, если $B = A$, то $A \setminus A = \varnothing$.

Разность множеств удобно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера. На рисунке 1.7 заштрихованная фигура изображает множество $A \setminus B$.

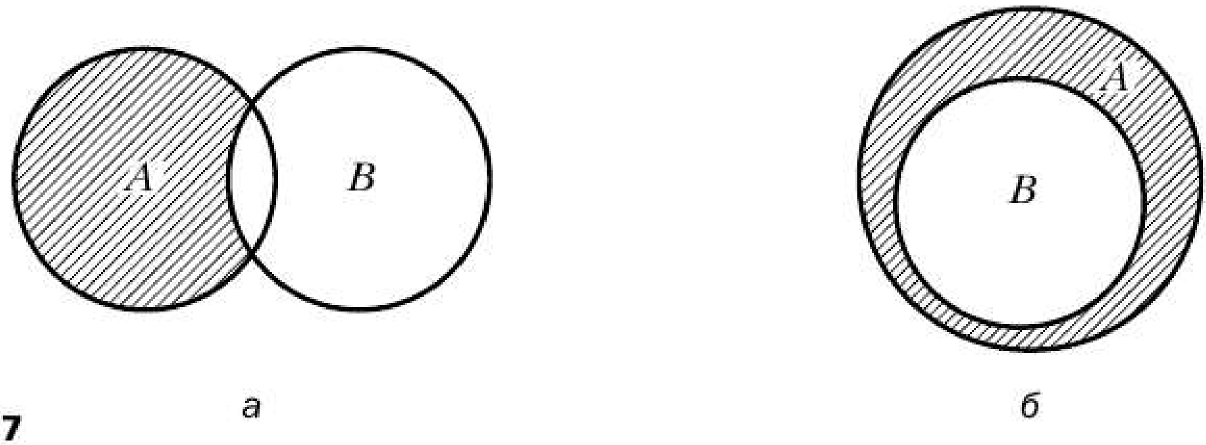

Рис. 1.7

В случае, когда множество B является подмножеством множества A, разность $A \setminus B$ называют **дополнением множества** B в множестве A. На рисунке 1.7, *б* это множество изображено штриховкой. Например, дополнением множества нечётных чисел в множестве натуральных чисел является множество чётных чисел.

?

1. Как обозначают множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел?
2. Какие существуют способы задания множеств?

3. Какое множество называют подмножеством данного множества?
4. Как наглядно иллюстрируют соотношение между множествами?
5. Что называют пересечением двух множеств; объединением двух множеств; разностью двух множеств?

Упражнения

1.1. Пусть $A \neq \varnothing$. Какие два разных подмножества всегда имеет множество A?

1.2. Равны ли множества A и B:
1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 1\}$;
2) $A = \{(0; 1)\}$, $B = \{(1; 0)\}$;
3) $A = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x$ кратно 2 и $3\}$, $B = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x$ кратно $6\}$?

1.3. Равны ли множества A и B:
1) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$;
2) $A = \{x \mid x \leqslant 3, x \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{x \mid x < 4, x \in \boldsymbol{Z}\}$;
3) $A = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x \leqslant 15, x = 19k, k \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, 3 < x < 4\}$?

1.4. Какие из следующих множеств равны пустому множеству:
1) $A = \{x \mid x \neq x\}$;
2) $B = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z}, \frac{1}{2}x - 2 = 0\}$;
3) $C = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z}, |x| < 1\}$?

1.5. Какое из следующих утверждений верно:
1) $\{a\} \in \{a, b\}$;
2) $\{a\} \subset \{a, b\}$;
3) $a \subset \{a, b\}$;
4) $\{a, b\} \in \{a, b\}$?

1.6. Докажите, что если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

1.7. Запишите с помощью символа $\subset$ соотношение между множествами:
$A = \{x \mid x = 2n, n \in \boldsymbol{N}\}$; $C = \{x \mid x = 10n, n \in \boldsymbol{N}\}$;
$B = \{x \mid x = 50n, n \in \boldsymbol{N}\}$; $D = \{x \mid x = 5n, n \in \boldsymbol{N}\}$.

1.8. Какое из множеств, A или B, является подмножеством другого, если:
$A = \{x \mid x = 4n + 2, n \in \boldsymbol{N}\}$; $B = \{x \mid x = 8n + 2, n \in \boldsymbol{N}\}$?

1.9. Даны множества $\{7\}$, $\{11\}$, $\{19\}$, $\{7, 11\}$, $\{7, 19\}$, $\{11, 19\}$, $\varnothing$, являющиеся всеми собственными подмножествами некоторого множества A. Запишите множество A.

1.10. Назовите все подмножества множества $\{1, 2\}$.

1.11. Какое из следующих утверждений верно:
1) $\{a, b\} \cap \{a\} = a$;
2) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a, b\}$;
3) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$;
4) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{b\}$?

1.12. Какое из следующих утверждений верно:
1) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{a, b\}$;
2) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{b\}$;
3) $\{a, b\} \cup \{a\} = \{a\}$;
4) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{\{b\}\}$?

1.13. Найдите пересечение множеств A и B, если:
1) $A = \{x \mid x < 19\}$, $B = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x > 11\}$;
2) $A = \{x \mid x = 4n, n \in \boldsymbol{N}\}$, $B = \{x \mid x = 6n, n \in \boldsymbol{N}\}$;
3) $A = \{(x, y) \mid 2x - y = 1\}$, $B = \{(x, y) \mid x + y = 5\}$.

1.14. Найдите объединение множеств A и B, если:
1) $A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x \mid (x - 1)(x - 2) = 0\}$;
2) $A = \{x \mid 2x + 3 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + 3 = 2\}$;
3) $A = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x < 5\}$, $B = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x < 7\}$.

1.15. Какое из следующих утверждений верно:
1) $\{a, b\} \setminus \{a\} = b$;
2) $\{a, b\} \setminus \{a\} = \{a, b\}$;
3) $\{a, b\} \setminus \{a\} = \{a\}$;
4) $\{a, b\} \setminus \{a\} = \{b\}$?

1.16. Найдите разность множеств A и B, если:
1) $A = \boldsymbol{N}$, $B = \{x \mid x = 2n, n \in \boldsymbol{N}\}$;
2) A — множество однозначных чисел, B — множество простых чисел;
3) A — множество равносторонних треугольников, B — множество равнобедренных треугольников.

1.17. Пусть A — множество цифр десятичной системы счисления, B — множество, состоящее из цифр 1, 3 и 5. Укажите множество, являющееся дополнением множества B до множества A.

1.18. Известно, что для любого множества B множество A является его подмножеством. Найдите множество A.

1.19. Известно, что для любого множества B выполняется равенство $A \cap B = A$. Найдите множество A.

1.20. Известно, что для любого множества B выполняется равенство $A \cup B = B$. Найдите множество A.

1.21. Найдите подмножества A и B множества C такие, что для любого подмножества X множества C выполняется равенство $X \cap A = X \cup B$.

§ 2 Конечные и бесконечные множества

Если множество содержит конечное количество элементов, то его называют **конечным**, а если в нём бесконечно много элементов — то **бесконечным**. Пустое множество считают конечным.

Например, множество учащихся вашего класса — конечное множество, а множество натуральных чисел — бесконечное множество.

Если A — конечное множество, то количество его элементов будем обозначать так: $n(A)$.

Например, если A — это множество дней недели, то $n(A) = 7$; если B — это множество двузначных чисел, то $n(B) = 90$. Понятно, что $n(\varnothing) = 0$.

Пусть A и B — такие конечные множества, что $A \cap B = \varnothing$. Тогда очевидно, что

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B). \tag{1}$$

Если A и B — конечные множества, причём $A \cap B \neq \varnothing$ (рис. 2.1), то в сумму $n(A) + n(B)$ дважды входит количество элементов их пересечения, то есть дважды учитывается число $n(A \cap B)$. Следовательно, в этом случае

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)} \tag{2}$$

Если $A \cap B = \varnothing$, то $n(A \cap B) = 0$. Поэтому формула (2) является обобщением формулы (1).

Выясним, как найти количество элементов множества $A \cup B \cup C$, где A, B и C — конечные множества.

Если $A \cap B \cap C = \varnothing$ (рис. 2.2), то

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - \\ - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A). \tag{3}$$

Если $A \cap B \cap C \neq \varnothing$ (рис. 2.3), то правая часть формулы (3) не учитывает количество общих элементов множеств A, B и C. Следовательно, в этом случае формула принимает вид:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - \\ - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C). \tag{4}$$

Аналогичную формулу можно получить для любого количества множеств. Её называют **«формулой включения-исключения»**.

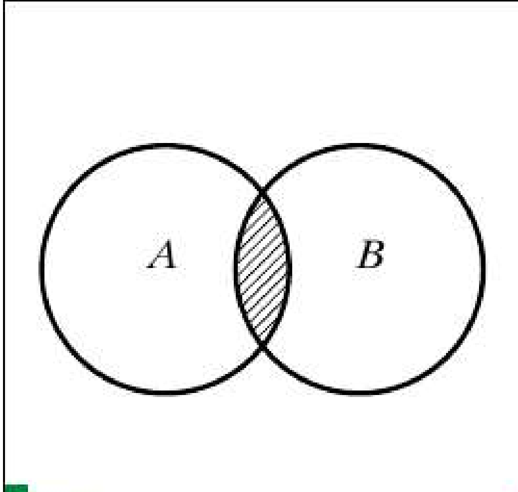

Рис. 2.1

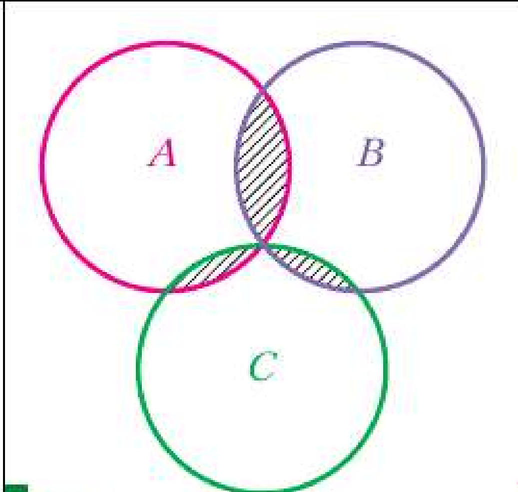

Рис. 2.2

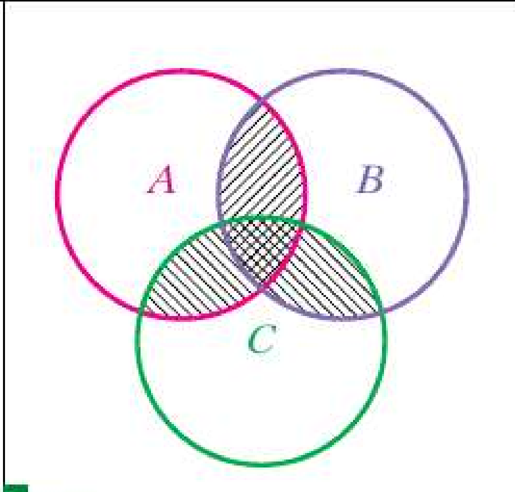

Рис. 2.3

Пример 1. В спортивной школе есть три секции: акробатики, баскетбола, волейбола. Известно, что школу посещают 200 школьников, а каждую из секций — 80 школьников. Докажите, что найдётся не менее 14 школьников, которые посещают одни и те же две секции.

Решение. Обозначим множества школьников, посещающих секции акробатики, баскетбола и волейбола, буквами $А$, $Б$ и $В$ соответственно. Тогда $n(А \cup Б \cup В) = 200$, $n(А) = n(Б) = n(В) = 80$. Подставим указанные значения в формулу (4):

$$200 = 80 + 80 + 80 - n(А \cap Б) -$$
$$- n(Б \cap В) - n(В \cap А) + n(А \cap Б \cap В).$$

Отсюда $n(А \cap Б) + n(Б \cap В) + n(В \cap А) = 40 + n(А \cap Б \cap В) \geqslant 40$.

Если предположить, что каждое из чисел $n(А \cap Б)$, $n(Б \cap В)$, $n(В \cap А)$ не превышает 13, то их сумма не превышает 39. Получили противоречие. ■

Нам нередко приходится сравнивать конечные множества по количеству их элементов.

Например, как узнать, хватит ли в классе стульев для всех учащихся? Совсем не обязательно пересчитывать стулья и учащихся. Достаточно попросить учеников сесть на стулья. И если, например, мест хватило не всем, то это означает, что количество учеников больше, чем количество стульев.

В этом примере, сравнивая количество элементов двух множеств, мы *каждому элементу одного множества поставили в соответствие единственный элемент второго множества*. Воспользуемся этой идеей в следующем примере.

Пример 2. Сравните количество элементов множества A двузначных чисел и множества B трёхзначных чисел, десятичная запись которых оканчивается цифрой 1.

Решение. Поставим в соответствие каждому двузначному числу то трёхзначное число, которое получается из него приписыванием справа цифры 1. Получим:

$$\begin{array}{cccccc} 10, & 11, & 12, & \ldots, & 98, & 99 \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & & \Updownarrow & \Updownarrow \\ 101, & 111, & 121, & \ldots, & 981, & 991 \end{array}$$

Итак, каждому элементу множества A мы поставили в соответствие единственный элемент множества B. Заметим, что при таком соответствии все элементы множества B оказываются «задействованными». Действительно, если в трёхзначном числе вида $\overline{ab1}$ зачеркнуть последнюю цифру, то получим двузначное число $\overline{ab}$.

Установленное соответствие между элементами множеств A и B позволяет сделать вывод, что $n(A) = n(B)$. ■

Определение

Если каждому элементу множества A поставлен в соответствие единственный элемент множества B и при этом любой элемент множества B оказывается соответствующим некоторому единственному элементу множества A, то говорят, что между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие.

В примере 2 каждому двузначному числу было поставлено в соответствие единственное трёхзначное число указанного вида, и наоборот, каждое такое трёхзначное число являлось соответствующим единственному двузначному числу. Следовательно, между рассматриваемыми множествами было установлено взаимно однозначное соответствие.

Заметим, что если в классе все ученики сидят и при этом есть свободные стулья, то между множеством учеников и множеством стульев взаимно однозначного соответствия не установлено.

Если между конечными множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие, то $n(A) = n(B)$. И наоборот, если $n(A) = n(B)$, то между конечными множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие.

Следовательно, между конечными множествами с разным количеством элементов невозможно установить взаимно однозначное соответствие. Это позволяет сформулировать такое правило.

Если $C \subset B$ и $C \neq B$, а между множествами A и C установлено взаимно однозначное соответствие, то $n(A) < n(B)$. Другими словами, *между конечным множеством и его собственным подмножеством невозможно установить взаимно однозначное соответствие.*

Можно ли этот вывод применить к бесконечным множествам?

Пусть M — множество чётных чисел. Множество M является собственным подмножеством множества $\boldsymbol{N}$. Казалось бы, можно считать, что натуральных чисел больше, чем чётных. Однако это не так.

Каждому элементу $n \in \boldsymbol{N}$ поставим в соответствие единственный элемент $2n \in M$:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & & \Updownarrow & \\ 2, & 4, & 6, & 8, & \ldots, & 2n, & \ldots \end{array}$$

При этом каждое чётное число будет соответствовать единственному натуральному числу. Тем самым между множествами $\boldsymbol{N}$ и M установлено взаимно однозначное соответствие, а поэтому нельзя считать, что в