统计信号处理基础 第 04 次作业

许凌玮 2018011084

1. 信号：$x(t)=1-\cos\omega_0 t\ \ (0\le t\le 2\pi/\omega_0)$，噪声：$\mathit{\Phi}_n(\omega)=\omega_1^2/(\omega^2+\omega_1^2)$，设$T=2\pi/\omega_0$，求匹配滤波器及最大信噪比。

【解答】

记输入信号为

$$s_i(t)=x(t)=\begin{cases}1-\cos\omega_0 t & 0\le t\le 2\pi/\omega_0\\ 0 & else\end{cases}$$

对应频谱为

$$\begin{aligned}S_i(j\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}s_i(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi/\omega_0}(1-\cos\omega_0 t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi/\omega_0}\mathrm{e}^{-j\omega t}-\frac{1}{2}e^{j(\omega_0-\omega)t}-\frac{1}{2}e^{-j(\omega_0+\omega)t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{j\omega}\left(1-e^{-j2\pi\frac{\omega}{\omega_0}}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{j(\omega_0-\omega)}\left(1-e^{j2\pi\frac{(\omega_0-\omega)}{\omega_0}}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{j(\omega_0+\omega)}\left(1-e^{-j2\pi\frac{(\omega_0+\omega)}{\omega_0}}\right)\\&=\frac{1}{2j}\left(\frac{2}{\omega}+\frac{1}{\omega_0-\omega}-\frac{1}{\omega_0+\omega}\right)\left(1-e^{-j2\pi\frac{\omega}{\omega_0}}\right)=\frac{2\pi\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)e^{-j\pi\frac{\omega}{\omega_0}}\end{aligned}$$

其中$\mathrm{sinc}(x)=\sin(\pi x)/\pi x$。

则匹配滤波器的传递函数为

$$\begin{aligned}H(j\omega)&=\frac{kS_i^*(j\omega)}{\mathit{\Phi}_n(\omega)}e^{-j\omega t_0}=k\frac{\omega^2+\omega_1^2}{\omega_1^2}e^{-j\omega t_0}\cdot\frac{2\pi\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)e^{j\pi\frac{\omega}{\omega_0}}\\&=k\frac{2\pi\omega_0(\omega^2+\omega_1^2)}{\omega_1^2(\omega_0^2-\omega^2)}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)e^{-j\omega\left(t_0-\frac{\pi}{\omega_0}\right)}\end{aligned}$$

将$\mathit{\Phi}_n(\omega)$分解为

$$\mathit{\Phi}_n(\omega)=\frac{\omega_1^2}{\omega^2+\omega_1^2}=\frac{(j\omega_1)^2}{(j\omega+\omega_1)(j\omega-\omega_1)}=G_n^+(\omega)G_n^-(\omega)$$

则最大信噪比为

$$\begin{aligned}\left(\frac{|s_o(t_0)|^2}{\bar{n}_o^2(t)}\right)_{max}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{S_i(j\omega)}{G_n^-(\omega)}\right|^2\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|S_i(j\omega)|^2}{\mathit{\Phi}_n(\omega)}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)|S_i(j\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|S_i(j\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega+\frac{1}{\omega_1^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|S_i(j\omega)|^2\omega^2\,\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

其中

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|S_i(j\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty}s_i(t)^2\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi/\omega_0}(1-\cos\omega_0 t)^2\mathrm{d}t=\frac{1}{\omega_0}\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi}{\omega_0}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|S_i(j\omega)|^2\omega^2\,\mathrm{d}\omega&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\pi\omega_0\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)^2\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{1-(\omega/\omega_0)^2}\sin\left(\pi\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)^2\mathrm{d}\omega\\&=\frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{1-\omega'^2}\sin(\pi\omega')\right)^2\mathrm{d}\omega'=\frac{\omega_0}{2\pi}\cdot 2\pi^2=\pi\omega_0\end{aligned}$$

因此最大信噪比为

$$\left(\frac{|s_o(t_0)|^2}{\bar{n}_o^2(t)}\right)_{max}=\frac{3\pi}{\omega_0}+\frac{\pi\omega_0}{\omega_1^2}$$