第二章. 信号的统计检测理论

清华大学电子工程系

杨健

1. 假设检验

假设检验是数理统计中一个非常重要的概念,信号的统计检测理论是在假设检验的基础上发展起来的。

假设检验：对几种可能的假设作出判决

假设：可能判决结果的陈述；

雷达目标检测：H_1:“目标出现”

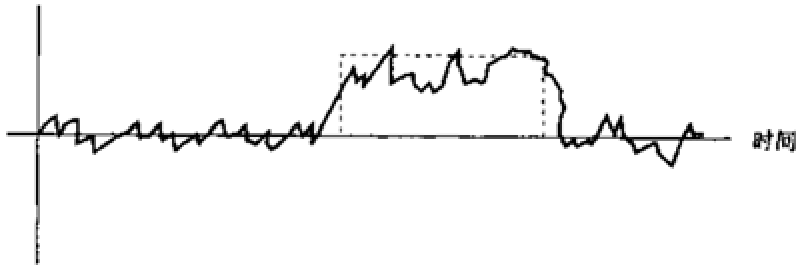
H_0:“目标未出现”

“目标出现”，“目标未出现”是二种可能判决结果的陈述，是两种可供我们选择的两种假设。

H_1和H_0是互不相容的，这是最简单的二元假设问题，对两种假设进行判决称为二元假设检验问题

- 例：简单电平检测问题

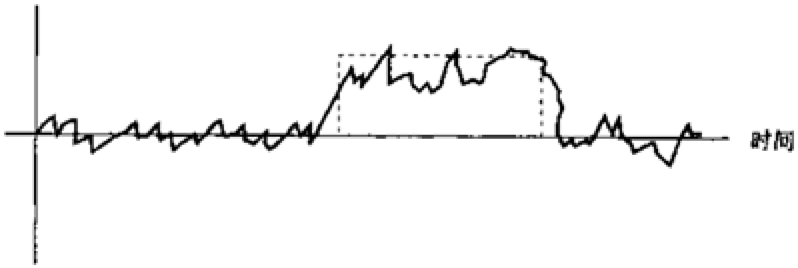
$$H_1: \quad r = a + n$$
$$H_0: \quad r = n$$



H_1和H_0是互不相容的，这是最简单的二元假设问题，对两种假设进行判决称为二元假设检验问题

- 例：简单电平检测问题

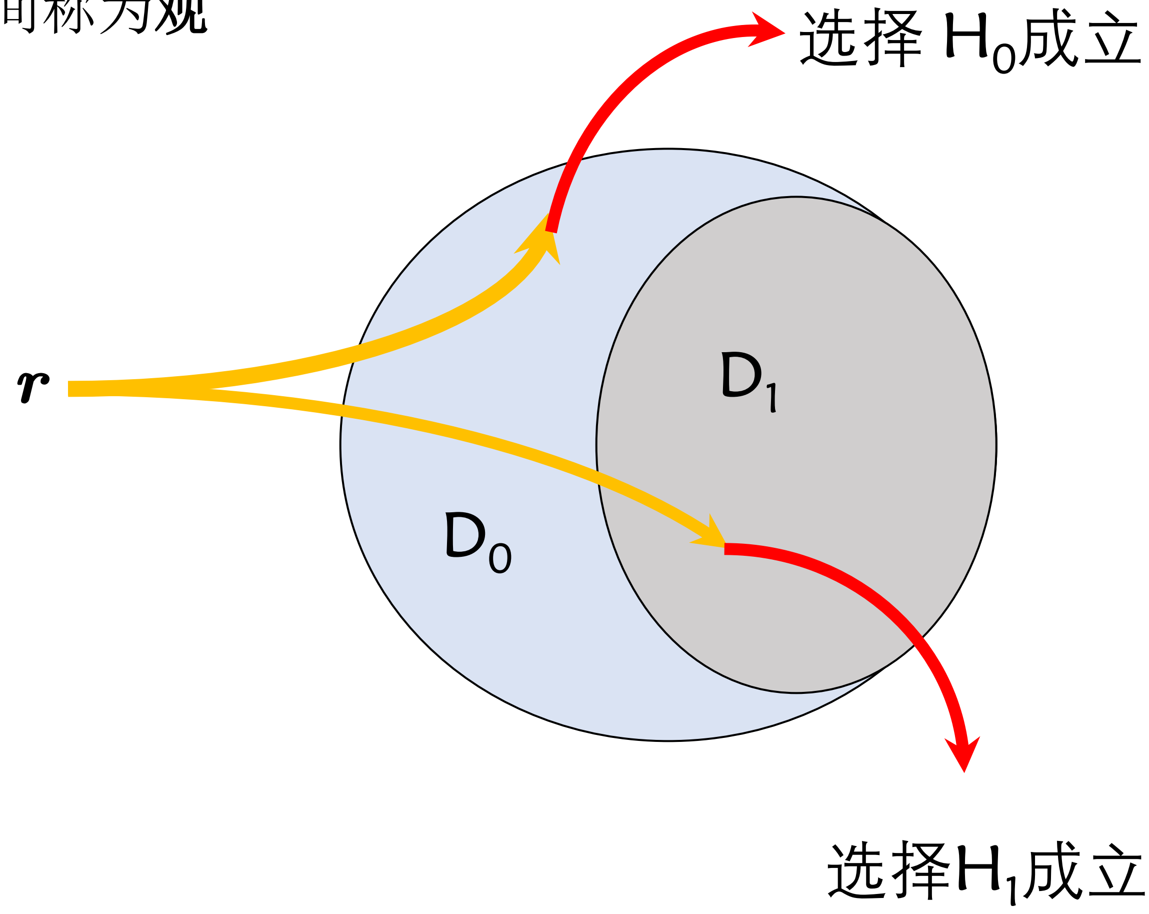
$$H_1: \quad r = a + n$$
$$H_0: \quad r = n$$



更一般的问题是有M个假设，称为M元假设问题，对M个假设进行判决称为M元假设检验问题。

对应于每种假设，我们都可以得到一个观测，观测是一个随机变量，所有观测值构成的空间称为观测空间。

- 所有观测值构成的空间称为**观测空间**
- **假设检验的实质是对观测空间进行划分，将观测空间划分成两部分**
- D_0称为H_0的判决域
  D_1称为H_1的判决域



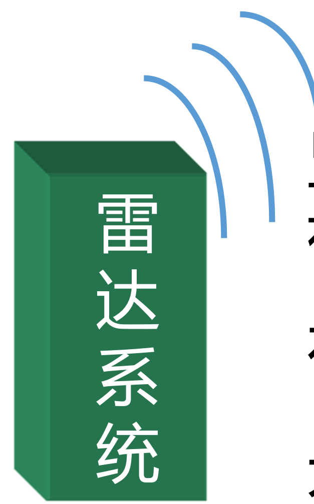
- 假设检验的基本要素
  - 源

二元假设问题

发0，1信号

发 ‘0’→H_0假设

发 ‘1’→H_1假设

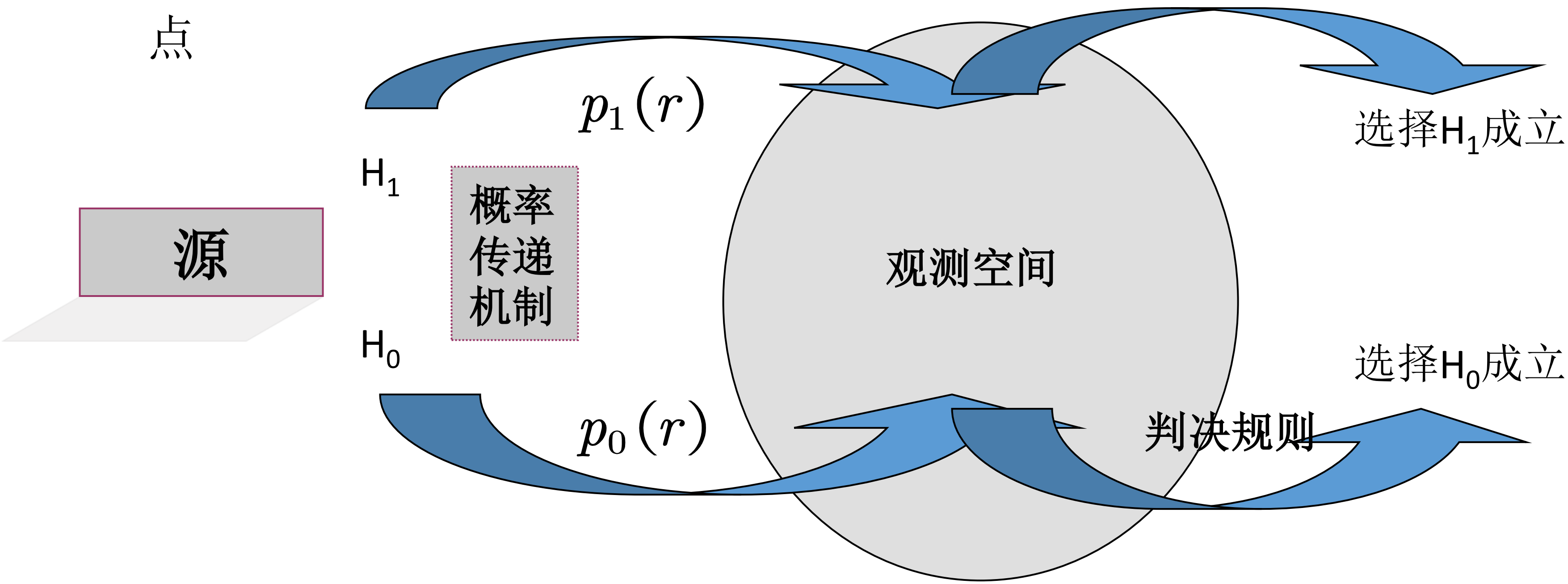


监视空域，判断监视域中是否有目标

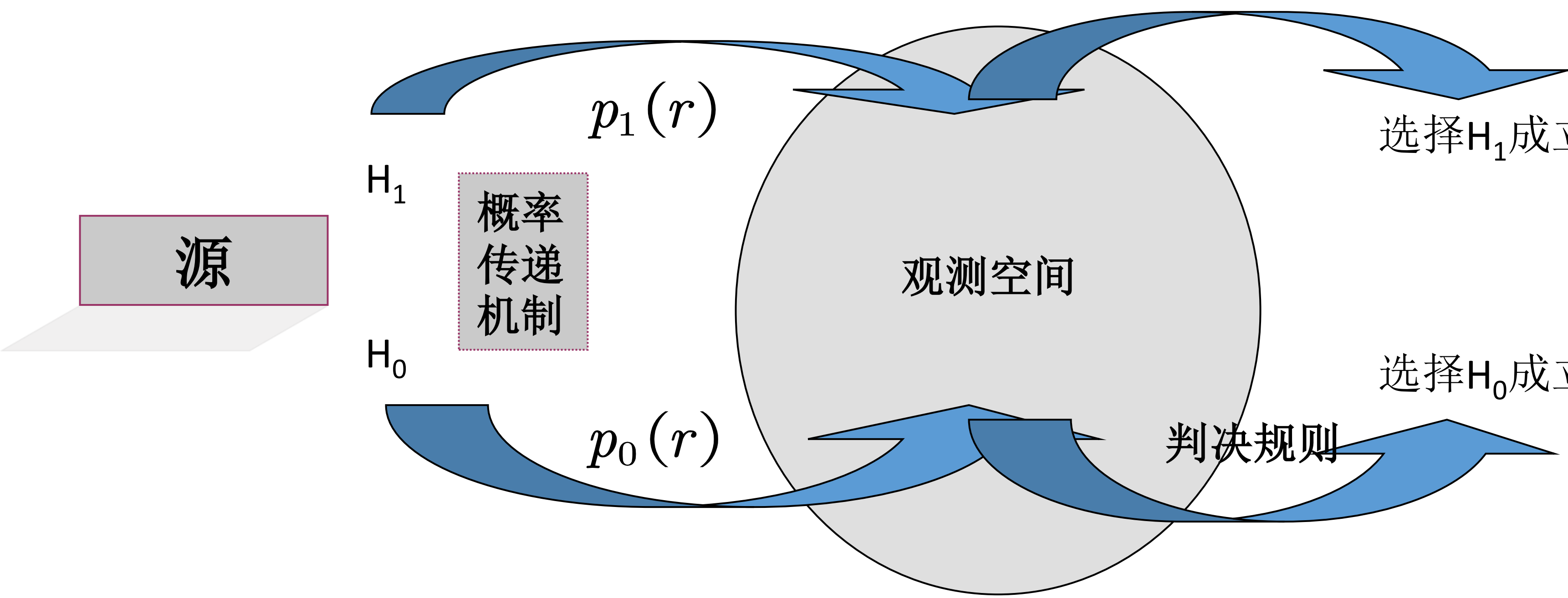
有目标→H_1

无目标→H_0

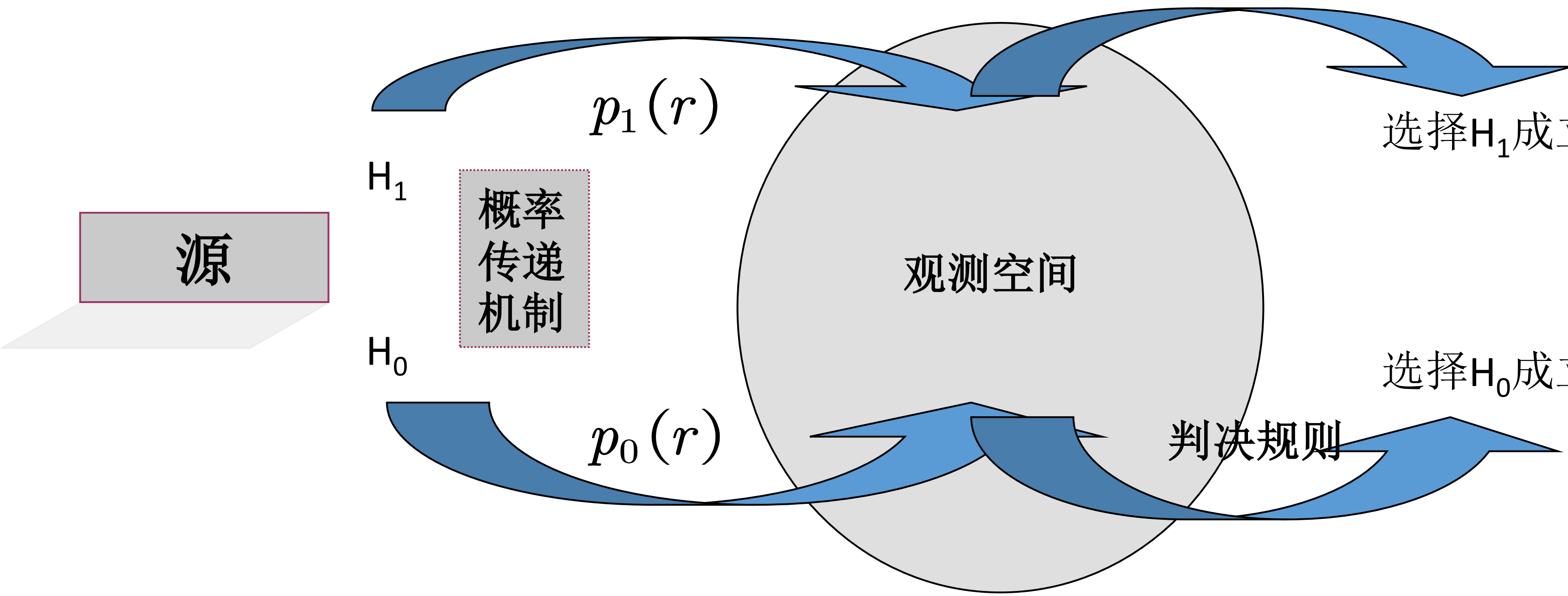
- **假设检验的基本要素**
- 概率传递机制
- 它视哪个假设为真，按照一定的概率规律在观测空间中产生一个点



- **假设检验的基本要素**
- 观测空间
- 所有观测值构成的空间



- **假设检验的基本要素**
- 判决规则
- 最大后验概率准则、贝叶斯准则、极小极大准则、NP准则等



- 假设检验的基本要素
- 判决性能
- 二元假设检验中，判决存在四种可能

检测概率P_D

1^0 H_0为真 选择H_0成立	2^0 H_1为真 选择H_1成立	正确判决
3^0 H_0为真 选择H_1成立	4^0 H_1为真 选择H_0成立	错误判决

第一类错误概率（虚警概率P_F）

第二类错误概率（漏检概率P_M）

1.1 最大后验概率准则：

对于观测空间的合理划分，必须选择一个合适的准则，在观测到数据 r 的情况下，我们可以计算出后验概率 $P(H_1|r)$ 和 $P(H_0|r)$，对二个后验概率进行比较，如果 $P(H_1|r) > P(H_0|r)$ ，我们有理由认为，我们之所以得到这样的观测值 r，最有可能是事件 H_1 发生引起的，因此，将 $r \in D_1$ ，否则，$r \in D_0$ 。那么我们的判决公式为

$$\frac{P(H_1|r)}{P(H_0|r)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

- 根据Bayes公式 $P(H_i|r) = \dfrac{P(H_i)P(r|H_i)}{P(r)}$

$$\frac{P(H_1|r)}{P(H_0|r)} = \frac{P(r|H_1)P(H_1)}{P(r|H_0)P(H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

- 根据Bayes公式 $P(H_i|r) = \dfrac{P(H_i)P(r|H_i)}{P(r)}$

$$\frac{P(H_1|r)}{P(H_0|r)} = \frac{P(r|H_1)P(H_1)}{P(r|H_0)P(H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1 \quad \Longrightarrow \frac{P(r|H_1)}{P(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \triangleq \lambda_0$$

- 根据Bayes公式 $P(H_i|r) = \dfrac{P(H_i)P(r|H_i)}{P(r)}$

$$\frac{P(H_1|r)}{P(H_0|r)} = \frac{P(r|H_1)P(H_1)}{P(r|H_0)P(H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1 \quad \Longrightarrow \frac{P(r|H_1)}{P(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \triangleq \lambda_0$$

- 根据Bayes公式 $P(H_i|r)=\dfrac{P(H_i)P(r|H_i)}{P(r)}$

$$\frac{P(H_1|r)}{P(H_0|r)}=\frac{P(r|H_1)P(H_1)}{P(r|H_0)P(H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{P(r|H_1)}{P(r|H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\triangleq\lambda_0$$

$$p_i(r)=P(r|H_i)\longrightarrow \text{似然函数}$$

$$\lambda(r)=\frac{p_1(r)}{p_0(r)}\longrightarrow \text{似然比}$$

- 假设检验问题转化为似然比与门限进行比较的问题，我们称为似然比检验，即

$$\lambda(r)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\lambda_0$$

- 例：两种假设 H_1:　$r = a + n \quad (a > 0)$

  H_0:　$r = n$

  先验概率：$P(H_0) = \xi$

  噪声：　$n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$

  给出最大后验概率准则下的判决规则，并确定检测器的性能

- 例：两种假设 $H_1: \quad r = a + n \quad (a > 0)$

  $H_0: \quad r = n$

  先验概率：$P(H_0) = \xi$

  噪声： $n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$

  给出最大后验概率准则下的判决规则，并确定检测器的性能

- 首先计算似然比

$$p_1(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(-\frac{(r-a)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$p_0(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

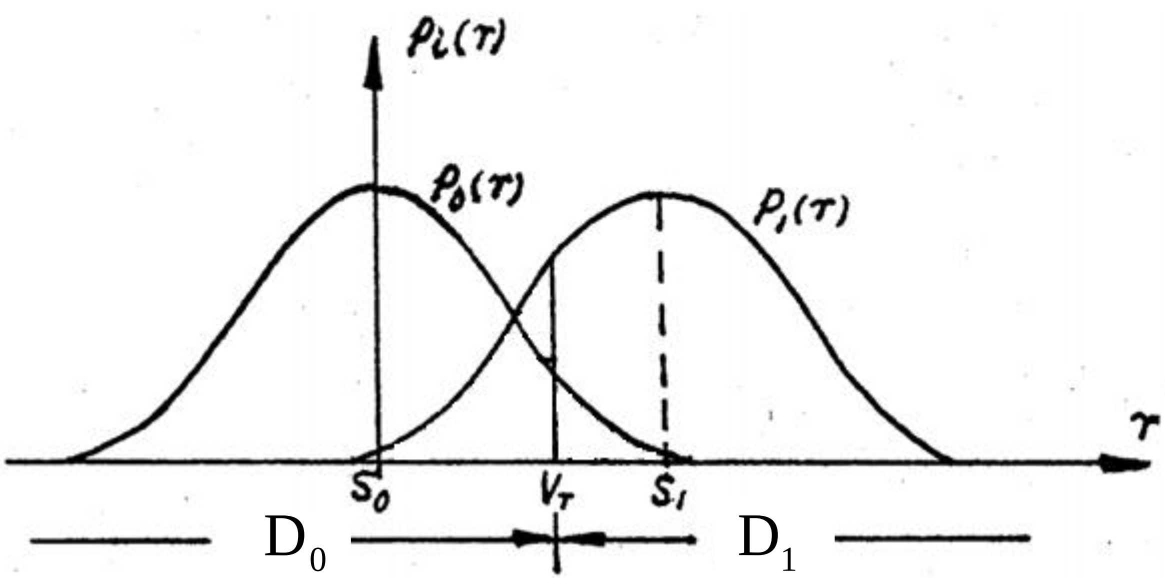
$$\lambda(r) = \frac{p_1(r)}{p_0(r)} = \exp\left(\frac{2ra - a^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$H_1:\quad r=a+n\quad (a>0)$$
$$H_0:\quad r=n$$
$$P(H_0)=\xi$$
$$n\sim\mathcal{N}(0,\sigma_n^2)$$

- 应用最大后验概率准则

$$\lambda(r)=\exp\left(\frac{2ra-a^2}{2\sigma_n^2}\right)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{P(H_0)}{P(H_1)}=\frac{\xi}{1-\xi}=\lambda_0$$

$$\Rightarrow\frac{2ra-a^2}{2\sigma_n^2}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\ln\lambda_0\Rightarrow\quad r\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{a}{2}+\frac{\sigma_n^2}{a}\ln\lambda_0\ \triangleq\ V_T$$



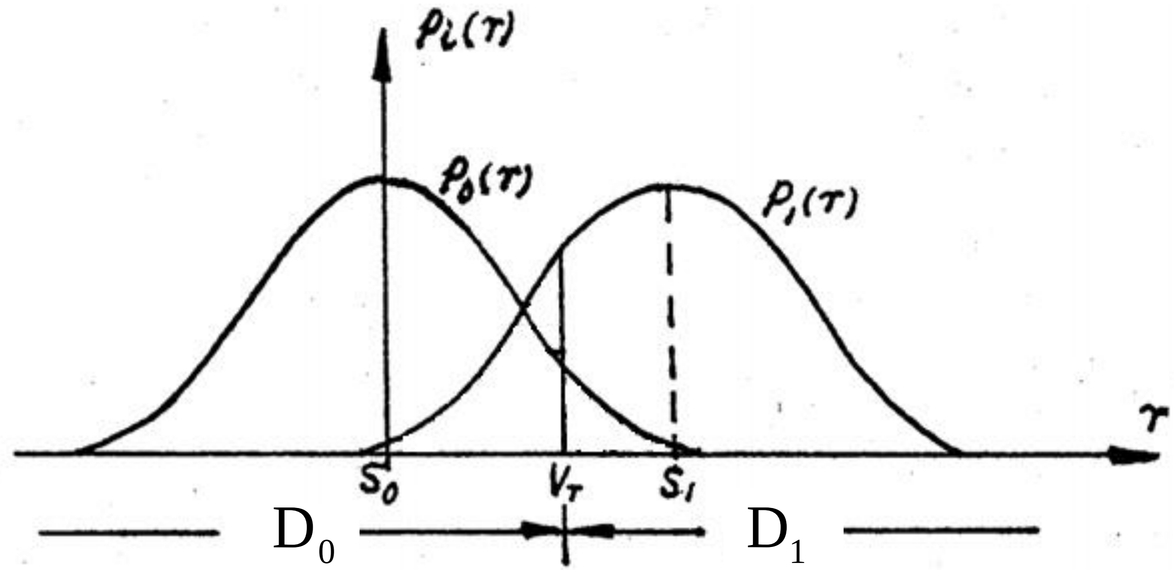
$$H_1: \quad r = a + n \quad (a > 0)$$
$$H_0: \quad r = n$$
$$P(H_0) = \xi$$
$$n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$$

- 应用最大后验概率准则

$$\lambda(r) = \exp\left(\frac{2ra - a^2}{2\sigma_n^2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} = \frac{\xi}{1-\xi} = \lambda_0$$

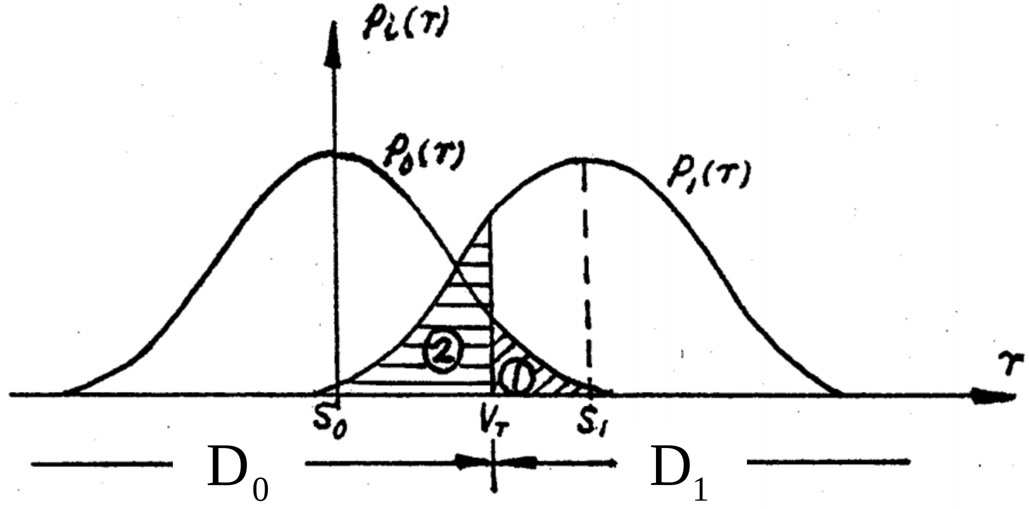
$$\Rightarrow \frac{2ra - a^2}{2\sigma_n^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\lambda_0 \Rightarrow \boxed{r} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{a}{2} + \frac{\sigma_n^2}{a}\ln\lambda_0 \triangleq V_T$$

检验统计量



- 判决性能
- 第一类错误概率（虚警概率）：假设 H_0为真，选择假设 H_1 成立

$$P_F = \int_{V_T}^{\infty} p_0(r)dr = \int_{V_T}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right)dr = \int_{V_T/\sigma_n}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)dr = Q\left(\frac{V_T}{\sigma_n}\right)$$



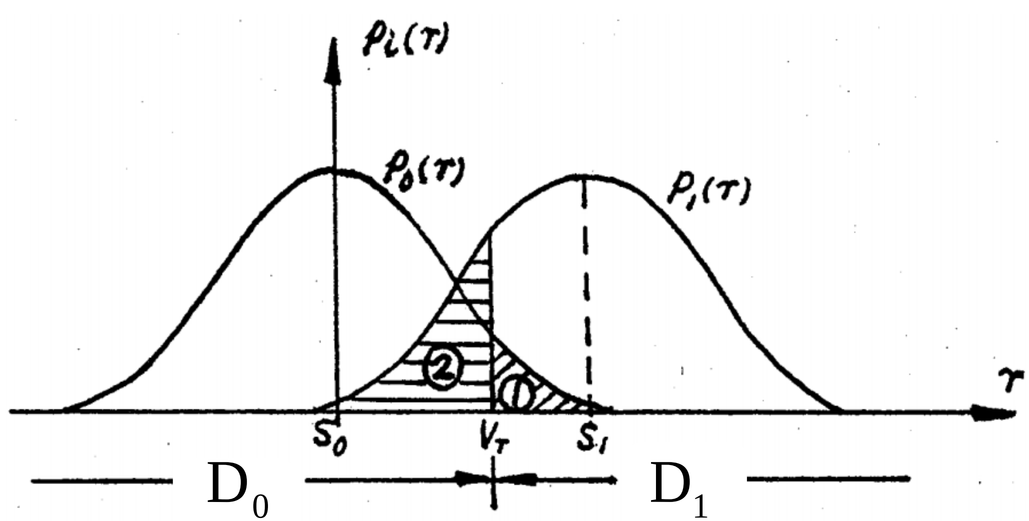
- 判决性能

- 第一类错误概率（虚警概率）：假设 H_0为真，选择假设 H_1成立

$$P_F=\int_{V_T}^{\infty}p_0(r)dr=\int_{V_T}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right)dr=\int_{V_T/\sigma_n}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)dr=Q\left(\frac{V_T}{\sigma_n}\right)$$

- 第二类错误概率（漏检概率）：假设 H_1为真，选择假设H_0成立

$$P_M=\int_{-\infty}^{V_T}p_1(r)dr=\int_{-\infty}^{V_T}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(-\frac{(r-a)^2}{2\sigma_n^2}\right)dr=\int_{\frac{a-V_T}{\sigma_n}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)dr=Q\left(\frac{a-V_T}{\sigma_n}\right)$$



- 判决性能

- 第一类错误概率（虚警概率）：假设 H_0为真，选择假设 H_1成立

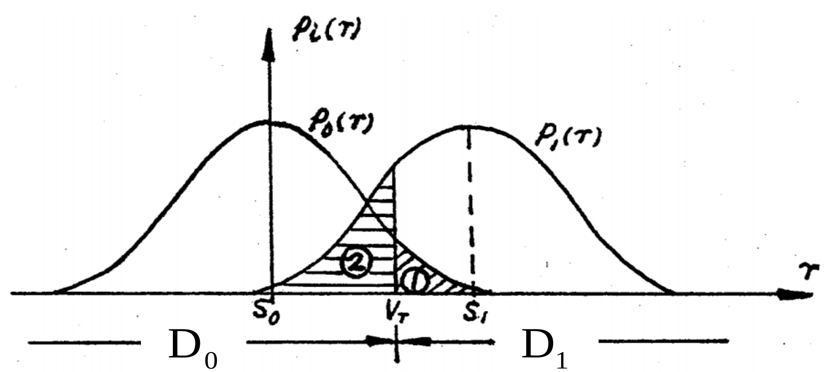
$$P_F=\int_{V_T}^{\infty}p_0(r)dr=\int_{V_T}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right)dr=\int_{V_T/\sigma_n}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)dr=Q\left(\frac{V_T}{\sigma_n}\right)$$

- 第二类错误概率（漏检概率）：假设 H_1为真，选择假设H_0 成立

$$P_M=\int_{-\infty}^{V_T}p_1(r)dr=\int_{-\infty}^{V_T}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(-\frac{(r-a)^2}{2\sigma_n^2}\right)dr=\int_{\frac{a-V_T}{\sigma_n}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)dr=Q\left(\frac{a-V_T}{\sigma_n}\right)$$

- 检测概率：假设 H_1为真，选择假设H_1 成立

$$P_D=\int_{V_T}^{\infty}p_1(r)dr=\int_{V_T}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(-\frac{(r-a)^2}{2\sigma_n^2}\right)dr=\int_{\frac{V_T-a}{\sigma_n}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)dr=Q\left(\frac{V_T-a}{\sigma_n}\right)$$



- **1.2 最小错误概率准则**

使平均错误概率达到最小的判决准则，称为最小错误概率准则。

先验概率为$P(H_0)=\xi$，H_0、H_1的判决域分别为D_0、D_1。则平均错误概率为：

$$\overline{P}=(1-\xi)P_M+\xi P_F$$

- **1.2 最小错误概率准则**

使平均错误概率达到最小的判决准则，称为最小错误概率准则。

先验概率为$P(H_0)=\xi$，H_0、H_1的判决域分别为D_0、D_1。则平均错误概率为：

$$\begin{aligned}\overline{P}&=(1-\xi)P_M+\xi P_F\\&=(1-\xi)\int_{D_0}p_1(r)dr+\xi\int_{D_1}p_0(r)dr\end{aligned}$$

• 1.2 最小错误概率准则

使平均错误概率达到最小的判决准则，称为最小错误概率准则。

先验概率为$P(H_0)=\xi$，H_0、H_1的判决域分别为D_0、D_1。则平均错误概率为：

$$\begin{aligned}\overline{P} &= (1-\xi)P_M+\xi P_F \\ &= (1-\xi)\int_{D_0} p_1(r)dr+\xi\int_{D_1} p_0(r)dr \\ &= 1-\xi+\int_{D_1}[\xi p_0(r)-(1-\xi)p_1(r)]dr\end{aligned}$$

1.2 最小错误概率准则

使平均错误概率达到最小的判决准则，称为最小错误概率准则。

先验概率为$P(H_0)=\xi$，H_0、H_1的判决域分别为D_0、D_1。则平均错误概率为：

$$\begin{aligned}\overline{P} &= (1-\xi)P_M+\xi P_F \\ &= (1-\xi)\int_{D_0} p_1(r)dr+\xi\int_{D_1} p_0(r)dr \\ &= 1-\xi+\int_{D_1}[\xi p_0(r)-(1-\xi)p_1(r)]dr\end{aligned}$$

使 $\overline{P}$ 达到最小，所有满足 $\xi p_0(r)-(1-\xi)p_1(r)<0$ 的 r 都应属于D_1，即判决H_1成立。因此判决规则为：$\dfrac{p_1(r)}{p_0(r)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \dfrac{\xi}{1-\xi}$

$\Longrightarrow$**最小错误概率准则等价于最大后验概率准则**

2. 贝叶斯准则

该准则由米德尔顿在上世纪五十年代提出

- 贝叶斯判决的基本原理

二元假设检验有四种可能的判决结果，两种是正确判决，两种是错误判决，错误的判决是要付出代价的。**要付出代价，只不过这种代价相对于错误判决而言要小一些，**为了反映这种差别，对每种可能的判决结果定义一个代价因子:

H_j为真时，判H_i成立应付出的代价因子是

$$C_{ij}$$

正确判决的代价应小于错误判决的代价：

$$C_{10} - C_{00} > 0$$
$$C_{01} - C_{11} > 0$$

总的平均代价

$$C = C_{00}P(H_0)P(D_0|H_0) + C_{10}P(H_0)P(D_1|H_0)$$
$$+ C_{01}P(H_1)P(D_0|H_1) + C_{11}P(H_1)P(D_1|H_1)$$

总的平均代价

$$
\begin{aligned}
C = {} & C_{00}P(H_0)P(D_0|H_0) + C_{10}P(H_0)P(D_1|H_0) \\
& + C_{01}P(H_1)P(D_0|H_1) + C_{11}P(H_1)P(D_1|H_1) \\
& = \xi C_{00}\int_{D_0} p_0(r)dr + \xi C_{10}\int_{D_1} p_0(r)dr \\
& + (1-\xi)C_{01}\int_{D_0} p_1(r)dr + (1-\xi)C_{11}\int_{D_1} p_1(r)dr
\end{aligned}
$$

总的平均代价

$$
\begin{aligned}
C = & C_{00}P(H_0)P(D_0|H_0) + C_{10}P(H_0)P(D_1|H_0) \\
& + C_{01}P(H_1)P(D_0|H_1) + C_{11}P(H_1)P(D_1|H_1) \\
= & \xi C_{00}\int_{D_0} p_0(r)dr + \xi C_{10}\int_{D_1} p_0(r)dr \\
& + (1-\xi)C_{01}\int_{D_0} p_1(r)dr + (1-\xi)C_{11}\int_{D_1} p_1(r)dr \\
= & \xi C_{10} + (1-\xi)C_{11} \\
& + \int_{D_0} [\xi p_0(r)(C_{00}-C_{10}) + (1-\xi)p_1(r)(C_{01}-C_{11})]dr
\end{aligned}
$$

$$C = \xi C_{10} + (1-\xi) C_{11} + \int_{D_0} \left[\xi p_0(r)\left(C_{00} - C_{10}\right) + (1-\xi) p_1(r)\left(C_{01} - C_{11}\right) \right] dr$$

$$C = \xi C_{10} + (1-\xi) C_{11} + \int_{D_0} \left[\xi p_0(r)(C_{00} - C_{10}) + (1-\xi) p_1(r)(C_{01} - C_{11}) \right] dr$$

与最小错误概率准则的推导同理，满足

$$\xi p_0(r)(C_{00} - C_{10}) + (1-\xi) p_1(r)(C_{01} - C_{11}) < 0$$

的观测值应被归入D_0，才能够使平均代价达到最小。因此贝叶斯准则下的判决规则为：

$$C = \xi C_{10} + (1-\xi)C_{11} + \int_{D_0} [\xi p_0(r)(C_{00} - C_{10}) + (1-\xi)p_1(r)(C_{01} - C_{11})]dr$$

与最小错误概率准则的推导同理，满足

$$\xi p_0(r)(C_{00} - C_{10}) + (1-\xi)p_1(r)(C_{01} - C_{11}) < 0$$

的观测值应被归入D_0，才能够使平均代价达到最小。因此贝叶斯准则下的判决规则为：

$$\frac{p_1(r)}{p_0(r)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\xi(C_{10} - C_{00})}{(1-\xi)(C_{01} - C_{11})}$$

判决规则是似然比检验的形式

- 贝叶斯准则的分析
- 最终形式归结于似然比检验

$$\lambda(r) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0$$

- 当 $C_{10}-C_{00}=C_{01}-C_{11}$ 时，判决规则等价于最大后验概率（最小错误概率）准则

$$\frac{p_1(r)}{p_0(r)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\xi(C_{10}-C_{00})}{(1-\xi)(C_{01}-C_{11})}=\frac{\xi}{1-\xi}$$

- 贝叶斯准则的分析
- 最终形式归结于似然比检验

$$\lambda(r) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0$$

- 当 $C_{10}-C_{00}=C_{01}-C_{11}$ 时，判决规则等价于最大后验概率（最小错误概率）准则

$$\frac{p_1(r)}{p_0(r)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\xi(C_{10}-C_{00})}{(1-\xi)(C_{01}-C_{11})}=\frac{\xi}{1-\xi}$$

- 当 $C_{10}=C_{01}=1,\ C_{00}=C_{11}=0$ 时，平均风险就等于平均错误概率

$$\begin{aligned} C=&C_{00}P(H_0)P(D_0|H_0)+C_{10}P(H_0)P(D_1|H_0)\\ &+C_{01}P(H_1)P(D_0|H_1)+C_{11}P(H_1)P(D_1|H_1)\\ =&P(H_0)P(D_1|H_0)+P(H_1)P(D_0|H_1)\end{aligned}$$

• 讨论贝叶斯准则的应用可能性

$$\frac{p_1(r)}{p_0(r)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{x(C_{10}-C_{00})}{(1-x)(C_{01}-C_{11})}$$

$$\begin{aligned} C = & C_{00}P(H_0)(1-P_F) + C_{10}P(H_0)P_F \\ & + C_{01}P(H_1)P_M + C_{11}P(H_1)(1-P_M) \end{aligned}$$

- 数字通信
- 思考在哪些行业可以应用？如何估计代价因子？

作业题 1

设二元假设检验的观测信号模型为：

$$H_0: \quad x = -1+n$$

$$H_1: \quad x = 1+n$$

其中 n 是均值为 0，方差为 $\sigma_n^2 = \dfrac{1}{2}$ 的高斯观测噪声。若两种假设是等先验概率的，而

因子为 $c_{00} = 1, c_{01} = 8, c_{10} = 4, c_{11} = 2,$ 试求贝叶斯（最佳）表达式和平均代价 C:

3. 极小极大准则

- 1939年，瓦尔德（Abraham Wald，1902-1950）提出了代价和风险的概念。他认为做出错误的判决是要付出代价的，不同的错误类型付出的代价不同，应该选择代价最小的检验。在统计学中引入了极小极大风险准则。
- 他还建立了序贯分析理论，提出了著名的序贯概率比检验法，并证明该方法的最优性。
- 二战中他为美国空军提出了非常重要的建议！

3. 极小极大准则

- 普通人想当然的假设：
- 战场返回来的飞机是等概率的
- 或战场抬下来的伤员是是等概率的

因此，我们在学会用概率统计的观点思考问题时，首先要注意假设的前提是否正确？

幸运者偏差

很可惜他48岁因飞机事故遇难

3. 极小极大准则

贝叶斯准则需要知道先验概率，前边的讨论大家也看到了先验概率的极端重要性。如果先验概率不知道，我们这时可采用极小极大准则。

简单地说，极小极大准则就是在最不利的情况下的最佳解，或者说把最大的可能风险最小化。

$$
\begin{aligned}
C &= C_{00}P(H_0)P(D_0|H_0) + C_{10}P(H_0)P(D_1|H_0) \\
&\quad + C_{01}P(H_1)P(D_0|H_1) + C_{11}P(H_1)P(D_1|H_1) \\
&= C_{00}P(H_0)(1-P_F) + C_{10}P(H_0)P_F \\
&\quad + C_{01}P(H_1)P_M + C_{11}P(H_1)(1-P_M)
\end{aligned}
$$

猜测先验概率 $P'(H_0)=x$

$$\frac{p_1(r)}{p_0(r)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{x(C_{10}-C_{00})}{(1-x)(C_{01}-C_{11})}$$

$$\boxed{\begin{aligned} C = {} & C_{00}P(H_0)(1-P_F)+C_{10}P(H_0)P_F \\ & +C_{01}P(H_1)P_M+C_{11}P(H_1)(1-P_M) \end{aligned}}$$

猜测先验概率 $P'(H_0) = x$

$$\frac{p_1(r)}{p_0(r)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{x(C_{10} - C_{00})}{(1-x)(C_{01} - C_{11})}$$

$$C = C_{00}P(H_0)(1-P_F) + C_{10}P(H_0)P_F + C_{01}P(H_1)P_M + C_{11}P(H_1)(1-P_M)$$

实际先验概率 $P(H_0) = \xi$

平均代价是关于 ξ, x 的函数

$$C(\xi,x) = \xi C_{00}(1-P_F(x)) + \xi C_{10}P_F(x) + (1-\xi)C_{01}P_M(x) + (1-\xi)C_{11}(1-P_M(x))$$

猜测先验概率 $P'(H_0)=x$

$$\frac{p_1(r)}{p_0(r)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{x(C_{10}-C_{00})}{(1-x)(C_{01}-C_{11})}$$

$$C=C_{00}P(H_0)(1-P_F)+C_{10}P(H_0)P_F$$
$$+C_{01}P(H_1)P_M+C_{11}P(H_1)(1-P_M)$$

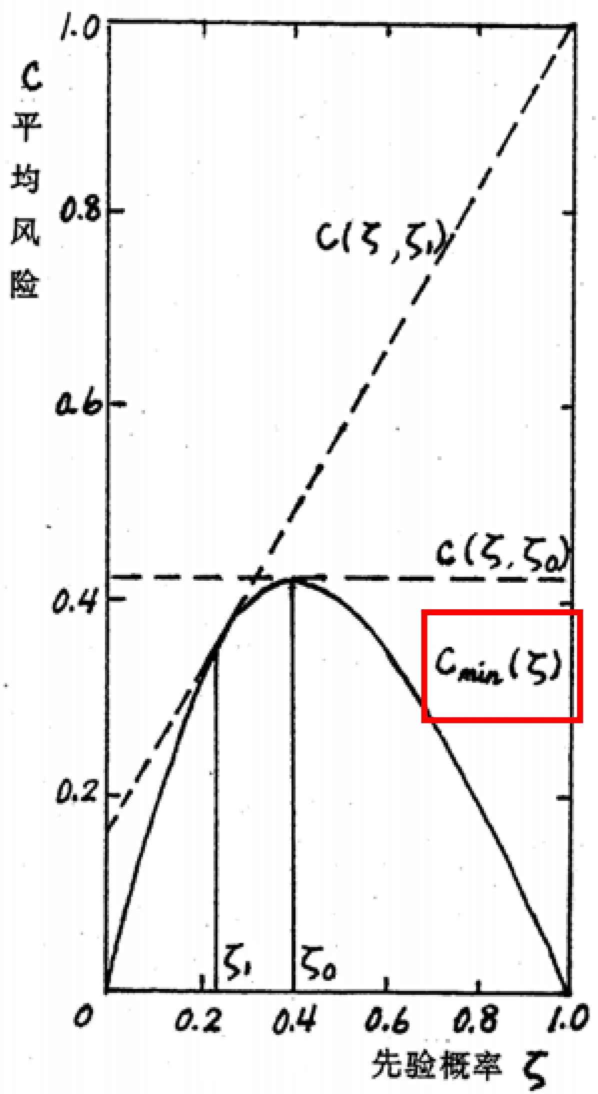
实际先验概率 $P(H_0)=\xi$

平均代价是关于 ξ, x 的函数

$$C(\xi,x)=\xi C_{00}(1-P_F(x))+\xi C_{10}P_F(x)$$
$$+(1-\xi)C_{01}P_M(x)+(1-\xi)C_{11}(1-P_M(x))$$

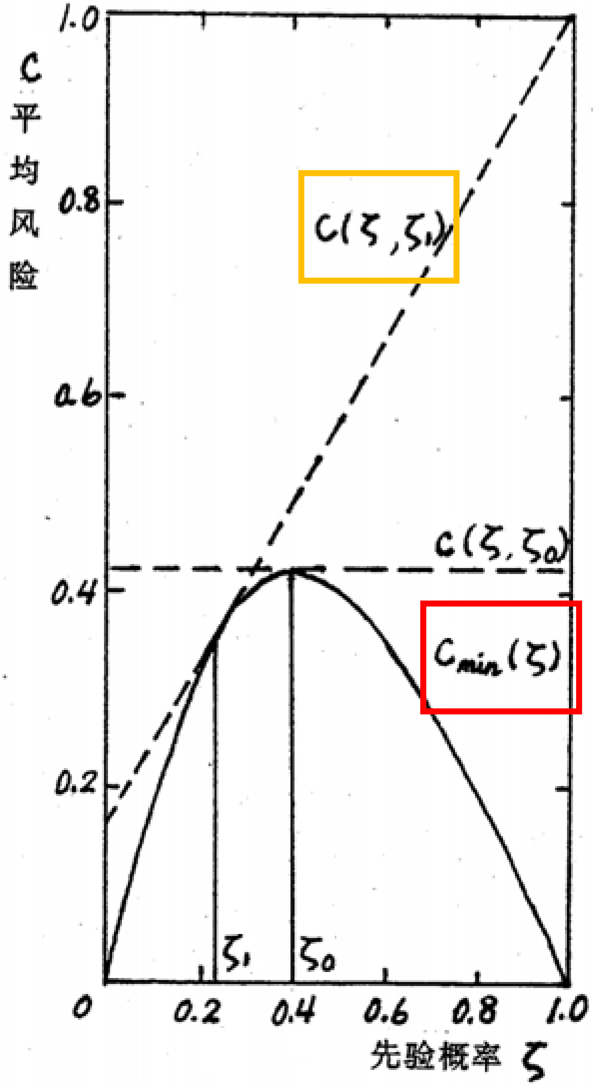
当 $x=\xi$ 时，就是贝叶斯准则的情况

$$C_{min}(\xi)=\xi C_{00}(1-P_F(\xi))+\xi C_{10}P_F(\xi)$$
$$+(1-\xi)C_{01}P_M(\xi)+(1-\xi)C_{11}(1-P_M(\xi))$$



$$C(\xi,x)=\xi C_{00}(1-P_F(x))+\xi C_{10}P_F(x)$$
$$+(1-\xi)C_{01}P_M(x)+(1-\xi)C_{11}(1-P_M(x))$$

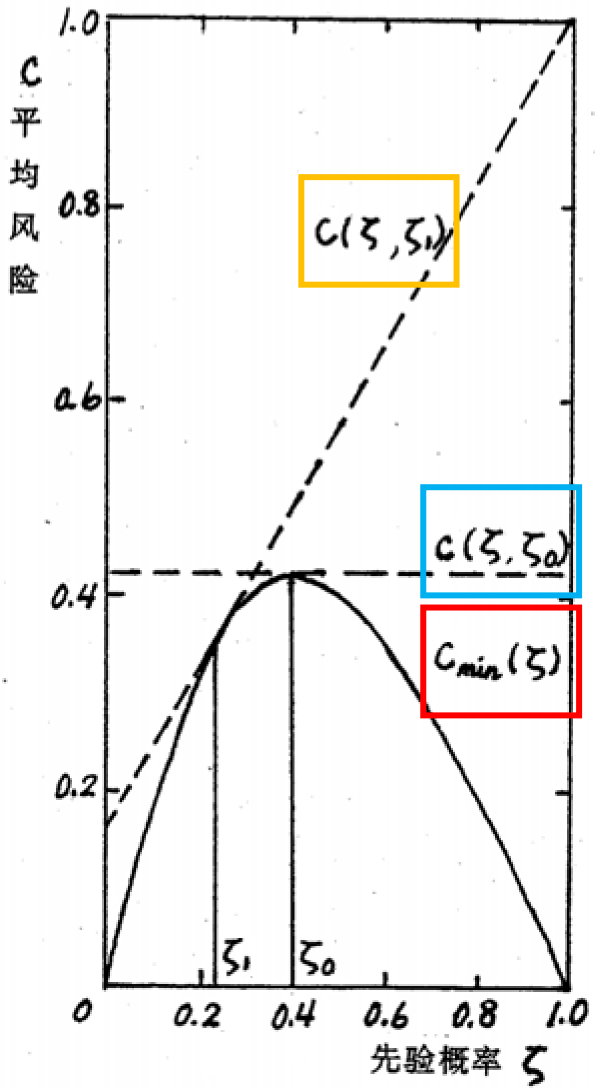
如果选取 $x=\xi$，$C_{min}(\xi)$ 是可能得到的最小平均代价（贝叶斯准则）



$$C(\xi,x)=\xi C_{00}(1-P_F(x))+\xi C_{10}P_F(x)$$
$$+(1-\xi)C_{01}P_M(x)+(1-\xi)C_{11}(1-P_M(x))$$

如果选取 $x=\xi$，$C_{min}(\xi)$ 是可能得到的最小平均代价（贝叶斯准则）

任意取定一个 $x=\xi_1$， 此时 $C(\xi,\xi_1)$ 为一条直线，并且在 $C_{min}(\xi)$ 之上，在 $\xi=\xi_1$ 相切。极大风险在 $\xi=0,1$ 取到



$$C(\xi,x)=\xi C_{00}(1-P_F(x))+\xi C_{10}P_F(x)$$
$$+(1-\xi)C_{01}P_M(x)+(1-\xi)C_{11}(1-P_M(x))$$

如果选取 $x=\xi$ ，$C_{min}(\xi)$ 是可能得到的最小平均代价（贝叶斯准则）

任意取定一个 $x=\xi_1$ ，此时 $C(\xi,\xi_1)$ 为一条直线，并且在 $C_{min}(\xi)$ 之上，在 $\xi=\xi_1$ 相切。极大风险在 $\xi=0,1$ 取到

极小极大准则：当取到 $x=\xi_0$ ，且 ξ_0 满足 $C(\xi,\xi_0)$ 斜率为0时，可以使极大风险极小化，即 $\xi_0=\underset{x}{\operatorname{argmin}}\ \underset{\xi}{\max}\ C(\xi,x)$

思考题（选做）：

什么假设下代价函数曲线是上凸的?

$$C(\xi,x)=\xi C_{00}(1-P_F(x))+\xi C_{10}P_F(x)$$
$$+(1-\xi)C_{01}P_M(x)+(1-\xi)C_{11}(1-P_M(x))$$

极小极大方程：

$$C(\xi,x^*)\text{关于}\xi\text{的斜率为}0 \quad \Rightarrow \quad C(0,x^*)=C(1,x^*)$$

$$C_{01}P_M(x^*)+C_{11}(1-P_M(x^*))=C_{00}(1-P_F(x^*))+C_{10}P_F(x^*)$$

$$C(\xi,x)=\xi C_{00}(1-P_F(x))+\xi C_{10}P_F(x)$$
$$+(1-\xi)C_{01}P_M(x)+(1-\xi)C_{11}(1-P_M(x))$$

极小极大方程：

$$C(\xi,x^*)\text{关于}\xi\text{的斜率为}0 \quad \Rightarrow \quad C(0,x^*)=C(1,x^*)$$

$$C_{01}P_M(x^*)+C_{11}(1-P_M(x^*))=C_{00}(1-P_F(x^*))+C_{10}P_F(x^*)$$

得到 x^* 后，判决规则归结于似然比检验：

$$\lambda(r)=\frac{p_1(r)}{p_0(r)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\lambda_0=\frac{x^*(C_{10}-C_{00})}{(1-x^*)(C_{01}-C_{11})}$$

此准则下，在任意先验概率下的代价均为 $C_{min}(x^*)=\max\ C_{min}(\xi)$

$$C(\xi,x)=\xi C_{00}(1-P_F(x))+\xi C_{10}P_F(x)$$
$$+(1-\xi)C_{01}P_M(x)+(1-\xi)C_{11}(1-P_M(x))$$

极小极大方程：

$$C(\xi,x^*)\text{关于}\xi\text{的斜率为}0 \quad\Rightarrow\quad C(0,x^*)=C(1,x^*)$$

$$C_{01}P_M(x^*)+C_{11}(1-P_M(x^*))=C_{00}(1-P_F(x^*))+C_{10}P_F(x^*)$$

得到 x^* 后，判决规则归结于似然比检验：

$$\lambda(r)=\frac{p_1(r)}{p_0(r)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\lambda_0=\frac{x^*(C_{10}-C_{00})}{(1-x^*)(C_{01}-C_{11})}$$

此准则下，在任意先验概率下的代价均为 $C_{min}(x^*)=\max\ C_{min}(\xi)$

特殊情况 $C_{00}=C_{11}=0$，$C_{10}=C_{01}=1$ 下，极小极大方程简化为：

$$P_F=P_M$$

- 例

$$H_1: \quad r = a + n \quad (a > 0)$$

$$n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

$$H_0: \quad r = n$$

$$C_{ij} = 1(i \neq j), \quad C_{ii} = 0$$

给出极小极大风险准则下的判决规则

- 例 $\boldsymbol{H}_1: \quad r = a + n \quad (a > 0)$ $\quad n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

  $\boldsymbol{H}_0: \quad r = n$

  $C_{ij} = 1 (i \neq j), \ C_{ii} = 0$

  给出极小极大风险准则下的判决规则

$$C(\xi, x) = \xi \int_V^{\infty} p_0(r) dr + (1 - \xi) \int_{-\infty}^{V} p_1(r) dr$$

$$C(1, x^*) = C(0, x^*) \Rightarrow \int_V^{\infty} p_0(r) dr = \int_{-\infty}^{V} p_1(r) dr$$

- 例 $\boldsymbol{H}_1: \quad r = a + n \quad (a > 0)$

  $\boldsymbol{H}_0: \quad r = n$

  $n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

  $C_{ij} = 1 (i \neq j), \quad C_{ii} = 0$

  给出极小极大风险准则下的判决规则

$$C(\xi, x) = \xi \int_V^{\infty} p_0(r) dr + (1-\xi) \int_{-\infty}^{V} p_1(r) dr$$

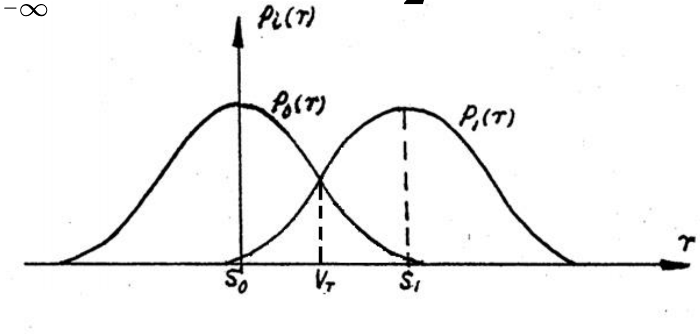
$$p_1(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(r-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p_0(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$C(1, x^*) = C(0, x^*) \Rightarrow \int_V^{\infty} p_0(r) dr = \int_{-\infty}^{V} p_1(r) dr \Rightarrow V = \frac{a}{2}$$

判决规则为：$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \dfrac{a}{2}$



复习：

1 初步了解统计信号处理的发展概况

2 理解和掌握几个基本概念和基本方法：

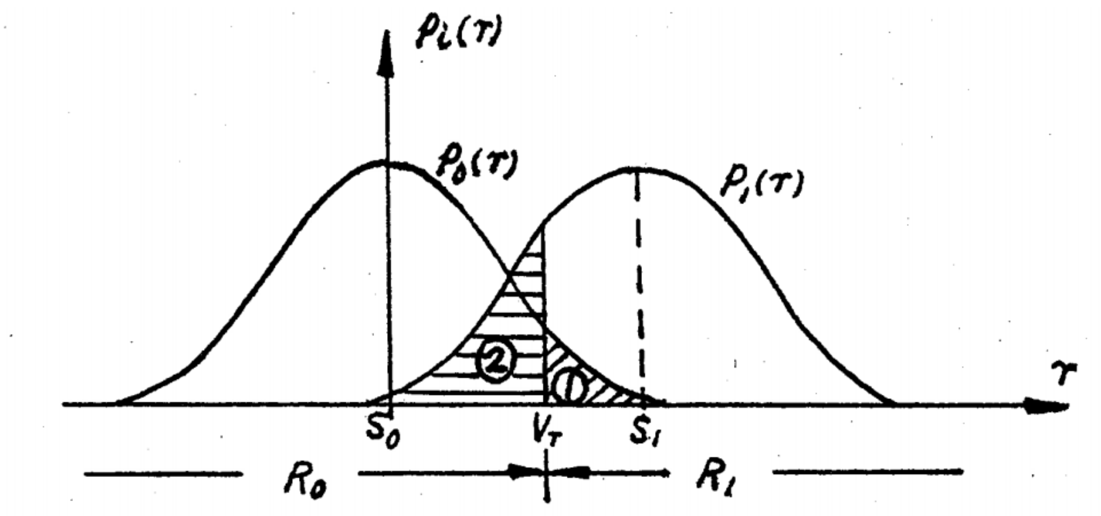
假设检验、先验概率、虚警概率、检测概率、似然函数、似然比

最大后验概率准则、最小错误概率准则

贝叶斯准则、极小极大风险准则

清楚知道每种检测准则的前提条件

3 记住一张图



4 逐渐学会用统计信号处理的观点去思考问题和解释现象

谢谢大家！