

## Correzione Esame di Calcolo Numerico

17/01/2020

1. 1a) Risulta  $g(5.555 \cdot 10^9) = 0$  ma  $s \neq \sqrt{s^2 - 1}$ .

E' un errore di *cancellazione numerica*, ossia si ha perdita di cifre significative che si verifica quando si opera una sottrazione tra due numeri di macchina "quasi uguali".

1b) Risulta  $p(5.555 \cdot 10^9) = 9.000900090009000e-11$  ma, analiticamente,  $p(s) = g(s)$ . L'espressione di  $p(s)$  porta ad un risultato più accurato perchè il fenomeno della cancellazione numerica è evitato eliminando l'operazione di sottrazione.

2. Risoluzione di sistemi lineari.

2a) Sia definito il metodo iterativo lineare

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ assegnato} \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + q \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

con  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $x^{(k)}, q \in \mathbb{R}^n$  per la risoluzione di un sistema lineare  $Ax = b$  con  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $x, b \in \mathbb{R}^n$ .

Condizione necessaria e sufficiente affinché tale metodo sia *convergente* è che il raggio spettrale della matrice di iterazione  $\rho(B)$  verifichi la condizione

$$\rho(B) < 1.$$

Inoltre, definita una norma matriciale  $\|\cdot\|$  indotta da una norma vettoriale, condizione sufficiente affinché tale metodo sia *convergente* è che  $\|B\| < 1$  infatti se  $\|B\| < 1$  allora si dimostra che  $\rho(B) < 1$ .

2b) Il metodo di Gauss-Seidel si basa sullo splitting della matrice  $A$  nella somma di tre matrici  $A = D + E + F$  tali che

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'algoritmo si può rappresentare nella seguente forma matriciale:

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ assegnato} \\ x^{(k+1)} = B_{GS}x^{(k)} + q_{GS} \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

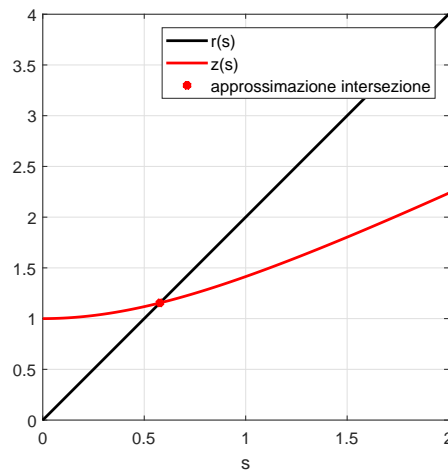
con  $B_{GS} = -(E + D)^{-1}F$  e  $q_{GS} = (E + D)^{-1}b$ .

2c) Primo passo:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (E + D)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9/2 \\ 2 \\ 5/4 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -3/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9/2 \\ 2 \\ 5/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. I comandi Matlab necessari per lo svolgimento dei punti 3a), 3b), 3d), 3e) e 3f) sono implementati nel file **Es3.m** che richiama le funzioni **secant.m** e **chord.m**.  
3a)-3b) Il grafico risultante sarà



3c) Dati una funzione  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e un valore  $s_0$  iniziale, il metodo delle corde genera una successione di approssimanti della radice  $\alpha$  attraverso l'algoritmo

$$s_{k+1} = s_k - f(s_k) \frac{b - a}{f(b) - f(a)} \quad k = 0, 1, \dots$$

Il metodo delle corde è un metodo **localmente** convergente.

3e) Tabella metodo delle corde

| n. iterazione | ascissa intersezione  | residuo               |
|---------------|-----------------------|-----------------------|
| 1             | 5.761209517034276e-01 | 1.844467274153772e-03 |
| 2             | 5.774556207612326e-01 | 1.580237530838247e-04 |
| 3             | 5.773412736992951e-01 | 1.349326177524368e-05 |
| 4             | 5.773510375152395e-01 | 1.152488229072546e-06 |
| 5             | 5.773502035669227e-01 | 9.843405601728250e-08 |
| 6             | 5.773502747944748e-01 | 8.407273544008831e-09 |
| 7             | 5.773502687109144e-01 | 7.180669392425898e-10 |
| 8             | 5.773502692305126e-01 | 6.133027419252812e-11 |

3f) Tabella metodo delle secanti

| n. iterazione | ascissa intersezione  | residuo               |
|---------------|-----------------------|-----------------------|
| 1             | 7.236067977499789e-01 | 2.128689119735212e-01 |
| 2             | 5.484337629654054e-01 | 4.364972179514726e-02 |
| 3             | 5.782415555690950e-01 | 1.336671682582669e-03 |
| 4             | 5.773558826085947e-01 | 8.420118220220374e-06 |
| 5             | 5.773502681066194e-01 | 1.624509637920824e-09 |
| 6             | 5.773502691896272e-01 | 1.998401444325282e-15 |

3g) Il metodo delle corde si arresta dopo 8 iterazioni e il valore finale differisce dall'approssimazione ottenuta con il comando **fzero** di circa  $4.1 \cdot 10^{-11}$ .

Il metodo delle secanti si arresta dopo 6 iterazioni e il valore finale differisce dall'approssimazione ottenuta con il comando **fzero** di circa  $1.3 \cdot 10^{-15}$ .

Il metodo delle secanti risulta convergere più velocemente rispetto al metodo delle corde.