

Tarea 2

Lenguajes de Programación

1. Define las siguientes funciones sobre expresiones del lenguaje WAE:

```
(define-type WAE
  [id (i symbol?)]
  [num (n number?)]
  [add (e1 WAE?) (e2 WAE?)]
  [sub (e1 WAE?) (e2 WAE?)]
  [with (i symbol?) (v WAE) (e WAE?)])
```

- a. La función libres: $WAE \rightarrow (\text{listof symbol})$ que dada una expresión de tipo WAE devuelve una lista con los identificadores libres (sin repeticiones) contenidos en ésta.

```
;; Función de devuelve las variables libres de una expresión
;; libres :: WAE → (listof symbol)
(define (libres expr)
  (match expr
    [(id i) (list i)]
    [(num n) '()]
    [(add e1 e2) (append (libres e1) (libres e2))]
    [(sub e1 e2) (append (libres e1) (libres e2))]
    [(with i v e) (cond
      [(pertenece? i (libres e)) (remove i (libres e))]
      [else (libres e)]))])
```

- b. La función ligadas: $WAE \rightarrow (\text{listof symbol})$ que dada una expresión de tipo WAE devuelve una lista con identificadores ligados (sin repeticiones) contenidos en ésta.
-

```
;; Función de devuelve las variables ligadas de una expresión
;; ligadas :: WAE → (listof symbol)
(define (ligadas expr)
  (match expr
    [(id '())]
    [(num '())]
    [(add e1 e2) (append (ligadas e1) (ligadas e2))]
    [(sub e1 e2) (append (ligadas e1) (ligadas e2))]
    [(with i v e) (cond
      [(pertenece? i (libres e)) (append (list i) (ligadas e))]
      [else (ligadas e)])]))
```

- c. La función de-ligado: $WAE \rightarrow (\text{listof symbol})$ que dada una expresión de tipo WAE devuelve una lista con identificadores de ligado (sin repeticiones) contenidos en ésta.
-

```
;; Función de devuelve las variables de ligado de una expresión
;; de-ligado :: WAE → (listof symbol)
(define (de-ligado expr)
  (match expr
    [(id '())]
    [(num '())]
    [(add e1 e2) (append (de-ligado e1) (de-ligado e2))]
    [(sub e1 e2) (append (de-ligado e1) (de-ligado e2))]
    [(with i v e) (append (list i) (de-ligado e))]))
```

2. Sea e una expresión del lenguaje WAE. Suponiendo que $(\text{libres } e) = '()$, demostrar o dar un contraejemplo de la siguiente desigualdad: $(\text{length} (\text{ligada } e)) \leq (\text{length} (\text{de-ligado } e))$

Demostración: Inducción sobre e

- Caso base:

$$\begin{aligned}
 (\text{length} (\text{ligada id})) &= (\text{length} []) \\
 &= 0 \\
 &\leq 0 \\
 &= (\text{length} []) \\
 &= (\text{length} (\text{de-ligado id}))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{length} (\text{ligada num})) &= (\text{length} []) \\
 &= 0 \\
 &\leq 0 \\
 &= (\text{length} []) \\
 &= (\text{length} (\text{de-ligado num}))
 \end{aligned}$$

- Hipótesis de inducción: $(\text{length} (\text{ligada } e)) \leq (\text{length} (\text{de-ligado } e))$
- Paso inductivo:

$$\begin{aligned}
 (\text{length} (\text{ligada} (\text{add } e1 e2))) &= (\text{length} ((\text{ligada } e1) ++ (\text{ligada } e2))) \\
 &= (\text{length} (\text{ligada } e1)) + (\text{length} (\text{ligada } e2)) \\
 &\leq (\text{length} (\text{de-ligado } e1)) + (\text{length} (\text{de-ligado } e2)) \\
 &= (\text{length} ((\text{de-ligado } e1) ++ (\text{de-ligado } e2))) \\
 &= (\text{length} (\text{de-ligado} (\text{add } e1 e2)))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{length} (\text{ligada} (\text{sub } e1 e2))) &= (\text{length} ((\text{ligada } e1) ++ (\text{ligada } e2))) \\
 &= (\text{length} (\text{ligada } e1)) + (\text{length} (\text{ligada } e2)) \\
 &\leq (\text{length} (\text{de-ligado } e1)) + (\text{length} (\text{de-ligado } e2)) \\
 &= (\text{length} ((\text{de-ligado } e1) ++ (\text{de-ligado } e2))) \\
 &= (\text{length} (\text{de-ligado} (\text{sub } e1 e2)))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{length} (\text{ligada} (\text{with } i \vee e))) &= (\text{length} (\text{ligadas } e)) \\
 &\leq (\text{length} (\text{de-ligado } e)) \\
 &= (\text{length} (\text{de-ligado} (\text{with } i \vee e)))
 \end{aligned}$$

■

3. Realiza las siguientes sustituciones cuidando el alcance de las variables correspondientes. Indica para cada expresión los identificadores libres, de ligado y ligados.

🔴 variables de ligado

🔵 variables ligadas

🟢 variables libres

a. $\{ \text{with } \{w \{- u 8\} \} \{ \text{with } \{v 5\} \{ + w \{+ y x\} \} \} [x := \{+ u v\}] \}$

$$\rightarrow \{ \text{with } \{w \{- u 8\} \} \{ \text{with } \{v 5\} \{ + w \{+ y \{+ u v\}\} \} \} \}$$

$$\rightarrow \{ \text{with } \{v 5\} \{ + \{- u 8\} \{ + y \{+ u v\} \} \} \}$$

$$\rightarrow \{ + \{- u 8\} \{ + y \{+ u v\} \} \}$$

b. $\{ \text{with } \{y \{+ x v\} \} \{ \text{with } \{z x\} \{ - x \{ - y z\} \} \} [x := \{ - y z\}] \}$

$$\rightarrow \{ \text{with } \{y \{+ \{- y z\} v\} \} \{ \text{with } \{z \{- y z\} \} \{ - \{- y z\} \{ - y z\} \} \} \}$$

$$\rightarrow \{ \text{with } \{z \{ - \{ + \{- y z\} y z\} z\} \} \{ - \{ - \{ + \{- y z\} v\} z\} \{ - \{ + \{- y z\} y z\} z\} \} \}$$

$$\rightarrow \{ - \{ - \{ + \{- y z\} \{ - \{ + \{- y z\} y z\} z\} y z\} \{ - \{ + \{- y z\} y z\} z\} \{ - \{ + \{- y z\} \{ + \{- y z\} y z\} z\} y z\} \{ - \{ + \{- y z\} y z\} z\} \}$$

$$\rightarrow \{ - \{ - \{ + \{- y z\} \{ - \{ + \{- y z\} y z\} z\} y z\} \{ - \{ + \{- y z\} y z\} z\} \{ - \{ + \{- y z\} \{ + \{- y z\} y z\} z\} y z\} \{ - \{ + \{- y z\} y z\} z\} \}$$

c. $\{ \text{with } \{y \{- z 3\} \} \{ + x \{+ y 11\} \} [x := \{ - y \{- z 23\} \}] \}$

$$\rightarrow \{ \text{with } \{y \{- z 3\} \} \{ + \{- y \{- z 23\} \} \{ + y 11\} \} \}$$

$$\rightarrow \{ + \{ - \{ - z 3\} \{ - z 23\} \} \{ + \{ - z 3\} 11\} \}$$

4. Convierte las siguientes expresiones a su respectiva versión usando *índices de De Bruijn*.

a.

{with {a 2}}

{with {b 3}}

{with {c 4}}

{with {d {+ a {- b c}}}}

{with {f {with {a {+ b c}} a}}}

{+ d {with {b {- d f}} {- b c}}}}

{with 2}

{with 3}

{with 4}

{with {+ <:2> {- <:1> <:0>}}

{with {with {+ <:2> <:1>} <:0>}}

{+ <:1> {with {- <:1> <:0>} {- <:0> <:2>}}}}

b.

```
{with {{a 2} {b 3} {c {with {{a 2}} {+ 2 3}}}}}  
{with {{d 8}}}  
{with {{a c} {b {- 8 d}} {c {+ b b}}}}  
{with {{g {with {{z a} {y b} {z d}} 1}}}}  
{+ g {- d c}}}}
```

```
{with {2 3 {with 2 {+ 2 3}}}}  
{with 8  
{with {{<:1 2>} {- 8 <:0 0>} {+ <:0 1> <:0 1>}}}  
{with {with {{<:0 0>} <:0 1>} <:1 0>}} 1}  
{+ <:0 0> {- <:2 0> <:1 2>}}}}
```

5. Dadas las siguientes expresiones representadas mediante índices de De Bruijn, obtén su respectiva versión usando identificadores de variables.

a.

```
{with {+ 2 3}}  
{with 17  
{with {+ <:0> <:0>}}  
{with {- <:0> {+ <:1> <:2>}}}  
{with {with 2 {+ <:0> 3}}}  
{- <:3> {+ <:2> {+ <:0> <:1>}}}}}}
```

```
{with {a {+ 2 3}}}  
{with {b 17}}  
{with {c {+ y y}}}  
{with {d {- c {+ b a}}}}  
{with {f {with {h 2} {+ h 3}}}}  
{- y {+ c {+ f d}}}}
```

b.

```
{with {1 2 3}
  {with {4 5 6}
    {with {{with {{+ <:0 1> <:1 2>} {- <:1 1> <:0 0>}} 3}}
      {with {<:0 0>}
        {+ <:3 2> {+ <:2 1> {+ <:1 0> <:0 0>}}}}}}}}
```

```
{with {{a 1} {b 2} {c 3}}
  {with {{d 4} {e 5} {f 6}}
    {with {g {with {{h {+ e c}} {i {- b d}}}} 3}}
      {with {j g}
        {+ c {+ e {+ g j}}}}}}}}
```

6. Determina el valor de la siguiente expresión y responde las siguientes preguntas:
¿Puede haber otro resultado? ¿Por qué? ¿Cuál es el correcto?
-

```
{with {a 2}
  {with {b 3}
    {with {c {+ a b}}
      {with {a -2}
        {with {b -3}
          {+ c c}}}}}}}
```

El valor de la expresión anterior es 10. Y no es posible que haya otro valor; podría confundirse con -10, pero no es posible debido a que la variable *c* debe de tomar los valores de *a* y *b* anteriores para que pueda tener un valor definido y no al revés. Así que, 10 es el valor correcto.