

Tarea 2

Lenguajes de Programación

1. Define las siguientes funciones sobre expresiones del lenguaje WAE:

```
(define-type WAE
  [id (i symbol?)]
  [num (n number?)]
  [add (e1 WAE?) (e2 WAE?)]
  [sub (e1 WAE?) (e2 WAE?)]
  [with (i symbol?) (v WAE) (e WAE?)])
```

- a. La función *libres*: $WAE \rightarrow (\text{listof symbol})$ que dada una expresión de tipo WAE devuelve una lista con los identificadores libres (sin repeticiones) contenidos en ésta.

;; Función de devuelve las variables libres de una expresión

;; libres :: WAE \rightarrow (listof symbol)

(define (libres expr)

(match expr

[(id i) (list i)]

[(num n) '()]

[(add e1 e2) (append (libres e1) (libres e2))]

[(sub e1 e2) (append (libres e1) (libres e2))]

[(with i v e) (cond

[(pertenece? i (libres e)) (remove i (libres e))]

[else (libres e)])])

- b. La función *ligadas*: $WAE \rightarrow (\text{listof symbol})$ que dada una expresión de tipo *WAE* devuelve una lista con identificadores ligados (sin repeticiones) contenidos en ésta.

:: Función de devuelve las variables ligadas de una expresión

:: ligadas :: WAE \rightarrow (listof symbol)

(define (*ligadas* expr)

(match expr

[(id) '()]

[(num) '()]

[(add e1 e2) (append (*ligadas* e1) (*ligadas* e2))]

[(sub e1 e2) (append (*ligadas* e1) (*ligadas* e2))]

[(with i v e) (cond

[(pertenece? i (*libres* e)) (append (list i) (*ligadas* e))]

[else (*ligadas* e)])])

- c. La función *de-ligado*: $WAE \rightarrow (\text{listof symbol})$ que dada una expresión de tipo *WAE* devuelve una lista con identificadores de ligado (sin repeticiones) contenidos en ésta.

:: Función de devuelve las variables de ligado de una expresión

:: de-ligado :: WAE \rightarrow (listof symbol)

(define (*de-ligado* expr)

(match expr

[(id) '()]

[(num) '()]

[(add e1 e2) (append (*de-ligado* e1) (*de-ligado* e2))]

[(sub e1 e2) (append (*de-ligado* e1) (*de-ligado* e2))]

[(with i v e) (append (list i) (*de-ligado* e))])

2. Sea e una expresión del lenguaje WAE. Suponiendo que $(\text{libres } e) = \{\}$, demostrar o dar un contraejemplo de la siguiente desigualdad: $(\text{length } (\text{ligada } e)) \leq (\text{length } (\text{de-ligado } e))$

Demostración: Inducción sobre e

- Caso base:

$$\begin{aligned} (\text{length } (\text{ligada id})) &= (\text{length } []) \\ &= 0 \\ &\leq 0 \\ &= (\text{length } []) \\ &= (\text{length } (\text{de-ligado id})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{length } (\text{ligada num})) &= (\text{length } []) \\ &= 0 \\ &\leq 0 \\ &= (\text{length } []) \\ &= (\text{length } (\text{de-ligado num})) \end{aligned}$$

- Hipótesis de inducción: $(\text{length } (\text{ligada } e)) \leq (\text{length } (\text{de-ligado } e))$

- Paso inductivo:

$$\begin{aligned} (\text{length } (\text{ligada } (\text{add } e1 \ e2))) &= (\text{length } ((\text{ligada } e1) ++ (\text{ligada } e2))) \\ &= (\text{length } (\text{ligada } e1)) + (\text{length } (\text{ligada } e2)) \\ &\leq (\text{length } (\text{de-ligado } e1)) + (\text{length } (\text{de-ligado } e2)) \\ &= (\text{length } ((\text{de-ligado } e1) ++ (\text{de-ligado } e2))) \\ &= (\text{length } (\text{de-ligado } (\text{add } e1 \ e2))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{length } (\text{ligada } (\text{sub } e1 \ e2))) &= (\text{length } ((\text{ligada } e1) ++ (\text{ligada } e2))) \\ &= (\text{length } (\text{ligada } e1)) + (\text{length } (\text{ligada } e2)) \\ &\leq (\text{length } (\text{de-ligado } e1)) + (\text{length } (\text{de-ligado } e2)) \\ &= (\text{length } ((\text{de-ligado } e1) ++ (\text{de-ligado } e2))) \\ &= (\text{length } (\text{de-ligado } (\text{sub } e1 \ e2))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{length } (\text{ligada } (\text{with } i \ v \ e))) &= (\text{length } (\text{ligadas } e)) \\ &\leq (\text{length } (\text{de-ligado } e)) \\ &= (\text{length } (\text{de-ligado } (\text{with } i \ v \ e))) \end{aligned}$$

■

3. Realiza las siguientes sustituciones cuidando el alcance de las variables correspondientes. Indica para cada expresión los identificadores libres, de ligado y ligados.

🔴 variables de ligado 🔵 variables ligadas 🟢 variables libres

- a. $\{\text{with } \{w \{-u\ 8\}\} \{\text{with } \{v\ 5\} \{+ w \{+ y\ x\}\}\} [x := \{+ u\ v\}]\}$
 $\rightarrow \{\text{with } \{\underline{w} \{-\underline{u}\ 8\}\} \{\text{with } \{\underline{v}\ 5\} \{+ \underline{w} \{+ y \{+ \underline{u}\ \underline{v}\}\}\}\}\}$
 $\rightarrow \{\text{with } \{\underline{v}\ 5\} \{+ \{-\underline{u}\ 8\} \{+ \underline{y} \{+ \underline{u}\ \underline{v}\}\}\}\}$
 $\rightarrow \{+ \{-\underline{u}\ 8\} \{+ \underline{y} \{+ \underline{u}\ 5\}\}\}$
- b. $\{\text{with } \{y \{+ x\ v\}\} \{\text{with } \{z\ x\} \{-x \{-y\ z\}\}\} [x := \{-y\ z\}]\}$
 $\rightarrow \{\text{with } \{\underline{y} \{+ \{-y\ z\} v\}\} \{\text{with } \{\underline{z} \{-\underline{y}\ \underline{z}\}\} \{-\{-\underline{y}\ \underline{z}\} \{-\underline{y}\ \underline{z}\}\}\}\}$
 $\rightarrow \{\text{with } \{\underline{z} \{-+ \{-\underline{y}\ \underline{z}\} v\} \underline{z}\}\} \{-\{-+ \{-\underline{y}\ \underline{z}\} v\} \underline{z}\} \{-+ \{-\underline{y}\ \underline{z}\} v\} \underline{z}\}\}$
 $\rightarrow \{-\{-+ \{-\underline{y} \{-+ \{-\underline{y}\ \underline{z}\} v\} \underline{z}\}\} \underline{v}\} \{-+ \{-\underline{y}\ \underline{z}\} v\} \underline{z}\} \{-+ \{-\underline{y} \{-+ \{-\underline{y}\ \underline{z}\} v\} \underline{z}\}\} \underline{v}\} \{-+ \{-\underline{y}\ \underline{z}\} v\} \underline{z}\}\}$
- c. $\{\text{with } \{y \{-z\ 3\}\} \{+ x \{+ y\ 11\}\}\} [x := \{-y \{-z\ 23\}\}]\}$
 $\rightarrow \{\text{with } \{\underline{y} \{-\underline{z}\ 3\}\} \{+ \{-\underline{y} \{-\underline{z}\ 23\}\} \{+ \underline{y}\ 11\}\}\}$
 $\rightarrow \{+ \{-\{-\underline{z}\ 3\} \{-\underline{z}\ 23\}\} \{+ \{-\underline{z}\ 3\} 11\}\}$

4. Convierte las siguientes expresiones a su respectiva versión usando *índices de De Bruijn*.

a.

$\{\text{with } \{a\ 2\}$
 $\{\text{with } \{b\ 3\}$
 $\{\text{with } \{c\ 4\}$
 $\{\text{with } \{d \{+ a \{-b\ c\}\}\}$
 $\{\text{with } \{f \{\text{with } \{a \{+ b\ c\}\} a\}\}$
 $\{+ d \{\text{with } \{b \{-d\ f\}\} \{-b\ c\}\}\}\}\}$

$\{\text{with } 2$
 $\{\text{with } 3$
 $\{\text{with } 4$
 $\{\text{with } \{+ <:2> \{-<:1> <:0>\}\}$
 $\{\text{with } \{\text{with } \{+ <:2> <:1>\} <:0>\}$
 $\{+ <:1> \{\text{with } \{-<:1> <:0>\} \{-<:0> <:2>\}\}\}\}\}$

b.

```
{with {{a 2} {b 3} {c {with {{a 2}} {+ 2 3}}}}
  {with {{d 8}}
    {with {{a c} {b {- 8 d}} {c {+ b b}}}
      {with { { g {with {{z a} {y b} {z d}} 1} } }
        {+ g {- d c}}}}}}
```

```
{with {2 3 {with 2 {+ 2 3}}}
  {with 8
    {with {{<:1 2>} {- 8 <:0 0>} {+ <:0 1> <:0 1>}}
      {with {with {{<:0 0>} {<:0 1>} {<:1 0>}} 1}
        {+ <:0 0> {- <:2 0> <:1 2>}}}}}}
```

5. Dadas las siguientes expresiones representadas mediante índices de De Bruijn, obtén su respectiva versión usando identificadores de variables.

a.

```
{with {+ 2 3}
  {with 17
    {with {+ <:0> <:0>}
      {with {- <:0> {+ <:1> <:2>}}
        {with {with 2 {+ <:0> 3}}
          {- <:3> {+ <:2> {+ <:0> <:1>}}}}}}}}
```

```
{with {a {+ 2 3}}
  {with {b 17}
    {with {c {+ y y}}
      {with {d {- c {+ b a}}}
        {with {f {with {h 2} {+ h 3}}}
          {- y {+ c {+ f d}}}}}}}}
```

b.

$$\begin{aligned} &\{with \{1\ 2\ 3\} \\ &\quad \{with \{4\ 5\ 6\} \\ &\quad\quad \{with \{\{with \{\{+ \langle:0\ 1\rangle \langle:1\ 2\rangle\} \{- \langle:1\ 1\rangle \langle:0\ 0\rangle\}\} 3\} \\ &\quad\quad\quad \{with \{\langle:0\ 0\rangle\} \\ &\quad\quad\quad\quad \{+ \langle:3\ 2\rangle \{+ \langle:2\ 1\rangle \{+ \langle:1\ 0\rangle \langle:0\ 0\rangle\}\}\}\}\}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{with \{\{a\ 1\} \{b\ 2\} \{c\ 3\}\} \\ &\quad \{with \{\{d\ 4\} \{e\ 5\} \{f\ 6\}\} \\ &\quad\quad \{with \{g\ \{with \{\{h\ \{+ e\ c\}\} \{i\ \{- b\ d\}\}\} 3\} \\ &\quad\quad\quad \{with \{j\ g\} \\ &\quad\quad\quad\quad \{+ c\ \{+ e\ \{+ g\ j\}\}\}\}\}\}\end{aligned}$$

6. Determina el valor de la siguiente expresión y responde las siguientes preguntas: ¿Puede haber otro resultado? ¿Por qué? ¿Cuál es el correcto?

$$\begin{aligned} &\{with \{a\ 2\} \\ &\quad \{with \{b\ 3\} \\ &\quad\quad \{with \{c\ \{+ a\ b\}\} \\ &\quad\quad\quad \{with \{a\ -2\} \\ &\quad\quad\quad\quad \{with \{b\ -3\} \\ &\quad\quad\quad\quad\quad \{+ c\ c\}\}\}\}\}\end{aligned}$$

El valor de la expresión anterior es 10. Y no es posible que haya otro valor; podría confundirse con -10, pero no es posible debido a que la variable c debe de tomar los valores de a y b anteriores para que pueda tener un valor definido y no al revés. Así que, 10 es el valor correcto.