Das Sekretärsproblem

Vortrag zur Bachelorarbeit

Ramtin Azimi

Institut für Informatik
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

29.10.2015

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Sekretärsproblem: Problemspezifikation

$$\sigma = (\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \cdots \quad \sigma_n)$$

$$A$$

Sekretärsproblem: Problemspezifikation

$$\sigma = (\ \sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \cdots \quad \sigma_n\ )$$

$$\uparrow$$

$$A$$

Sekretärsproblem: Problemspezifikation

$$\sigma = (\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \cdots \quad \sigma_n)$$

A

Sekretärsproblem: Problemspezifikation

$$\sigma = (\quad \sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \cdots \quad \sigma_n \quad)$$

$$A$$

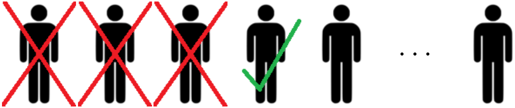
Sekretärsproblem: Problemspezifikation

$$\sigma = \left(\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \cdots \quad \sigma_n \right)$$

$$\uparrow$$

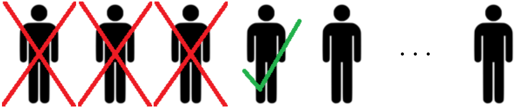
$$A$$

Sekretärsproblem: Problemspezifikation



$$\sigma = \left(\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \underset{\overset{\uparrow}{A}}{\sigma_4} \quad \sigma_5 \quad \cdots \quad \sigma_n \right)$$

Sekretärsproblem: Problemspezifikation



$$\sigma = \left(\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \cdots \quad \sigma_n \right)$$

$$A \rightsquigarrow w_A(\sigma) = \sigma_4$$

Problemvarianten

Definition.

Algo A r-kompetitiv $:\Leftrightarrow \begin{cases} \text{BC.}\forall\sigma : \frac{1}{r} \leq \mathbf{Pr}[w_A(\sigma) = w_1] \\ \text{VP.}\forall\sigma : \frac{w_1}{r} \leq \mathbf{E}\left[w_A(\sigma)\right] \end{cases}$

Abbildung: Variationen des Sekretärsproblems.

Problemvarianten

Definition.

Algo A r-kompetitiv $:\Leftrightarrow \begin{cases} \text{BC}.\forall\sigma : \frac{1}{r} \leq \mathbf{Pr}[w_A(\sigma) = w_1] \\ \text{VP}.\forall\sigma : \frac{w_1}{r} \leq \mathbf{E}\left[w_A(\sigma)\right] \end{cases}$

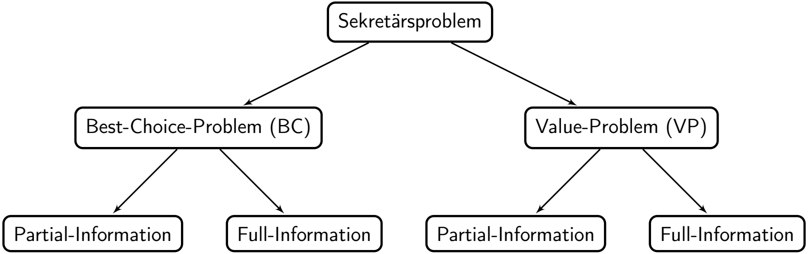


Abbildung: Variationen des Sekretärsproblems.

Algorithmus SECRETARY$_k(S_k)$

$$\sigma = (\sigma_1 \quad \cdots \quad \sigma_k \quad \sigma_{k+1} \quad \sigma_{k+2} \quad \sigma_{k+3} \quad \cdots \quad \sigma_n)$$

$$S_k$$

Algorithmus SECRETARY$_k(S_k)$

$$\sigma = (\quad \sigma_1 \quad \cdots \quad \sigma_k \quad \sigma_{k+1} \quad \sigma_{k+2} \quad \sigma_{k+3} \quad \cdots \quad \sigma_n \quad)$$

$$\uparrow$$

$$S_k$$

Algorithmus SECRETARY$_k(S_k)$

$$\sigma = (\overbrace{\sigma_1 \quad \dots \quad \sigma_k}^{\text{Ablehnung}} \quad \sigma_{k+1} \quad \sigma_{k+2} \quad \sigma_{k+3} \quad \cdots \quad \sigma_n)$$

$$S_k \rightsquigarrow \sigma_{max} := \max\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$$

Algorithmus SECRETARY$_k(S_k)$

$$\sigma = (\overbrace{\sigma_1 \; \cdots \; \sigma_k}^{\text{Ablehnung}} \; \sigma_{k+1} \; \sigma_{k+2} \; \sigma_{k+3} \; \cdots \; \sigma_n)$$

$$S_k \rightsquigarrow \sigma_{max} > \sigma_{k+1}$$

Algorithmus SECRETARY$_k(S_k)$

$$\sigma = (\overbrace{\sigma_1 \quad \cdots \quad \sigma_k}^{\text{Ablehnung}} \quad \sigma_{k+1} \quad \sigma_{k+2} \quad \sigma_{k+3} \quad \cdots \quad \sigma_n)$$

$$S_k \rightsquigarrow \sigma_{max} > \sigma_{k+2}$$

Algorithmus SECRETARY$_k(S_k)$

$$\sigma = (\quad \sigma_1 \quad \cdots \quad \sigma_k \quad \sigma_{k+1} \quad \sigma_{k+2} \quad \sigma_{k+3} \quad \cdots \quad \sigma_n \quad)$$

$$S_k \rightsquigarrow \sigma_{max} < \sigma_{k+3}$$

Inhaltsverzeichnis

Kompetitve Analyse von SECRETARY$_k$ für BC

Theorem. (Gilbert & Mosteller)
Für $n \to \infty$ ist SECRETARY$_{\lfloor n/e \rfloor}$ für BC e-kompetitiv.

Beweis.

σ_1	$\cdots$	σ_i	$\cdots$	σ_n

Beweis.

$$w_1 \rightsquigarrow \mathbf{Pr}[\sigma_i = w_1] = \frac{1}{n}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \sigma_1 & \quad\cdots\quad & \sigma_i & \quad\cdots\quad & \sigma_n \\ \hline\end{array}$$

Beweis.

$$w_1 \rightsquigarrow \mathbf{Pr}[\sigma_i = w_1] = \frac{1}{n}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \sigma_1 & \cdots & \sigma_i & \cdots & \sigma_n \\ \hline\end{array}$$

$$w_{S_k}(\sigma) \rightsquigarrow p := \mathbf{Pr}[w_{S_k}(\sigma) = \sigma_i]$$

Beweis.

$$w_1 \rightsquigarrow \mathbf{Pr}[\sigma_i = w_1] = \frac{1}{n}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \sigma_1 & \cdots & \sigma_i & \cdots & \sigma_n \\ \hline \end{array}$$

$$\uparrow$$

$$w_{S_k}(\sigma) \rightsquigarrow p := \mathbf{Pr}[w_{S_k}(\sigma) = \sigma_i]$$

$$\xrightarrow{i \leq k} p = 0$$

Beweis.

$$w_1 \rightsquigarrow \mathbf{Pr}[\sigma_i = w_1] = \frac{1}{n}$$

$$\downarrow$$

σ_1	$\cdots$	σ_i	$\cdots$	σ_n

$$\uparrow$$

$$w_{S_k}(\sigma) \rightsquigarrow p := \mathbf{Pr}[w_{S_k}(\sigma) = \sigma_i]$$

$i \leq k$: $p = 0$

$i > k$: $p = \frac{k}{i-1}$

Beweis.

$$w_1 \rightsquigarrow \mathbf{Pr}[\sigma_i = w_1] = \frac{1}{n}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \sigma_1 & \cdots & \sigma_i & \cdots & \sigma_n \\ \hline \end{array}$$

$$\uparrow$$

$$w_{S_k}(\sigma) \rightsquigarrow p := \mathbf{Pr}[w_{S_k}(\sigma) = \sigma_i]$$

$$\underbrace{\overset{i \leq k}{p = 0} \qquad\qquad \overset{i > k}{p = \frac{k}{i-1}}}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{k}{i-1} = \frac{k}{n} \ln\left(\frac{n}{k}\right) \overset{\max}{\to} \frac{1}{e} \text{ mit } k = \left\lfloor \frac{n}{e} \right\rfloor$$

Untere Schranke: BC mit Partial-Information

Theorem. (Buchbinder)
Es gibt keinen Online-Algorithmus für BC mit Partial-Information für $n > 2$, der besser als e-kompetitiv ist.

Untere Schranke: BC mit Partial-Information

Beweisidee.

$p_i := \mathbf{Pr}[A \text{ akzeptiert } \sigma_i]$. Man erhält ein LP.

$$\max \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot p_i \text{ mit}$$

$$1 \leq i \leq n : \sum_{j=1}^{i-1} p_j + i p_i \leq 1$$

$$1 \leq i \leq n : p_i \geq 0.$$

Untere Schranke: BC mit Partial-Information

Beweisidee.

$p_i := \mathbf{Pr}[A \text{ akzeptiert } \sigma_i]$. Man erhält ein LP.

$$\max \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot p_i \text{ mit}$$

$$1 \leq i \leq n : \sum_{j=1}^{i-1} p_j + i p_i \leq 1$$

$$1 \leq i \leq n : p_i \geq 0.$$

Untere Schranke: BC mit Partial-Information

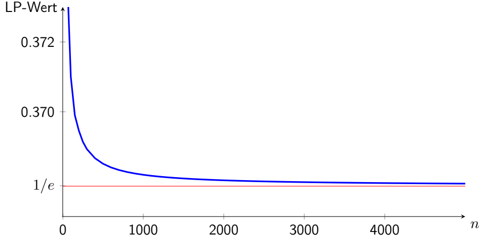
Beweisidee.

$p_i := \mathbf{Pr}[A \text{ akzeptiert } \sigma_i]$. Man erhält ein LP.

$$\max \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot p_i \text{ mit}$$

$$1 \leq i \leq n : \sum_{j=1}^{i-1} p_j + i p_i \leq 1$$

$$1 \leq i \leq n : p_i \geq 0.$$



Untere Schranke: BC mit Full-Information

Theorem. (Gnedin)
Es gibt keinen Online-Algorithmus für das BC mit Full-Information für $n > 2$, der besser als e-kompetitiv ist.

Inhaltsverzeichnis

Kompetitve Analyse von SECRETARY$_k$ für VP

Korollar.
Für $n \to \infty$ ist SECRETARY$_{\lfloor n/e \rfloor}$ für VP e-kompetitiv.

Beweis.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[w_{S_{\lfloor n/e \rfloor}}(\sigma)] &\geq \mathbf{Pr}[w_{S_{\lfloor n/e \rfloor}}(\sigma) = w_1] \cdot w_1 \\ &\geq \frac{1}{e} \cdot w_1.\end{aligned}$$

Kompetitve Analyse von SECRETARY$_k$ für VP

Korollar.
Für $n \to \infty$ ist SECRETARY$_{\lfloor n/e \rfloor}$ für VP e-kompetitiv.

Beweis.

$$\mathbf{E}[w_{S_{\lfloor n/e \rfloor}}(\sigma)] \geq \mathbf{Pr}[w_{S_{\lfloor n/e \rfloor}}(\sigma) = w_1] \cdot w_1$$
$$\geq \frac{1}{e} \cdot w_1.$$

Kompetitve Analyse von SECRETARY$_k$ für VP

Korollar.
Für $n \to \infty$ ist SECRETARY$_{\lfloor n/e \rfloor}$ für VP e-kompetitiv.

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[w_{S_{\lfloor n/e \rfloor}}(\sigma)] &\geq \mathbf{Pr}[w_{S_{\lfloor n/e \rfloor}}(\sigma) = w_1] \cdot w_1 \\ &\geq \frac{1}{e} \cdot w_1. \end{aligned}$$

Kompetitve Analyse von SECRETARY$_k$ für VP

Korollar.
Für $n \to \infty$ ist SECRETARY$_{\lfloor n/e \rfloor}$ für VP e-kompetitiv.

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[w_{S_{\lfloor n/e \rfloor}}(\sigma)] &\geq \mathbf{Pr}[w_{S_{\lfloor n/e \rfloor}}(\sigma) = w_1] \cdot w_1 \\ &\geq \frac{1}{e} \cdot w_1. \end{aligned}$$

Untere Schranke: VP mit Partial-Information

Theorem.
Es gibt keinen Online-Algorithmus für das VP für $n > 2$, der besser als e-kompetitiv ist.

Untere Schranke: VP mit Partial-Information

Beweisidee. Annahme: $\forall \sigma : \mathbf{E}[w_A(\sigma)] \geq \frac{w_1}{e-\epsilon}$.

Wähle σ' mit $\{1, \epsilon', \frac{\epsilon'}{2}, \ldots, \frac{\epsilon'}{n-1}\}$ mit $\epsilon' < \frac{1}{e-\epsilon}$.

1. Schritt. Z.z. $\mathbf{Pr}[A$ akzeptiert w_1 auf $\sigma'] > \frac{1}{e}$.

2. Schritt. Z.z. $\forall \sigma : \mathbf{Pr}[A$ akzeptiert $w_1] > \frac{1}{e}$

Eignungen ändern; Rangfolge beibehalten! $\Longrightarrow \sigma' = \sigma$

$\Longrightarrow$ Widerspruch ↯.

Untere Schranke: VP mit Partial-Information

Beweisidee. Annahme: $\forall \sigma : \mathbf{E}[w_A(\sigma)] \geq \frac{w_1}{e-\epsilon}$.

Wähle σ' mit $\{1, \epsilon', \frac{\epsilon'}{2}, \ldots, \frac{\epsilon'}{n-1}\}$ mit $\epsilon' < \frac{1}{e-\epsilon}$.

1. Schritt. Zz. $\mathbf{Pr}[A$ akzeptiert w_1 auf $\sigma'] > \frac{1}{e}$.

2. Schritt. Zz. $\forall \sigma : \mathbf{Pr}[A$ akzeptiert $w_1] > \frac{1}{e}$

Eignungen ändern; Rangfolge beibehalten! $\Longrightarrow \sigma' = \sigma$

$\Longrightarrow$ Widerspruch $\lightning$.

Untere Schranke: VP mit Partial-Information

Beweisidee. Annahme: $\forall \sigma : \mathbf{E}[w_A(\sigma)] \geq \frac{w_1}{e-\epsilon}$.

Wähle σ' mit $\{1, \epsilon', \frac{\epsilon'}{2}, \ldots, \frac{\epsilon'}{n-1}\}$ mit $\epsilon' < \frac{1}{e-\epsilon}$.

1. Schritt. Zz. $\mathbf{Pr}[A$ akzeptiert w_1 auf $\sigma'] > \frac{1}{e}$.

2. Schritt. Zz. $\forall \sigma : \mathbf{Pr}[A$ akzeptiert $w_1] > \frac{1}{e}$

Eignungen ändern; Rangfolge beibehalten! $\Longrightarrow \sigma' = \sigma$

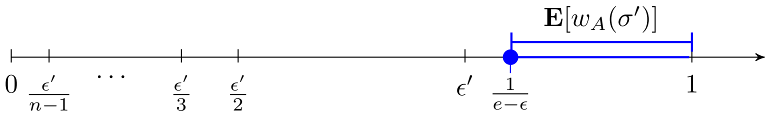
$\Longrightarrow$ Widerspruch $\lightning$.

Untere Schranke: VP mit Partial-Information

Beweisidee. Annahme: $\forall\sigma : \mathbf{E}[w_A(\sigma)] \geq \frac{w_1}{e-\epsilon}$.

Wähle σ' mit $\{1, \epsilon', \frac{\epsilon'}{2}, \ldots, \frac{\epsilon'}{n-1}\}$ mit $\epsilon' < \frac{1}{e-\epsilon}$.

<u>1. Schritt.</u> Zz. $\mathbf{Pr}[A$ akzeptiert w_1 auf $\sigma'] > \frac{1}{e}$.



<u>2. Schritt.</u> Zz. $\forall\sigma : \mathbf{Pr}[A$ akzeptiert $w_1] > \frac{1}{e}$

Eignungen ändern; Rangfolge beibehalten! $\Longrightarrow \sigma' = \sigma$

$\Longrightarrow$ Widerspruch $\lightning$.

Untere Schranke: VP mit Partial-Information

Beweisidee. Annahme: $\forall\sigma : \mathbf{E}[w_A(\sigma)] \geq \frac{w_1}{e-\epsilon}$.

Wähle σ' mit $\{1, \epsilon', \frac{\epsilon'}{2}, \ldots, \frac{\epsilon'}{n-1}\}$ mit $\epsilon' < \frac{1}{e-\epsilon}$.

<u>1. Schritt.</u> Zz. $\mathbf{Pr}[A \text{ akzeptiert } w_1 \text{ auf } \sigma'] > \frac{1}{e}$.

<u>2. Schritt.</u> Zz. $\forall\sigma : \mathbf{Pr}[A \text{ akzeptiert } w_1] > \frac{1}{e}$

Eignungen ändern; Rangfolge beibehalten! $\Longrightarrow \sigma' = \sigma$

$\Longrightarrow$ Widerspruch ↯.

Untere Schranke: VP mit Full-Information

Untere Schranke für $\sigma_i \in \mathbb{N}_0$.

Theorem.
Es existiert kein Online-Algorithmus für VP für $n > 2$, der besser als e-kompetitiv ist.

Untere Schranke: VP mit Full-Information

Beweisidee. Annahme: $\forall \sigma : \mathbf{E}[w_A(\sigma)] \geq \frac{w_1}{e-\epsilon}$.

1.Schritt. Konstruktion von A'.

Wähle $f(x) = D^x = \left\lceil \frac{(e-\epsilon)(e-\epsilon/2)}{\epsilon/2} \right\rceil^x$.

$\Longrightarrow \mathbf{Pr}[A'$ akzeptiert $w_1] = \mathbf{Pr}[A$ akzeptiert $f(w_1)]$

Untere Schranke: VP mit Full-Information

Beweisidee. Annahme: $\forall \sigma : \mathbf{E}[w_A(\sigma)] \geq \frac{w_1}{e-\epsilon}$.

1.Schritt. Konstruktion von A'.

Wähle $f(x) = D^x = \left\lceil \frac{(e-\epsilon)(e-\epsilon/2)}{\epsilon/2} \right\rceil^x$.

$\Longrightarrow \mathbf{Pr}[A' \text{ akzeptiert } w_1] = \mathbf{Pr}[A \text{ akzeptiert } f(w_1)]$

Untere Schranke: VP mit Full-Information

Beweisidee. Annahme: $\forall \sigma : \mathbf{E}[w_A(\sigma)] \geq \frac{w_1}{e-\epsilon}$.

<u>1.Schritt.</u> Konstruktion von A'.

Wähle $f(x) = D^x = \left\lceil \frac{(e-\epsilon)(e-\epsilon/2)}{\epsilon/2} \right\rceil^x$.

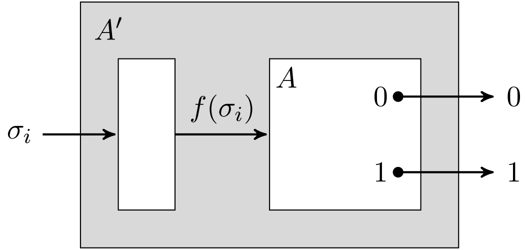
$\Longrightarrow \mathbf{Pr}[A' \text{ akzeptiert } w_1] = \mathbf{Pr}[A \text{ akzeptiert } f(w_1)]$

Untere Schranke: VP mit Full-Information

Beweisidee. Annahme: $\forall \sigma : \mathbf{E}[w_A(\sigma)] \geq \frac{w_1}{e-\epsilon}$.

1.Schritt. Konstruktion von A'.

Wähle $f(x) = D^x = \left\lceil \frac{(e-\epsilon)(e-\epsilon/2)}{\epsilon/2} \right\rceil^x$.



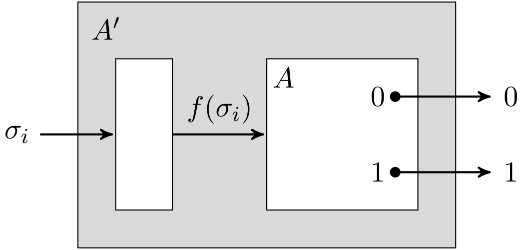
$\implies \mathbf{Pr}[A' \text{ akzeptiert } w_1] = \mathbf{Pr}[A \text{ akzeptiert } f(w_1)]$

Untere Schranke: VP mit Full-Information

Beweisidee. Annahme: $\forall\sigma : \mathbf{E}[w_A(\sigma)] \geq \frac{w_1}{e-\epsilon}$.

1.Schritt. Konstruktion von A'.

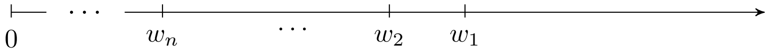
Wähle $f(x) = D^x = \left\lceil \frac{(e-\epsilon)(e-\epsilon/2)}{\epsilon/2} \right\rceil^x$.



$$\implies \mathbf{Pr}[A' \text{ akzeptiert } w_1] = \mathbf{Pr}[A \text{ akzeptiert } f(w_1)]$$

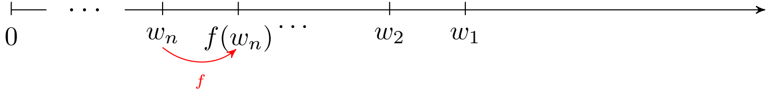
Untere Schranke: VP mit Full-Information

2.Schritt. Zz. $\mathbf{Pr}[A \text{ akzeptiert } f(w_1)] > \frac{1}{e}$.



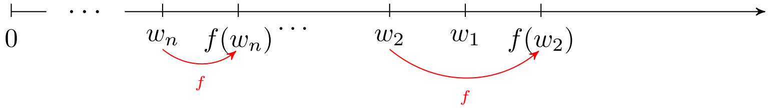
Untere Schranke: VP mit Full-Information

<u>2.Schritt.</u> Zz. $\mathbf{Pr}[A$ akzeptiert $f(w_1)] > \frac{1}{e}$.



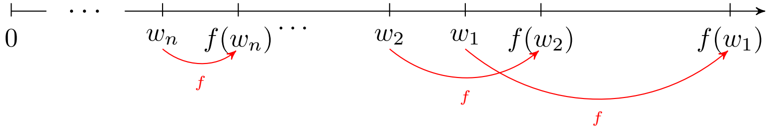
Untere Schranke: VP mit Full-Information

<u>2.Schritt.</u> Zz. $\mathbf{Pr}[A \text{ akzeptiert } f(w_1)] > \frac{1}{e}$.



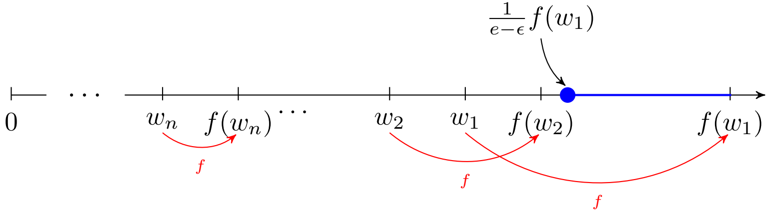
Untere Schranke: VP mit Full-Information

2.Schritt. Zz. $\mathbf{Pr}[A \text{ akzeptiert } f(w_1)] > \frac{1}{e}$.



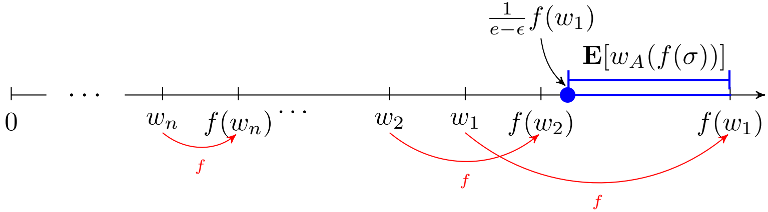
Untere Schranke: VP mit Full-Information

<u>2.Schritt.</u> Zz. $\mathbf{Pr}[A \text{ akzeptiert } f(w_1)] > \frac{1}{e}$.



Untere Schranke: VP mit Full-Information

2.Schritt. Zz. $\mathbf{Pr}[A \text{ akzeptiert } f(w_1)] > \frac{1}{e}$.



$\Longrightarrow$ Widerspruch $\lightning$

Inhaltsverzeichnis

Fazit und Ausblick

Abbildung: Variationen des Sekretärsproblems.

Fazit und Ausblick

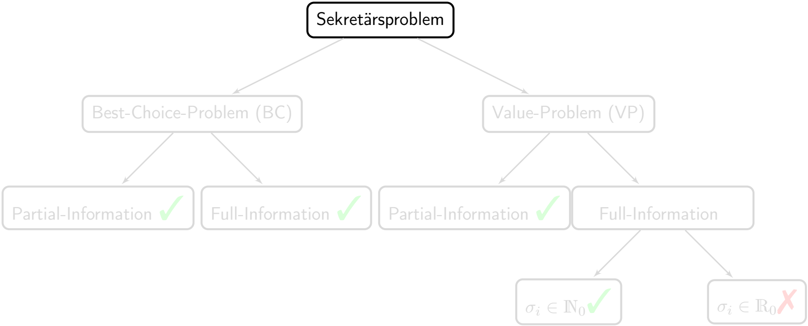


Abbildung: Variationen des Sekretärsproblems.

Fazit und Ausblick

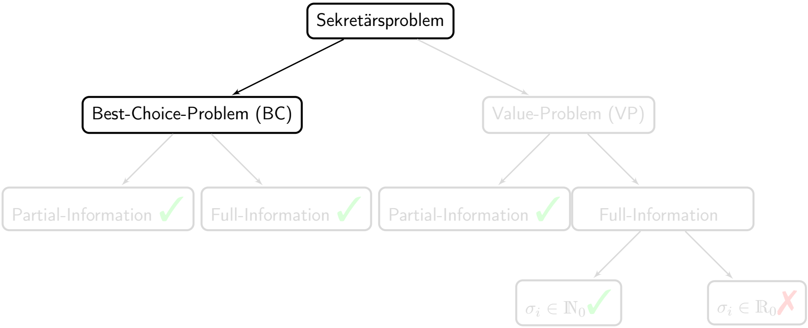


Abbildung: Variationen des Sekretärsproblems.

Fazit und Ausblick

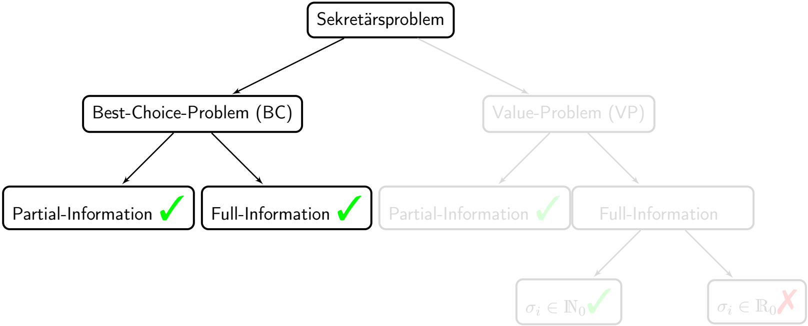


Abbildung: Variationen des Sekretärsproblems.

Fazit und Ausblick

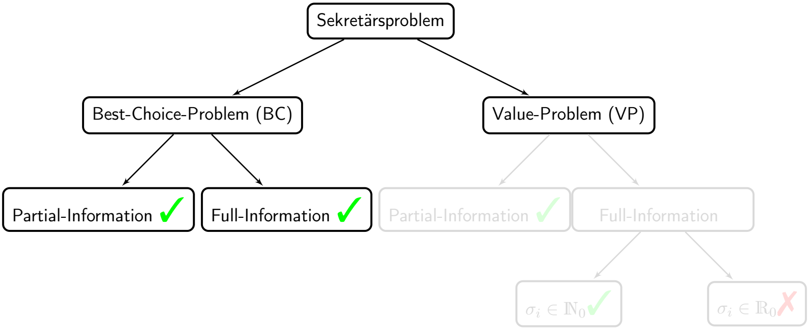


Abbildung: Variationen des Sekretärsproblems.

Fazit und Ausblick

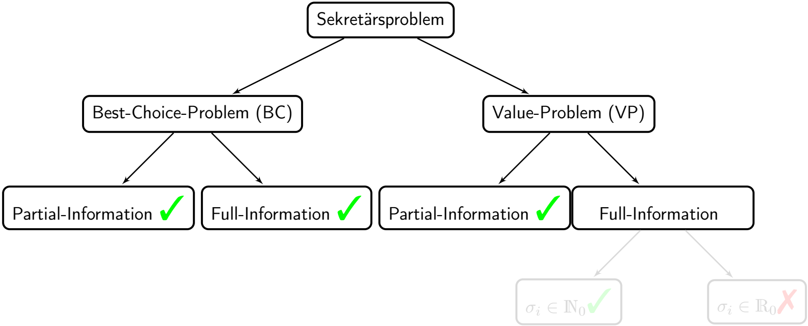


Abbildung: Variationen des Sekretärsproblems.

Fazit und Ausblick

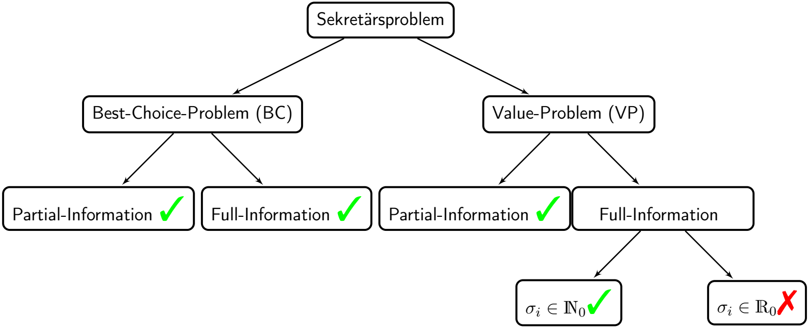


Abbildung: Variationen des Sekretärsproblems.

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

Literaturverzeichnis I

[1] Buchbinder, Niv, Jain,Kamal und Singh,Mohit: **Secretary Problems via Linear Programming**. In *Integer Programming and Combinatorial Optimization*, Seiten 163-176. Springer Berlin Heidelberg, 2010.

[2] Ferguson, Thomas S.: **Who solved the secretary problem?**. In *Statistical science*, Seiten 282-289, 1989.

[3] Gilbert, John P. und Frederick Mosteller: **Recognizing the maximum of a sequence.**. In *Selected Papers of Frederick Mosteller*, Seiten 355-398. Springer New York, 2006.

[4] Gnedin, Alexander V.: **A solution to the game of googol.**. In *The Annals of Probability 22, no. 3*, 1994.

[5] Lindley, Denis V.: **Dynamic programming and decision theory.**. In *Applied Statistics*, Seiten 39-51, 1961.

[6] Röglin, Heiko: **Online-Algorithmen**. Vorlesungsskript, Universität Bonn, Sommersemester 2015.