Correzione Esame di Calcolo Numerico

09/09/2019

1. I comandi Matlab necessari per lo svolgimento del punto 1 sono implementati nel file **Es1.m**.
1c) Si osserva che il condizionamento della matrice di Hilbert aumenta notevolmente all'aumentare della sua dimensione.

2. Interpolazione polinomiale. I comandi Matlab utili per un controllo dei conti sono implementati nel file **Es2.m**.

2a) Dati $n+1$ punti $(x_i, y_i) \quad i = 0, \ldots, n$, con $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$
si definisce *polinomio interpolatore* di grado m un polinomio $p(x)$ tale per cui

$$p(x_i) = a_m x_i^m + a_{m-1} x_i^{m-1} + \ldots + a_1 x_i + a_0 = y_i \qquad i = 0, \ldots, n\,.$$

Il polinomio interpolatore esiste ed è unico se $m = n$.
2b) Ricaviamo i coefficienti del polinomio interpolatore $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0 = y_0 \\ a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = y_0 \\ a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 = y_0 \\ a_2x_3^2 + a_1x_3 + a_0 = y_0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 7 & 7^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ricava $a_0 = 21/8$, $a_1 = -2/3$, $a_2 = 1/24$.
2c) Tabella alle differenze divise ottenuta con i tre punti P_1, P_2, P_3:

1	**2**		
3	1	$\frac{1-2}{3-1} = -\mathbf{\frac{1}{2}}$	
7	0	$\frac{0-1}{7-3} = -\frac{1}{4}$	$\frac{-1/4+1/2}{7-1} = \mathbf{\frac{1}{24}}$

da cui il polinomio interpolatore scritto in forma di Newton è

$$p(x) = 2 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{24}(x-1)(x-3) = \frac{21}{8} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{24}x^2.$$

Aggiungendo il punto P_4 la tabella alle differenze divise diventa:

1	**2**			
3	1	$\frac{1-2}{3-1} = -\mathbf{\frac{1}{2}}$		
7	0	$\frac{0-1}{7-3} = -\frac{1}{4}$	$\frac{-1/4+1/2}{7-1} = \mathbf{\frac{1}{24}}$	
12	0	$\frac{0-0}{12-7} = 0$	$\frac{0+1/4}{12-3} = \frac{1}{36}$	$\frac{1/36-1/24}{12-1} = -\mathbf{\frac{1}{792}}$

da cui il polinomio interpolatore scritto in forma di Newton è

$$p(x) = 2 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{24}(x-1)(x-3) - \frac{1}{792}(x-1)(x-3)(x-7) = \frac{175}{66} - \frac{559}{792}x + \frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{792}x^3.$$

3. I comandi Matlab necessari per lo svolgimento dei punti 3b), 3c), 3e), 3f) e 3g) sono implementati nel file **Es3.m**.

3a) Sia f una funzione integrabile sull'intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, la formula del punto medio ne approssima l'integrale sostituendo ad f la funzione costante pari al valore di f calcolata nel punto medio dell'intervallo di integrazione $(a + b)/2$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$$

3b) Poichè la funzione $\cos(x)$ nell'intervallo $[0, \pi]$ è dispari, la formula del punto medio semplice genera il valore esatto dell'integrale (con un errore dell'ordine della precisione di macchina `eps`).

3c) Poichè la funzione $\cos(x)$ nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ è pari, la formula del punto medio semplice genera un valore approssimato in modo molto grossolano dell'integrale (errore relativo pari a $6 \cdot 10^{-1}$).

3d) Sia assegnata una decomposizione uniforme dell'intervallo $[a, b]$ in $m > 1$ sottointervalli $[x_i, x_i + 1]$, $i = 0, m - 1$ con $x_i = a + i\frac{b-a}{m}$. La formula del punto medio composita per l'approssimazione dell'integrale è la seguente:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{m} \sum_{i=1}^{m} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$$

3f) Un esempio di tabella risultante applicando la formula del punto medio composita:

m	Errore
10	$8.2484e-03$
20	$2.0576e-03$
30	$9.1414e-04$
40	$5.1413e-04$
50	$3.2902e-04$
60	$2.2848e-04$
70	$1.6786e-04$
80	$1.2852e-04$
90	$1.0154e-04$
100	$8.2249e-05$

3g) Un esempio di tabella risultante applicando il comando `trapz` di Matlab:

m	Errore
10	$1.6476e-02$
20	$4.1140e-03$
30	$1.8280e-03$
40	$1.0282e-03$
50	$6.5802e-04$
60	$4.5695e-04$
70	$3.3571e-04$
80	$2.5703e-04$
90	$2.0308e-04$
100	$1.6450e-04$

3h) L'errore prodotto dalla formula del punto medio composita è leggermente inferiore rispetto a quello prodotto dalla formula dei trapezi composita ma l'ordine di grandezza dei due errori è lo stesso come ci si aspetta osservando che l'espressione del resto per entrambe le formule è proporzionale al termine $\left(\frac{b-a}{m}\right)^2$.