RICERCA DI RADICI DI EQUAZIONI NON LINEARI

CONSIDERIAMO

DATA $f : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SI CERCA $\alpha \in (a,b)$ TALE CHE $f(\alpha) = \emptyset$

$f \in C^0(a,b)$ f È SOLO CONTINUA IN (a,b)

$f \in C^1(a,b)$ f È CONTINUA E DERIVABILE UNA VOLTA

$f \in C^2(a,b)$ f È CONTINUA E DERIVABILE 2 VOLTE

$\vdots$

<u>DEF:</u> SIA $f \in C^m(a,b)$ CON $m \in \mathbb{N}^+$

- α SI DICE <u>RADICE SEMPLICE</u> SE $f(\alpha) = \emptyset$ E $f'(\alpha) \neq \emptyset$
- SE $f^{(m-1)}(\alpha) = \dots = f'(\alpha) = f(\alpha) = \emptyset$ E $f^{m}(\alpha) \neq \emptyset$

ALLORA α È UNA <u>RADICE DI ORDINE</u> m

$$f(x) = (x-\alpha)^m h(x) \quad \text{CON } h(x) \neq \emptyset$$

CASO PARTICOLARE: CALCOLARE RADICI DI UN POLINOMIO

IL TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA ASSICURA CHE UN POLINOMIO DI GRADO n AMMETTE ESATTAMENTE n RADICI REALI O COMPLESSE

PER $K=1 \dots n$

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp} u_{pj} \qquad j = k \dots n$$

$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip} u_{pk}}{u_{kk}} \qquad i = k+1 \dots n$$

ES: $x^2 - 3x + 2 = 0$ $\quad x_1 = 1 \quad x_2 = 2$

$f(x) = (x-1)(x-2) = 0$

$f(x_1) = f(x_2) = 0$ $\quad f'(x) = 2x - 3$

[redacted]

$f'(x_1) = -1 \neq 0$

x_1 RADICE SEMPLICE

$f'(x_2) = 1 \neq 0$

x_2 RADICE SEMPLICE

ES: $x^2 - 2x + 1 = 0$ $\quad x_1 = x_2 = 1$

$(x-1)^2 = 0$ $\quad f(x_1) = f(x_2) = 0$

$f'(x) = 2x - 2$ $\quad f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

$f''(x) = 2$ $\quad f''(x_1) = f''(x_2) = 2 \neq 0$

$\implies$ $x_1 = x_2$ È UNA RADICE DI ORDINE 2

L'APPROSSIMAZIONE NUMERICA DI UNA RADICE α DI f $(f(\alpha)=0)$ SI BASA IN GENERE SULL'USO DI METODI ITERATIVI, SI COSTRUISCE CIOÈ UNA SUCCESSIONE DI VALORI $x^{(n)}$ TALE CHE:

$$\lim_{x \to +\infty} x^{(n)} = \alpha$$

TEOREMA:
DATA UNA FUNZIONE $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, CONTINUA NELL'INTERVALLO $[a,b]$ E TALE CHE: $f(a) \cdot f(b) < 0$
ALLORA $\exists\, \alpha \in (a,b)$ TALE CHE $f(\alpha)=0$

METODO DI BISEZIONE

SI BASA SUL TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

AVVIAMO L'ALGORITMO:

$I_0 = [a,b]$ $\quad a^{(0)} = a \quad b^{(0)} = b \quad x^{(0)} = \dfrac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2}$

SE

$f(x^{(0)}) \cdot f(a^{(0)}) < 0$ $\;\to\;$ $a^{(1)} = a^{(0)} \quad b^{(1)} = x^{(0)}$

$f(x^{(0)})\, f(b^{(0)}) < 0$ $\;\to\;$ $a^{(1)} = x^{(0)} \quad b^{(1)} = b^{(0)}$

$$x^{(1)} = \frac{a^{(1)} + b^{(1)}}{2}$$

PASSO 2

PASSO 3

⋮

PASSO K

$$I_k = [a^{(k)}, b^{(k)}] \qquad x^{(k)} = \frac{a^{(k)} + b^{(k)}}{2}$$

SE

$f(x^{(k)})\, f(a^{(k)}) < 0$ $\qquad$ $f(x^{(k)})\, f(b^{(k)}) < 0$

$a^{(k+1)} = a^{(k)} \quad b^{(k+1)} = x^{(k)}$ $\qquad$ $a^{(k+1)} = x^{(k)} \quad b^{(k+1)} = b^{(k)}$

$$x^{(k+1)} = \frac{a^{(k+1)} + b^{(k+1)}}{2}$$

OSS: IL METODO DI BISEZIONE SI ARRESTA AL PASSO m TALE CHE : $m > 0$.

$$e^{(m)} := |x^{(m)} - \alpha| \quad : \text{ERRORE (DEVO CONOSCERE LA RADICE)}$$

$$\leq |I_m| = |b^{(m)} - a^{(m)}|$$

FISSIAMO UNA TOLLERANZA ε

VOGLIAMO CHE $e^{(m)} \leq \varepsilon$

$$e^{(m)} \leq |I_m| \leq \varepsilon$$

$$|I_m| = \frac{|I_0|}{2^m} = \frac{b-a}{2^m}$$

IL METODO DI BISEZIONE, QUINDI, È CONVERGENTE?

OVVERO:

$$\lim_{n\to+\infty} x^{(n)} = \alpha \ ?$$

OSSIA

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{|x^{(n)}-\alpha|}_{e^{(n)}} = 0 \ ?$$

$$e^{(n)} \le |I_n| = \frac{(b-a)}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

QUINDI LA RISPOSTA È SÌ

$$\boxed{\text{IL METODO DI BISEZIONE È GLOBALMENTE CONVERGENTE}}$$

INDIPENDENTE DAL PUNTO DI INNESCO (a, b), BASTA CHE LE IPOTESI SIANO VERIFICATE $\left(f(a)\, f(b) < 0\right)$

OSS: $e^{(n)} \le \dfrac{b-a}{2^n} \le \varepsilon$ SE $n \ge \dfrac{\log(b-a) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$

DEF. I NUMERI MACCHINA SONO I NUMERI RAPPRESENTABILI ESATTAMENTE IN UN CALCOLATORE

OSS: HANNO UN NUMERO FINITO DI CIFRE

DEF: L'INSIEME DEI NUMERI MACCHINA É CHIAMATO <u>SISTEMA FLOATING POINT</u>

ES: NOTAZIONE SCIENTIFICA

$$31415 = 0{,}31415 \cdot 10^{5} = 3{,}1415 \cdot 10^{4}$$

$$-0.00000123 = -0{,}123 \cdot 10^{-5} = -123 \cdot 10^{-8}$$

IL PUNTO SI SPOSTA

OSS: MATLAB RAPPRESENTA I NUMERI UTILIZZANDO 64 BIT

$$X = \underbrace{(\text{SEGNO})}_{1\ \text{BIT}}^{S} \cdot \big(\overbrace{\text{MANTISSA}}^{M}_{52\ \text{BIT}}\big) \cdot \underbrace{(\text{BASE})}_{\beta}^{\overbrace{(\text{ESPONENTE})}^{11\ \text{BIT}}_{P}}$$

$L \leq p \leq U \quad U>0 \quad L<0 \quad p \in [-1022, 1023]$

$$M = \frac{d_1}{\underbrace{\beta^1}_{\text{BASE}}} + \frac{d_2}{\beta^2} + \dots + \frac{d_t}{\beta^t} = (d_1, \dots, d_t)$$

$$0 \leq d_i \leq \beta - 1 \qquad i = 1 \dots t$$

OSS: NELLA NOTAZIONE POSIZIONALE:

$$X = \pm\, 0.d_1 d_2 \dots d_t \cdot \beta^p$$

OSS: IL PIÙ GRANDE NUMERO POSITIVO MEMORIZZABILE È:

REAL MAX

AL DI SOPRA SI È IN OVERFLOW

IL MINIMO NUMERO $> \emptyset$ RAPPRESENTABILE È:

REAL MIN

ALTRI VALORI PIÙ PICCOLI COMPRESI TRA $\emptyset$ E REALMIN POSSONO ESSERE GESTITI RINUNCIANDO AL PRIMO BIT DA $\emptyset$

OSS: ALCUNI VALORI SPECIALI RICHIEDONO UNA CODIFICA PARTICOLARE:

$\varnothing$, $\pm\infty$, NAN, EPS

DEF: L'EPSILON MACCHINA (EPS) È IL PIÙ PICCOLO NUMERO MACCHINA POSITIVO X TALE CHE: $(1+x)>1$

{ NON È IL PIÙ PICCOLO NUMERO POSITIVO RAPPRESENTABILE
QUELLO È REALMIN E:

$$1+\text{REALMIN} \not> 1$$
}

L'EPSILON MACCHINA DEFINISCE UNA STIMA DI QUANTO POSSA VARIARE AL PIÙ L'ERRORE RELATIVO. QUINDI INDICA LA SENSIBILITÀ DEL SISTEMA FLOATING POINT ADOTTATO

DEF: ERRORE ASSOLUTO

$$E_{ASS} = \left|\overbrace{\text{VALORE DI RIFERIMENTO}}^{\text{VALORE ESATTO MATEMATICO}} - \text{VALORE APPROSSIMATO}\right|$$

ERRORE RELATIVO

$$E_{REL} = \frac{E_{ASS}}{|\text{VALORE ESATTO}|}$$

OSS: MATLAB ESEGUE TUTTI I CALCOLI IN DOPPIA PRECISIONE

ES

- $S(1) = \emptyset$

① FOR $i = 1:10000$

$S(i+1) = S(i) + 0.0001$

END

$S(10001) = 0,9999999\ldots 906$

- $S = [0:\overset{\text{PASSO}}{0.0001}:1]$

$S(10001) = 1$

---

② ERRORE CANCELLAZIONE NUMERICA

$x = 77\,777\,777$

$y = \sqrt{x^2+1} - x \rightarrow \emptyset$

$z = y \cdot \dfrac{\overbrace{\sqrt{x^2+1}+x}^{1}}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \rightarrow 6.4286 \cdot 10^{-9}$

DOVREBBERO DARE LO STESSO RISULTATO

OSS: OPERAZIONE MACCHINA:

$$x \boxed{\odot} y = fl(fl(x) \odot fl(y)) \qquad \odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

IN GENERALE NON SEMPRE VALGONO LE PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI VALIDE IN ARITMETICA ESATTA

ES: $(a+b)+c \overset{?}{=} a+(b+c)$ POSSONO ESSERE DIVERSE

$a = 0.1234567$

$b = 6'666.325$

$c = -6'666.325$

① $(a+b)+c = 0.123456700000133$

$\#$

② $a+(b+c) = 0.12345670000000$

$E_{ASS_1} = 1.3 \cdot 10^{-13}$

NON VALE LA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

$E_{ASS_2} = \emptyset$

DEF: UN MODELLO $f(x)$ SI DICE BEN CONDIZIONATO SE VALE UNA RELAZIONE DEL TIPO:

$$\frac{\| f(x+\delta x) - f(x) \|}{\| f(x) \|} \leq K \frac{\| \delta x \|}{\| x \|} \qquad f(x) \neq 0 \quad x \neq 0$$

CON K "PICCOLO". K É DEFINITO: NUMERO DI CONDIZIONAMENTO

{ SE INSERENDO UN ERRORE SUI DATI L'ERRORE SUI RISULTATI É DELLO STESSO ORDINE DI GRANDEZZA $f(x)$ É BEN CONDIZIONATO }

[ALGORITMI DIVERSI PRODUCONO ERRORI DIVERSI]

ES: STUDIAMO IL CONDIZIONAMENTO DELL'OPERATORE SOMMA:

$x, y \in \mathbb{R}$ $\quad \bar{x} = fl(x) = x(1+\varepsilon_1)$

$\bar{y} = fl(y) = y(1+\varepsilon_2)$ $\quad \varepsilon_1, \varepsilon_2$ DELL'ORDINE DI EPS

$$\frac{|(\bar{x}+\bar{y}) - (x+y)|}{|x+y|} = \frac{|x(\cancel{1}+\varepsilon_1) + y(\cancel{1}+\varepsilon_2) - \cancel{x} - \cancel{y}|}{|x+y|} = \frac{|x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2|}{|x+y|} \leq \frac{|x\varepsilon_1| + |y\varepsilon_2|}{|x+y|}$$

$$= \frac{|x|}{|x+y|}|\varepsilon_1| + \frac{|y|}{|x+y|}|\varepsilon_2| = K_1|\varepsilon_1| + K_2|\varepsilon_2|$$

SE $x \cong -y$ ALLORA $K_1 K_2 \to +\infty$ E QUINDI HA UN CATTIVO CONDIZIONAMENTO

FENOMENO CHE SI EVIDENZIA IN CASO DI "CANCELLAZIONE NUMERICA"

ES: STUDIAMO IL CONDIZIONAMENTO DEL PRODOTTO

$$\frac{|\bar{x}\bar{y} - xy|}{|xy|} = \frac{|x(1+\varepsilon_1)y(1+\varepsilon_2) - xy|}{|xy|} = |\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2| \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_1\varepsilon_2| \underbrace{\leq}_{ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)}$$

$$\leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \frac{1}{2}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \underbrace{\leq}_{|\varepsilon|^2 \leq |\varepsilon| \text{ SE } |\varepsilon| \leq 1} |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \frac{1}{2}|\varepsilon_1| + \frac{1}{2}|\varepsilon_2|$$

$$= \underbrace{\frac{3}{2}|\varepsilon_1| + \frac{3}{2}|\varepsilon_2|}_{\text{NON DIPENDE DA } x \text{ E } y}$$

K È UGUALE A $\frac{3}{2}$ E QUINDI IL PRODOTTO È BEN CONDIZIONATO

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i=1 \dots n}$$

SISTEMA QUADRATO DI ORDINE n

SI PUÒ ESPRIMERE IN FORMA MATRICIALE

$$Ax=b \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ x, b \in \mathbb{R}^n$$

<u>TEOREMA</u>: LA SOLUZIONE DEL SISTEMA LINEARE $Ax=b$ $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $b\in\mathbb{R}^n$, ESISTE ED È UNICA SE:

$$A \text{ È INVERTIBILE} = A \text{ HA RANGO } n = \det(A) \neq \emptyset$$

ES:

① $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = 8 \neq \emptyset$

② $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = \emptyset$

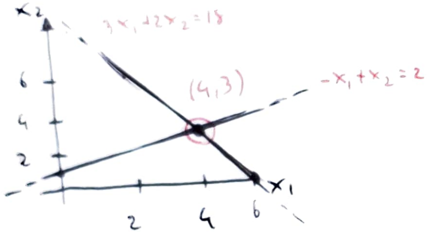
③ $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = \emptyset$

④ $A = \begin{pmatrix} -2.3/5 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = -0.04 \neq \emptyset$ PROSSIMO A $\emptyset$

RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI

(1)
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{SOSTITUZIONE}} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

SOLUZIONE UNICA



(2)
$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

QUESTE DUE RETTE COINCIDONO

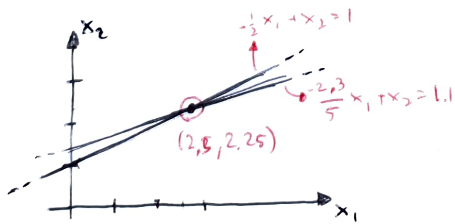
INFINITE SOLUZIONI

(3)
$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 1 \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

QUESTE DUE RETTE SONO PARALLELE

NESSUNA SOLUZIONE

(4)
$$\begin{cases} -\frac{2.3}{5}x_1 + x_2 = 1.1 \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$



ESSENDO MOLTO SIMILI UN CALCOLATORE POTREBBE AVERE PROBLEMI A CALCOLARE QUESTO SISTEMA

ES: $H = \text{hilb}(15)$

$b = H * \text{ones}(15,1)$

$x = H \backslash b$

• \ •: FUNZIONE PER RISOLVERE SISTEMI LINEARI

LA SOLUZIONE CHE MI ASPETTO È UN VETTORE 15×1 DI 1, PERÒ...

A CAUSA DEGLI ERRORI DI ARROTONDAMENTO, IMPLEMENTANDO UN METODO DI RISOLUZIONE, NON SI OTTERRÀ LA SOLUZIONE ESATTA DEL SISTEMA LINEARE, MA UNA SUA APPROSSIMAZIONE

DEF: VETTORE RESIDUO $:= r = b - A(x + \delta x)$

OSS: $\underbrace{\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|}}_{\text{ERRORE RELATIVO SULLA SOLUZIONE}} \leq \text{COND}(A) \dfrac{\|r\|}{\|b\|}$ CON $\text{COND}(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$: NUMERO DI CONDIZIONAMENTO

OSS: $\text{COND}(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\| \geq \|A \cdot A^{-1}\| = \|Id\| = 1$

$$\text{COND}(A) \geq 1$$

PROPOSIZIONE: SE $\|\delta A\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$ ALLORA

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{COND}(A)}{1-\text{COND}(A)\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)$$

IL VALORE COND(A) PUÒ FAR NOTARE UNA POSSIBILE CRITICITÀ NELLA RISOLUZIONE DEL SISTEMA

ES: $Ax=b$ $\quad A=\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \frac{1}{\varepsilon}\end{pmatrix}$ $\quad \|A\|_1 = \max\limits_{j=1,2}\left(\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon}$

$0<\varepsilon<<1$

$$\boxed{\|A\|_1 = \max_j\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)}$$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1/\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}$ $\quad \|A^{-1}\|_1 = \frac{1}{\varepsilon}$ $\quad \text{COND}(A) = \frac{1}{\varepsilon^2} >> 1$

SE $\varepsilon \to 0$ IL SISTEMA DIVENTA MAL CONDIZIONATO

SI PUÒ MIGLIORARE IL CONDIZIONAMENTO DI UN SISTEMA LINEARE MOLTIPLICANDO IL SISTEMA PER UNA MATRICE OPPORTUNA

PRECONDIZIONATORE: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$

PRECONDIZIONATORE: MATRICE CON CUI SI MOLTIPLICA UNA MATRICE PER DIMINUIRE IL CONDIZIONAMENTO

$$CAx = Cb \qquad \tilde{A}x = \tilde{b}$$

$$\tilde{A} = CA = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad \tilde{b} = Cb$$

$\mathrm{COND}(\tilde{A}) = \|\tilde{A}\|_1 \|\tilde{A}^{-1}\|_1 = 1$ QUESTO SISTEMA EQUIVALENTE È BEN CONDIZIONATO

NORMA DI VETTORI

APPLICAZIONE $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, INDICATA CON $\|x\|$, QUANDO IDENTIFICA:

- $\|x\| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$
- $\|x\| = 0$ SE E SOLO SE $x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ VALE: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

NORMA p, PER $1 \leq p \leq \infty$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

NORME DI MATRICI

- NORME INDOTTE:
  - $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
  - $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$ ρ: MASSIMO AUTOVALORE DI $A^T A$ IN VALORE ASSOLUTO
  - $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

- NORMA DI FROBENIUS

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $\quad \|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$

RISOLUZIONE SISTEMI LINEARI

- **METODI DIRETTI**: IN ARITMETICA ESATTA LA SOLUZIONE IN UN NUMERO FINITO DI PASSI
- **METODI ITERATIVI**: DETERMINANO UNA SUCCESSIONE DI APPROSSIMANTI DELLA SOLUZIONE

$$Ax = b \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad x, b \in \mathbb{R}^n \quad \det(A) \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \emptyset \\ & a_{22} & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \longrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

COSTO COMPUTAZIONALE = n DIVISIONI $= O(n)$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{22}x_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad i = 1 \dots n}$$

MATRICE DIAGONALE

$$a_{ii} \neq 0 \quad i = 1 \dots n$$

MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \emptyset & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$a_{ii} \neq \emptyset \quad i = 1 \dots n$

$$Ax = b \mapsto \begin{cases} a_{nn} x_n = b_n \\ a_{n-1,n-1} x_{n-1} + a_{n-1,n} x_n = b_{n-1} \\ a_{n-2,n-2} x_{n-2} + a_{n-2,n-1} x_{n-1} + a_{n-2,n} x_n = b_{n-2} \\ \vdots \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \end{cases}$$

$x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$ 1 DIVISIONE

1 SOMMA 1 PRODOTTO

$x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1,n} x_n}{a_{n-1,n-1}}$ 1 DIVISIONE

2 SOMME 2 PRODOTTI

$x_{n-2} = \dfrac{b_{n-2} - a_{n-2,n-1} x_{n-1} - a_{n-2,n} x_n}{a_{n-2,n-2}}$ 1 DIVISIONE

$\vdots$

$x_1 = \dfrac{b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j}{a_{11}}$ n-1 PRODOTTI n-1 SOMME 1 DIVISIONE

METODO DI SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}} \qquad i = n-1, n-2, \dots 1$$

COSTO COMPUTAZIONALE:

n DIVISIONI

$\dfrac{(n-1)(n)}{2}$ SOMME

$\dfrac{(n-1)(n)}{2}$ PRODOTTI

$\rightarrow O(n^2)$

MATRICE TRIANGOLARE INFERIORE

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \emptyset \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$a_{ii} \neq \emptyset \quad i = 1 \dots n$

METODO DI SOSTITUZIONE IN AVANTI

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j}{a_{ii}} \qquad i = 2 \dots n$$

COSTO COMPUTAZIONALE: $O(n^2)$

MATRICE DENSA (SENZA ELEMENTI NULLI)

IDEA: CERCO DI TRASFORMARE IL SISTEMA DI PARTENZA IN UN SISTEMA EQUIVALENTE CON MATRICE TRIANGOLARE

TROVARE UNA MATRICE M NON SINGOLARE TALE CHE

$$\underbrace{MA}_{\text{MATRICE TRIANGOLARE}}x = Mb$$

$$A = A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ \vdots & a_{22}^{(1)} & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} \qquad b = b^{(1)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

IPOTESI: $a_{11} \neq 0$

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n1}^{(1)}x_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

ALGORITMO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS

COSTRUISCO UN'EQUAZIONE PER TOGLIERE IL COEFFICIENTE $a_{21}^{(1)}$ NELLA SECONDA EQUAZIONE FACENDO UNA COMBINAZIONE LINEARE DELLA PRIMA E SECONDA EQUAZIONE CHE POI SOSTITUIRO' ALLA SECONDA EQ.NE

MATRICE TRIANGOLARE INFERIORE

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \emptyset \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad a_{ii} \neq \emptyset \quad i=1 \ldots n$$

METODO DI SOSTITUZIONE IN AVANTI

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j}{a_{ii}} \qquad i=2 \ldots n$$

COSTO COMPUTAZIONALE: $O(n^2)$

- $m_{21} = -\dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ $\qquad m_{21} \cdot 1^a$ EQ.NE $+ 2^a$ EQ.NE $\longmapsto 2^a$ EQ.NE

$a_{2j}^{(2)} = m_{21} a_{1j}^{(1)} + a_{2j}^{(1)} \qquad j = 1 \dots n \qquad$ PER $j=1 \quad a_{2j}^{(2)} = 0$

$b_2^{(2)} = m_{21} b_1^{(1)} + b_2^{(1)}$

- $m_{i1} = -\dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ $\qquad m_{i1} \cdot 1^a$ EQ.NE $+ i^a$ EQ.NE $\longmapsto i^a$ EQ.NE $\qquad$ $(n-1)$ DIVISIONI

PER A: $(n-1)^2$ PRODOTTI
$(n-1)^2$ SOMME

$a_{ij}^{(2)} = m_{i1} a_{1j}^{(1)} + a_{ij}^{(1)} \qquad j = 2 \dots n$

$b_i^{(2)} = m_{i1} b_1^{(1)} + b_i^{(1)}$

PER b: $n-1$ PRODOTTI, $n-1$ SOMME

OTTERRÒ UN SISTEMA LINEARE EQUIVALENTE DELLA FORMA

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \qquad b^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{IPOTESI} : a_{22}^{(2)} \neq 0}$

• $m_{i2} = -\dfrac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$ $\quad i = 3 \dots n$

$m_{i2} \cdot 2^a$ EQ.NE + i^a EQ.NE fornisce i^a EQ.NE (n-2) DIVISIONI

$a_{ij}^{(3)} = m_{i2} a_{2j}^{(2)} + a_{ij}^{(2)}$

$b_i^{(3)} = m_{i2} b_2^{(2)} + b_i^{(2)}$ $\quad j = 3 \dots n$

PER A: $(n-2)^2$ PRODOTTI
$(n-2)^2$ SOMME

PER b: (n-2) PRODOTTI, (n-2) SOMME

OTTERÒ UN SISTEMA EQUIVALENTE DELLA FORMA:

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix} \qquad b^{(3)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(3)} \end{pmatrix}$$

DOPO K-1 PASSI ABBIAMO IL SEGUENTE SISTEMA

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2,k-1}^{(2)} & a_{2k}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k-1)} \\ 0 & 0 & & 0 & a_{k,k}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & a_{k+1,k}^{(k)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k)} \\ & & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix} \qquad b^{(k)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_{k-1}^{(k-1)} \\ b_k^{(k)} \\ \vdots \\ b_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{IPOTESSI: } a_{kk}^{(k)} \neq 0}$$

- $m_{ik} = -\dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ $\quad i = k+1 \dots n \quad$ $m_{ik} \cdot k^a$ EQ.NE $+ i^a$ EQ.NE $\rightarrow i^a$ EQ.NE $\quad (n-k)$ DIVISIONI

PER A: $(n-k)^2$ SOMME

$(n-k)^2$ PRODOTTI

$$a_{ij}^{(k+1)} = m_{ik} a_{kj}^{(k)} + a_{ij}^{(k)} \qquad j = k+1, \dots, n$$

$$b_i^{(k+1)} = m_{ik} b_k^{(k)} + b_i^{(k)}$$

PER b: $(n-k)$ SOMME, $(n-k)$ PRODOTTI

DOPO $n-1$ PASSI OTTERÒ UN SISTEMA LINEARE EQUIVALENTE

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix} \qquad b^{(n)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

COSTO COMPUTAZIONALE

DIVISIONI $= (n-1)+(n-2)+\dots+1 = \dfrac{n(n-1)}{2} \in O\left(\dfrac{n^2}{2}\right)$

PRODOTTI $= \left((n-1)+(n-1)^2\right) + \left((n-2)+(n-2)^2\right) + \dots + \left(1+1^2\right) = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i \in O\left(\dfrac{n^3}{3}\right)$

SOMME $\in O\left(\dfrac{n^3}{3}\right)$

COSTO TOTALE $= \underbrace{O\left(\dfrac{2n^3}{3}\right)}_{\text{ALGORITMO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS}} +$ RISOLUZIONE DI SISTEMA TRIANGOLARE $O(n^2) = O(n^3)$

OSS: QUALCHE ELEMENTO $a_{kk}^{(k)}$ POTREBBE ESSERE NULLO O "MOLTO PICCOLO"

$\downarrow$

PIVOTING: SI SCAMBIANO ALCUNE RIGHE O COLONNE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

OCCORRERÀ SCAMBIARE 2ª E 3ª RIGA MOLTIPLICANDO PER UNA MATRICE:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

OSS: SE VARIO IL TERMINE NOTO DEVO RIPETERE TUTTO L'ALGORITMO

$\rightarrow$ CI SPOSTIAMO VERSO ALGORITMI DI <u>FATTORIZZAZIONE</u>

FATTORIZZAZIONI

IL METODO DI EL. DI GAUSS PUÓ ESSERE REINTERPRETATO COME UNA FATTORIZZAZIONE

$$Ax = b \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \det(A) \neq 0$$

$$x, b \in \mathbb{R}^n$$

$$\downarrow$$

$$LUx = b$$

VANTAGGI: LA FATTORIZZAZIONE DIPENDE DALLA SOLA MATRICE A, E NON DAL TERMINE NOTO b, CIÒ CI PERMETTE DI RISOLVERE DIVERSI SISTEMI LINEARI SEMPRE DI MATRICE A MA CON DIVERSI b

IDEA: U: MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE

L: MATRICE TRIANGOLARE INFERIORE CON ELEMENTI SULLA DIAGONALE UGUALI A 1

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ \emptyset & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & \emptyset \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ax=b \longmapsto L\underbrace{Ux}_{y}=b \xrightarrow{O(n^3)} \begin{cases} Ly=b & \text{SOSTITUZIONE IN AVANTI}: O(n^2) \\ Ux=y & \text{SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO}: O(n^2) \end{cases}$$

OSS: VARIANDO b, HO IL COSTO COMPUTAZIONALE DI RISOLUZIONE DEI DUE SISTEMI $O(n^2)$

{ L'IDEA È CHE SPENDO $O(n^3)$ PER LA FATTORIZZAZIONE E POI $O(n^2)$ PER LA RISOLUZIONE (COSÌ SE CAMBIO b NON DEVO RIFARE TUTTA LA FATTORIZZAZIONE A $O(n^3)$) }

QUANDO PUÒ ESSERE UTILE?

ES: CALCOLARE L'INVERSA DI UNA MATRICE

$$A \cdot \underbrace{A^{-1}}_{?} = I$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Colonne: $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n$ e $\tilde{i}_1, \tilde{i}_2, \dots, \tilde{i}_n$

RISOLVO:

$$A\tilde{a}_1 = \tilde{i}_1 \longmapsto \tilde{a}_1$$
$$A\tilde{a}_2 = \tilde{i}_2 \longmapsto \tilde{a}_2$$
$$\vdots$$
$$A\tilde{a}_n = \tilde{i}_n \longmapsto \tilde{a}_n$$

[QUINDI RISOLVO n SISTEMI LINEARI MODIFICANDO SOLO IL TERMINE NOTO]

$A \mapsto LU \qquad O(n^3)$

$LU\tilde{a}_i = \tilde{i}_i \qquad O(n^2) \qquad i=1 \dots n$

DALL'ALGORITMO DI EL. DI GAUSS ALLA FATTORIZZAZIONE

$$A = A^{(1)} \qquad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad M_1 A^{(1)} = A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{32} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & m_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad M_2 A^{(2)} = A^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & & \vdots \\ \vdots & m_{k+1,k} & \ddots & \\ & \vdots & & \\ 0 \cdots & m_{nk} & & 1 \end{pmatrix}$$

k° COLONNA

$$M_k A^{(k)} = A^{(k+1)} \qquad k = 1 \dots n-1$$

$$M_{n-1} A^{(n-1)} = A^{(n)} = U$$

RIASSUMENDO :

$$M_{n-1} M_{n-2} \dots M_3 M_2 M_1 A = U$$

$$M_{n-1}^{-1} \left[M_{n-1} M_{n-2} \dots M_3 M_2 M_1 A \right] = M_{n-1}^{-1} U$$

$$M_{n-2} \dots M_3 M_2 M_1 A = M_{n-1}^{-1} U$$

$$\vdots$$

$$A = \underbrace{M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-1}^{-1}}_{L} U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & & \vdots \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -m_{n1} & -m_{n2} & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

OSS: LA FATTORIZZAZIONE LU INDOTTA DAL METODO DI EL. DI GAUSS ESISTE ED È UNICA SE A È NON SINGOLARE

PER OTTIMIZZARE MEMORIA RISCRIVO LU NELLA MEMORIA IN CUI È CONTENUTA A

$$\begin{pmatrix} a_{11} & U & a_{1n} \\ L & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} = A$$

TROVIAMO ALGORITMI ALTERNATIVI PER IL CALCOLO DELLA FATTORIZZAZIONE LU

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \emptyset \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & \emptyset & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

QUANTI COEFFICIENTI INCOGNITI HO PER TROVARE LA FATT. LU = n^2 ELEMENTI

↳ QUINDI n^2 EQUAZIONI

$$a_{ij} = \sum_{r=1}^{\min(i,j)} l_{ir}\, u_{rj}$$

$i, j = 1 \dots n$

ALGORITMO DI DOOLITTLÈ (ALG. RIGA COLONNA)

- CONOSCO LA PRIMA RIGA DI L, LA MOLTIPLICO PER LE COLONNE DI U

  $1 \cdot u_{1j} = a_{1j} \qquad j = 1 \dots n$

  LA PRIMA RIGA DI U COINCIDE CON LA PRIMA RIGA DI A

- CONOSCO TUTTA LA PRIMA COLONNA DI U, LA MOLTIPLICO PER LE RIGHE DI L

  $l_{i1} \cdot u_{11} = a_{i1} \qquad i = 2 \dots n$ DA CUI $l_{i1} = a_{1i} / u_{11}$

- ORA CONOSCO TUTTA LA 2ª RIGA DI L, LA MOLTIPLICO PER LE COLONNE DI U

  $l_{21} \cdot u_{1j} + 1\, u_{2j} = a_{2j} \qquad j = 2 \dots n$ DA CUI $u_{2j} = a_{2j} - l_{21} u_{1j}$

- ORA CONOSCO TUTTA LA 2ª COLONNA DI U, LA MOLTIPLICO PER LE RIGHE DI L

  $l_{i1} u_{12} + l_{i2} u_{22} = a_{i2} \qquad i = 3 \dots n$ DA CUI $l_{i2} = \dfrac{a_{i2} - l_{i1} u_{12}}{u_{22}}$

  SO CHE È ZERO: $\det(A) = \det(L)\det(U) \neq 0$

- ORA CONOSCO LA 3ª RIGA DI L, LA MOLTIPLICO PER U

$$l_{31}\cdot u_{1j} + l_{32}\cdot u_{2j} + 1\cdot u_{3j} = a_{3j} \qquad j=3\dots n \qquad \text{DA CUI} \quad u_{3j} = a_{3j} \sum_{p=1}^{2} l_{3p}u_{pj}$$

- ORA CONOSCO LA 3ª COLONNA DI U, LA MOLTIPLICO PER L

$$l_{i1}\cdot u_{13} + l_{i2}u_{23} + l_{i3}u_{33} = a_{i3} \qquad i=4\dots n \qquad \text{DA CUI} \quad l_{i3} = \frac{a_{i3} - \sum_{p=1}^{2} l_{ip}u_{p3}}{u_{33}}$$

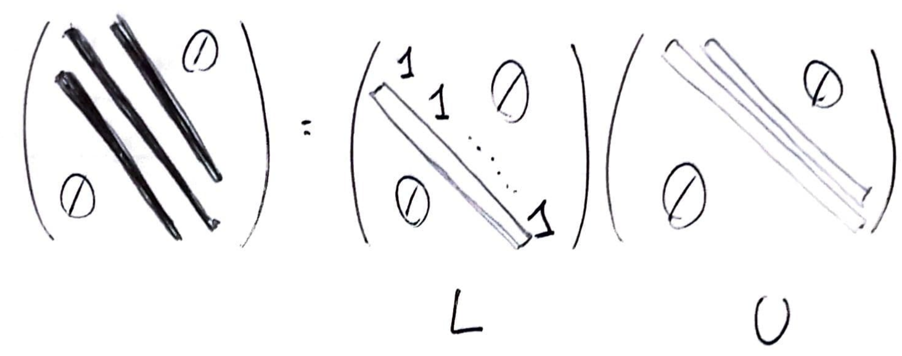
<u>ALGORITMO</u>:

$$\boxed{\begin{aligned} & k=1\dots n \\ & \quad u_{kj} = a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp}u_{pj} \qquad j=k\dots n \\ & \quad l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip}u_{pk}}{u_{kk}} \qquad i=k+1\dots n \end{aligned}}$$

POSSO SPENDERE MENO DI $O(n^3)$ PER FATTORIZZARE UNA MATRICE? SI, MA SOLO IN CASI SPECIFICI:

- A MATRICE TRIDIAGONALE

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & \emptyset \\ b_2 & a_2 & c_2 & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ \emptyset & & b_n & a_n \end{pmatrix} =$$



$d_0 = 1$ — 0) Ø SOMME, Ø PRODOTTI

$d_1 = DET(a_1) = a_1$ — 1) Ø SOMME, Ø PRODOTTI

$d_2 = DET\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = a_1 a_2 - c_1 b_2 = a_2 d_1 - b_2 c_1 d_0$ — 2) 1 SOMMA, 3 PRODOTTI

$d_3 = DET\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & \emptyset \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ \emptyset & b_3 & a_3 \end{pmatrix} = a_3 \cdot d_2 - b_3 c_2 d_1$ — 3) 1 SOMMA, 3 PRODOTTI

$\vdots$

$d_K = a_K \cdot d_{(K-1)} - b_K c_{(K-1)} d_{(K-2)} \qquad K = 2 \dots n$

CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ LA FATTORIZZAZIONE LU SIA UNICA È CHE

$$d_i \neq \emptyset \quad \forall i : 1 \dots n-1$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ b_2 \frac{d_0}{d_1} & 1 & & \emptyset & \\ & b_3 \frac{d_1}{d_2} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \emptyset & & b_n \frac{d_{n-2}}{d_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} \frac{d_1}{d_0} & c_1 & & \emptyset \\ & \frac{d_2}{d_1} & c_2 & \\ & & \ddots & c_{n-1} \\ \emptyset & & & \frac{d_n}{d_{n-1}} \end{pmatrix}$$

OSS: AFFINCHÉ A SIA INVERTIBILE DEVE VALERE $d_n \neq 0$

COSTO COMPUTAZIONALE

SOMME : $n-1$

PRODOTTI :

- DETERMINANTI : $3(n-1)$
- CALCOLO L : $n-1$

TOT: $4(n-1)$

DIVISIONI : $2(n-1)+1$

Costo: $O(n)$

A TRIDIAGONALE

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ b_2\frac{d_0}{d_1} & 1 & & \\ & b_3\frac{d_1}{d_2} & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{d_1}{d_0} & c_1 & & \\ & \frac{d_2}{d_1} & c_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \frac{d_n}{d_{n-1}} \end{pmatrix}}_{U}$$

d_i: DETERMINANTE DEL MINORE DI NORD-OVEST i

$$\begin{aligned} d_0 &= 1 \\ d_1 &= a_1 \\ d_2 &= \det\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = a_1a_2 - c_1b_2 = a_2d_1 - b_2c_1d_0 \\ &\vdots \\ d_k &= a_k d_{k-1} - b_k c_{k-1} d_{k-2} \qquad k=2\dots n \end{aligned}$$

DOBBIAMO RISOLVERE $Ax=t$

$$L\underbrace{Ux}_{y} = t \qquad \begin{cases} Ly = t \\ Ux = y \end{cases}$$

RISOLUZIONE DEL SISTEMA $Ly=t$ CON SOSTITUZIONE IN AVANTI

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ b_2\frac{d_0}{d_1} & 1 & 0 & & \\ 0 & b_3\frac{d_1}{d_2} & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & b_n\frac{d_{n-2}}{d_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} y_1 = t_1 \\ b_2\frac{d_0}{d_1}y_1 + y_2 = t_2 \rightarrow y_2 = t_2 - b_2\frac{d_0}{d_1}y_1 \\ \vdots \\ y_k = t_k - b_k\frac{d_{k-2}}{d_{k-1}}y_{k-1} \qquad k=2\dots n \end{cases}$$

RISOLVIAMO IL SISTEMA $Ux = y$ CON SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO

$$\begin{pmatrix} \frac{d_1}{d_0} & c_1 & 0 & & \emptyset \\ 0 & \frac{d_2}{d_1} & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & \emptyset & & & \frac{d_n}{d_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \\ y_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \frac{d_n}{d_{n-1}} x_n = y_n \rightarrow x_n = y_n \frac{d_{n-1}}{d_n} \\ \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = y_{n-1} \rightarrow x_{n-1} = \frac{d_{n-2}}{d_{n-1}} \left(y_{n-1} - c_{n-1} x_n \right) \\ \vdots \\ x_k = \left(y_k - c_k x_{k+1} \right) \frac{d_{k-1}}{d_k} \quad k = n-1, \dots, 1 \end{cases}$$

COSTO COMPUTAZIONALE:

1° SISTEMA:

SOMME: $n-1$

PRODOTTI: $2(n-1)$

DIVISIONI: $n-1$

2° SISTEMA

SOMME: $n-1$

PRODOTTI: $2n-1$

DIVISIONI: n

OSS: LA RISOLUZIONE DI UN SISTEMA LINEARE TRIDIAGONALE HA UN COSTO LINEARE $O(n)$

- A SIMMETRICA DEFINITA POSITIVA

DEF: UNA MATRICE $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ É **DEFINITA POSITIVA** SE

$$x' A x > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \; x \neq 0$$

PROPRIETÁ: SIA A SIMMETRICA A É DEFINITA POSITIVA SE E SOLO SE VALE UNA DELLE SEGUENTI PROPRIETÁ

1) A HA AUTOVALORI TUTTI POSITIVI

2) ESISTE UNA MATRICE NON SINGOLARE H TALE CHE $A = HH'$

DEF: UNA MATRICE A SI DICE A DOMINANZA DIAGONALE STRETTA PER RIGHE SE:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1 \dots n$$

PER COLONNE

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ji}| \qquad i = 1 \dots n$$

PROPRIETÀ: UNA MATRICE A DOMINANZA DIAGONALE STRETTA, SIMMETRICA CON ELEMENTI DIAGONALI POSITIVI, È ANCHE DEFINITA POSITIVA

TEOREMA: SIA $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ MATRICE SIMMETRICA DEFINITA POSITIVA, ALLORA ESISTE UNA MATRICE B TRIANGOLARE INFERIORETALE CHE:

$$A = B \cdot B'$$

INOLTRE SE GLI ELEMENTI DIAGONALI DI B SONO SCELTI POSITIVI, TALE FATTORIZZAZIONE È UNICA (FATTORIZZAZIONE DI CHOLESKY)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & & & \emptyset \\ b_{21} & b_{22} & & \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \qquad B' = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ \emptyset & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$\bar{B} = B'$

$A = B \cdot B' \quad i,j = 1, \dots, n \qquad a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \bar{b}_{kj} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} b_{ik} \bar{b}_{kj} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} b_{ik} b_{kj}$

POICHÉ A È SIMMETRICA $a_{ij} = a_{ji}$

a_{ij} CON $1 \leq i \leq j \leq n \longrightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} b_{ik} b_{jk}$

- $i=1$

  $j=1$ $\quad a_{11} = l_{11}^2 \longrightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$

  $j=2$ $\quad a_{12} = l_{11} l_{21} \longrightarrow l_{21} = \dfrac{a_{12}}{l_{11}}$

  $\vdots$

  $j=n$ $\quad a_{1n} = l_{11} l_{n1} \longrightarrow l_{n1} = \dfrac{a_{1n}}{l_{11}}$

- $i=2$

  $j=2$ $\quad a_{22} = l_{21} l_{21} + l_{22} l_{22} \longrightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$

  $\vdots$

  $j=n$ $\quad a_{2n} = l_{21} l_{n1} + l_{22} l_{n2} \longrightarrow l_{n2} = \dfrac{a_{2n} - l_{21} l_{n1}}{l_{22}}$

- i

  $j=i$ $\quad a_{ii} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik} l_{ik} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 + l_{ii}^2 \longrightarrow l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$

  $j=i+1$ $\quad a_{i,i+1} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik} l_{i+1,k} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{i+1,k} + l_{ii} l_{i+1,i} \longrightarrow l_{i+1,i} = \dfrac{a_{i,i+1} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{i+1,k}}{l_{ii}}$

- $i=1 \dots n$

  $j=i$ $\quad l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$

  $j=i+1 \dots n$ $\quad l_{ji} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{ii}}$

FATTORIZZAZIONE DI CHOLESKY

METODI ITERATIVI

LA SOLUZIONE SI OTTIENE COME LIMITE DI OPERAZIONI APPROSSIMANTI DOPO UN NUMERO INFINITO DI PASSI

NEL CASO DI MATRICI PIENE UN METODO ITERATIVO RICHIEDE n^2 OPERAZIONI OGNI PASSO

SE UN METODO ITERATIVO É RAPIDAMENTE CONVERGENTE, OSSIA RAGGIUNGE LA SOLUZIONE APPROSSIMATA ALLA TOLLERANZA RICHIESTA IN UN NUMERO MINORE DI PASSI RISPETTO A n ALLORA IL SUO COSTO COMP. SARÁ MINORE DI $O(n^3)$

I METODI ITERATIVI COSTRUISCONO UNA SUCCESSIONE DI VETTORI

$$\{\underline{x}^{(k)}\} \qquad \underline{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^n \text{ TALE CHE } x^{(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \underline{x}$$

CON $\underline{x}$ SOLUZIONE ESATTA DEL SISTEMA $A\underline{x} = \underline{b}$

DEF: SIA $\underline{x}^{(k)}$ UNA SUCCESSIONE DI VETTOR DI $\mathbb{R}^n$, ESSA CONVERGE AL VETTORE $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ SE ESISTE UNA NORMA VETTORIALE PER CUI

$$\lim_{k \to +\infty} \|\underline{x} - \underline{x}^{(k)}\| = 0$$

OSS: LA CONVERGENZA SI HA COMPONENTE PER COMPONENTE

METODI ITERATIVI LINEARI

$$\begin{cases} \underline{x}^{(0)} \text{ VETTORE ASSEGNATO} \\ \underline{x}^{(k+1)} = B\underline{x}^{(k)} + \underline{q} \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots$$

COSTO:

PARTE DI SOMMA: $O(n)$

PARTE DI MOLTIPLICAZIONE $O(n^2)$

TOT: $O(n^2)$

[COSTO AD OGNI ITERAZIONE]

DEF: UN METODO ITERATIVO SI DICE CONSISTENTE SE

$$\underline{x}^{(k)} = \underline{x} \quad \text{IMPLICA} \quad \underline{x}^{(k+i)} = \underline{x}^{(k)} = \underline{x} \qquad i = 1, 2, \dots$$

OSS UN METODO ITERATIVO LINEARE SARÀ CONSISTENTE SE

$$\underline{q} = (Id - B)A^{-1}\underline{b}$$

DIM: $\underline{x} = B\underline{x} + \underline{q}$ e $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

DA CUI $A^{-1}\underline{b} = BA^{-1}\underline{b} + \underline{q} \Rightarrow \underline{q} = (I - B)A^{-1}\underline{b}$

OSS: IL COSTO DEL PRODOTTO SI ABBASSA SE B È FORTEMENTE SPARSA

CRITERI D'ARRESTO NEL CALCOLO DI SISTEMI LINEARI ATTRAVERSO METODI ITERATIVI

QUANDO: $A\underline{x}=\underline{b} \longmapsto \|A\underline{x}-\underline{b}\|=0 \;\vdash$ [CIO' E' IMPOSS. SU UN COMPUTER] $\to \|A\underline{x}-\underline{b}\| < 3 > 10^{-16}$

CRITERIO DEL RESIDUO: INTERROMPO L'ALGORITMO ITERATIVO AL PIÙ PICCOLO VALORE $K \in \mathbb{N}$ T.C.:

$$\|A\underline{x}^{(k)}-\underline{b}\|<\varepsilon \quad \text{TOLLERANZA PREFISSATA}$$

$$\|\underline{x}^{(k)}-\underline{x}\|<\varepsilon \not\Leftarrow$$

CRITERIO DELL'INCREMENTO: $\not\Rightarrow$

INTERROMPO L'ALGORITMO ITERATIVO AL PIÙ PICCOLO PASSO $K \in \mathbb{N}$ T.C.

$$\|\underline{x}^{(k+1)}-\underline{x}^{(k)}\|<\varepsilon$$

[$\not\Rightarrow$: NON IMPLICA]

OSS: $\|\underline{x}^{(k+1)}-\underline{x}^{(k)}\| = \|\underline{x}^{(k+1)}-\underline{x}+\underline{x}-\underline{x}^{(k)}\| \leq$

$\leq \|\underline{x}^{(k+1)}-\underline{x}\| + \|\underline{x}^{(k)}-\underline{x}\|$

SE $(\underline{x}^{(k+1)}-\underline{x}) \simeq (\underline{x}^{(k)}-\underline{x})$ ALLORA $\|\underline{x}^{(k+1)}-\underline{x}^{(k)}\| \simeq 0$

SE LA CONVERGENZA È LENTA IL TEST È SODDISFATTO ANCHE SE POTREI ESSERE DISTANTE DALLA SOLUZIONE ESATTA

COSTRUZIONE DI METODI ITERATIVI LINEARI BASATI SULLA TECNICA DI SPLITTING

$A\underline{x} = \underline{b}$ $\quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ NON SINGOLARE, $\underline{x}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$

$A = P - N$

$(P-N)\underline{x} = \underline{b} \iff P\underline{x} - N\underline{x} = \underline{b} \iff P\underline{x} = N\underline{x} + \underline{b}$

$P\underline{x}^{(k+1)} = N\underline{x}^{(k)} + \underline{b}$ → PERCHÉ IL METODO CONVERGE

$\underline{x}^{(k+1)} = \underbrace{P^{-1}N}_{B}\,\underline{x}^{(k)} + \underbrace{P^{-1}\underline{b}}_{\underline{q}}$

P DOVRA' ESSERE INVERTIBILE CON BASSO COSTO COMPUTAZIONALE, E DOVRA' ESSERE NON SINGOLARE

METODO DI JACOBI

$A = D + C$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a_{11} & & \emptyset \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ \emptyset & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

CON $a_{ii} \neq \emptyset$ (SE NECESSARIO SCAMBIEREMO RIGHE E O COLONNE)

$$C = \begin{pmatrix} \emptyset & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \emptyset & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \emptyset \end{pmatrix}$$

$$(D+C)\underline{x} = \underline{b} \longmapsto D\underline{x} + C\underline{x} = \underline{b} \longmapsto D\underline{x} = -C\underline{x} + \underline{b}$$

$$\begin{cases} \underline{X}^{(0)} \text{ ASSEGNATO} \\ \underline{X}^{(k+1)} = \underbrace{-D^{-1}C}_{B_J} \underline{X}^{(k)} + \underbrace{D^{-1}\underline{b}}_{\underline{q}_J} \end{cases}$$

$$B_J = - \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

METODO PER COMPONENTI:

$$\begin{cases} X^{(0)} \text{ ASSEGNATO} \\ X_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}} \left[- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right] \end{cases} \qquad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ k = 0, 1, \dots \end{matrix}$$

OSS: É UN METODO FORTEMENTE PARALLELIZZABILE (COMPONENTI INDIPENDENTI)

TEOREMA: SE LA MATRICE A É DIAGONALE DOMINANTE STRETTA ALLORA IL METODO DI JACOBI CONVERGE

METODO DI GAUSS-SEIDEL

$$A = D + E + F$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & 0 & & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \longmapsto (E+D+F)\underline{x} = \underline{b} \longmapsto (E+D)\underline{x} = \underline{b} - F\underline{x}$$

SE $(E+D)$ E' NON SINGOLARE:

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ ASSEGNATO} \\ x^{(k+1)} = \underbrace{-(E+D)^{-1}F}_{B_{GS}}\,\underline{x}^{(k)} + \underbrace{(E+D)^{-1}\underline{b}}_{\underline{q}_{GS}} \end{cases}$$

METODO PER COMPONENTI (PARTENDO DA JACOBI)

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}\right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}\underset{\downarrow\, x_1^{(k+1)}}{x_1^{(k)}} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}\right]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}\underset{\downarrow\, x_1^{(k+1)}}{x_1^{(k)}} - a_{32}\underset{\downarrow\, x_2^{(k+1)}}{x_2^{(k)}} - a_{34}x_4^{(k)} - \dots - a_{3n}x_n^{(k)}\right]$$

$\vdots$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}\right]$$

$x_1^{(k)} \to x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k)} \to x_2^{(k+1)}$, $x_{n-1}^{(k)} \to x_{n-1}^{(k)}$

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ ASSEGNATO} \\ x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \quad \begin{array}{l} i=1,\dots,n \\ k=0,1,\dots \end{array} \end{cases}$$

$$(E+D)\underline{x}^{(k+1)} = -F\underline{x}^{(k)} + \underline{b} \mapsto E\underline{x}^{(k+1)} + D\underline{x}^{(k+1)} = -F\underline{x}^{(k)} + \underline{b}$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}\left[-E\underline{x}^{(k+1)} - F\underline{x}^{(k)} + \underline{b}\right]$$

OSS: IL METODO DI GAUSS-SEIDEL È UN METODO DI TIPO SEQUENZIALE

UN VANTAGGIO È CHE BASTA MEMORIZZARE LE COMPONENTI IN UN SOLO VETTORE

$$(\underbrace{x_1^{(k)}}_{x_1^{(k+1)}}, \underbrace{x_2^{(k)}}_{x_2^{(k+1)}}, \dots, x_n^{(k)})$$

$\dots$

SOVRASCRIVO

TEOREMA: SE A È UNA MATRICE STRETTAMENTE DIAGONALE DOMINANTE ALLORA IL METODO DI GAUSS-SEIDEL CONVERGE

METODO DI GAUSS-SEIDEL

$$A = D + E + F$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & 0 & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \longmapsto (E + D + F)\underline{x} = \underline{b} \longmapsto (E + D)\underline{x} = \underline{b} - F\underline{x}$$

SE $(E+D)$ E' NON SINGOLARE:

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ ASSEGNATO} \\ x^{(k+1)} = \underbrace{-(E+D)^{-1}F}_{B_{GS}}\, \underline{x}^{(k)} + \underbrace{(E+D)^{-1}\underline{b}}_{\underline{q}_{GS}} \end{cases}$$

METODO PER COMPONENTI (PARTENDO DA JACOBI)

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}\right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}\underset{\downarrow\, x_1^{(k+1)}}{x_1^{(k)}} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}\right]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}\underset{\downarrow\, x_1^{(k+1)}}{x_1^{(k)}} - a_{32}\underset{\downarrow\, x_2^{(k+1)}}{x_2^{(k)}} - a_{34}x_4^{(k)} - \dots - a_{3n}x_n^{(k)}\right]$$

QUANDO UN METODO ITERATIVO É CONVERGENTE?

<u>TEOREMA</u>: LA SUCCESSIONE DEI VETTORI $\{\underline{x}^{(k)}\}$ GENERATA DALL'ALGORITMO

$$\begin{cases} \underline{x}^{(0)} \\ \underline{x}^{(k+1)} = B\underline{x}^{(k)} + \underline{q} \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots$$

CONVERGE ALLA SOLUZIONE $\underline{x}$ DEL SISTEMA $A\underline{x} = \underline{b}$ ASSOCIATO SE E SOLO SE $\rho(B) < 1$

$$\left[\rho(B) := \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i| \right]$$

<u>RAGGIO SPETTRALE</u>

<u>DIM</u>: $\underline{x} = B\underline{x} + \underline{q}$ $\quad \underline{x}^{(k+1)} = B\underline{x}^{(k)} + \underline{q}$

SOTTRAGGO QUESTE DUE EQUAZIONI

$$\underbrace{\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}}_{\text{DEVE TENDERE A } 0} = \underline{e}^{(k+1)} = B\underline{e}^{(k)} = B^2\underline{e}^{(k-1)} = B^3\underline{e}^{(k-2)} = \dots = B^{k-1}\underline{e}^{(0)}$$

$$\lim_{k \to +\infty} \underline{e}^{(k)} = \lim_{k \to +\infty} B^k \underline{e}^{(0)} = 0 \qquad \forall \underline{e}^{(0)}$$

$$\lim_{k \to +\infty} B^k = 0 \iff \rho(B) < 1$$

OSS: SE $\|B\| < 1$ ALLORA $\rho(B) < 1$ (NON VICEVERSA)

DIM: $\|B\underline{x}\| = |\lambda| \|\underline{x}\|$ E $\|B\| \|\underline{x}\| \geq \|B\underline{x}\|$ DA CUI:

$\|B\| \geq |\lambda|$ PER OGNI AUTOVALORE λ DI B

OSS: CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ $\rho(B) < 1$ É CHE $\det(B) < 1$

OSS: LA CONVERGENZA É COLLEGATA SOLO ALLA MATRICE DI ITERAZIONE DEL METODO E NON ALLA MATRICE A DEL SISTEMA. TUTTAVIA LE PROPRIETÁ DI A INFLUIRANNO SULLA SCELTA DEL METODO ITERATIVO E SULLE PROPRIETÁ DI B

ES:

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\rho(B_J) > 1 \Rightarrow$ IL METODO DI JACOBI NON CONVERGE

$\rho(B_{GS}) < 1 \Rightarrow$ IL METODO DI GAUSS-SEIDEL CONVERGE

2) $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -4 & 7 & -8 \\ 5 & 7 & -9 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\rho(B_J) < 1 \Rightarrow$ JACOBI CONVERGE IN 67 ITERAZIONI

$\rho(B_{GS}) > 1 \Rightarrow$ GAUSS-SEIDEL NON CONVERGE

3) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ -14 \end{pmatrix}$

$\rho(B_J) \simeq 0.44 < 1 \Rightarrow$ 21 ITERAZIONI

$\rho(B_{GS}) \simeq 0.02 < 1 \Rightarrow$ 5 ITERAZIONI

4) $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 22 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\rho(B_J) \cong 0.6411 < 1 \Rightarrow 39$ ITERAZIONI

$\rho(B_{GS}) \cong 0.7746 < 1 \Rightarrow 65$ ITERAZIONI

OSS: PIÙ $\rho(B)$ È PICCOLO PIÙ VELOCE (MENO ITERAZIONI) SARÀ LA CONVERGENZA

RICERCA DI RADICI DI EQUAZIONI NON LINEARI

CONSIDERIAMO IL PROBLEMA:

DATA $f:(a,b)\in\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, SI CERCA $\alpha\in(a,b)$ TALE CHE $f(\alpha)=0$

ES: CALCOLO $\sqrt{2}=\alpha$ $\quad \alpha^2=2$ $\quad f(\alpha)=0$

$f(x)=x^2-2$

NON È MONOTONA:

{ IN OGNI ITERAZIONE MI AVVICINO AL VALORE ESATTO }

NELLE PRIME LEZIONI ABBIAMO USATO IL <u>METODO DI BISEZIONE</u>

IL METODO DI BISEZIONE È UN METODO EFFICACE PERCHÉ È <u>GLOBALMENTE CONVERGENTE</u>, TUTTAVIA PRESENTA UN LENTO ABBATTIMENTO DELL'ERRORE

METODI ALTERNATIVI CON ORDINE DI CONVERGENZA MAGGIORE MA LOCALMENTE CONVERGENTI

<u>IDEA</u>: APPLICO METODO DI BISEZIONE COME TECNICA DI AVVICINAMENTO ALLA RADICE PER OTTENERE CON QUALCHE PASSO UNA STIMA

A PARTIRE DA QUESTA STIMA UTILIZZARE UN METODO DI ORDINE PIÚ ELEVATO E CONVERGERE ALLA RADICE ENTRO I LIMITI DI ACCURATEZZA PRESTABILITI

L'APPROSSIMAZIONE NUMERICA DI UNA RADICE α DI f SI BASA SULL'USO DI METODI ITERATIVI, OSSIA SI GENERA UNA SUCCESSIONE DI VALORI $x^{(k)}$ TALI CHE:

$$\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = \alpha$$

<u>DEF</u>: SI DICE CHE LA SUCCESSIONE $\{x^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$ GENERATA DA UN METODO ITERATIVO CONVERGE AD α CON ORDINE p SE

$$\exists c > 0 : \frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|^p} \leq c \quad \forall k \geq k_0 \,, \; k_0 \in \mathbb{N}$$

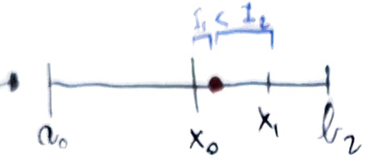
$$|x^{(k+1)} - \alpha| \leq c \, |x^{(k)} - \alpha|^p$$

<u>OSS</u>: IL METODO DI BISEZIONE É GLOBALMENTE CONVERGENTE MA NON É NEANCHE DI ORDINE UNO

<u>OSS</u>: SE $p=1$ PER AVERE CONVERGENZA NECESSARIAMENTE c DOVRÁ ESSERE MINORE DI 1

CONSIDERIAMO BISEZIONE

$|x^{(n+1)} - \alpha| < |x^{(n)} - \alpha|^{p=1}$ MA



ALGORITMI LOCALMENTE CONVERGENTI

SE α È RADICE DI f, E f È DIFFERENZIABILE

$$\exists c \qquad 0 = f(\alpha) = f(x_0) + f'(c)(\alpha - x_0)$$

c COMPRESO TRA α E x_0

NON SI SA PERÒ COME TROVARLO

PER TEOREMA DEL TRONCAMENTO DELLA SERIE DI TAYLOR

SI APPROSSIMA $f'(c) \approx q_0$

$$0 = f(\alpha) \neq q_0(\alpha - x_0) + f(x_0)$$

$$f(x_0) + q_0(x_1 - x_0) = 0 \implies x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{q_0}$$

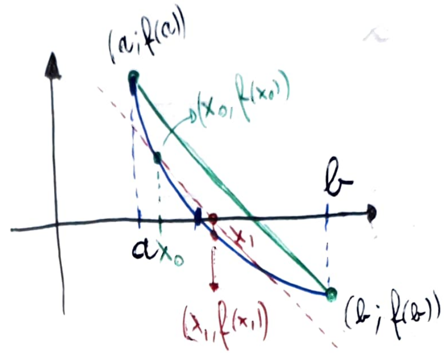
CAMBIO α CON x_1 PER RIPRISTINARE L'UGUAGLIANZA CON 0

REITERANDO IL PROCEDIMENTO

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{q_k}}$$

I METODI CHE ANALIZZEREMO SI BASANO SULLE DIVERSE DEFINIZIONI DI q_K

METODO DELLE CORDE q_K = COSTANTE = $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



$$\begin{cases} x_0 \text{ DATO} \\ x_{k+1} = x_k - f(x_k)\dfrac{b-a}{f(b)-f(a)} \end{cases}$$

RETTA PASSANTE PER $(a, f(a))$ E $(b, f(b))$: $y = \dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)}(x-a) + f(a) : \Pi$

AL PASSO K CERCHIAMO LA RETTA PASSANTE PER $(x_k, f(x_k))$ E PARALLELA AD Π

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-x_k) + f(x_k)$$

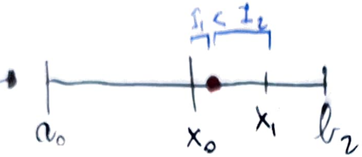
CALCOLO L'INTERSEZIONE CON L'ASSE DELLE ASCISSE $y=0$

$$0 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_{k+1}-x_k) + f(x_k) \longrightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_k)$$

<u>OSS</u>: SOTTO OPPORTUNE IPOTESI IL METODO DELLE CORDE È CONVERGENTE E HA ORDINE DI CONVERGENZA PARI A 1

CONSIDERIAMO BISEZIONE

$|x^{(n+1)} - \alpha| < |x^{(n)} - \alpha|^{p=1}$ MA



ALGORITMI LOCALMENTE CONVERGENTI

SE α È RADICE DI f, E f È DIFFERENZIABILE

$\exists c \quad 0 = f(\alpha) = f(x_0) + f'(c)(\alpha - x_0)$ $\quad$ c COMPRESO TRA α E x_0

NON SI SA PERÒ COME TROVARLO

PER TEOREMA DEL TRONCAMENTO DELLA SERIE DI TAYLOR

SI APPROSSIMA $f'(c) \approx q_0$

$$0 = f(\alpha) \neq q_0(\alpha - x_0) + f(x_0)$$

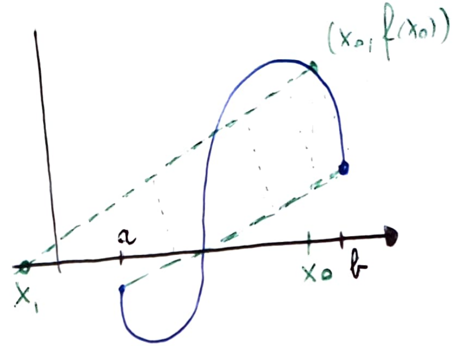
$$f(x_0) + q_0(x_1 - x_0) = 0 \implies x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{q_0}$$

CAMBIO α CON x_1 PER RIPRISTINARE L'UGUAGLIANZA CON 0

REITERANDO IL PROCEDIMENTO

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{q_k}}$$

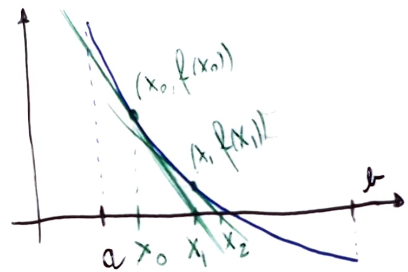
OSS: ATTENZIONE: IL METODO É SOLO LOCALMENTE CONVERGENTE



METODO DI NEWTON → O DELLE TANGENTI

$q_k = f'(x_k)$

$$\begin{cases} x_0 \text{ DATO} \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k=0,1,\dots \end{cases}$$



α É RADICE DI f (SEMPLICE) $f'(\alpha) \neq 0 \approx 0$ ↦ IL METODO NON É MOLTO EFFICACE

OSS SE α É RADICE SEMPLICE: $f'(\alpha) \neq 0$ E SOTTO ALTRE IPOTESI, IL METODO DELLE TANGENTI RISULTA LOCALMENTE CONVERGENTE E DI ORDINE $p=2$

CRITERIO DI ARRESTO

CONSIDERIAMO $\lim_{i \to +\infty} x_i = \alpha$ COME VERIFICHIAMO QUESTA CONDIZIONE?

INTRODUCIAMO UNA TOLLERANZA $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

- <u>CONTROLLO DELL'INCREMENTO</u>

IL PROCESSO ITERATIVO SI ARRESTA AL MINIMO K PER CUI

$$|X_{k+1} - X_k| < \varepsilon$$

ES: $x_{k+1} - x_k = x_{k+1} \pm \alpha - x_k = e_{k+1} - e_k$

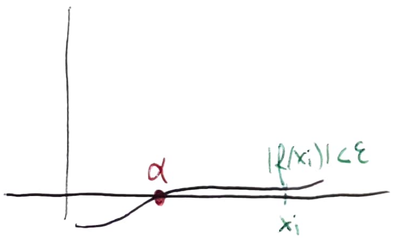
SE L'AVANZAMENTO VERSO LA RADICE È LENTO NON È UN BUON TEST

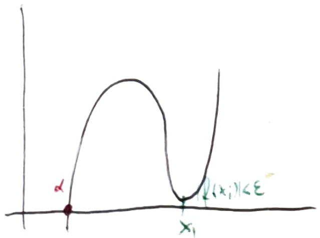
- <u>CONTROLLO DEL RESIDUO</u>

IL PROCESSO ITERATIVO SI ARRESTA AL MINIMO K PER CUI

$$|f(x_k)| < \varepsilon$$

OSS:





DIRE CHE $|f(x_i)| < \varepsilon$ NON SIGNIFICA CHE $|x_i - \alpha| < \varepsilon$ L'ERRORE PUÒ COMUNQUE ESSERE GRANDE

STUDIAMO IL CONDIZIONAMENTO DEL PROBLEMA DEL CALCOLO DI RADICI

CERCHIAMO **X** T.C. $f(X)=0$

$\left\{ d \text{: PARTE COSTANTE DELLA FUNZIONE} \right\}$

$$f(x): \varphi(x) - d = 0 \qquad d \in \mathbb{R}$$

// $\sqrt{2}$ $\quad x : \underbrace{x^2}_{\varphi(x)} - \underbrace{2}_{d} = 0$

//

SUPPONIAMO DI PERTURBARE I DATI

$$\cancel{d}^{\,\varphi(x)} + \delta d = \varphi(x + \delta x) = \text{SVILUPPO DI TAYLOR}$$

$$= \cancel{\varphi(x)}_{\,d} + \varphi'(x)\delta x + \frac{\varphi''(x)}{2}(\delta x)^2 + \sum_{k=3}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!}(\delta x)^k + \underbrace{o(\delta x)^m}_{\to 0}$$

0 : DIVENTA TRASCURABILE QUANDO δx DIVENTA MOLTO PICCOLO

SUPPONIAMO CHE X SIA RADICE DI ORDINE m, ALLORA:

$$f^{(k)}(x) = 0 \qquad k = 1 \dots m-1$$

E

$$\delta d = \frac{\varphi^{(m)}(x)}{m!}(\delta x)^m + o(\delta x)^m \simeq \frac{f^{(m)}(x)}{m!}(\delta x)^m$$

$$\delta x = \left| \frac{\delta d \, m!}{f^{(m)}(x)} \right|^{\frac{1}{m}}$$

DA CUI IL CONDIZIONAMENTO:

$$COND = \sup \frac{\|\delta x\|}{\|\delta d\|} = \sup \left\{ \left| \frac{(\delta d)\, m!}{f^{(m)}(x)} \right|^{1/m} \frac{1}{|\delta d|} \right\}$$

HO SOSTITUITO δx CON

OSS: SE $m=1$ IL PROBLEMA È MAL CONDIZIONATO SE $f'(x) \approx 0$

SE x È UNA RADICE DI ORDINE $m>1$, ANCHE SE δd FOSSE SUFFICIENTEMENTE PICCOLO DA RENDERE:

$$\left| \frac{(\delta d)\, m!}{f^{(m)}(x)} \right| < 1,$$ IL CONDIZIONAMENTO POTREBBE ESSERE GRANDE

↳ PERCHÉ: $\left|\frac{1}{\delta d}\right|$

ES: OSSERVIAMO LA SENSIBILITÀ NEL CALCOLO DELLE RADICI DI UN POLINOMIO p_n AL VARIARE DEI SUOI COEFFICIENTI

$$\tilde{p}_n = p_n + q_n$$

q_n È UN POLINOMIO DI PERTURBAZIONE

$$p_{10}(x) = \prod_{k=1}^{10} (x+k) = x^{10} + d_1 x^9 + \ldots + d_{10}$$

(POLINOMIO DI WILKINSON)

HA 10 RADICI $\alpha_k = -k$ $k = 1 \ldots 10$

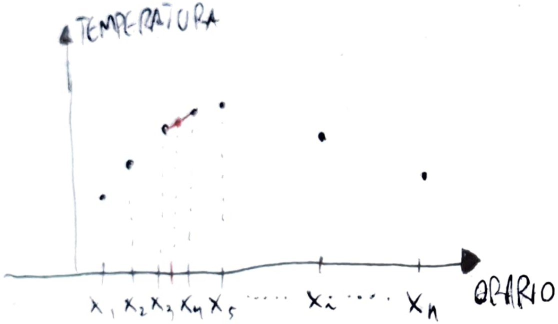
SIA $\tilde{p}_{10} = p_{10} + \varepsilon x^9$ $\varepsilon = 10^{-7}$

APPROSSIMAZIONE DI DATI E FUNZIONI

SUPPONIAMO DI AVERE A DISPOSIZIONE UN INSIEME DI PUNTI DI COORDINATE

$$(x_i, y_i) \quad i = 1 \dots n \quad \text{T.C.} \quad x_i \neq x_j \text{ SE } i \neq j$$

ES:

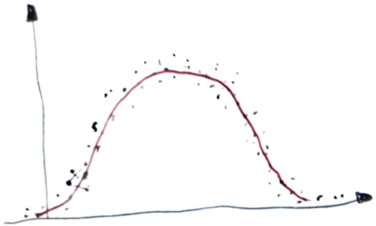


POTREI ESSERE INTERESSATO A STIMARE LA TEMPERATURA IN UN ISTANTE CHE NON ERA DI MISURAZIONE

L'APPROCCIO PIÙ SEMPLICE È DETERMINARE L'EQUAZIONE DELLA RETTA CHE COLLEGA I 2 PUNTI ADIACENTI E VALUTARNE IL VALORE NELL'ISTANTE DESIDERATO

QUANDO I DATI MOSTRANO UNA NOTEVOLE CURVATURA L'ERRORE CHE SI COMMETTE POTREBBE ESSERE SIGNIFICATIVO

OSS



SE I DATI SONO NUMEROSI, POTREBBE ESSERE SIGNIFICATIVO CONOSCERE UN ANDAMENTO QUALIFICATIVO DEL FENOMENO

OSS:

$$(x_i, \underbrace{y_i}_{\downarrow \; f(x_i)})$$

SE LE ORDINATE y_i SONO DATE DA UNA ESPRESSIONE DI UNA FUNZIONE f CALCOLATA NEI NODI x_i E f É MOLTO COMPLESSA POTREBBE ESSERE UTILE SOSTITUIRE f CON UNA FUNZIONE PIÚ SEMPLICE (AD ESEMPIO UN POLINOMIO), PER CALCOLARE POI INTEGRALE O DERIVATA.

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

CONSIDERIAMO $n+1$ PUNTI (x_i, y_i) $i=0 \dots n$ CON $x_i \neq x_j$ SE $i \neq j$

IL PROBLEMA DELL'INTERPOLAZIONE POLINOMIALE CONSISTE NEL TROVARE UN POLINOMIO DI GRADO p TALE PER CUI

$$p(x_i) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 = y_i \qquad i = 0 \dots n$$

[CONDIZIONE DI INTERPOLAZIONE]

I PUNTI x_i SI DICONO NODI DI INTERPOLAZIONE

$$\begin{cases} p(x_0) = a_m x_0^m + a_{m-1} x_0^{m-1} + \dots + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ p(x_1) = a_m x_1^m + a_{m-1} x_1^{m-1} + \dots + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ \vdots \\ p(x_n) = a_m x_n^m + a_{m-1} x_n^{m-1} + \dots + a_2 x_n^2 + a_1 x_n + a_0 = y_n \end{cases}$$

$n+1$ EQUAZIONI

$m+1$ COEFF. INCOGNITI

MATRICE DI VANDERMONDE È:

$$V = \begin{bmatrix} x_0^m & x_0^{m-1} & x_0^{m-2} & \cdots & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^m & x_1^{m-1} & x_1^{m-2} & \cdots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ x_n^m & x_n^{m-1} & x_n^{m-2} & \cdots & x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_m \\ d_{m-1} \\ d_{m-2} \\ \vdots \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

SE $n > m$ IL SISTEMA SI DICE SOVRADETERMINATO

SE $n < m$ IL SISTEMA SI DICE SOTTODETERMINATO

SE $n = m$

CON LA CONDIZIONE $x_i \neq x_j$ PER $i \neq j$ SI PUÒ DIMOSTRARE CHE

$\det(V) \neq 0$

$\Rightarrow$ V È UNA MATRICE NON SINGOLARE

TEOREMA: DATI $n+1$ NODI DISTINTI $x_0, x_1, \dots x_n$ E CON $n+1$ CORRISPONDENTI VALORI $y_0 \dots y_n$ ESISTE UN UNICO POLINOMIO DI GRADO n INTERPOLATORE, OSSIA TALE CHE:

$$p(x_i) = y_i \qquad i = 0 \dots n$$

OSS: LA MATRICE DI VANDERMONDE È MAL CONDIZIONATA, DOBBIAMO USARE UN METODO ALTERNATIVO PER TROVARE IL POLINOMIO p

$$\underbrace{p(x)}_{\text{POL. DI GRADO } n} = \sum_{i=0}^{n} y_i \underbrace{L_i(x)}_{\text{POL. DI GRADO } n}$$

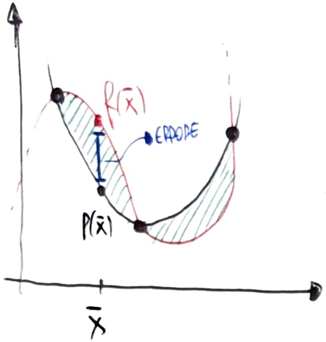
L_i POLINOMI FONDAMENTALI DI LAGRANGE

$$y_j = p(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x_j) = y_0 \underset{0}{\cancel{L_0(x_j)}} + y_1 \underset{0}{\cancel{L_1(x_j)}} + \dots + y_j \underset{1}{\cancel{L_j(x_j)}} + \dots + y_n \underset{0}{\cancel{L_n(x_j)}}$$

$L_i(x)$ POLINOMIO FONDAMENTALE DI LAGRANGE È UN POLINOMIO DI GRADO n TALE CHE:

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{SE } i = j \\ 0 & \text{SE } i \neq j \end{cases}$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \underbrace{\frac{x - x_0}{x_i - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_i - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_i - x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{x - x_n}{x_i - x_n}}_{n \text{ FATTORI DI GRADO } 1}$$



TEOREMA: SIA $f(x) \in C^{n+1}(I_x)$ DOVE I_x È IL MINIMO INTERVALLO CONTENENTE I NODI $x_0, \dots, x_n$ E IL PUNTO x.

ALLORA ESISTE UN PUNTO $c_x \in I_x$ T.C.

DA UNA FUNZIONE DERIVABILE $n+1$ VOLTE TOLGO LO SVILUPPO DI TAYLOR ARRESTATO AD AL GRADO n, MI RIMANE QUALCOSA DI GRADO $n+1$

$$\boxed{f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(x)}$$

$< |I_x|$

CON $$\boxed{\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}$$

$M = \max_{x \in I_x} |f^{(n+1)}(x)|$

OSS: $$E_n(x) = |f(x) - p_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c_x)|}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)| \leq \underbrace{\frac{M}{(n+1)!}|I_x|^{n+1}}$$

CON $n \to +\infty$ POTREBBE SUCCEDERE DI TUTTO, TENDERE A $+\infty$ (AD ES. SE $|I_x| > 1$) O A 0

STABILITÀ DEL POLINOMIO DI LAGRANGE

SUPPONGO DI INTRODURRE UN ERRORE NEI DATI: (x_i, y_i) $i=0\dots n$ $\longleftrightarrow$ $(x_i, \tilde{y}_i)$ $i=0\dots n$

$\varepsilon_i = y_i - \tilde{y}_i \quad i=0\dots n$

IL POLINOMIO INTERPOLATORE RISENTE DI QUESTA VARIAZIONE?

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$$

$$\tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^{n} \tilde{y}_i L_i(x)$$

$$p(x) - \tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - \tilde{y}_i) L_i(x)$$

IL MASSIMO ERRORE

$$|p(x) - \tilde{p}(x)| \leq \sum_{i=0}^{n} \underbrace{|y_i - \tilde{y}_i|}_{|\varepsilon_i|} |L_i(x)| \leq \|\underline{y} - \underline{\tilde{y}}\|_\infty \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)|$$

$$\forall x \in I_x \quad \|p(x) - \tilde{p}(x)\|_\infty \leq \|\underline{\varepsilon}\|_\infty \underbrace{\left\| \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)| \right\|_\infty}_{\text{COSTANTE DI LEBESGUE } \Lambda_n}$$

$$\|p(x)\|_\infty = \max_{x\in I_x} |p(x)| \geq \max_{0\leq i\leq n} |p(x_i)| = \max_{0\leq i\leq n} |y_i| = \|y\|_\infty$$

$$\frac{\| p(x) - \tilde{p}(x) \|_\infty}{\| p(x) \|_\infty} \leq \Lambda_n \frac{\| \underline{y} - \underline{\tilde{y}} \|_\infty}{\| \underline{y} \|_\infty} .$$ ERRORE RELATIVO

LA GRANDEZZA DELL'ERRORE DIPENDE DALLA COSTANTE DI LEBESGUE, LA QUALE DIPENDE DALLA DISTRIBUZIONE DEI PUNTI DATI (x_i, y_i)

OSS Λ_n ASSUME IL SIGNIFICATO DI NUMERO DI CONDIZIONAMENTO DEL PROBLEMA DI INTERPOLAZIONE

OSS: A PICCOLE PERTURBAZIONI SUI DATI CORRISPONDERANNO PICCOLE VARIAZIONI SUL POLINOMIO INTERPOLATORE SE LA COSTANTE DI LEBESGUE È PICCOLA
LA COSTANTE DI LEBESGUE DIPENDE DALLA DISTRIBUZIONE DEI NODI

OSS: NEL CASO DI NODI EQUISPAZIATI SI TROVA CHE:

$$\Lambda_n \simeq \frac{2^{n+1}}{e\, n \log(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

OSS NODI DI CHEBYSHEV $[-1, 1]$

$$x_i^{(n)} = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2} \pi \right)$$ $i = 0 \dots n$, I NODI DI CHEBYSHEV HANNO Λ_n:

$$\Lambda_n \simeq \frac{2}{\pi} \log(n) \xrightarrow[n + \infty]{} +\infty$$ } PERÒ PIÙ LENTAMENTE CHE NEL CASO DI PUNTI EQUISPAZIATI

$$\frac{\| p(x) - \tilde{p}(x) \|_\infty}{\| p(x) \|_\infty} \leq \Lambda_n \frac{\| \underline{y} - \underline{\tilde{y}} \|_\infty}{\| \underline{y} \|_\infty} .$$ ERRORE RELATIVO

LA GRANDEZZA DELL'ERRORE DIPENDE DALLA COSTANTE DI LEBESGUE, LA QUALE DIPENDE DALLA DISTRIBUZIONE DEI PUNTI DATI (x_i, y_i)

OSS Λ_n ASSUME IL SIGNIFICATO DI NUMERO DI CONDIZIONAMENTO DEL PROBLEMA DI INTERPOLAZIONE

OSS: A PICCOLE PERTURBAZIONI SUI DATI CORRISPONDERANNO PICCOLE VARIAZIONI SUL POLINOMIO INTERPOLATORE SE LA COSTANTE DI LEBESGUE È PICCOLA
LA COSTANTE DI LEBESGUE DIPENDE DALLA DISTRIBUZIONE DEI NODI

OSS: NEL CASO DI NODI EQUISPAZIATI SI TROVA CHE:

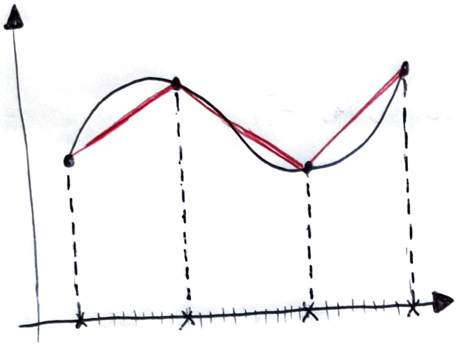
$$\Lambda_n \simeq \frac{2^{n+1}}{e n \log(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

OSS NODI DI CHEBYSHEV $[-1, 1]$

$$x_i^{(n)} = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2} \pi \right)$$ $i = 0 \dots n$, I NODI DI CHEBYSHEV HANNO Λ_n:

$$\Lambda_n \simeq \frac{2}{\pi} \log(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$ PERÒ PIÙ LENTAMENTE CHE NEL CASO DI PUNTI EQUISPAZIATI

ES:



— = P_1^c

$n = 3$

$$I[f]-Q_1[f]=\int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b)\,dx=\frac{f''(\bar\xi)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx=$$

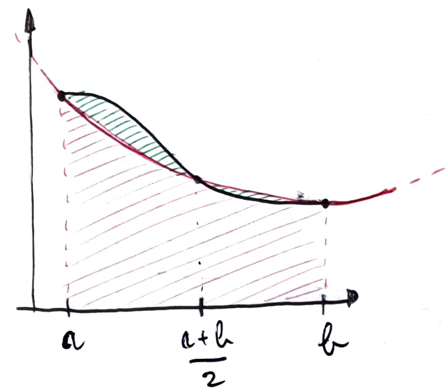
$$\boxed{=-f''(\bar\xi)\frac{(b-a)^3}{12}}$$

OSS: LA FORMULA DEL TRAPEZIO HA GRADO DI ESATTEZZA 1, COME LA FORMULA DEL PUNTO MEDIO

FORMULA DI CAVALIERI-SIMPSON

SOSTITUISCO AD f IL POLINOMIO INTERPOLATORE DI GRADO 2 RELATIVO AI NODI:

$x_0=a \qquad x_1=\frac{a+b}{2} \qquad x_2=b$

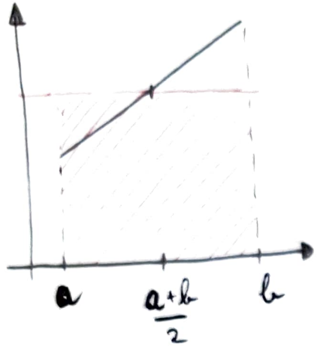


$$\boxed{Q_2[f]=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]}$$

$$I[f]-Q_2[f]=\boxed{-\left(\frac{b-a}{2}\right)^5\frac{f^{IV}(\xi)}{90}}$$

ASSUMENDO CHE $f\in C^{(IV)}(a,b)$

OSS: LA FORMULA DI CAVALIERI-SIMPSON HA GRADO DI ESATTEZZA 3

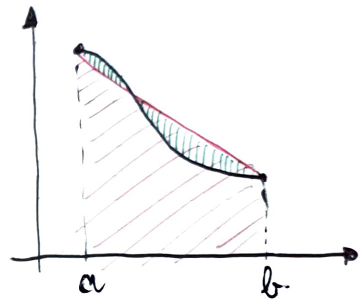


OSS: LA FORMULA DI QUADRATURA DEL PUNTO MEDIO INTEGRA ESATTAMENTE UN POLINOMIO DI GRADO 1

OSS: LA FORMULA DI QUADRATURA DEL PUNTO MEDIO HA GRADO DI ESATTEZZA 1

FORMULA DEL TRAPEZIO

SOSTITUISCO A f IL POLINOMIO INTERPOLATORE DI GRADO 1 CHE INTERPOLA LA FUNZIONE INTENGRANDA AGLI ESTREMI DEL DOMINIO DI INTEGRAZIONE



$$\boxed{Q_1[f] = (f(b)+f(a))\frac{(b-a)}{2}}$$

CALCOLO ERRORE: SUPPONIAMO $f \in C^2([a,b])$

$$f(a) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} w_{n+1}(x) \qquad \xi_x \in [x_0, x_n]$$

$$w_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

OSS: CONVIENE PROCEDERE AUMENTANDO IL GRADO DEL POLINOMIO INTERPOLATORE?
(FUNZIONE DI RUNGE)

LE FORMULE DI NEWTON-COTES $Q_n[f]$, OSSIA LE FORMULE CHE SOSTITUISCONO LA FUNZIONE INTEGRANDA CON UN POLINOMIO DI GRADO n INTERPOLANTE IN $n+1$ NODI EQUISPAZIATI HANNO GRADO DI ESATTEZZA:

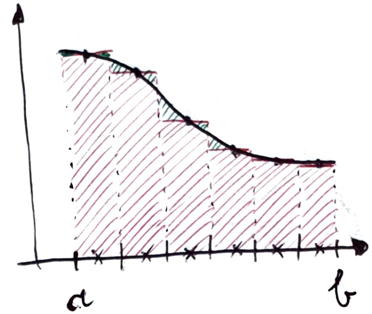
$$Q_n \begin{cases} n & \text{SE } n \text{ É DISPARI} \\ n+1 & \text{SE } n \text{ É PARI} \end{cases}$$

IDEA: SICCOME LE FORMULE DELL'ERRORE DIPENDONO DALL'AMPIEZZA DELL'INTERVALLO $[a,b]$, SE QUESTA É MINORE DI 1 ALLORA L'ERRORE É PICCOLO

↓

FORMULA DI INTEGRAZIONE COMPOSITE

FORMULA DEL PUNTO MEDIO COMPOSITA



DIVIDO IN m SOTTOINTERVALLI DELLA STESSA AMPIEZZA

$$H = \frac{b-a}{m} \qquad m \geq 1$$

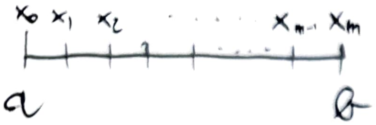
$$x_i = x_0 + iH \qquad i = 0 \dots m$$

$$I[f] = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx}_{\text{APPLICO FORMULA DI PUNTO MEDIO SEMPLICE}} = \sum_{i=1}^{m} \left[f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) H + f''(\eta_i) \frac{H^3}{24} \right] = H \sum_{i=1}^{m} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) + \frac{f''(\bar{\eta})}{24} \sum_{i=1}^{m} H^3$$

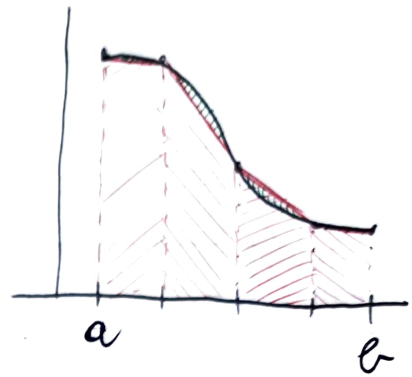
$$= \underbrace{\boxed{H \sum_{i=1}^{m} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)}}_{Q_0^c[f]} + \boxed{\frac{f''(\bar{\eta})}{24} (b-a) H^2}$$

AUMENTANDO IL NUMERO DEI SOTTOINTERVALLI $H \to 0$ E L'ERRORE TENDERÀ A 0

FORMULA DEL TRAPEZIO COMPOSITA



SOTTOINTERVALLI DI AMPIEZZA
UNIFORMA



$H = \frac{b-a}{m}$ $\quad x_i = a + iH \quad i = 0 \dots m$

$$I[f] = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \left\{ [f(x_{i-1}) + f(x_i)]\frac{H}{2} - f''(\beta_i)\frac{H^3}{12} \right\} =$$

$$= \frac{H}{2}[f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{m-2}) + f(x_{m-1}) + f(x_{m-1}) + f(x_m)] - \sum_{i=1}^{m} f''(\beta_i)\frac{H^3}{12} =$$

$$= \boxed{\frac{H}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m)\right]} - \boxed{\frac{f(\bar{\beta})}{12}(b-a)H^2}$$

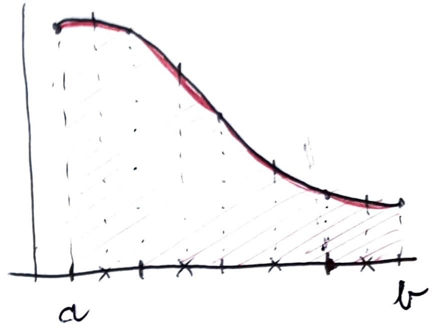
Q_1^c

OSS: $|RESTO| = \frac{|f''(\bar{\beta})|}{12} \cdot \frac{(b-a)^3}{m^2} \le \varepsilon$

QUAL'È IL NUMERO m DI SOTTOINTERVALLI SUFFICIENTE AD OTTENERE LA PRECISIONE ε RICHIESTA?

$$M = \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$$

$$|\text{RESTO}| \le \frac{M}{12} \frac{(b-a)^3}{m^2} \le \varepsilon \longrightarrow \text{RICAVO } m$$



FORMULA CAVALIERI-SIMPSON COMPOSITA

$$I[f] = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \frac{H}{6}\left[f(x_{i-1}) + 4 f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i) \right] - \frac{H^5}{2^5 \cdot 90} f^{(IV)}(\beta_i) \right\} =$$

$$= \boxed{\frac{H}{6}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + 4\sum_{i=1}^{m} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_m) \right]} + \boxed{\frac{b-a}{180}\left(\frac{H}{2}\right)^4 f^{(IV)}(\bar{\beta})}$$

Q_2^c

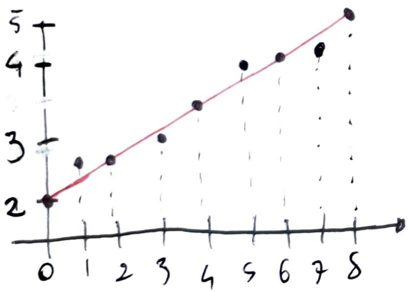
ES:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	2.0	2.4	2.75	3.1	3.5	3.9	4.25	4.6	5.0

USANDO (x_0, y_0) E (x_8, y_8) SI RICAVANO: $m = \frac{3}{8}$ $q = 2$

CALCOLANDO I RESIDUI $r_i = y_i - m x_i - q$ $i = 0 \dots n$ $[n = 8]$

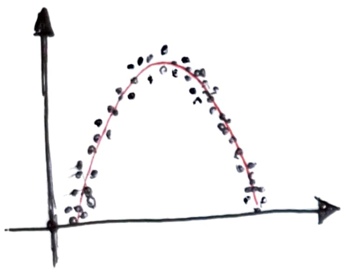
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
r_i	0	0.025	0	-0.025	0	0.025	0	-0.025	0



OSS: IL RESIDUO HA VALORE POSITIVO O NEGATIVO SICCOME NON POSSO ANNULLARE IL SINGOLO RESIDUO, POSSO PROVARE AD ANNULLARE LA SOMMA DEI RESIDUI, MA

- IL FATTO CHE IL RESIDUO TOTALE SIA NULLO O PICCOLO NON MI ASSICURA CHE I SINGOLI RESIDUI SIANO PICCOLI
- OTTENGO COMUNQUE UNA SOLA EQUAZIONE PER DETERMINARE I DUE COEFFICIENTI m E q

APPROSSIMAZIONE DEI DATI CON IL METODO DEI MINIMI QUADRATI



OSS: AL CRESCERE DEL NUMERO DI DATI IL POLINOMIO INTERPOLATORE DI LAGRANGE HA GRADO CRESCENTE E NON CI GARANTISCE MIGLIORE ACCURATEZZA NELL'APPROSSIMAZIONE DI UNA FUNZIONE

OSS: L'INTERPOLAZIONE POLINOMIALE COMPOSITA DEI DATI MALE SI PRESTA AD ESSERE UTILIZZATA PER ESTRAPOLARE INFORMAZIONI ESTERNAMENTE ALL'INTERVALLO DEI DATI NOTI. OSSIA SI TIENE CONTO SOLO DELLE INFORMAZIONI CONTENUTE NELL'ULTIMA SOTTOINTERVALLO DI DECOMPOSIZIONE

SUPPONIAMO DI AVER UN SET DI DATI (x_i, y_i) $i=0\dots n$, CERCHIAMO UN POLINOMIO DI 1° GRADO CHE APPROSSIMI QUESTI PUNTI

$$y = mx + q$$

STRATEGIA: MINIMIZZARE IL QUADRATO DEI RESIDUI

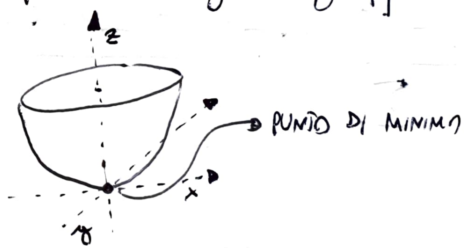
$$\bar{p}(x) = mx + q \qquad \text{(RETTA DI REGRESSIONE)}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \left[y_i - \bar{p}(x_i)\right]^2 \leq \sum_{i=0}^{n} \left[y_i - p(x_i)\right]^2 \qquad \forall p(x) \in \mathbb{P}_1$$

(METODO DEI MINIMI QUADRATI)

$$\sum_{i=0}^{n} \left[y_i - mx_i - q\right]^2 = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i^2 + m^2x_i^2 + q^2 + 2mqx_i - 2mx_iy_i - 2y_iq\right]$$

$$= \phi(m, q)$$



CONSIDERO LE DERIVATE PARZIALI DI ϕ RISPETTO AD m E A q

$$\frac{\partial \phi}{\partial m} = \sum_{i=0}^{n} \left[2mx_i^2 + 2qx_i - 2x_iy_i\right] = 0 \qquad \text{OSSIA} \qquad \sum_{i=0}^{n} \left(mx_i^2 + qx_i - x_iy_i\right) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial q} = \sum_{i=0}^{n} \left[2q + 2mx_i - 2y_i\right] = 0 \qquad \text{OSSIA} \qquad \sum_{i=0}^{n} \left(q + mx_i - y_i\right) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial m} = \sum_{i=0}^{n} (m x_i^2 + q x_i - x_i y_i) = 0 = m \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + q \sum_{i=0}^{n} x_i - \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial q} = \sum_{i=0}^{n} (q + m x_i - y_i) = 0 = (n+1) q + m \sum_{i=0}^{n} x_i - \sum_{i=0}^{n} y_i \end{cases}$$

$$m = \frac{\sum_i y_i - (n+1) q}{\sum x_i}$$, SOSTITUISCO NELLA PRIMA EQUAZIONE

$$\frac{\sum y_i x_i^2 - (n+1) q \sum x_i^2 + q \left(\sum x_i\right)^2 - \sum x_i \left(\sum x_i y_i\right)}{\sum x_i} = 0$$

RICAVO

$$q = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \left(\sum x_i y_i\right)}{(n+1) \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$, DA CUI : $$m = \frac{(n+1) \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{(n+1) \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

OSS: IL METODO SI PUÓ GENERALIZZARE AD UN POLINOMIO DI GRADO $m \leq n$ ARBITRARIO

SE $m=n$, $\bar{p}$ POLINOMIO AI MINIMI QUADRATI COINCIDE CON IL POLINOMIO INTERPOLATORE DI LAGRANGE

OSS: L'APPROSSIMAZIONE NEL SENSO DEI MINIMI QUADRATI SI PUÓ APPLICARE ANCHE A FUNZIONI DI TIPO NON POLINOMIALE