统计信号处理基础 第 03 次作业

许凌玮 2018011084

1. 证明复数情况下的积分形式的柯西-施瓦兹不等式为

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad f(x), g(x) \in \mathbb{C}$$

取等充要条件$f(x) = tg^*(x)$ $(t \in \mathbb{C})$。

【证明】

首先证明实数情形的积分形式的柯西-施瓦兹不等式为

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad f(x), g(x) \in \mathbb{R}$$

取等充要条件$f(x) = tg(x)$ $(t \in \mathbb{R})$。

由模的性质易知$|f(x) - tg(x)| \ge 0$，则对其积分可得

$$\int_a^b |f(x) - tg(x)|^2 dx \ge 0$$

由于

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x) - tg(x)|^2 dx &= \int_a^b [f(x)^2 - 2tf(x)g(x) + t^2 g(x)^2]dx \\ &= t^2 \int_a^b |g(x)|^2 dx - 2t \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b |f(x)|^2 dx \ge 0\end{aligned}$$

将其视为关于t的二次函数，恒不小于 0，要求$\Delta \le 0$。

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(2\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - 4\int_a^b |g(x)|^2 dx \int_a^b |f(x)|^2 dx \\ &= 4\left(\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|^2 - \int_a^b |g(x)|^2 dx \int_a^b |f(x)|^2 dx\right) \le 0\end{aligned}$$

此即实数情形的积分形式的柯西-施瓦兹不等式，取等充要条件为$f(x) - tg(x) = 0$，即

$$f(x) = tg(x) \;\; (t \in \mathbb{R})$$

然后证明复数情形的积分形式的三角不等式

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx, \qquad f(x) \in \mathbb{C}$$

由定积分的定义

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right)\right|, \qquad \int_a^b |f(x)|dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \left|f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right)\right|$$

由求和形式的三角不等式（由复平面的向量相加易证）

$$\left|\sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right)\right| \le \sum_{i=1}^n \left|f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right)\right|$$

两边对n取极限即可得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\right| \le \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\right|$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

等号成立的条件为$f(x)$的幅角为定值，使得向量同向相加

$$\arg\big(f(x)\big) \equiv \theta_0$$

现将上式中的$f(x)$换为$f(x)g(x)$，即得

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)g(x)|dx = \left|\int_a^b |f(x)||g(x)|dx\right|$$

等号成立的条件为

$$\arg(f(x)g(x)) \equiv \theta_0$$

也即

$$\arg\big(f(x)\big) = \arg\big(g^*(x)\big) + \theta_0$$

由于$|f(x)|$与$|g(x)|$均为实数，它们满足前面已证的实数情形的积分形式的柯西-施瓦兹不等式

$$\left|\int_a^b |f(x)||g(x)|dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b |g(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

因此有

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)||g(x)|dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b |g(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

复数情形的积分形式的柯西-施瓦兹不等式即得证。

上式两个$\le$号取等条件依次为

$$\arg\big(f(x)\big) = \arg\big(g^*(x)\big) + \theta_0, \qquad |f(x)| = r|g(x)| \ \ (r\in\mathbb{R})$$

整理得

$$f(x) = tg^*(x), \qquad t = re^{j\theta_0} \in \mathbb{C}$$

综上所述，复数情况下的积分形式的柯西-施瓦兹不等式为

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b |g(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad f(x), g(x) \in \mathbb{C}$$

取等充要条件$f(x) = tg^*(x)$ $(t\in\mathbb{C})$。