Correzione Esame di Calcolo Numerico

19/02/2020

1. 1a) Risulta $q(0.9975) = 3.906249999999667e - 11$.
1b) Risulta $r(0.9975) = 3.906208689841151e - 11$.
1c) Analiticamente $q(x) = r(x)$ ed entrambi i risultati sono approssimati ma lo sviluppo della potenza del binomio contenuto in $r(x)$ porta ad un errore maggiore perchè si presenta il fenomeno della *cancellazione numerica* dovuto alla somma di addendi con segni alterni.

2. Approssimazione di dati e funzioni.
2a) Un *polinomio interpolante* $n + 1$ punti assegnati di ascisse $x_0, x_1, \dots, x_n$ (con $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$) e ordinate $y_0, y_1, \dots, y_n$ è un polinomio p di grado m che soddisfa la seguente proprietà:

$$p(x_i) = a_m x_i^m + a_{m-1} x_i^{m-1} + \cdots + a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 = y_i \qquad i = 0, \dots, n\,.$$

Se $m = n$ il polinomio esiste ed è unico.

2b) Il polinomio è univocamente determinato dai suoi coefficienti a_i con $i = 0, \dots, n$ che si possono ottenere risolvendo il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^{m-1} & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{m-1} & x_1^m \\ \vdots & & & & & & \\ 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 & \cdots & x_i^{m-1} & x_i^m \\ \vdots & & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{m-1} & x_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

la cui soluzione esiste ed è unica se $m = n$. La matrice associata di questo sistema lineare si chiama matrice di *Vandermonde*.

2c) Il sistema lineare associato ad A, B, C è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.2 & 1.2^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$p(x) = -\frac{15}{8}x^2 + \frac{53}{8}x - \frac{19}{4}$$

e

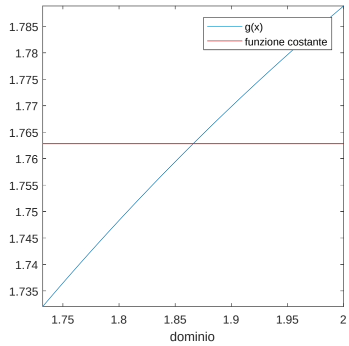
$$p(1.5) = \frac{31}{32}\,.$$

3. I comandi Matlab necessari per lo svolgimento dei punti 3b), 3c), 3d), 3e), 3g) e 3h) sono implementati nel file **Es3.m** che utilizza la function **midpntc.m**.

3a) Sia f una funzione integrabile sull'intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, la *formula del punto medio semplice* ne approssima l'integrale sostituendo ad f la funzione costante pari al valore di f calcolata nel punto medio dell'intervallo di integrazione $(a + b)/2$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\,.$$

3b) Il grafico risultante sarà



3e) L'approssimazione dell'integrale ottenuta con la formula del punto medio semplice differisce da quella ottenuta con la function `quad` di Matlab di $2.1\,10^{-4}$. Anche con la formula del punto medio semplice si ottiene una "buona" approssimazione dell'integrale perché la funzione integranda $g(x)$ nel dominio considerato è molto "vicina" ad una funzione lineare come si può osservare dal grafico e le funzioni lineari sono integrate esattamente dalla formula del punto medio semplice.

3f) Sia assegnata una decomposizione uniforme dell'intervallo $[a, b]$ in $m > 1$ sottointervalli $[x_i, x_i + 1]$, $i = 0, m - 1$ con $x_i = a + i\frac{b-a}{m}$. La formula del punto medio composita per l'approssimazione dell'integrale è la seguente:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{m}\sum_{i=1}^{m} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$$

3f) Per calcolare l'errore si può utilizzare il risultato ottenuto con il comando `quad` di Matlab. Un esempio di tabella risultante è:

m	10	20	30	40	50
Err	$2.1 \cdot 10^{-6}$	$5.3 \cdot 10^{-7}$	$2.4 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$	$8.5 \cdot 10^{-8}$

m	60	70	80	90	100
Err	$5.9 \cdot 10^{-8}$	$4.3 \cdot 10^{-8}$	$3.3 \cdot 10^{-8}$	$2.6 \cdot 10^{-8}$	$2.1 \cdot 10^{-8}$

Come ci si aspetta, l'errore diminuisce all'aumentare del numero di intervalli della decomposizione.

4. 4a) Data una partizione sull'intervallo $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$, una *spline di grado* k è una funzione s_k tale che:

- ristretta ad ogni sottointervallo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, m-1$ appartiene allo spazio polinomiale $\mathbb{P}_k$: $s_{k|[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_k$
- $s_k \in \mathcal{C}^{k-1}([a, b])$.

Una spline di tipo *interpolatorio* interpola inoltre i punti assegnati (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, m$ ossia:

$$s_k(x_i) = y_i\,.$$

4b) Una spline di tipo interpolatorio non è in generale univocamente determinata: bisogna fissare i $k - 1$ gradi di libertà rimasti liberi.