统计信号处理基础 第 08 次作业

许凌玮 2018011084

1. 标量卡尔曼滤波

对于标量的卡尔曼滤波，状态量为标量s_k，观测量为标量x_k，已知

$$\begin{cases}\text{状态方程：}\ s_k = as_{k-1} + w_{k-1} \quad (0 \le a < 1) \\ \text{观测方程：}\ x_k = cs_k + n_k\end{cases}$$

其中w_k、n_k均为零均值的白噪声序列，$E[w_k]=E[n_k]=0$，$E[w_iw_j]=\sigma_w^2\delta_{ij}$，$E[n_in_j]=\sigma_n^2\delta_{ij}$，$E[s_iw_j]=E[s_in_j]=0$，$E[s_k]=0$，$E[s_k^2]=\sigma_s^2=\sigma_w^2/(1-a^2)$，$E[s_ks_{k+j}]=a^{|j|}\sigma_s^2$。

状态量的估计公式写为

$$\hat{s}_k = a_k\hat{s}_{k-1} + b_kx_k$$

求解a_k、b_k使得$P_k = E[e_k^2] = E[(s_k - \hat{s}_k)^2]$最小。

【解答】

状态量的估计公式为

$$\hat{s}_k = a_k\hat{s}_{k-1} + b_kx_k \quad \cdots\cdots(1)$$

为使P_k达到最小，令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P_k}{\partial a_k} = 0 \\ \dfrac{\partial P_k}{\partial b_k} = 0\end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases}E[e_k\hat{s}_{k-1}] = 0 \quad \cdots\cdots(2) \\ \quad E[e_kx_k] = 0 \quad \cdots\cdots(3)\end{cases}$$

则由$a_k \times (2) + b_k \times (3)$得

$$E[e_k\hat{s}_k] = 0 \quad \cdots\cdots(4)$$

利用$e_k = s_k - \hat{s}_k$展开(2)、(4)两式得

$$\begin{cases}E[s_k\hat{s}_{k-1}] = E[\hat{s}_k\hat{s}_{k-1}] \quad \cdots\cdots(5) \\ \quad E[s_k\hat{s}_k] = E[\hat{s}_k^2] \quad \cdots\cdots(6)\end{cases}$$

对于(5)式左边，有（最后一步用到了(6)式）

$$E[s_k\hat{s}_{k-1}] = E[(as_{k-1} + w_{k-1})\hat{s}_{k-1}] = aE[s_{k-1}\hat{s}_{k-1}] = aE[\hat{s}_{k-1}^2] \quad \cdots\cdots(7)$$

对于(5)式右边，有

$$E[\hat{s}_k\hat{s}_{k-1}] = E[(a_k\hat{s}_{k-1} + b_kx_k)\hat{s}_{k-1}] = a_kE[\hat{s}_{k-1}^2] + b_kE[x_k\hat{s}_{k-1}]$$

其中（最后一步用到了(7)式）

$$E[x_k\hat{s}_{k-1}] = E[(cs_k + n_k)\hat{s}_{k-1}] = cE[s_k\hat{s}_{k-1}] = caE[\hat{s}_{k-1}^2]$$

因此

$$E[\hat{s}_k\hat{s}_{k-1}] = a_kE[\hat{s}_{k-1}^2] + b_kE[x_k\hat{s}_{k-1}] = (a_k + acb_k)E[\hat{s}_{k-1}^2] \quad \cdots\cdots(8)$$

比较(7)、(8)两式得

$$a = a_k + acb_k$$
$$\Rightarrow \quad a_k = a(1 - cb_k) \quad \cdots\cdots(9)$$

将(9)式带回(1)式，整理得状态量估计的递推表达式

$$\hat{s}_k = a\hat{s}_{k-1} + b_k(x_k - ac\hat{s}_{k-1}) \quad \cdots\cdots(10)$$

定义“新息”y_k为测量残差

$$y_k = x_k - ac\hat{s}_{k-1} \quad \cdots\cdots(11)$$

此时

$$\begin{aligned}e_k &= s_k - \hat{s}_k = s_k - a\hat{s}_{k-1} - b_ky_k = s_k - a\hat{s}_{k-1} - b_k(cs_k + n_k - ac\hat{s}_{k-1}) \\ &= (1 - cb_k)(s_k - a\hat{s}_{k-1}) - b_kn_k\end{aligned}$$

则

$$P_k = E[e_k^2] = E\left[\left((1-cb_k)(s_k - a\hat{s}_{k-1}) - b_k n_k\right)^2\right] = (1-cb_k)^2 E[(s_k - a\hat{s}_{k-1})^2] + b_k^2 E[n_k^2]$$

其中

$$E[(s_k - a\hat{s}_{k-1})^2] = E\left[\left((as_{k-1} + w_{k-1}) - a\hat{s}_{k-1}\right)^2\right] = a^2 E[(s_{k-1} - \hat{s}_{k-1})^2] + E[w_{k-1}^2]$$

则

$$P_k = (1-cb_k)^2(a^2 P_{k-1} + \sigma_w^2) + b_k^2 \sigma_n^2 \quad \cdots\cdots(12)$$

对其最小化

$$\frac{\partial P_k}{\partial b_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2c(1-cb_k)(a^2 P_{k-1} + \sigma_w^2) + 2b_k \sigma_n^2 = 0$$

解得

$$b_k = \frac{c(a^2 P_{k-1} + \sigma_w^2)}{c^2(a^2 P_{k-1} + \sigma_w^2) + \sigma_n^2} \quad \cdots\cdots(13)$$

以及

$$a^2 P_{k-1} + \sigma_w^2 = \frac{b_k \sigma_n^2}{c(1-cb_k)} \quad \cdots\cdots(14)$$

将(14)式代入(12)式，解得

$$P_k = \frac{1}{c} b_k \sigma_n^2 \quad \cdots\cdots(15)$$

将(15)式中的下标k换成$(k-1)$，代入(13)式可得题目所要求的最优卡尔曼增益b_k的递推式

$$b_k = \frac{c\left(\frac{a^2}{c} b_{k-1}\sigma_n^2 + \sigma_w^2\right)}{c^2\left(\frac{a^2}{c} b_{k-1}\sigma_n^2 + \sigma_w^2\right) + \sigma_n^2} = \frac{a^2 b_{k-1}\sigma_n^2 + c\sigma_w^2}{ca^2 b_{k-1}\sigma_n^2 + c^2\sigma_w^2 + \sigma_n^2} \quad \cdots\cdots(16)$$

【注 1】下面重新整理**标量卡尔曼滤波过程**如下。

卡尔曼滤波器的状态由以下两个量表征：
$\hat{s}_k$：在时刻k的状态的估计
P_k：后验估计误差协方差矩阵，度量估计值的精确程度

卡尔曼滤波的操作包括两个阶段：预测与更新。

I. 预测阶段（依据状态方程与观测方程，由$(k-1)$时刻的最优状态估计去预测k时刻的状态）
预测状态：$\hat{s}_{k|k-1} = a\hat{s}_{k-1}$
预测估计协方差：$P_{k|k-1} = a^2 P_{k-1} + \sigma_w^2$

II. 更新阶段（由k时刻的观测去修正前面作出的预测）
首先计算以下各量。
测量残差：$\tilde{y}_k = x_k - c\hat{s}_{k|k-1}$
测量残差的协方差：$M_k = c^2 P_{k|k-1} + \sigma_n^2$
最优卡尔曼增益：$b_k = cP_{k|k-1}/M_k$

然后用它们来更新滤波器状态变量。
更新的状态估计：$\hat{s}_k = \hat{s}_{k|k-1} + b_k \tilde{y}_k$
更新的协方差估计：$P_k = (1-cb_k)P_{k|k-1}$

【注 2】类似地，**矢量卡尔曼滤波**过程如下。

状态量为矢量$\boldsymbol{s}_k$，状态转移矩阵为$\boldsymbol{F}_k$，状态转移噪声为$\boldsymbol{w}_k$；观测量为矢量$\boldsymbol{z}_k$，观测矩阵为$\boldsymbol{H}_k$，观测噪声为$\boldsymbol{v}_k$。已知

$$\begin{cases}\text{状态方程：}\ \boldsymbol{s}_k=\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{s}_{k-1}+\boldsymbol{w}_k\\ \text{观测方程：}\ \boldsymbol{z}_k=\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{v}_k\end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{w}_k\sim\mathcal{N}(0,\boldsymbol{Q}_k)\ ,\qquad \boldsymbol{v}_k\sim\mathcal{N}(0,\boldsymbol{R}_k)$$

卡尔曼滤波器的状态由以下两个量表征：

$\hat{\boldsymbol{s}}_{k|k}$：在时刻$k$的状态的估计

$\boldsymbol{P}_{k|k}$：后验估计误差协方差矩阵，度量估计值的精确程度

卡尔曼滤波的操作包括两个阶段：预测与更新。

I. 预测阶段（依据状态方程与观测方程，由$(k-1)$时刻的最优状态估计去预测k时刻的状态）

预测状态：$\hat{\boldsymbol{s}}_{k|k-1}=\boldsymbol{F}_k\hat{\boldsymbol{s}}_{k-1|k-1}$

预测估计协方差矩阵：$\boldsymbol{P}_{k|k-1}=\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{P}_{k-1|k-1}\boldsymbol{F}_k^T+\boldsymbol{Q}_k$

II. 更新阶段（由k时刻的观测去修正前面作出的预测）

首先计算以下各量。

测量残差：$\tilde{\boldsymbol{y}}_k=\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{s}}_{k|k-1}$

测量残差的协方差矩阵：$\boldsymbol{S}_k=\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^T+\boldsymbol{R}_k$

最优卡尔曼增益：$\boldsymbol{K}_k=\boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^T\boldsymbol{S}_k^{-1}$

然后用它们来更新滤波器状态变量。

更新的状态估计：$\hat{s}_{k|k}=\hat{\boldsymbol{s}}_{k|k-1}+\boldsymbol{K}_k\tilde{\boldsymbol{y}}_k$

更新的协方差矩阵估计：$\boldsymbol{P}_{k|k}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{P}_{k|k-1}$

基于此，我们还可以推得扩展卡尔曼滤波（EKF）、无迹卡尔曼滤波（UKF）、自适应卡尔曼滤波（AKF）等。

2. 矢量卡尔曼滤波建模

设xOy平面上有一点目标作匀加速直线运动，对状态方程与观测方程进行建模。

【解答】

设点目标在二维空间中的坐标为(x,y)，k到$(k+1)$时刻的时间间隔为ΔT，则匀加速直线运动的建模为

$$\begin{cases}x_{k+1}=x_k+x'_k\Delta T\\ x'_{k+1}=x'_k+x''_k\Delta T\\ x''_{k+1}=x''_k+u_1(k)\\ y_{k+1}=y_k+y'_k\Delta T\\ y'_{k+1}=y'_k+y''_k\Delta T\\ y''_{k+1}=y''_k+u_2(k)\end{cases}$$

其中$u_1(k)$、$u_2(k)$为零均值的状态转移白噪声，附加在期望为常量的加速度上。

记状态量为$\boldsymbol{s}_k$，则系统方程为

$$\boldsymbol{s}_{k+1}=\begin{bmatrix}s_1(k+1)\\s_2(k+1)\\s_3(k+1)\\s_4(k+1)\\s_5(k+1)\\s_6(k+1)\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}x_{k+1}\\x'_{k+1}\\x''_{k+1}\\y_{k+1}\\y'_{k+1}\\y''_{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\Delta T&0&0&0&0\\0&1&\Delta T&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&\Delta T&0\\0&0&0&0&1&\Delta T\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1(k)\\s_2(k)\\s_3(k)\\s_4(k)\\s_5(k)\\s_6(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\u_1(k)\\0\\0\\u_2(k)\end{bmatrix}$$

仅观测物体的空间位置，记观测量为$\boldsymbol{z}_k$，则观测方程为

$$\boldsymbol{z}_k=\begin{bmatrix}z_1(k)\\z_2(k)\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}x_k\\y_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1(k)\\s_2(k)\\s_3(k)\\s_4(k)\\s_5(k)\\s_6(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n_1(k)\\n_2(k)\end{bmatrix}$$

其中$n_1(k)$、$n_2(k)$为观测噪声。

下面用矢量与矩阵的形式来表示以上方程，记状态转移矩阵$\boldsymbol{F}_k$与观测矩阵$\boldsymbol{H}_k$分别为

$$\boldsymbol{F}_k=\begin{bmatrix}1&\Delta T&0&0&0&0\\0&1&\Delta T&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&\Delta T&0\\0&0&0&0&1&\Delta T\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\quad,\quad\boldsymbol{H}_k=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

状态转移噪声与观测噪声分别记为

$$\boldsymbol{u}_k=[0\quad 0\quad u_1(k)\quad 0\quad 0\quad u_2(k)]^T$$
$$\boldsymbol{n}_k=[n_1(k)\quad n_2(k)]^T$$

其协方差矩阵分别为

$$\boldsymbol{Q}_k=E[\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{u}_k^*]=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&\sigma_x^2&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\sigma_y^2\end{bmatrix}\quad,\quad\boldsymbol{R}_k=E[\boldsymbol{n}_k\boldsymbol{n}_k^*]=\begin{bmatrix}\sigma_A^2&0\\0&\sigma_B^2\end{bmatrix}$$

综上可得该情境下的矢量卡尔曼滤波模型

$$\begin{cases}\text{状态方程：}\ s_k=\boldsymbol{F}_k s_{k-1}+\boldsymbol{u}_k\\\text{观测方程：}\ \boldsymbol{z}_k=\boldsymbol{H}_k s_k+\boldsymbol{n}_k\end{cases}$$

其中独立噪声满足

$$E[\boldsymbol{u}_k]=0,\qquad E[\boldsymbol{n}_k]=0,\qquad E[\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{u}_k^*]=\boldsymbol{Q}_k,\qquad E[\boldsymbol{n}_k\boldsymbol{n}_k^*]=\boldsymbol{R}_k$$

各量含义见前述表达式。

注：对于三维空间中的匀加速直线运动，只需与x、y类似地加上z坐标分量，各方程扩维，形式基本不变。