第二章. 信号的统计检测理论

清华大学电子工程系

杨健

杨健

清华大学电子工程系

平均的魅力

罪犯平均的面孔画像更符合真实情况 （高尔顿）

平均的面孔更具有吸引力 （美、日、德实验验证）

平均翼长的鸟在暴风雨中更能生存

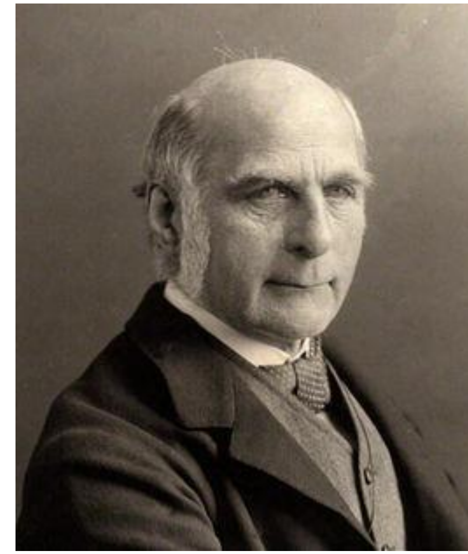
平均身高或许最好！ （人类学家西蒙）

平均的偏差

平均收入

平均的河流深度

神童---弗朗西斯•高尔顿



弗朗西斯•高尔顿（Francis Galton，1822年2月16日 - 1911年1月17日），英国科学家和探险家。学术研究兴趣广泛，包括人类学、地理、数学、力学、气象学、心理学、统计学等方面。他着重研究个别差异，从遗传的角度研究个别差异形成的原因，开创了优生学。他关于人类官能的研究开辟了个体心理和心理测验研究的新途径。他系统深入的研究了指纹学，明确指出**指纹终身不变；指纹可以识别；指纹可以分类。**

他是相关系数的提出者，是生物统计学的先驱。

他是第一个明确提出普通能力和特殊能力主张的人。他在调查了1768 - 1868 年这 100 年间英国的首相、将军、文学家和科学家共 977 名获得智力成熟的人的家谱后发现，其中有 89 个父亲、129 个儿子、114 个兄弟，共 332 名杰出人士。而在一般老百姓中每 4000 人才产生一名杰出人士。因此他认为普通能力是遗传的。在调查 30 家有艺术能力的家庭中，他发现这些家庭中的子女也有艺术能力的占 64%；而 150 家无艺术能力的家庭，其子女中只有 21% 有艺术能力

高尔顿的学术继承人、卡尔.皮尔逊在提到高尔顿的博学时有个有趣的说法：“高尔顿比10个生物学家中的9个更懂数学和物理，比20个数学家中的19个更懂生物，而比50个生物学家中的49个更懂疾病和畸形儿的知识。

- **例**
- 若接收信号的m次独立观测为 $r_1, r_2, \ldots r_m$
- 每个噪声样本 $n_i, i = 1, 2, \ldots m$ 都是独立同分布的拉普拉斯噪声，噪声样本与信号样本统计独立

$$p(n_i) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma_n} \exp\left\{-\frac{\sqrt{2}\,|n_i|}{\sigma_n}\right\}$$

- **例**
- 若接收信号的m次独立观测为 $r_1, r_2, \ldots r_m$
- 每个噪声样本 $n_i, i=1,2,\ldots m$ 都是独立同分布的拉普拉斯噪声，噪声样本与信号样本统计独立 $p(n_i)=\dfrac{1}{\sqrt{2}\,\sigma_n}\exp\left\{-\dfrac{\sqrt{2}\,|n_i|}{\sigma_n}\right\}$
- 多样本的二元假设检验

$$\begin{cases} H_1:\ r_i = A + n_i, & i=1,2,\ldots m \\ H_0:\ r_i = n_i & i=1,2,\ldots m \end{cases}$$

- 其中A为正
- 给出似然比检验最佳检测器的形式

- 两种假设下 r_i 的概率密度分布函数为

$$p_1(r_i) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma_n} \exp\left\{-\frac{\sqrt{2}\,|r_i - A|}{\sigma_n}\right\} \qquad p_0(r_i) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma_n} \exp\left\{-\frac{\sqrt{2}\,|r_i|}{\sigma_n}\right\}$$

- 两种假设下 r_i 的概率密度分布函数为

$$p_1(r_i)=\frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma_n}\exp\left\{-\frac{\sqrt{2}\,|r_i-A|}{\sigma_n}\right\}\qquad p_0(r_i)=\frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma_n}\exp\left\{-\frac{\sqrt{2}\,|r_i|}{\sigma_n}\right\}$$

- 由于噪声是统计独立的，所以各个 r_i 也是统计独立的
- 样本矢量的概率密度分布函数为

$$p_1(\boldsymbol{r})=\prod_{i=1}^{m}p_1(r_i)=\left(\frac{1}{2\sigma_n^2}\right)^{\frac{m}{2}}\exp\left\{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_n}\sum_{i=1}^{m}|r_i-A|\right\}$$

$$p_0(\boldsymbol{r})=\prod_{i=1}^{m}p_0(r_i)=\left(\frac{1}{2\sigma_n^2}\right)^{\frac{m}{2}}\exp\left\{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_n}\sum_{i=1}^{m}|r_i|\right\}$$

- 两种假设下 r_i 的概率密度分布函数为

$$p_1(r_i) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma_n}\exp\left\{-\frac{\sqrt{2}\,|r_i - A|}{\sigma_n}\right\} \qquad p_0(r_i) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma_n}\exp\left\{-\frac{\sqrt{2}\,|r_i|}{\sigma_n}\right\}$$

- 由于噪声是统计独立的，所以各个 r_i 也是统计独立的
- 样本矢量的概率密度分布函数为

$$p_1(\boldsymbol{r}) = \prod_{i=1}^{m} p_1(r_i) = \left(\frac{1}{2\sigma_n^2}\right)^{\frac{m}{2}}\exp\left\{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_n}\sum_{i=1}^{m}|r_i - A|\right\}$$

$$p_0(\boldsymbol{r}) = \prod_{i=1}^{m} p_0(r_i) = \left(\frac{1}{2\sigma_n^2}\right)^{\frac{m}{2}}\exp\left\{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_n}\sum_{i=1}^{m}|r_i|\right\}$$

- 对数似然比为

$$\ln\lambda(\boldsymbol{r}) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_n}\sum_{i=1}^{m}|r_i| - |r_i - A|$$

- 设样本总数为**N**
- $r_i < 0$ 的样本数为 N_1
- $0 < r_i < A$ 的样本数为 N_2
- $r_i > A$的样本数为 N_3

- 设样本总数为N
- $r_i < 0$ 的样本数为 N_1
- $0 < r_i < A$ 的样本数为 N_2
- $r_i > A$的样本数为 N_3
- 则判决规则为

$$[(N_3 - (N_1 + N_2))]\frac{A}{2} + \sum_{0<r_i<A} r_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n}{2\sqrt{2}} \ln \lambda_0$$

$$N_3 A + \sum_{0<r_i<A} r_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{NA}{2} + \frac{\sigma_n}{2\sqrt{2}} \ln \lambda_0$$

- 判决过程为：对超过A的样本值计数，对在0和A之间的样本值求和，在通过特定门限比较做出判决

- **作业**
- 若接收信号的**m**次独立观测为 $r_1, r_2, \ldots r_m$
- 每个噪声样本 $n_i, i=1,2,\ldots m$ 都是独立同分布的拉普拉斯噪声，噪声样本与信号样本统计独立 $p(n_i)=\frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma_n}\exp\left\{-\frac{\sqrt{2}\,|n_i|}{\sigma_n}\right\}$
- 多样本的二元假设检验

$$\begin{cases} H_1:\ r_i = A + n_i, & i=1,2,\ldots m \\ H_0:\ r_i = n_i & i=1,2,\ldots m \end{cases}$$

- 其中***A*= -10**
- 给出似然比检验最佳检测器的形式

多次测量极小极大准则

- 已知判决的代价矩阵

$$C = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix}$$

- 假设H_0和 H_1的先验概率未知，记猜测的先验概率为 $\boldsymbol{x}$

多次测量极小极大准则

- 已知判决的代价矩阵

$$C = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix}$$

- 假设H_0和 H_1的先验概率未知，记猜测的先验概率为 ***x***
- 对于先验概率 ξ 的每一个值，均可以利用贝叶斯准则计算出对应的最小平均风险 $\overline{C}_{\min}(\xi)$,即最小平均风险是先验概率的函数

多次测量极小极大准则

- 已知判决的代价矩阵

$$C=\begin{bmatrix}C_{00} & C_{01}\\ C_{10} & C_{11}\end{bmatrix}$$

- 假设H_0和H_1的先验概率未知，记猜测的先验概率为 $\boldsymbol{x}$
- 对于先验概率 ξ 的每一个值，均可以利用贝叶斯准则计算出对应的最小平均风险 $\overline{C}_{\min}(\xi)$,即最小平均风险是先验概率的函数
- 采用使 $\overline{C}_{\min}(\xi)$ 达到极大的先验概率ξ_0 作为假定的先验概率，再采用贝叶斯准则

多次测量极小极大准则

- 已知判决的代价矩阵

$$C = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix}$$

- 假设H_0和H_1的先验概率未知，记猜测的先验概率为 ***x***
- 对于先验概率 ξ 的每一个值，均可以利用贝叶斯准则计算出对应的最小平均风险 $\overline{C}_{\min}(\xi)$,即最小平均风险是先验概率的函数
- 采用使 $\overline{C}_{\min}(\xi)$ 达到极大的先验概率ξ_0 作为假定的先验概率，再采用贝叶斯准则

$$C(\xi,x) = \xi C_{00}(1 - P_F(\nu)) + \xi C_{10} P_F(\nu) + (1-\xi)C_{01} P_M(\nu) + (1-\xi)C_{11}(1 - P_M(\nu))$$

极小极大方程：

$$C(\xi, x^*)\text{关于}\xi\text{的斜率为}0 \quad \Rightarrow \quad C(0, x^*) = C(1, x^*)$$

$$C_{01}P_M(v) + C_{11}(1 - P_M(v)) = C_{00}(1 - P_F(v)) + C_{10}P_F(v)$$

得到 x^* 或 v 后，判决规则归结于似然比检验：

$$\lambda(r) = \frac{p_1(r)}{p_0(r)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0 = \frac{x^*(C_{10} - C_{00})}{(1 - x^*)(C_{01} - C_{11})}$$

此准则下，在任意先验概率下的代价均为 $C_{min}(x^*) = \max\ C_{min}(\xi)$

多次测量奈曼-皮尔逊准则

- 判决的代价矩阵未知
- 假设H_0和H_1的先验概率未知
- 解决优化问题，其中优化变量为 D_1

$$\max \;\; P_D = \int_{D_1} p_1(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$$

$$s.t. \;\; P_f = \int_{D_1} p_0(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} \leqslant \alpha$$

多次测量奈曼-皮尔逊准则

- 判决的代价矩阵未知
- 假设H_0和H_1的先验概率未知
- 解决优化问题，其中优化变量为D_1

$$\max \ P_D = \int_{D_1} p_1(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r}$$

$$s.t. \ P_f = \int_{D_1} p_0(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} \leqslant \alpha$$

变分法

- 利用**Lagrange**乘数法可以得到判决D_1的条件，在特殊情况下

$$\frac{p_1(\boldsymbol{r})}{p_0(\boldsymbol{r})} > \mu \qquad P_F = \int_{\mu}^{\infty} p_0(\lambda) d\lambda = \alpha$$

7 多元简单假设检验

- 一元函数--→多元函数 （一次测量--→多次测量） 二元假设

7 多元简单假设检验

- 一元函数--→多元函数 （一次测量--→多次测量） 二元假设
- 二元假设--→多元假设

7 多元简单假设检验

- 一元函数--→多元函数 （一次测量--→多次测量） 二元假设
- 二元假设--→多元假设

- m元数字通信系统中，要用m个信号来分别代表m个符号，即存在m个假设，要从中选择1个，这就是m元假设检验问题

- 仅考虑简单假设检验的情况，在多元假设检验中通常只考虑贝叶斯准则，认为各类假设的先验概率和判决的代价因子是已知的。

- **按照贝叶斯检验的基本思想,做出一个判决是要付出代价的，为了反映不同类型代价的大小,对每种可能的判决结果定义一个代价因子:**
- C_{ij} **：** H_j **为真时，判** H_i **成立应付出的代价.**

- 按照贝叶斯检验的基本思想,做出一个判决是要付出代价的，为了反映不同类型代价的大小,对每种可能的判决结果定义一个代价因子:
- C_{ij} ：H_j 为真时，判 H_i 成立应付出的代价.
- 给定N维观测样本矢量 $\boldsymbol{r}$ 之后，同选择假设 H_j 有关的代价为

$$C_j = \sum_{i=1}^{m} C_{ji}\, p(H_i|\boldsymbol{r})$$

后验概率

- 贝叶斯准则的判决规则是选择与最小的 C_j 对应的假设 H_j
- 如果采用的代价因子为 $C_{ij}=1(i\neq j),C_{ii}=0$

即正确判决不付出代价，各种错误判决付出同等代价

- **贝叶斯准则的判决规则是选择与最小的 C_j 对应的假设 H_j**
- **如果采用的代价因子为** $C_{ij}=1(i\neq j),C_{ii}=0$

  即正确判决不付出代价，各种错误判决付出同等代价

  由 $C_j=\sum_{i=1}^{m}C_{ji}\,p(H_i|\boldsymbol{r})$ **可知该情况下最小的** C_j **对应于最 大的**

  $p(H_j|\boldsymbol{r})$

$$p(H_j|\boldsymbol{r})=\frac{p(H_j)\,p_j(\boldsymbol{r}|H_j)}{p(\boldsymbol{r})}$$

- **在各种假设先验概率相等的场合，后验概率最大相当于似然函数最大。**

- 例：在加性高斯噪声中检测四个常值信号之一的问题
- 相应的四元假设检验是

$$\begin{cases} H_1:\ r_i = 1 + n_i,\ \ i = 1,2,\ldots N \\ H_2:\ r_i = 2 + n_i,\ \ i = 1,2,\ldots N \\ H_3:\ r_i = 3 + n_i,\ \ i = 1,2,\ldots N \\ H_4:\ r_i = 4 + n_i,\ \ i = 1,2,\ldots N \end{cases}$$

- 每个噪声样本 $n_i, i = 1,2,\ldots m$ 都是独立同分布的 $N(0,\sigma^2)$ 高斯变量，噪声样本与信号样本统计独立
- 代价因子 $C_{ij} = 1(i \neq j), C_{ii} = 0$ ，所有假设等先验概率

- 这种情况下，贝叶斯准则转化为最大似然准则，各假设下的似然函数为

$$p_k(\boldsymbol{r}) == \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{\frac{N}{2}} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{N}\frac{(r_i-k)^2}{2\sigma_n^2}\right\} \quad k=1,2,3,4$$

- 这种情况下，贝叶斯准则转化为最大似然准则，各假设下的似然函数为

$$p_k(\boldsymbol{r}) == \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{\frac{N}{2}} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{N}\frac{(r_i-k)^2}{2\sigma_n^2}\right\} \quad k=1,2,3,4$$

- 选择似然函数最大的**k**对应的假设，等效于选择使下式最大的**k**

$$\left(\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i k\right) - k^2$$

- 这种情况下，贝叶斯准则转化为最大似然准则，各假设下的似然函数为

$$p_k(\boldsymbol{r}) == \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{\frac{N}{2}} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{N}\frac{(r_i-k)^2}{2\sigma_n^2}\right\} \quad k=1,2,3,4$$

- 选择似然函数最大的**k**对应的假设，等效于选择使下式最大的**k**

$$\left(\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i k\right)-k^2$$

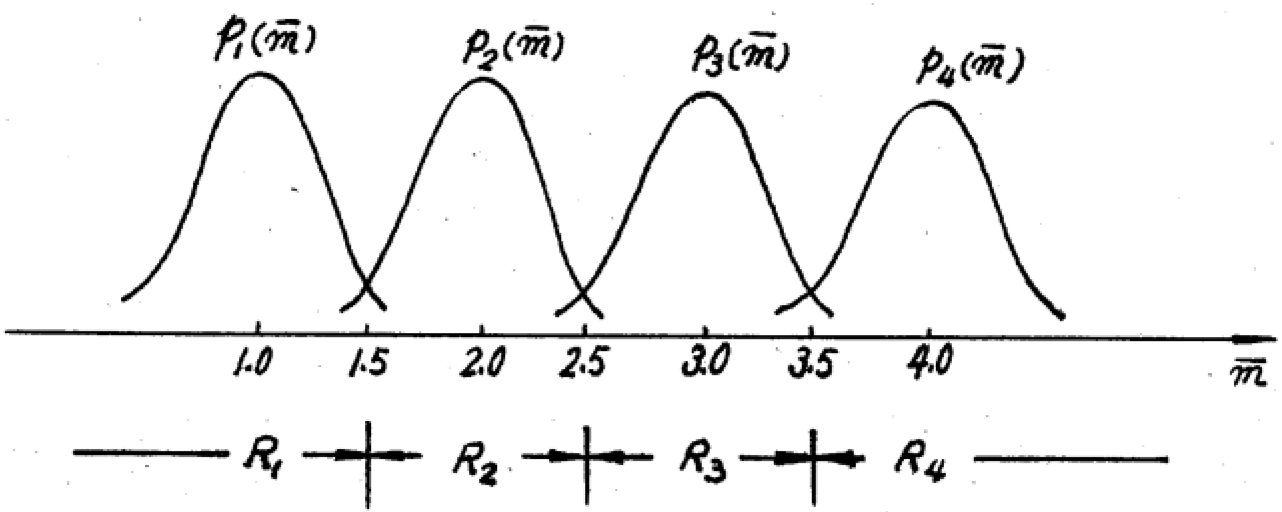
- 令 $\overline{m}$ 代表样本均值，则上式在四种假设下分别为

$$2\overline{m}-1 \qquad 4\overline{m}-4 \qquad 6\overline{m}-9 \qquad 8\overline{m}-16$$

- 易通过检验统计量 $\overline{m}$ 进行假设判决

- 不难看出，检验统计量 $\overline{m}$ 在四种假设下对应四种均值不同的高斯分布

- 其概率密度函数和判决区域如下图所示



8 复合假设检验

- 如果表征假设的参数是已知的, 则称这样的检验为简单假设检验
- 在实际中经常遇到表征假设的参数是未知的或随机的情况，这时的检验称为复合假设检验

$$\begin{cases} H_1:\ r_i = \theta_1 + n_i,\ i = 1, 2, \ldots m \\ H_0:\ r_i = \theta_0 + n_i,\ i = 1, 2, \ldots m \end{cases}$$

- θ_i 可能是未知常量或随机变量

贝叶斯方法

- θ 为随机变量，且概率密度已知
- 已知假设 H_0 的先验概率 ξ,假设 H_1 的先验概率 $(1-\xi)$
- 在两类假设下，似然函数用条件似然函数来表示

$$p_1(\boldsymbol{r}|\Theta) \qquad\qquad p_0(\boldsymbol{r}|\Phi)$$

- 其中 Θ 表示与 H_1 假设有关的随机参量，其概率密度函数为 $\omega_1(\Theta)$
- Φ 表示与 H_0 假设有关的随机参量，其概率密度函数为 $\omega_0(\Phi)$

考虑三分钟：针对该情况应当如何处理?

- 此时的平均判决风险为

$$\overline{C}=\xi C_{10}+(1-\xi)C_{11}$$
$$+\int_{R_0}\left\{(1-\xi)\left(C_{01}-C_{11}\right)\int_{\Theta}p_1(\boldsymbol{r}|\Theta)\omega_1(\Theta)d\Theta-\xi\left(C_{10}-C_{00}\right)\int_{\Phi}p_0(\boldsymbol{r}|\Phi)\omega_0(\Phi)d\Phi\right\}d\boldsymbol{r}$$

- 此时的平均判决风险为

$$\begin{aligned}\overline{C} &= \xi C_{10} + (1-\xi)C_{11} \\ &\quad + \int_{R_0}\left\{(1-\xi)\left(C_{01}-C_{11}\right)\int_{\Theta} p_1(\boldsymbol{r}|\Theta)\,\omega_1(\Theta)\,d\Theta - \xi\left(C_{10}-C_{00}\right)\int_{\Phi} p_0(\boldsymbol{r}|\Phi)\,\omega_0(\Phi)\,d\Phi\right\}d\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

- 合理地认为判错的代价大于判对得代价，则判决规则为

$$\frac{\displaystyle\int_{\Theta} p_1(\boldsymbol{r}|\Theta)\,\omega_1(\Theta)\,d\Theta}{\displaystyle\int_{\Phi} p_0(\boldsymbol{r}|\Phi)\,\omega_0(\Phi)\,d\Phi} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\xi\left(C_{10}-C_{00}\right)}{(1-\xi)\left(C_{01}-C_{11}\right)} = \lambda_0$$

- 先验概率 ξ 未知时，类似简单假设检验，可利用极小极大准则判决

- **例**
- 若观测信号为 r
- 噪声n为 $N(0,\sigma_n^2)$ 高斯变量，噪声样本与信号统计独立
- 信号m为 $N(0,\sigma_m^2)$ 高斯变量
- 多样本的二元假设检验

$$\begin{cases} H_1\colon\ r = m + n \\ H_0\colon\ r = n \end{cases}$$

- 给出似然比检验最佳检测器的形式

- **两种假设下观测信号的概率密度分布函数为**

$$p_0(r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

$$p_1(r)=\int_{-\infty}^{\infty}p_1(r|m)\,p(m)\,dm$$

- **两种假设下观测信号的概率密度分布函数为**

$$p_0(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

$$p_1(r) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(r|m)\,p(m)\,dm$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\left\{-\frac{(r-m)^2}{2\sigma_n^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_m} \exp\left\{-\frac{m^2}{2\sigma_m^2}\right\} dm$$

- **两种假设下观测信号的概率密度分布函数为**

$$p_0(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

$$p_1(r) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(r|m)\,p(m)\,dm$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left\{-\frac{(r-m)^2}{2\sigma_n^2}\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_m}\exp\left\{-\frac{m^2}{2\sigma_m^2}\right\}dm$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_n\sigma_m}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\sigma_m^2+\sigma_n^2}{2\sigma_n^2\sigma_m^2}\left(m^2-\frac{2\sigma_m^2 r}{\sigma_m^2+\sigma_n^2}m\right)-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right\}dm$$

- **两种假设下观测信号的概率密度分布函数为**

$$p_0(r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

$$\begin{aligned}
p_1(r)&=\int_{-\infty}^{\infty}p_1(r|m)\,p(m)\,dm\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left\{-\frac{(r-m)^2}{2\sigma_n^2}\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_m}\exp\left\{-\frac{m^2}{2\sigma_m^2}\right\}dm\\
&=\frac{1}{2\pi\sigma_n\sigma_m}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\sigma_m^2+\sigma_n^2}{2\sigma_n^2\sigma_m^2}\left(m^2-\frac{2\sigma_m^2 r}{\sigma_m^2+\sigma_n^2}m\right)-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right\}dm\\
&=\frac{1}{2\pi\sigma_n\sigma_m}\exp\left\{-\frac{r^2}{2(\sigma_m^2+\sigma_n^2)}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\sigma_m^2+\sigma_n^2}{2\sigma_n^2\sigma_m^2}\left(m-\frac{\sigma_m^2 r}{\sigma_m^2+\sigma_n^2}\right)^2\right\}dm\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_m^2+\sigma_n^2}}\exp\left\{-\frac{r^2}{2(\sigma_m^2+\sigma_n^2)}\right\}
\end{aligned}$$

- **似然比为**

$$\lambda(r)=\left(\frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2+\sigma_m^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{r^2\sigma_m^2}{2\sigma_n^2(\sigma_n^2+\sigma_m^2)}\right\}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\lambda_0$$

- **对数似然比为**

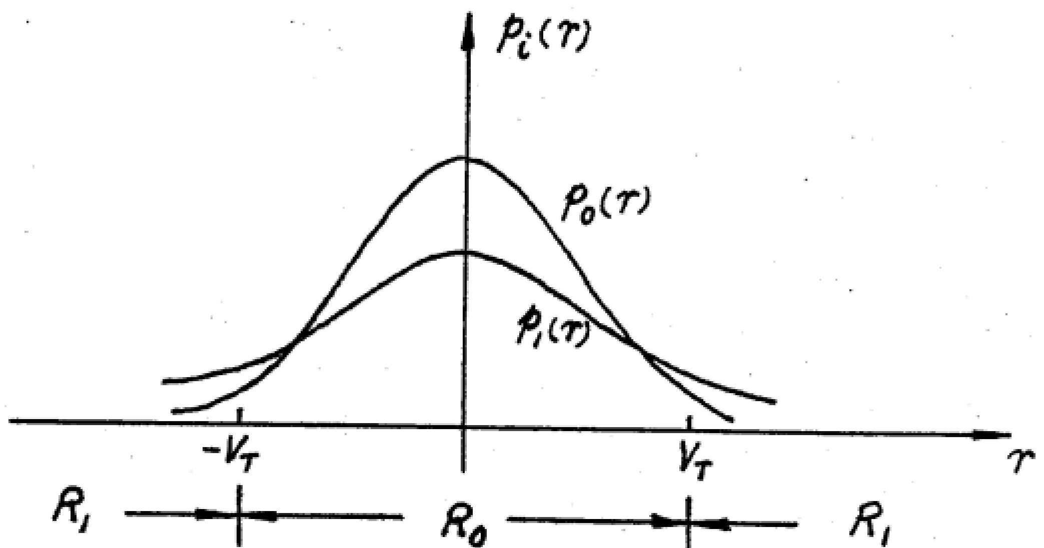
$$r^2\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{2\sigma_n^2(\sigma_m^2+\sigma^2 n)}{\sigma_m^2}\left[\ln\lambda_0+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\sigma_m^2}{\sigma_n^2}\right)\right]=V_T^2$$

- **似然比为**

$$\lambda(r)=\left(\frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2+\sigma_m^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{r^2\sigma_m^2}{2\sigma_n^2(\sigma_n^2+\sigma_m^2)}\right\}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\lambda_0$$

- **对数似然比为**

$$r^2\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{2\sigma_n^2(\sigma_m^2+\sigma^2 n)}{\sigma_m^2}\left[\ln\lambda_0+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\sigma_m^2}{\sigma_n^2}\right)\right]=V_T^2$$



复习：

理解和掌握几个基本概念与检测方法：

多次测量下的检测及优点

多元假设检验

复合假设检验

清楚知道每种检测准则的前提条件及其特点

逻辑结构、数学推广

一致最大势检验

- 当 θ为未知参量时，这时可采用**Neyman-Pearson**准则,即约束虚警概率为常数，使检测概率最大。
- 一般说来，这样得到的检测器与未知参数 θ有关,检测器是无法实现的
- 如果这时得到的检测器的结构与未知参数无关，那么就可以实现最佳检验，称这样的检验为一致最大势检验

- **例**
- 若观测信号为 r
- 噪声n为 $N(0,\sigma_n^2)$ 高斯变量，噪声样本与信号统计独立
- 信号m为未知的正数,非随机
- 多样本的二元假设检验

$$\begin{cases} H_1\colon\ r = m + n \\ H_0\colon\ r = n \end{cases}$$

- 给出似然比检验最佳检测器的形式

- 两种假设下观测信号的概率密度分布函数为

$$p_1(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\left\{-\frac{(r-m)^2}{2\sigma_n^2}\right\} \qquad p_0(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

- 两种假设下观测信号的概率密度分布函数为

$$p_1(r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left\{-\frac{(r-m)^2}{2\sigma_n^2}\right\} \qquad p_0(r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

- **m**已知是正的，对任意正的**m**值，似然比检验为

$$\lambda(r)=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left\{-\dfrac{r^2-2mr+m^2}{2\sigma_n^2}\right\}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left\{-\dfrac{r^2}{2\sigma_n^2}\right\}}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\lambda_0$$

- 两种假设下观测信号的概率密度分布函数为

$$p_1(r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left\{-\frac{(r-m)^2}{2\sigma_n^2}\right\}\qquad p_0(r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

- **m**已知是正的，对任意正的**m**值，似然比检验为

$$\lambda(r)=\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left\{-\frac{r^2-2mr+m^2}{2\sigma_n^2}\right\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right\}}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\lambda_0$$

- 取自然对数

$$r\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{\sigma_n^2}{m}\ln\lambda_0+\frac{m}{2}=\gamma_1$$

- 注意到γ_1 可以由虚警概率决定

$$P_F = \int_{\gamma_1}^{\infty} p_0(r)\,dr = \int_{\gamma_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right\} dr$$

- 一旦γ_1 确定

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma_1$$

- 似然比检验不要求m的任何知识，一致最大势检验存在
- 一致最大势检验是指最佳检测器的结构与参数无关的检验

9 广义似然比检验

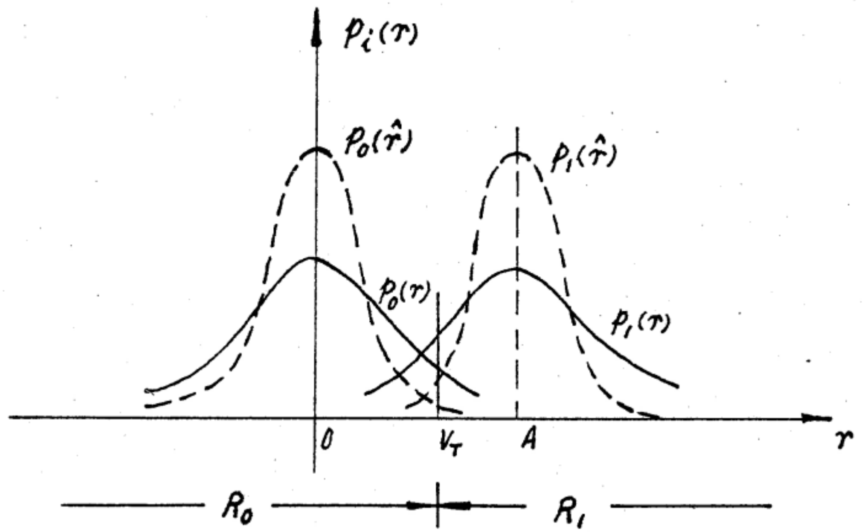
- 当 θ 为未知参量时，一种方法是将估计得到的参数当作真实参数，应用到似然比检验当中。如果利用的估计是最大似然估计，此结果称为广义似然比检验

$$\lambda_g(\boldsymbol{r}) = \frac{\max\limits_{\Theta} p_1(\boldsymbol{r}|\Theta)}{\max\limits_{\Phi} p_0(\boldsymbol{r}|\Phi)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0$$

广义似然比检测合理性的讨论 （3分钟讨论）

给出一组观测值，判断它究竟属于哪种假设：

$$\lambda_g(\boldsymbol{r}) = \frac{\max\limits_{\Theta} p_1(\boldsymbol{r}|\Theta)}{\max\limits_{\Phi} p_0(\boldsymbol{r}|\Phi)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0$$



- 例
- 若接收信号的K次独立观测为 $r_1, r_2, \ldots r_k$
- 每个噪声样本 $n_i, i=1,2,\ldots K$ 都是独立同分布的$N(0,\sigma_n^2)$ 高斯变量，噪声样本与信号样本统计独立
- 多样本的二元假设检验

$$\begin{cases} H_1:\ r_i = m + n_i, & i=1,2,\ldots K \\ H_0:\ r_i = n_i & , \ i=1,2,\ldots K \end{cases}$$

- 信号m为未知的正数
- 求广义似然比检验

- 两种假设下观测信号的概率密度分布函数为

$$p_1(\boldsymbol{r}|m)=\prod_{i=1}^{K}p_1(r_i)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{\frac{K}{2}}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{K}\frac{(r_i-m)^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

$$p_0(\boldsymbol{r})=\prod_{i=1}^{K}p_0(r_i)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{\frac{K}{2}}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{K}\frac{r_i^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

- 两种假设下观测信号的概率密度分布函数为

$$p_1(\boldsymbol{r}|m)=\prod_{i=1}^{K}p_1(r_i)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{\frac{K}{2}}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{K}\frac{(r_i-m)^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

$$p_0(\boldsymbol{r})=\prod_{i=1}^{K}p_0(r_i)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{\frac{K}{2}}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{K}\frac{r_i^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

- m已知是正的，利用最大似然估计对m进行估计

$$\frac{\partial \ln p_1(\boldsymbol{r}|m)}{\partial m}=0$$

- 两种假设下观测信号的概率密度分布函数为

$$p_1(\boldsymbol{r}|m)=\prod_{i=1}^{K}p_1(r_i)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{\frac{K}{2}}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{K}\frac{(r_i-m)^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

$$p_0(\boldsymbol{r})=\prod_{i=1}^{K}p_0(r_i)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{\frac{K}{2}}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{K}\frac{r_i^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

- m已知是正的，利用最大似然估计对m进行估计

$$\frac{\partial \ln p_1(\boldsymbol{r}|m)}{\partial m}=0$$

- 可以得到m的估计值

$$\widehat{m}=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}r_i$$

- 广义似然比检验为

$$\lambda_g(\boldsymbol{r}) = \frac{\prod_{i=1}^{K} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\left\{-\frac{\left(r_i - \widehat{m}\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\}}{\prod_{i=1}^{K} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\left\{-\frac{r_i^{\,2}}{2\sigma_n^2}\right\}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0$$

- 广义似然比检验为

$$\lambda_g(\boldsymbol{r}) = \frac{\prod_{i=1}^{K} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\left\{-\frac{\left(r_i - \widehat{m}\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\}}{\prod_{i=1}^{K} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\left\{-\frac{r_i^{\,2}}{2\sigma_n^2}\right\}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0$$

- 取自然对数

$$\frac{1}{2\sigma_n^2 K}\left(\sum_{i=1}^{K} r_i\right)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln \lambda_0$$

- 如果 λ_0 小于或等于**1**，则判决总是 H_1

- 因此总是选择 λ_0 大于**1**，等效的检验为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\sum_{i=1}^{K} r_i\right)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma_n^2 \ln \lambda_0 = \gamma_1^2$$

- 广义似然比检验为

$$\lambda_g(\boldsymbol{r}) = \frac{\prod_{i=1}^{K} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\left\{-\frac{\left(r_i - \widehat{m}\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\}}{\prod_{i=1}^{K} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\left\{-\frac{r_i^2}{2\sigma_n^2}\right\}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0$$

- 取自然对数

$$\frac{1}{2\sigma_n^2 K}\left(\sum_{i=1}^{K} r_i\right)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\lambda_0$$

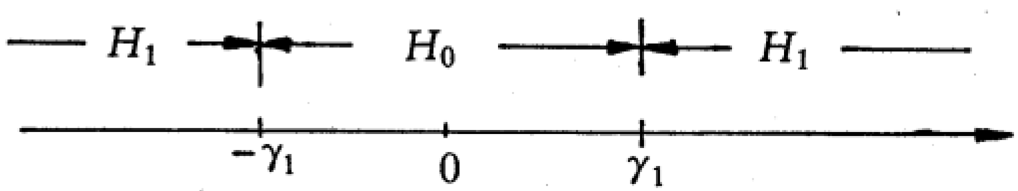
- 如果 λ_0 小于或等于1，则判决总是 H_1
- 因此总是选择 λ_0 大于1，等效的检验为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\sum_{i=1}^{K} r_i\right)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma_n^2 \ln\lambda_0 = \gamma_1^2$$

- 进一步等效为

$$\left|\frac{1}{\sqrt{K}}\sum_{k=1}^{K} r_k\right| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma_1$$

- 广义似然比的判决区为



10 序贯检测

考察过去学过的检测方法：

$$\frac{p_1(r)}{p_0(r)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\xi(C_{10}-C_{00})}{(1-\xi)(C_{01}-C_{11})}$$

$$\lambda(r)=\frac{p_1(r)}{p_0(r)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0$$

10 序贯检测

考察过去学过的检测方法:

$$\frac{p_1(r)}{p_0(r)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\xi(C_{10}-C_{00})}{(1-\xi)(C_{01}-C_{11})}$$

$$\lambda(r)=\frac{p_1(r)}{p_0(r)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0$$

- **当似然比与阈值相等时，或者左右两端非常非常接近时，该如何处理？**
- **这时就用由瓦尔德提出的序贯检测。**

10 序贯检测

- 在许多实际情况中，观测可以按一个顺序的方式进行。每次观测之后执行一次测试，作三个可能的判决之一。
- （1）判决 H_1
- （2）判决 H_0
- （3）没有足够的信息支持判决 H_1或 H_0
- 如果判决（1）或（2）作出，假设检验过程停止，否则，再进行附加的观测，再进行一次测试。这个过程一直持续到做出（1）或（2）的判决

- 假设 $r_k, k=1,2,\ldots K$ 表示矢量 $\boldsymbol{r}_K$ 的第k次观测的采样
- 基于第一次到第K次观测的似然比

$$\lambda(\boldsymbol{r}_K)=\frac{p_1(\boldsymbol{r}_K)}{p_0(\boldsymbol{r}_K)}$$

- 假设每次观测有相同的分布且相互独立，则似然比

$$\lambda(\boldsymbol{r}_K)=\frac{p_1(\boldsymbol{r}_K)}{p_0(\boldsymbol{r}_K)}=\prod_{k=1}^{K}\frac{p_1(r_k)}{p_0(r_k)}$$

- 我们将根据虚警概率 $P_F=\alpha$ 和漏检概率 $P_M=\beta$ 决定判决门限

λ_0 和 λ_1，并进行如下检验

$$\lambda(\boldsymbol{r}_K)\geq\lambda_1,\ \text{判决为} H_1$$

$$\lambda(\boldsymbol{r}_K)\leq\lambda_0,\ \text{判决为} H_0$$

$$\lambda_0<\lambda(\boldsymbol{r}_K)<\lambda_1,\ \text{进行附加观测}$$

- 假设 $r_k, k=1,2,\ldots K$ 表示矢量 $\boldsymbol{r}_K$ 的第k次观测的采样
- 基于第一次到第K次观测的似然比

$$\lambda(\boldsymbol{r}_K)=\frac{p_1(\boldsymbol{r}_K)}{p_0(\boldsymbol{r}_K)}$$

- 假设每次观测有相同的分布且相互独立，则似然比

$$\lambda(\boldsymbol{r}_K)=\frac{p_1(\boldsymbol{r}_K)}{p_0(\boldsymbol{r}_K)}=\prod_{k=1}^{K}\frac{p_1(r_k)}{p_0(r_k)}$$

- 我们将根据虚警概率 $P_F=\alpha$ 和漏检概率 $P_M=\beta$ 决定判决门限 λ_0 和 λ_1，并进行如下检验

$$\lambda(\boldsymbol{r}_K)\geq\lambda_1,\ \text{判决为}H_1$$

$$\lambda(\boldsymbol{r}_K)\leq\lambda_0,\ \text{判决为}H_0$$

$$\lambda_0<\lambda(\boldsymbol{r}_K)<\lambda_1,\ \text{进行附加观测}$$

- **核心：双阈值**

- 检测概率

$$P_D = \int_{R_1} p_1(\boldsymbol{r}_K) d\boldsymbol{r}_K = \int_{R_1} \lambda(\boldsymbol{r}_K) p_0(\boldsymbol{r}_K) d\boldsymbol{r}_K$$

- 由于

$$\lambda(\boldsymbol{r}_K) \geqslant \lambda_1$$

- 检测概率

$$P_D = \int_{R_1} p_1(\boldsymbol{r}_K)\, d\boldsymbol{r}_K = \int_{R_1} \lambda(\boldsymbol{r}_K)\, p_0(\boldsymbol{r}_K)\, d\boldsymbol{r}_K$$

- 由于

$$\lambda(\boldsymbol{r}_K) \geqslant \lambda_1$$

- 因此

$$1 - P_M = P_D \geqslant \lambda_1 \int_{R_1} p_0(\boldsymbol{r}_K)\, d\boldsymbol{r}_K = \lambda_1 P_F$$

$$\lambda_1 \leqslant \frac{1 - P_M}{P_F} = \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

- 检测概率

$$P_D = \int_{R_1} p_1(\boldsymbol{r}_K) d\boldsymbol{r}_K = \int_{R_1} \lambda(\boldsymbol{r}_K) p_0(\boldsymbol{r}_K) d\boldsymbol{r}_K$$

- 由于

$$\lambda(\boldsymbol{r}_K) \geqslant \lambda_1$$

- 因此

$$1 - P_M = P_D \geqslant \lambda_1 \int_{R_1} p_0(\boldsymbol{r}_K) d\boldsymbol{r}_K = \lambda_1 P_F$$

$$\lambda_1 \leqslant \frac{1 - P_M}{P_F} = \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

- 同理

$$\lambda_0 \geqslant \frac{P_M}{1 - P_F} = \frac{\beta}{1 - \alpha}$$

- 值得研究的问题
- 1.这个过程不终止的概率是多少
- 2.随机变量K的一些分布特性是什么
- 3.实际上，采样数K的期望值是多少

- 取自然对数得到

$$\ln\lambda_0 < \ln\frac{p_1(r_1)}{p_0(r_1)} + \ldots + \ln\frac{p_1(r_{K-1})}{p_0(r_{K-1})} < \ln\lambda_1$$

- 令 $$L(r_k) = \ln\frac{p_1(r_k)}{p_0(r_k)}$$

- 则 $$\ln\lambda_0 < L(r_1) + \ldots L(r_{K-1}) < \ln\lambda_1$$

- 取自然对数得到

$$\ln\lambda_0 < \ln\frac{p_1(r_1)}{p_0(r_1)} + \ldots + \ln\frac{p_1(r_{K-1})}{p_0(r_{K-1})} < \ln\lambda_1$$

- 令 $$L(r_k) = \ln\frac{p_1(r_k)}{p_0(r_k)}$$

- 则 $$\ln\lambda_0 < L(r_1) + \ldots L(r_{K-1}) < \ln\lambda_1$$

- 和式写成递归关系式 $$L(\boldsymbol{r}_K) = L(\boldsymbol{r}_{K-1}) + L(r_K)$$

- 其中 $$L(\boldsymbol{r}_{K-1}) = \sum_{k=1}^{K-1} L(r_k)$$

- $L(\boldsymbol{r}_K)$ 在两种假设下的期望值为

$$E[L(\boldsymbol{r}_K)|H_1] = \beta \ln \lambda_0 + (1-\beta) \ln \lambda_1$$

$$E[L(\boldsymbol{r}_K)|H_0] = \alpha \ln \lambda_1 + (1-\alpha) \ln \lambda_0$$

- $L(\boldsymbol{r}_K)$ 在两种假设下的期望值为

$$E[L(\boldsymbol{r}_K)\,|H_1] = \beta\ln\lambda_0 + (1-\beta)\ln\lambda_1$$

$$E[L(\boldsymbol{r}_K)\,|H_0] = \alpha\ln\lambda_1 + (1-\alpha)\ln\lambda_0$$

- B 是取0和1的随机变量，满足

$$B_K = \begin{cases} 1, & \text{高达}(K-1)\text{次采样没有作出判决} \\ 0, & \text{在较早的采样时作出判决} \end{cases}$$

- 则

$$L(\boldsymbol{r}_K) = \sum_{k=1}^{K} L(r_k) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k L(r_k)$$

$$E[L(\boldsymbol{r}_K)|H_1] = E[L(r)|H_1] \cdot \sum_{k=1}^{\infty} E[B_k|H_1]$$

$$E[L(\boldsymbol{r}_K)|H_0] = E[L(r)|H_0] \cdot \sum_{k=1}^{\infty} E[B_k|H_0]$$

- 其中 $E[L(r)|H_1] = E[L(r_1)|H_1] = \ldots = E[L(r_K|H_1)]$

$$E[L(r)|H_0] = E[L(r_1)|H_0] = \ldots = E[L(r_K|H_0)]$$

$$E[L(\boldsymbol{r}_K)|H_1] = E[L(r)|H_1] \cdot \sum_{k=1}^{\infty} E[B_k|H_1]$$

$$E[L(\boldsymbol{r}_K)|H_0] = E[L(r)|H_0] \cdot \sum_{k=1}^{\infty} E[B_k|H_0]$$

- 其中

$$E[L(r)|H_1] = E[L(r_1)|H_1] = \ldots = E[L(r_K|H_1)]$$

$$E[L(r)|H_0] = E[L(r_1)|H_0] = \ldots = E[L(r_K|H_0)]$$

- 并且

$$\sum_{k=1}^{\infty} E[B_k|H_1] = E[K|H_1]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} E[B_k|H_0] = E[K|H_0]$$

- 则

$$E[L(r)|H_1]\cdot E[K|H_1]=\beta\ln\lambda_0+(1-\beta)\ln\lambda_1$$

$$E[K|H_1]=\frac{\beta\ln\lambda_0+(1-\beta)\ln\lambda_1}{E[L(r|H_1)]}$$

- 同理

$$E[K|H_0]=\frac{\alpha\ln\lambda_1+(1-\alpha)\ln\lambda_0}{E[L(r|H_0)]}$$

- 例 若接收信号的K次独立观测为$r_1, r_2, \ldots r_k$
- 每个噪声样本 $n_i, i=1,2,\ldots K$ 都是独立同分布的 $N(0,\sigma_n^2)$ 高斯变量，噪声样本与信号样本统计独立
- 多样本的二元假设检验

$$\begin{cases} H_1: \ r_i = m + n_i, \ i=1,2,\ldots K \\ H_0: \ r_i = n_i \qquad\quad , \ i=1,2,\ldots K \end{cases}$$

- 令 $\sigma_n^2 = 1, m = 1$
- 确定判决规则，以使 $P_F = \alpha = 0.1 \quad P_M = \beta = 0.1$
- 确定每个假设下K的期望值

- 似然比为

$$\lambda(\boldsymbol{r}_K) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{K}\frac{r_k^2}{2\sigma_n^2} - \sum_{k=1}^{K}\frac{(r_k - m)^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

$$= \exp\left\{\sum_{k=1}^{K} r_k - \frac{K}{2}\right\}$$

- 似然比为

$$\lambda(\boldsymbol{r}_K)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{K}\frac{r_k^2}{2\sigma_n^2}-\sum_{k=1}^{K}\frac{(r_k-m)^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

$$=\exp\left\{\sum_{k=1}^{K}r_k-\frac{K}{2}\right\}$$

- 取自然对数 $L(\boldsymbol{r}_K)=\ln\lambda(\boldsymbol{r}_K)=\sum_{k=1}^{K}r_k-\frac{K}{2}$

$$\lambda_1\leqslant\frac{1-P_M}{P_F}=\frac{1-\beta}{\alpha}=9\quad \ln\lambda_1=2.197$$

$$\lambda_0\geqslant\frac{P_M}{1-P_F}=\frac{\beta}{1-\alpha}=\frac{1}{9}\quad \ln\lambda_0=-2.197$$

- 判决规则为

$$L(\boldsymbol{r}_K) \geqslant 2.197，判决为H_1$$

$$L(\boldsymbol{r}_K) \leq -2.197，判决为H_0$$

$$-2.197 < L(\boldsymbol{r}_K) < 2.197，进行附加观测$$

- 判决规则为

$$L(\boldsymbol{r}_K) \geqslant 2.197，判决为H_1$$

$$L(\boldsymbol{r}_K) \leq -2.197，判决为H_0$$

$$-2.197 < L(\boldsymbol{r}_K) < 2.197，进行附加观测$$

- 在两种假设下**K**的期望值为

$$E[K|H_1] = \frac{\beta\ln\lambda_0 + (1-\beta)\ln\lambda_1}{E[L(r|H_1)]} = \frac{0.9\times 2.197 - 0.1\times 2.197}{0.5} = 3.5152$$

$$E[K|H_0] = \frac{\alpha\ln\lambda_1 + (1-\alpha)\ln\lambda_0}{E[L(r|H_0)]} = \frac{0.1\times 2.197 - 0.9\times 2.197}{-0.5} = 3.5152$$

复习：

理解和掌握几个基本概念与检测方法：

多次测量下的检测及优点

多元假设检验

复合假设检验

广义似然比检测

序贯检测

清楚知道每种检测准则的前提条件及其特点

逻辑结构、数学推广

谢谢大家！