

# 第一章. 统计信号处理绪论

清华大学电子工程系

杨 健

杨 健

清华大学电子工程系





# 统计信号处理

- 在通信、雷达、语音处理、图像处理等中，所接触的信号往往会叠加上随机产生的噪声。接收到的信号不仅仅需要线性代数、信号与系统、DSP等，还需要用到概率论、数理统计和随机过程。

	数学基础	信号分析方法
确定信号	数学分析、线性代数	线性系统理论、数字信号处理
随机信号	概率论、数理统计	随机过程、信息论、统计信号处理： 估计和检测





# 统计信号处理





# 统计信号处理







# 统计信号处理



合成孔径雷达





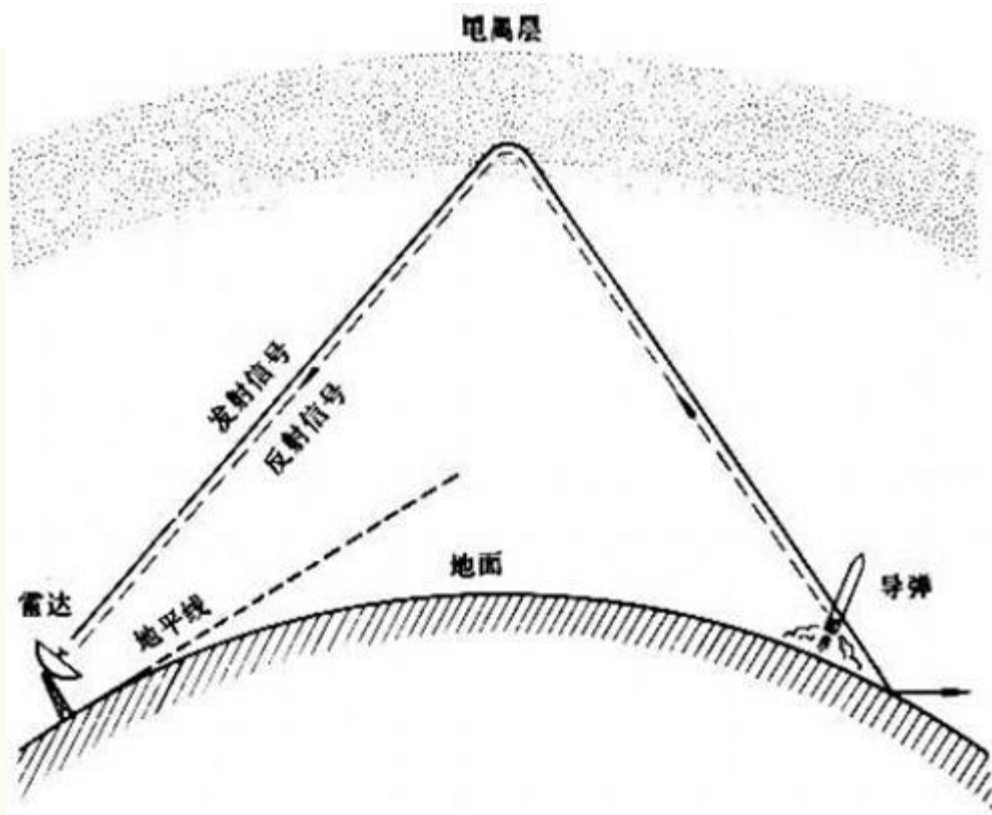
# 统计信号处理

天波超视距雷达





# 统计信号处理







# 统计信号处理



海岸警戒雷达







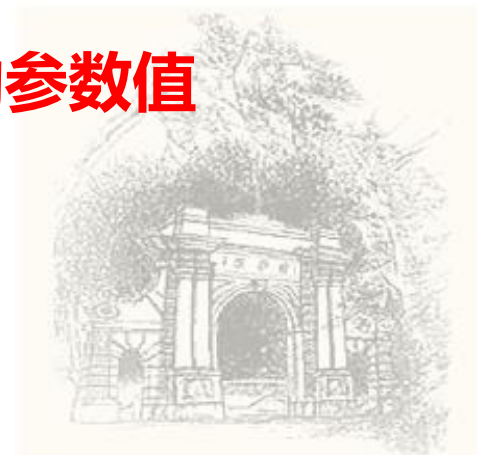
# 统计信号处理

## 雷达接收到的信号:

杂波 + 自身的热噪声 (较弱) + 可能的目标回波

信号检测: 目标是否存在? 检测的性能如何?

信号估计: 当目标存在时, 信号中所包含的参数值  
的估计, 估计的精度如何?





# 统计信号处理

声呐

通讯

语音处理

图像处理

气象

地震

石油勘探

医学诊断

控制

各类统计（如人口等）

。 。 。 。 。 。





# 概率与统计信号处理

- 统计信号处理的理论是在统计推断的假设检验（Hypothesis Testing）理论的基础上发展起来的。提起统计信号处理就不得不提概率的概念。
- 概率是对随机事件发生的可能性的度量。它的出身并不光彩，最早源于赌博。赌博的前提是“公平”，即“机会均等”，而这正是古典定义适用的重要条件：同等可能。
- “现有两个赌徒相约赌若干局，  
谁先赢 $s$ 局就算赢了，当赌徒A赢 $a$ 局 [ $a < s$ ]，  
而赌徒B赢 $b$ 局 [ $b < s$ ] 时，赌博中止，那赌本  
应怎样分才合理呢？”

-----费尔马与帕斯卡的对话

费尔马(1601--1665)，法国著名数学家  
(费马大定理，1995年被怀尔斯最终解决)

帕斯卡（1623-1662），法国著名数学家、物理学家、  
近代概率论的奠基者



费尔马



帕斯卡

# 费尔马 (1601-1665)



**法国**律师和业余**数学家**。他在数学上的成就不比职业数学家差，他似乎对数论最感兴趣，亦对现代微积分的建立有所贡献，是解析几何的发明人之一（比笛卡尔早7年）。被誉为“业余数学家之王”。

- 费马的主要贡献：

**数论：**费马小定理，费马大定理，第二对亲和数（17296和18416）的发现者，等等

**微积分：**研究了切线问题，极值问题

**解析几何：**用代数的方法去研究几何问题，对于二次曲线有深刻研究

**光学：**提出在介质中光沿着最快路径传播

亲和数，又称相亲数、友爱数、友好数，指两个正整数中，彼此的全部约数之和（本身除外）与另一方相等。毕达哥拉斯曾说：“朋友是你灵魂的情影，要像220与284一样亲密”  
笛卡尔发现了第三对亲和数 9437056和9363584，欧拉在1747年发现了30对，随后又发现了60对，而100万以下的亲和数总计才42对。





# 概率与统计信号处理

- 1657年，荷兰数学家惠根斯 [1629-1695] 用自己的方法解决了这一问题，更写成了《论赌博中的计算》一书，这就是概率论最早的论著

- 荷兰物理学家、天文学家、数学家，他是介于伽利略与牛顿之间一位重要的物理学先驱，是历史上最著名的物理学家之一，他对力学的发展和光学研究都有杰出的贡献，在数学和天文学方面也有卓越的成就，是近代自然科学的一位重要开拓者。终身未娶



1. 研制出高精度的望远镜和显微镜，改进光学仪器
2. 第一个发现木星上的晕、土星的卫星--土卫六、猎户座星云、火星极冠等。
3. 提出光的波动学说
4. 提出了动量守恒定律
5. 提出钟摆理论，研制出很多摆钟
6. 提出向心力理论





# 概率与统计信号处理

瑞士数学家雅各布-伯努利 [1654-1705]。他的主要贡献是建立了概率论中的第一个极限定理，我们称为“伯努利大数定理”，即“在多次重复试验中，频率有越来越趋于稳定的趋势”。这一定理在他死后，即1713年，发表在他的遗著《猜度术》中。

瑞士的伯努利家族（也译作贝努力），一个家族3代人产生了 8位科学家，后裔有不少于120位牛人，他们在数学、科学、技术、工程乃至法律、管理、文学、艺术等方面享有名望。

许多数学成果与他的名字相联系。例如悬链线问题（1690年），曲率半径公式，伯努利双纽线，伯努利微分方程，等周问题、贝努力原理（流体力学）等。



其中丹尼尔-伯努利是最优秀的一个，是数学教授、医学（解剖学）教授、植物学教授、力学教授、物理学教授。曾十次获得法国科学院年度奖

有一次在旅途中，年轻的丹尼尔同一个风趣的陌生人闲谈，他谦虚地自我介绍说：“我是丹尼尔·伯努利。”陌生人立即带着讥讽的神情回答道：“那我就是艾萨克·牛顿！”



# 概率与统计信号处理

- 1718年法国数学家棣莫弗 (1667-1754) 的著作《机会的学说》受到了牛顿的重视。到了1730年，棣莫弗出版其著作《分析杂论》，当中包含了著名的“棣莫弗—拉普拉斯定理”。这就是概率论中“中心极限定理”的原始雏形。终身未娶
- 棣莫弗一生贫困潦倒，给孩子们做家教为生，晚年患嗜睡症，每天睡眠达20小时以上。
- 1710年，棣莫弗被委派参与英国皇家学会调查牛顿-莱布尼茨关于微积分优先权的委员会，可见他很受学术界的尊重。1735年，棣莫弗被选为柏林科学院院士。



较早期的概率史上有三部里程碑性质的著作，棣莫弗的《机会中的学说》即为其一，另外两部是伯努力的《推测术》和拉普拉斯的《概率的分析理论》





# 概率与统计信号处理

- 拉普拉斯在1812年出版的《概率的分析理论》中，首先明确地对概率作了古典的定义。另外，他又和数个数学家建立了关于“正态分布”及“最小二乘法”的理论。
- 皮埃尔-西蒙·拉普拉斯，法国数学家、天文学家，法国科学院院士。是天体力学的主要奠基人、天体演化学的创立者之一，他还是分析概率论的创始人，因此可以说他是应用数学的先驱。1816年被选为法兰西学院院士，1817年任该院院长。在研究天体问题的过程中，创造和发展了许多数学的方法，以他的名字命名的拉普拉斯变换、拉普拉斯定理和拉普拉斯方程，在科学技术的各个领域有着广泛的应用。



拉普拉斯曾任拿破仑的老师，所以和拿破仑结下不解之缘。拉普拉斯在数学上是个大师，在政治上是个小人物、墙头草，总是效忠于得势的一边，被人看不起。







# 贝叶斯与贝叶斯估计

- 最早在统计推断 (Statistical Inference) 方面做出突出贡献的是贝叶斯。

- 托马斯·贝叶斯 (Thomas Bayes, 1702-1761), 英国著名数学家、神学家和哲学家, 主要研究概率统计。1758年发表了《机会的学说概论》。他将归纳推理法用于概率论基础理论, 创立了贝叶斯统计理论。

- 概率论中的贝叶斯公式

$$p(A|x) = \frac{p(x|A)p(A)}{p(x)} = \frac{p(x|A)p(A)}{\int p(x|A)p(A)dA}$$

- 贝叶斯估计的核心思想: 在推断中引入先验知识可以使得估计变得更加准确。



贝叶斯





# 高斯与最小二乘估计

- 拉普拉斯和高斯（C. F. Gauss, 1777-1855）都应用了贝叶斯的方法讨论了参数估计问题。他们在研究中都把参数  $A$  与估计量  $A$  的距离函数 作为衡量估计量好坏的标准。

$$y = f(A - A)$$

- 有趣的是拉普拉斯特别讨论了  $y = |A - A|$ ，而高斯却注意到  $y = (A - A)^2$  在数学上能够得到很多重要的结论。**1801**年，高斯运用最小二乘法计算谷神星的轨道，获得了成功。**1809**年，高斯在他的著作《天体运动论》中系统总结了最小二乘法。时至今日，最小二乘法仍然是一种快速、有效的实用方法。
- 最小二乘估计的特点：不要需要做任何概率假设。

高斯**17**岁给出了素数的分布，同时提出最小二乘法；**19**岁解决了存在近**2000**年的用圆规和直尺画正十七边形问题。

$x$ 为素数排列后的位置序号， $p$  为对应的素数，则素数分布公式：

$$\frac{p}{\ln p - 1 - \varepsilon} = x \leq \frac{p}{\ln p - 1}$$



# 概率与统计信号处理

- 另一在概率论发展史上的代表人物是法国数学家和物理学家泊松。他推广了伯努利形式下的大数定律，研究得出了一种新的分布，就是泊松分布。概率论继他们之后，其中心研究课题则集中在推广和改进伯努利大数定律及中心极限定理，此外他还研究了级数的发散问题。



$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, \dots$$

泊松分布

泊松的工作的特色是应用数学方法研究各类物理问题，并由此得到数学上的发现。他对积分理论、行星运动理论、热物理、弹性理论、电磁理论、位势理论和概率论都有重要贡献。他还是19世纪概率统计领域里的卓越人物。

在数学中以他的姓名命名的有：泊松定理、泊松公式、泊松方程、泊松分布、泊松过程、泊松积分、泊松级数、泊松变换、泊松代数、泊松比、泊松流、泊松核、泊松括号、泊松稳定性、泊松积分表示、泊松求和法等。



# 概率与统计信号处理

- 概率论发展到1901年，中心极限定理终于被严格的证明了，及后数学家正利用这一定理第一次科学地解释了为什么实际中遇到的许多随机变量近似服从以正态分布。
- 到了20世纪初，以马尔科夫为代表的数学家开始研究随机过程，著名的马尔可夫的随机过程理论在1931年被奠定其地位。



马尔可夫

安德雷·安德耶维齐·马尔可夫（1856—1922），俄国数学家，他的父亲是一位中级官员，后来举家迁往圣彼得堡。1874年马尔可夫入圣彼得堡大学，师从切比雪夫，毕业后留校任教，任圣彼得堡大学教授（1893-1905），研究数论和概论统计。1886年当选为圣彼得堡科学院院士。马尔可夫1922年逝世于圣彼得堡。他的同名儿子小马尔可夫也是一位著名数学家。





# 概率与统计信号处理

前苏联数学家柯尔莫哥洛夫（1903-1987）是20世界最伟大的数学家之一，是现代概率论的开拓者。受公理化的影响，他与辛欣共同把实变函数的方法应用于概率论，1933年，柯尔莫哥洛夫的专著《概率论的基础》出版，书中第一次在测度论基础上建立了概率论的严密公理体系，这一光辉成就使他名垂史册。因为这一专著不仅提出了概率论的公理定义，在公理的框架内系统地给出了概率论理论体系。在他为首的一些数学家的努力下，概率统计已应用到不同领域，并且自身已经成为一个非常庞大的数学分支。



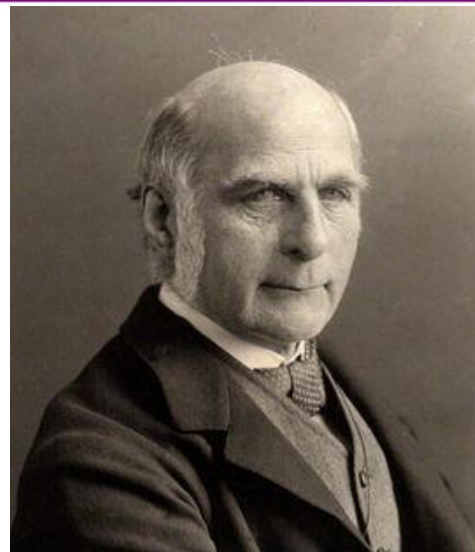
柯尔莫格洛夫在很多数学领域都有杰出成就，几乎包含了数学的主要分支。由于柯尔莫哥洛夫的卓越成就，他七次荣膺列宁勋章，并被授予苏联社会主义劳动英雄的称号。他还是列宁奖金和国家奖金的获得者。1980年荣获了沃尔夫奖，1986年荣获了罗巴切夫斯基奖。

1963年召开的一次概率统计国际会议上，美国统计学家沃尔夫维茨说：“我来苏联的一个特别目的是确定柯尔莫哥洛夫到底是一个人呢，还是一个研究机构”。



# 弗朗西斯·高尔顿

弗朗西斯·高尔顿 (Francis Galton, 1822年2月16日 - 1911年1月17日), 英国科学家和探险家。学术研究兴趣广泛, 包括人类学、地理、数学、力学、气象学、心理学、统计学等方面。他是查尔斯·达尔文的表弟, 深受其进化论思想的影响, 把该思想引入到人类研究。他着重研究个别差异, 从遗传的角度研究个别差异形成的原因, 开创了优生学。他关于人类官能的研究开辟了个体心理和心理测验研究的新途径。他系统深入的研究了指纹学, 明确指出指纹终身不变; 指纹可以识别; 指纹可以分类。



**他是相关系数的提出者, 是生物统计学的先驱。**

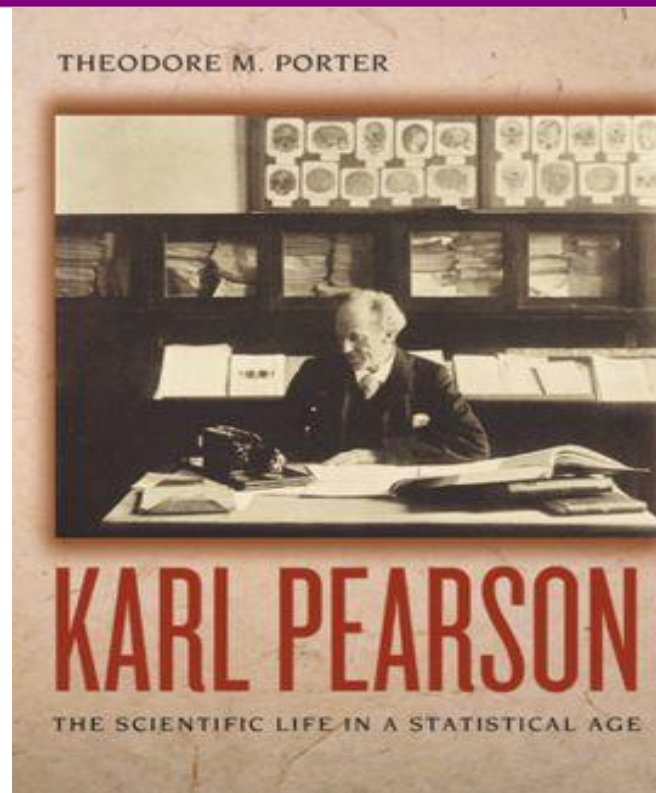
他是第一个明确提出普通能力和特殊能力主张的人。他在调查了1768 - 1868 年这 100 年间英国的首相、将军、文学家和科学家共 977 名获得智力成熟的人的家谱后发现, 其中有 89 个父亲、129 个儿子、114 个兄弟, 共 332 名杰出人士。而在一般老百姓中每 4000 人才产生一名杰出人士。因此他认为普通能力是遗传的。在调查 30 家有艺术能力的家庭中, 他发现这些家庭中的子女也有艺术能力的占 64%; 而 150 家无艺术能力的家庭, 其子女中只有 21% 有艺术能力

高尔顿的学术继承人、卡尔·皮尔逊在提到高尔顿的博学时有个有趣的说法: “高尔顿比 10 个生物学家中的 9 个更懂数学和物理, 比 20 个数学家中的 19 个更懂生物, 而比 50 个生物学家中的 49 个更懂疾病和畸形儿的知识。”



# 卡尔·皮尔逊

卡尔·皮尔逊 (Karl Pearson, 1857年3月27日 ~ 1936年4月27日) 是英国数学家，生物统计学家，数理统计学的创立者，自由思想者，对生物统计学、气象学、社会达尔文主义理论和优生学做出了重大贡献。他被公认是旧派理学派和描述统计学派的代表人物，并被誉为现代统计科学的创立者。



在1901年，皮尔逊与高尔顿等一起创办了《生物统计》杂志。

卡尔皮尔逊的学术贡献：提出复数相关分析，创立直方图分析法，提出卡方分布







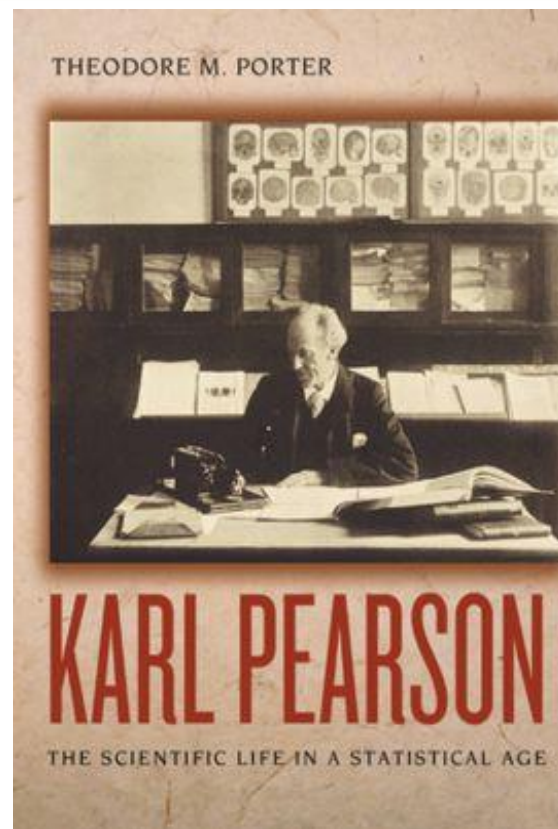
# 卡尔·皮尔逊

K皮尔逊应该算是早期统计学的创始人之一，在他年轻的时候，受到了高尔顿的影响，对统计学开始感兴趣。当高尔顿离开统计学领域，转而研究其它问题的时候，K皮尔逊接替了他的工作，接管了高尔顿的生物统计实验室，而且后来成了《生物统计》期刊的唯一编辑（共同合伙人高尔顿和威尔登已死亡）。

K皮尔逊最大的成就之一就是创造出了拟合优度检验。现在我们依然在用，也就是卡方拟合优度检验。这一检验即使在现在依然能看出它的重要性，它可以让你模拟现实中不同的数学模型，然后利用拟合优度检验来确定哪一个更好。

K皮尔逊还完善了高尔顿提出的相关系数，并证明了回归中的复相关系数，可以认为，K皮尔逊是复相关系数的提出人。

可惜的是，K皮尔逊晚年控制欲太强，以至于与另一伟大的统计学家Fisher有了很大的分歧，当年Fisher投稿《生物统计》，结果被K皮尔逊百般刁难，最终导致Fisher不再投稿这一杂志，而改投其它杂志，而且几乎以后所有文章也都不再发表在《生物统计》上。二人之间的分歧一直是统计学的一大遗憾。







# 现代统计学奠基人之一：戈赛特 1876-1937

戈赛特早先在牛津温切斯特及新（New）学院学习数学和化学，成绩优秀，后来到都柏林市一家酿酒公司担任酿造化学技师，从事统计和实验工作，1906—1907年间，公司派他到伦敦进修，同时在伦敦大学学院生物实验室做研究，也有机会和皮尔逊共同研讨，此后他们经常通信。



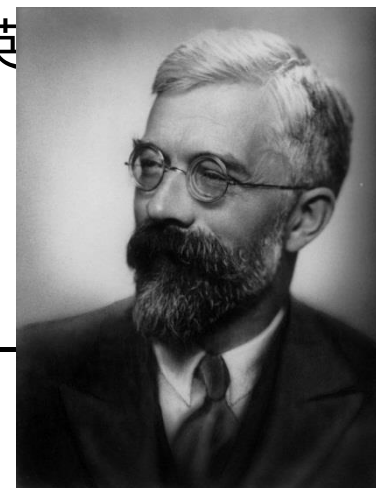
戈赛特是t检验的创始人。与许多学者一样，他当时并没有直接从事统计学的研究，毕竟，在100多年前，他当时从事的是啤酒酿造行业，然后就在这一似乎与统计无关的行业里，他做了一项研究，想弄清楚发酵时需要加多少酵母最合适。当时戈赛特做出了结果并准备将其发表，可惜他所在的是酿酒行业，贸然发表的话会引起泄露机密之嫌。但戈赛特又确实想发表这一文章，因此采取了折中的办法：他采用了一个笔名，也就是现在我们在统计学课本上见到的student。从而奠定了他小样本理论鼻祖的地位！

费希尔和皮尔逊的矛盾较深，戈赛特经常予以调停



# 费希尔与最大似然估计

- 费希尔 (Sir Ronald Aylmer Fisher, 1890-1960) , 英国统计与遗传学家, 现代统计学的奠基者之一。
- 20世纪20年代, 提出了显著性检验的概念。
- 1925年, 出版的《Statistical Methods for Research Workers》被公认为20世纪对统计学最有影响力的著作之一。
- 提出了很多统计中的概念: 充分性、Fisher信息等。
- **发明了最大似然估计, 这种估计方法的意义非常重大,** 在MVU (minimum variance unbiased) 不存在的情况下, 这种方法非常有效。在今天仍有很多算法继承了最大似然的思想, 如著名的EM算法。
- 最大似然估计的核心思想: 找到概率意义上最有可能的参数。



$$A = \max_A p(x; A)$$

**其它贡献: 提出方差分析法、随机抽样法**



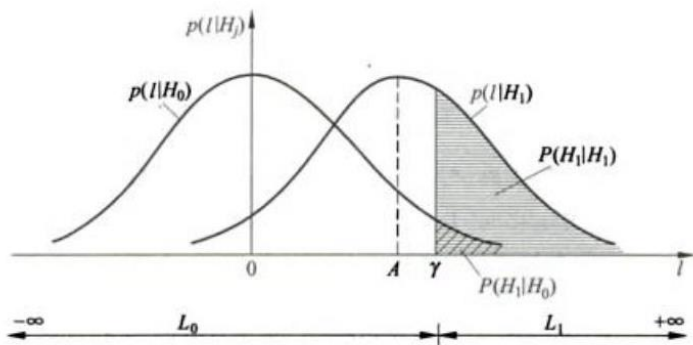
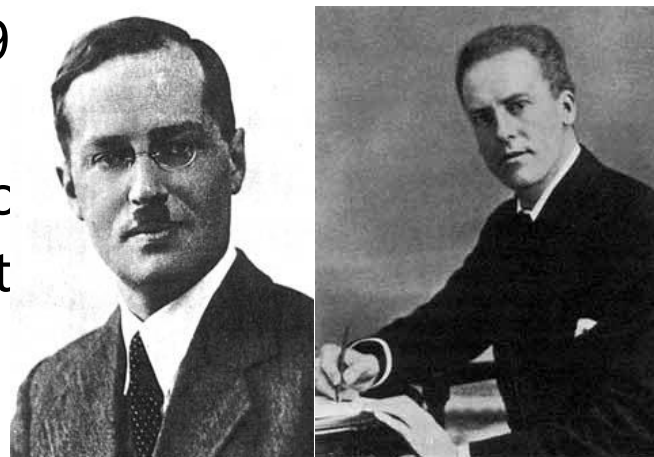


# 奈曼、皮尔逊与NP准则

- 1933年, 奈曼 (Jerzy Neyman, 1894-19
- 和卡尔.皮尔逊之子E.S. Pearson 共同发展了假设检验的数学理论, 在 "On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypothesis" 一文中, 建议寻找使错误机会最小的检验。

$H_0$ 假设: 噪声 (无信号)

$H_1$ 假设: 信号+噪声 (有信号)



判决概率  $P(H_1 | H_0)$  和  $P(H_1 | H_1)$  示意图

$$L(x) = \frac{p(x; H_1)}{p(x; H_0)} > \gamma$$

奈曼的其它贡献: 置信区间





# 大师的贡献

- 1939年, **瓦尔德** (Abraham Wald, 1902-1950) , 提出了代价和风险的概念。他认为做出错误的判决是要付出代价的, 不同的错误类型付出的代价不同, 应该选择代价最小的检验。在统计学中引入了极大极小原理。  
瓦尔德还提出了著名的序贯检测理论。



- 1940年, 克拉美《统计学的数学方法》专著标志数理统计诞生。
- 1950s, **米德尔顿**把多种检测统一成为贝叶斯风险最小准则。
- 1960s, 皮特提出了稳健检测方法, 并提出了M估计理论。

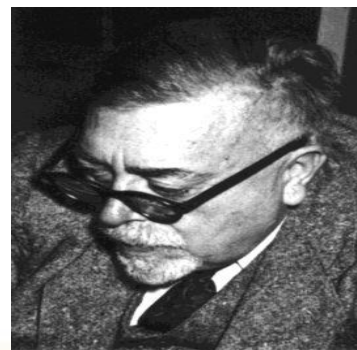
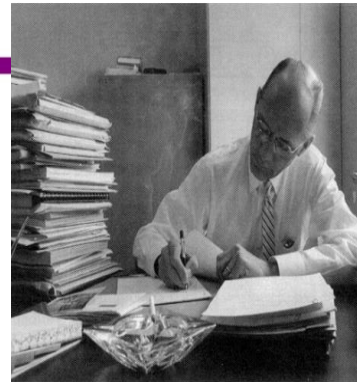




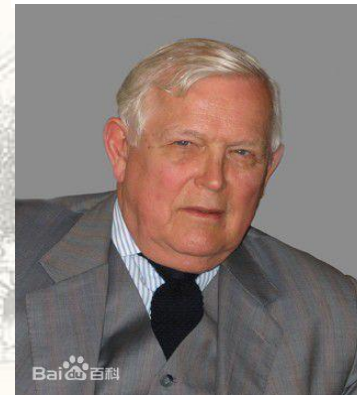


# 大师的贡献

- 1943年，**诺斯**基于输出的信杂比最大原则提出了匹配滤波器。
- 1949年，**维纳**提出了维纳滤波器。
- 1960年，**卡尔曼**提出了卡尔曼滤波器
- 1960s，休伯提出了鲁棒滤波器。
- 1967年，韦德洛提出了自适应滤波器。



NORBERT WIENER  
1894-1964





# 中国概率论先驱者

许宝騄(1910-1970), 字闲若, 数学家。在中国开创了概率论、数理统计的教学与研究工作。在内曼-皮尔逊理论、参数估计理论、多元分析、极限理论等方面取得卓越成就, 是多元统计分析学科的开拓者之一。1929年入清华大学数学系, 1934年任北京大学数学系助教, 1935年他发表了两篇论文, 并熟练地掌握了矩阵的工具。1936年许宝騄被派往伦敦大学学院学习数理统计, 1938年许宝騄共发表了3篇论文, 并获得了哲学博士学位。1940年回国在西南联合大学任教。1945-1946在美国访问和任教, 1948年他当选为中央研究院院士, 1955年他当选为中国科学院学部委员。他先后在概率论与数理统计方面发表了多篇论文, 并组织青年学者搞了3个讨论班。





# 教学目标 (1和2)

## 1 牢固掌握统计信号处理经典理论、以及卡尔曼滤波理论

经典的几种信号检测方法

经典的信号参数估计方法

标量及矢量形式的卡尔曼滤波

## 2 培养和提高分析问题和解决问题能力

注意培养对各种方法引入的前提与背景的理解

理解并掌握基本概念

掌握各种方法的数学推导过程

注意培养对各种知识点的内在逻辑结构的理解

**最终理解和掌握所学内容的精髓**





# 教学目标 (3)

## 3 学会用统计信号处理的思维去思考

以医学的统计诊断为例

如何从统计信号处理的观点看待这些问题?







# 讲课内容

- **检测理论**

**几种准则、几种经典的检测方法**

如（贝叶斯、极小极大风险、奈曼-皮尔逊、序贯）检测

- **估计理论**

**几种准则、几种重要的参数估计方法**

如最大似然、线性均方误差最小、最小二乘法等

- **滤波理论**

**维纳滤波**

**卡尔曼滤波**

- **统计信号处理的在雷达图像处理中的应用**





# 参考教材

- **Steven M. K, Fundamentals of Statistical Signal Processing, Vol.1, Estimation Theory, Pearson Education ASIA LTD**  
**《统计信号处理基础》罗鹏飞等译, 电子工业出版社, 2012**
- **孟宪元, 信号检测与处理原理及其应用, 清华大学内部教材**
- **罗鹏飞, 统计信号处理. 北京: 电子工业出版社, 2009**
- **张立毅, 信号检测与估计, 清华大学出版社, 2010**





# 考试方式

作业 + 大作业 (2次) : 40%

期末考试 (开卷) : 60%

第16周随堂考试





# 联系方式

**教师：杨 健 （罗姆楼10-110）**

**助教：高帆 （罗姆楼10-101）**

**62782397, 62794726**

**yangjian\_ee@tsinghua.edu.cn**

