

Esame di Calcolo Numerico

01/07/2019

Portare alla propria postazione solo la penna.

Per accedere correttamente ai pc eseguire le istruzioni riportate nel foglio allegato.

Con l'avverbio “analiticamente” si richiede di effettuare i calcoli solo con carta e penna, senza comandi Matlab.

Per ogni esercizio che richiede esecuzione di comandi Matlab creare file script con tutte le istruzioni programmate per risolverlo (non utilizzare la Command Window).

Salvare i file contenenti le figure, corredate da tutti i dati necessari per la loro interpretazione (legende e/o axis label e/o titolo...).

Riportare e salvare eventuali tabelle in file di testo.

Tempo a disposizione per lo svolgimento: 2 ore.

1. Siano $a = 10^{110}$ e $b = 10^{200}$. Calcolare $a * b$ con comandi Matlab. Commentare.

Siano $p = 10^{-25}$ e $q = 10^{-300}$. Calcolare $p * q$ con comandi Matlab. Commentare.

2. Risoluzione di sistemi lineari.

2a) Impostare in forma matriciale il problema della risoluzione di un sistema lineare. Definire il vettore residuo.

2b) Definire il numero di condizionamento associato alla risoluzione di un sistema lineare. Dimostrare che il numero di condizionamento è ≥ 1 .

2c) Calcolare “analiticamente” il numero di condizionamento di

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

in norma infinito.

3. 3a) Dati 3 punti di interpolazione, definire i polinomi fondamentali di Lagrange e l'espressione del polinomio interpolante in forma di Lagrange.
 3b) Dati 3 punti di coordinate

| | | | |
|-----|---------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| x | 0.05 | 1 | 1.5 |
| y | $-1.997500520789933 * 10$ | $-5.403023058681398 * 10^{-1}$ | $-4.715813444513527 * 10^{-2}$ |

implementare in Matlab il polinomio interpolante in forma di Lagrange e farne il grafico nell'intervallo $[0.05, 1.5]$ evidenziando i punti di interpolazione.

3c) Le ordinate dei punti di interpolazione sono state ottenute attraverso la funzione

$$y = f(x) = -\frac{\cos(x)}{x}.$$

Aggiungere al grafico precedente il grafico della funzione f e la legenda e commentare.

3d) Costruire il polinomio interpolante in Matlab attraverso il comando `polyfit` e osservare la sovrapposizione grafica con il polinomio in forma di Lagrange.

3e) Costruire in Matlab i polinomi di interpolazione di Lagrange della funzione f con numero di nodi crescente $n = 5 : 5 : 50$ equispaziati nell'intervallo $[0.05, 1.5]$. Per ogni valore n , memorizzare l'errore commesso nell'approssimazione di f su una griglia uniforme di 1000 punti.

3f) Costruire in Matlab i polinomi di interpolazione con il comando `polyfit` della funzione f con numero di nodi crescente $n = 5 : 5 : 50$ equispaziati nell'intervallo $[0.05, 1.5]$. Per ogni valore n , memorizzare l'errore commesso nell'approssimazione di f su una griglia uniforme di 1000 punti.

3g) Costruire una tabella che affianchi i vettori di errore ottenuti in 3f) e 3e) al variare di n . Commentare.

4. Esercizio per esame di Calcolo Numerico da **12 crediti (15 minuti aggiuntivi)**.

4a) Descrivere l'approssimazione della derivata seconda di una funzione attraverso il metodo delle differenze finite centrate.

4b) Approssimare la derivata seconda della funzione al punto 3c) negli 8 nodi interni di una griglia di 10 nodi equispaziati nell'intervallo $[0.05, 1.5]$. Generare una tabella di errore relativo sapendo che la derivata seconda analitica è

$$f''(x) = \frac{(-2 + x^2) \cos(x) - 2x \sin(x)}{x^3}.$$