Correzione Esame di Calcolo Numerico

15/07/2019

1.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\pi}x\cdot(\sqrt{x^2+\pi}-x) = \lim_{4x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+\pi}+x}\cdot\frac{(\sqrt{x^2+\pi}-x)}{(\sqrt{x^2+\pi}-x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+\pi}+x} = 2$$

1a) Valuto il primo membro per i valori della successione $x_n = 2^n$ con $n = 10:10:100$ e il limite sembra essere 0.
2a) Valuto il secondo membro per i valori della successione $x_n = 2^n$ con $n = 10:10:100$ e il limite sembra essere 2.
3a) Con l'espressione a primo membro si verifica il fenomeno di cancellazione numerica: nel fattore tra parentesi si sottraggono tra loro due numeri *quasi uguali* che, in aritmetica di macchina, risultano essere approssimati da due numeri *uguali* e quindi annullano il fattore. Il problema non si verifica con l'espressione a secondo membro perchè non sono presenti sottrazioni, infatti il limite calcolato "analiticamente" è 2.

2. Risoluzione di sistemi lineari.
2a) Definito il metodo iterativo lineare

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ assegnato} \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + q \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

con $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $x^{(k)}, q \in \mathbb{R}^n$ per la risoluzione di un sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $x, b \in \mathbb{R}^n$, tale metodo si dice *consistente* se

$$x^{(k)} \equiv x \text{ implica } x^{(k+i)} \equiv x^{(k)} \equiv x \qquad i = 1, 2, \dots$$

2b) Il metodo di Jacobi si basa sullo splitting della matrice A nella somma di due matrici $A = D + C$ tali che

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

con $a_{ii} \neq 0$ per $i = 1, 2, 3$. Nel caso in cui $a_{ii} = 0$ per qualche valore di i, prima si effettua un opportuno scambio di righe e/o colonne.
L'algoritmo si può rappresentare nella seguente forma matriciale:

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ assegnato} \\ x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + q_J \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

con $B_J = -D^{-1}C = -\begin{pmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0 & a_{23}/a_{22} \\ a_{31}/a_{33} & a_{32}/a_{33} & 0 \end{pmatrix}$ e $q_J = D^{-1}b = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \end{pmatrix}$.
2c) Primo passo:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= -\begin{pmatrix} 0 & 2/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 115/2 \\ 2/2 \\ 78/2 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 57.5 \\ 1 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 \\ 1 \\ 37.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. I comandi Matlab necessari per lo svolgimento dei punti 3b), 3d), 3e) e 3f) sono implementati nel file **Es3.m**.

3a) Sia f una funzione integrabile sull'intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, la formula dei trapezi ne approssima l'integrale sostituendo ad f il suo polinomio interpolatore lineare relativo agli estremi a e b:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \big(f(a) + f(b)\big)\frac{b-a}{2}.$$

3c) Sia assegnata una decomposizione uniforme dell'intervallo $[a, b]$ in $m > 1$ sotto-intervalli $[x_i, x_i + 1]$, $i = 0, m-1$ con $x_i = a + i\frac{b-a}{m}$. La formula dei trapezi composita per l'approssimazione dell'integrale è la seguente:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2m}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m)\right)$$

3f) Per calcolare l'errore si può utilizzare il risultato ottenuto con il comando `quad` di Matlab. Un esempio di tabella risultante è:

m	$H = (b-a)/m$	Errore	Errore$/H^2$
10	$2.0000e-01$	$2.4558e-03$	$6.1395e-02$
20	$1.0000e-01$	$6.1334e-04$	$6.1334e-02$
30	$6.6667e-02$	$2.7255e-04$	$6.1323e-02$
40	$5.0000e-02$	$1.5330e-04$	$6.1320e-02$
50	$4.0000e-02$	$9.8112e-05$	$6.1320e-02$
60	$3.3333e-02$	$6.8134e-05$	$6.1320e-02$
70	$2.8571e-02$	$5.0058e-05$	$6.1321e-02$
80	$2.5000e-02$	$3.8327e-05$	$6.1323e-02$
90	$2.2222e-02$	$3.0284e-05$	$6.1325e-02$
100	$2.0000e-02$	$2.4531e-05$	$6.1327e-02$

3g) L'errore commesso con la formula dei trapezi composita, ipotizzando che f sia derivabile almeno due volte (come è la funzione definita al punto 3b)), è:

$$\mathrm{Err}(H) = \frac{f''(\beta)}{12}(b-a)H^2 = C_m H^2 \qquad \beta \in [a, b] \qquad H = \frac{b-a}{m}$$

quindi ci aspettiamo che l'errore decresca all'aumentare del numero di sottointervalli m e che sia direttamente proporzionale ad H^2.

Dall'ultima colonna della tabella si può osservare la diretta proporzionalità rispetto ad H^2.

4. 4a) Data una partizione sull'intervallo $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$, una *spline lineare* è una funzione continua in $[a, b]$ ed è un polinomio di grado 1 in ogni sottointervallo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, m-1$.

4b) Data una partizione sull'intervallo $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$, una spline di grado m è una funzione derivabile $m-1$ volte (appartenente a $C^{m-1}([a, b])$) tale che, ristretta ad ogni sottointervallo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, m-1$, è definita come un polinomio di grado m.