Correzione Esame di Calcolo Numerico

18/06/2019

1. In aritmetica di macchina, quando l'ordine di grandezza di z è molto maggiore rispetto all'ordine di grandezza di w, può verificarsi la perdita di memorizzazione di cifre decimali.

$$\begin{aligned} z &= 6.565996913733051e+07 \\ w &= 2.061153622438558e-09 \\ z+w &= 6.565996913733051e+07 \end{aligned}$$

In questo esempio $z+w$ è esattamente uguale a z in Matlab, infatti risulta:

$$(z+w)-z=0$$

invece dovrebbe risultare $(z+w)-z=w$.

In aritmetica di macchina inoltre non sempre sono verificate le proprietà teoriche delle operazioni con i numeri reali. In particolare, con i dati valori di a,b,c, in Matlab risulta

$$\begin{aligned} (a+b)+c &= -1.357362590042044e-04 \\ a+(b+c) &= -1.357362590024547e-04 \end{aligned}$$

e quindi non vale la proprietà associativa: $(a+b)+c \neq a+(b+c)$.

2. Ricerca di radici di equazioni non lineari.
2a) Da un punto di vista analitico, il problema è:

Data $f:(a,b)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funzione non lineare, si cerca $\alpha\in(a,b)$ tale che $f(\alpha)=0$.

Da un punto di vista numerico, l'approssimazione della radice α si basa in genere su metodi iterativi che generano una successione di valori $s^k\in\mathbb{R}$ con $k\in\mathbb{N}$ tali che

$$\lim_{k\to\infty} s^{(k)}=\alpha\ .$$

2b) Nella ricerca numerica di radici di equazioni non lineari, il criterio d'arresto basato sul controllo del residuo prevede che il metodo iterativo si arresti al minimo valore di $k\in\mathbb{N}$ tale per cui $\left|f(s^k)\right|<\epsilon$, con $\epsilon\in\mathbb{R}^+$ fissato.
Questo criterio è impreciso nel caso in cui la funzione abbia derivata prima prossima a zero "lontano" dalla radice.
2c) L'algoritmo del metodo delle corde è:

$$\begin{aligned} &s^{(0)}\text{assegnato} \\ &s^{(k+1)}=s^{(k)}-f(s^{(k)})\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\quad k=0,1,\dots \end{aligned}$$

da cui, partendo da $s^{(0)}=10$, otteniamo

$$\begin{aligned} s^{(1)} &= s^{(0)}-f(s^{(0)})\frac{20-10}{f(20)-f(10)}\simeq 10-1.5075\cdot 10^2\frac{10}{-1.5099\cdot 10^2-1.5075\cdot 10^2} \\ &\simeq 10-1.5075\cdot 10^2\cdot(-3.3141\cdot 10^{-2})\simeq 1.4996\cdot 10^1 \\ s^{(2)} &= s^{(1)}-f(s^{(1)})\tfrac{20-10}{f(20)-f(10)}\simeq 1.5819\cdot 10^1 \\ s^{(3)} &= s^{(2)}-f(s^{(2)})\tfrac{20-10}{f(20)-f(10)}\simeq 1.5825\cdot 10^1 \end{aligned}$$

3. I comandi Matlab necessari per lo svolgimento dei punti 3b), 3d), 3e), 3f), 3g), 3h) e 3i) sono implementati nel file **Es3.m**.

3a) Dati 3 nodi di coordinate $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ tali che $x_i \neq x_j$ con $i \neq j$ e $i, j = 0, 1, 2$, il problema dell'interpolazione consiste nel trovare i coefficienti del polinomio di secondo grado $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ che soddisfa

$$\begin{cases} p(x_0) = y_0 \\ p(x_1) = y_1 \\ p(x_2) = y_2 \end{cases}$$

La ricerca dei coefficienti si traduce quindi nella risoluzione del sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

la cui matrice è denominata "matrice di Vndermonde".

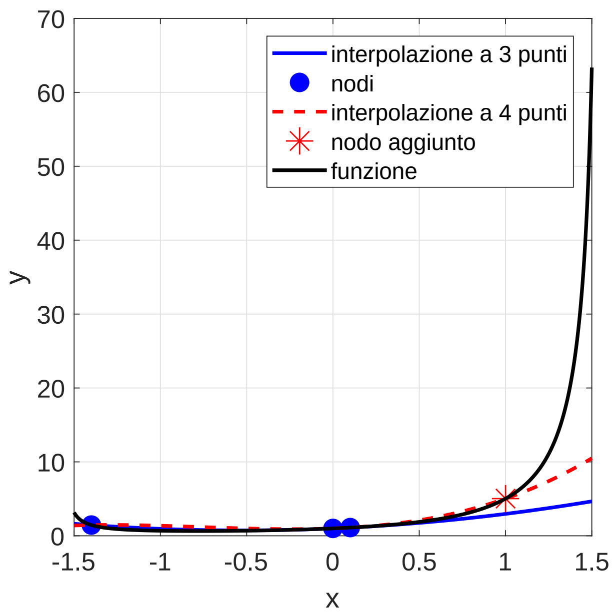
3c) Dati 4 nodi di coordinate $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ tali che $x_i \neq x_j$ con $i \neq j$ e $i, j = 0, 1, 2, 3$, il problema dell'interpolazione consiste nel trovare i coefficienti del polinomio di terzo grado $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ che soddisfa

$$\begin{cases} p(x_0) = y_0 \\ p(x_1) = y_1 \\ p(x_2) = y_2 \\ p(x_3) = y_3 \end{cases}$$

La ricerca dei coefficienti si traduce quindi nella risoluzione del sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

3e) Il grafico risultante dallo svolgimento dei punti 3b), 3d) e 3e) sarà



L'aggiunta di un punto di interpolazione più vicino all'estremo destro dell'intervallo migliora l'approssimazione della pendenza della funzione f nei punti con ascissa in prossimità di $x = 1.5$.

3g) Il condizionamento della matrice di Vandermonde aumenta notevolmente all'aumentare del numero di nodi interpolazione

n	condizionamento
10	$6.096e+03$
20	$7.732e+08$
30	$1.312e+14$
40	$1.147e+19$
50	$3.092e+23$
60	$1.815e+26$
70	$8.885e+28$
80	$1.017e+32$
90	$4.196e+33$
100	$2.929e+35$

e questo può essere causa di notevole errore nella risoluzione del sistema lineare e quindi nel calcolo dei coefficienti del polinomio di interpolazione.
3i) La tabella risultante è

n	Errore Interpolazione Semplice	Errore Lineare Composita
10	$1.033e+01$	$2.294e+01$
20	$2.325e+00$	$1.336e+01$
30	$5.975e-01$	$8.924e+00$
40	$1.631e-01$	$6.422e+00$
50	$4.597e-02$	$4.861e+00$
60	$4.757e-02$	$3.813e+00$
70	$7.713e+01$	$3.071e+00$
80	$1.228e+06$	$2.529e+00$
90	$9.580e+09$	$2.126e+00$
100	$1.521e+14$	$1.798e+00$

L'aumento del grado del polinomio interpolante porta ad un iniziale abbattimento dell'errore ma ad una successiva instabilità dei risultati.
L'utilizzo del comando `interp1` di Matlab, quindi di un'interpolazione lineare composita, produce un minor abbattimento dell'errore ma stabile come stimato anche a livello teorico.