Correzione Esame di Calcolo Numerico

27/09/2019

1. I comandi Matlab necessari per lo svolgimento del punto 1 sono implementati nel file **Es1.m**.
1a) `eps` è il più piccolo numero macchina positivo tale che 1+`eps`> 1.
Poichè $N = 10^{-16} <$`eps`, anziché risultare $M > 4$, in aritmetica di macchina, si ha che $M = N + 4 = 4$.
1b) Poichè il numero $\frac{1}{100}$, o analogamente 0.01, non viene "correttamente" rappresentato in aritmetica di macchina, la somma di 2000 addendi pari a tale numero non risulta uguale a 20 come in aritmetica esatta ma

$$\sum_{k=1}^{2000} \frac{1}{100} = 20.000000000000327\,.$$

2. Ricerca di radici di equazioni non lineari.
2a) Data $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funzione non lineare tale che $f \in \mathcal{C}^m(a, b)$ con $m \in \mathbb{N}^+$, α dicesi *radice semplice* se $f(\alpha) = 0$ e $f'(\alpha) \neq 0$.
Se $f^{(m-1)}(\alpha) = \ldots = f'(\alpha) = f(\alpha) = 0$ e $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$ allora α è detta *radice di ordine m*. In tal caso $f(x) = (x - \alpha)^m h(x)$ con $h(\alpha) \neq 0$.
2b) Nella ricerca numerica di radici di equazioni non lineari, il criterio d'arresto basato sul controllo dell'incremento prevede che il metodo iterativo generante la successione

$$\lim_{i\to+\infty} x_i = \alpha$$

si arresti al minimo valore di $k \in \mathbb{N}$ tale per cui $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, con $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tolleranza fissata. Questo criterio è impreciso nel caso in cui l'avanzamento verso la radice sia "lento".
2c) Approssimare il numero reale $\alpha = \sqrt[3]{10}$ significa approssimare numericamente la radice α dell'equazione non lineare

$$f(x) = x^3 - 10 = 0\,.$$

Tale radice è unica poichè la funzione f è continua e strettamente crescente in $\mathbb{R}$.
Il metodo di bisezione si basa sul *Teorema di esistenza degli zeri per funzioni continue* ossia sull'individuazione di un intervallo iniziale $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tale che $f(a)f(b) < 0$.
Un buon intervallo di innesco del metodo è per esempio $[a^{(0)}, b^{(0)}] = [2, 3]$ poiché $f(2) = 2^3 - 10 = -2 < 0$ e $f(3) = 27 - 10 = 17 > 0$:
<u>1° passo</u>

$$[a^{(0)}, b^{(0)}] = [2, 3] \qquad x^{(0)} = \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2} = 2.5 \qquad f(2.5) = 5.625 > 0$$

<u>2° passo</u>

$$[a^{(1)}, b^{(1)}] = [2, 2.5] \qquad x^{(1)} = \frac{a^{(1)} + b^{(1)}}{2} = 2.25 \qquad f(2.25) = 1.390625 > 0$$

<u>3° passo</u>

$$[a^{(2)}, b^{(2)}] = [2, 2.25] \qquad x^{(1)} = \frac{a^{(1)} + b^{(1)}}{2} = 2.125 \qquad f(2.125) = -0.404296875 < 0$$

3. I comandi Matlab necessari per lo svolgimento dei punti 3b), 3c), 3d), 3e), 3g), 3h) e 3i) sono implementati nel file **Es3.m**.

3a) Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice simmetrica definita positiva, allora esiste una matrice B triangolare superiore tale che $A = B'B$. Inoltre se gli elementi diagonali della matrice B sono scelti positivi, tale fattorizzazione è unica. Tale fattorizzazione si chiama *fattorizzazione di Cholesky.*

3c) Per verificare che la fattorizzazione ricostruisca "correttamente" la matrice A, si può confrontare la differenza, in norma ∞, tra gli elementi di A e di $B'B$. Si osserva che questa differenza è dell'ordine della *precisione di macchina* come atteso.

3f) Data una matrice triangolare inferiore $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$, l'*algoritmo di sostituzione in avanti* per la risoluzione del sistema lineare $Ly = b$

$$\begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ L_{n-1\,1} & L_{n-1\,2} & \cdots & L_{n-1\,n-1} & 0 \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{n\,n-1} & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

è:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{b_1}{L_{11}} \\ y_i = \dfrac{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{i\,j} y_j\right)}{L_{ii}} & \qquad i = 2, \ldots, n \end{cases}$$

3i) Dalla tabella risultante

n	Err "\"	Err "Forward+Backward"
10	$0.008881784197001 \cdot 10^{-13}$	$0.008881784197001 \cdot 10^{-13}$
20	$0.024424906541753 \cdot 10^{-13}$	$0.024424906541753 \cdot 10^{-13}$
30	$0.042188474935756 \cdot 10^{-13}$	$0.042188474935756 \cdot 10^{-13}$
40	$0.059952043329758 \cdot 10^{-13}$	$0.059952043329758 \cdot 10^{-13}$
50	$0.048849813083507 \cdot 10^{-13}$	$0.048849813083507 \cdot 10^{-13}$
60	$0.063282712403634 \cdot 10^{-13}$	$0.063282712403634 \cdot 10^{-13}$
70	$0.109912079437891 \cdot 10^{-13}$	$0.109912079437891 \cdot 10^{-13}$
80	$0.127675647831893 \cdot 10^{-13}$	$0.127675647831893 \cdot 10^{-13}$
90	$0.166533453693773 \cdot 10^{-13}$	$0.166533453693773 \cdot 10^{-13}$
100	$0.157651669496772 \cdot 10^{-13}$	$0.157651669496772 \cdot 10^{-13}$

si osserva che l'errore commesso con i differenti procedimenti è esattamente lo stesso e infatti, dal diagramma presente nella descrizione del comando "\", si conclude che l'algoritmo implementato in Matlab prevede la fattorizzazione di Cholesky