统计信号处理基础 第 07 次作业

许凌玮 2018011084

1. 维纳滤波

已知

$$S_{ss}(z)=\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}$$

信号和噪声不相关，即$r_{sv}(m)=0$，噪声$v(n)$零均值，单位功率的白噪声（$\sigma_v^2=1,m_v=0$），求$H_{opt}(z)$和$E[|e(n)|^2]$。

【解答】

根据白噪声特点得$S_{vv}=1$，由信号和噪声不相关得

$$r_{xx}(m)=r_{ss}(m)+r_{vv}(m)$$

两边取Z变换，代入已知条件，对$x(n)$进行功率谱分解

$$S_{xx}(z)=S_{ss}(z)+S_{vv}(z)=\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}+1=\frac{1.6\times(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}=\sigma_w^2B(z)B(z^{-1})$$

$B(z)$必须为因果稳定的系统，得

$$B(z)=\frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}\quad,\qquad \sigma_w^2=1.6$$

(1) 分析物理可实现情况

$$H_{opt}=\frac{1}{\sigma_w^2}\frac{1}{B(z)}\left[\frac{S_{xs}(z)}{B(z^{-1})}\right]_+=\frac{1}{\sigma_w^2}\frac{1}{B(z)}\left[\frac{S_{ss}(z)}{B(z^{-1})}\right]_+=\frac{1-0.8z^{-1}}{1.6\times(1-0.5z^{-1})}\times\left[\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)}\right]_+$$

令

$$F(z)=\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)}\quad,\qquad F_+(z)=\left[\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)}\right]_+$$

$F(z)$的极点为 0.8 和 2，考虑因果性、稳定性，仅取单位圆内的极点$z_v=0.8$，$f(n)$为$F(z)$的Z反变换，应用留数定理，有

$$f(n)=R_{es}\left[\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)}\times z^{n-1},0.8\right]$$

$$f(n)=\frac{0.36\times z^{n-1}}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)}\times(z-0.8)|_{z=0.8}=0.6\times0.8^n$$

取$f(n)$的因果部分

$$f_+(n)=0.6\times0.8^n\times u(n)$$

对齐作Z变换得

$$F_+(z)=ZT[f_+(n)]=ZT[0.6\times0.8^n\times u(n)]=\frac{0.6}{1-0.8z^{-1}}$$

因此$H_{opt}(z)$为

$$H_{opt}(z)=\frac{1-0.8z^{-1}}{1.6\times(1-0.5z^{-1})}\times\frac{0.6}{1-0.8z^{-1}}=\frac{3}{8}\times\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

然后求相应的$E[|e(n)|^2]_{min}$

$$
\begin{aligned}
E[|e(n)|^2]_{min} &= \frac{1}{2\pi j}\oint_c \left(S_{ss}(z) - H_{opt}S_{ss}(z^{-1})\right)\frac{dz}{z} \\
&= \frac{1}{2\pi j}\oint_c \left[\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)} - \frac{3}{8}\times\frac{1}{1-0.5z^{-1}}\times\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}\right]\frac{dz}{z} \\
&= \frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{0.36\left(\frac{5}{8}-0.5z^{-1}\right)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)(1-0.5z^{-1})}\frac{dz}{z}
\end{aligned}
$$

取单位圆为积分围线，上式等于单位圆内极点（$z=0.8$及$z=0.5$）的留数之和，即

$$
\begin{aligned}
E[|e(n)|^2]_{min} = &\frac{0.36\left(\frac{5}{8}-0.5z^{-1}\right)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)(1-0.5z^{-1})z}\times(z-0.8)\Big|_{z=0.8} \\
&+\frac{0.36\left(\frac{5}{8}-0.5z^{-1}\right)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)(1-0.5z^{-1})z}\times(z-0.5)\Big|_{z=0.5} = 0+\frac{3}{8} = \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

未经滤波器的均方误差

$$
E[|e(n)|^2] = E[|x(n)-s(n)|^2] = E[|v(n)|^2] = \sigma_v^2 = 1
$$

可见维纳滤波器有效减小了均方误差。

(2) 分析非物理可实现情况

类似可得

$$
\begin{aligned}
H_{opt}(z) &= \frac{S_{ss}(z)}{S_{xx}(z)} = \frac{S_{ss}(z)}{S_{ss}(z)+S_{vv}(z)} = \frac{0.225}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)} \\
E[|e(n)|^2]_{min} &= \frac{1}{2\pi j}\oint_c \left(S_{ss}(z) - H_{opt}S_{xs}(z^{-1})\right)\frac{dz}{z} \\
&= \frac{1}{2\pi j}\oint_c \left[\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)} - \frac{0.225}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}\times\frac{0.36}{(1-0.8z)(1-0.8z^{-1})}\right]\frac{dz}{z} \\
&= \frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{0.36(1.025-0.5z^{-1}-0.5z)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}\frac{dz}{z}
\end{aligned}
$$

应用留数定理，取单位圆为积分围线，上式等于单位圆内极点（$z=0.8$及$z=0.5$）的留数之和，即

$$
\begin{aligned}
E[|e(n)|^2]_{min} = &\frac{0.36(1.025-0.5z^{-1}-0.5z)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}\times(1-0.8z^{-1})\Big|_{z=0.8} \\
&+\frac{0.36(1.025-0.5z^{-1}-0.5z)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}\times(1-0.5z^{-1})\Big|_{z=0.5} = 0+\frac{3}{10} = \frac{3}{10}
\end{aligned}
$$

可见，非物理可实现情况的最小均方误差小于物理可实现情况的均方误差。