统计信号处理基础 第 01 次作业

许凌玮 2018011084

1. 设二元假设检验的观测信号模型为

$$\begin{cases} H_0\colon\ x = -1 + n \\ H_1\colon\ x = 1 + n \end{cases} \qquad n \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_n^2 = \frac{1}{2}\right)$$

若两种假设是等先验概率的，而代价因子为$C_{00} = 1, C_{01} = 8, C_{10} = 4, C_{11} = 2$，试求贝叶斯（最佳）表达式和平均代价$C$。

【解答】

似然函数分别为

$$p_0(x) = P(x|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left(-\frac{(x+1)^2}{2\sigma_n^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-(x+1)^2)$$
$$p_1(x) = P(x|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2\sigma_n^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-(x-1)^2)$$

则似然比为

$$\lambda(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \exp\big(-((x-1)^2 - (x+1)^2)\big) = \exp(4x)$$

而

$$\xi = P(H_0) = \frac{1}{2}, \qquad \lambda_0 = \frac{\xi(C_{10} - C_{00})}{(1-\xi)(C_{01} - C_{11})} = \frac{1}{2}$$

因此贝叶斯（最佳）表达式为

$$\lambda(x) \gtrless_{H_0}^{H_1} \lambda_0 \ \Rightarrow\ \frac{p_1(x)}{p_0(x)} \gtrless_{H_0}^{H_1} \frac{\xi(C_{10} - C_{00})}{(1-\xi)(C_{01} - C_{11})} \ \Rightarrow\ \exp(4x) \gtrless_{H_0}^{H_1} \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ x \gtrless_{H_0}^{H_1} \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

记$V_T = \frac{1}{4}\ln(\frac{1}{2})$，则虚警概率和检测概率分别为

$$P_F = \int_{D_1} p_0(x)dx = \int_{V_T}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left(-\frac{(x+1)^2}{2\sigma_n^2}\right)dx = Q\left(\frac{V_T+1}{\sigma_n}\right) = Q\left(\sqrt{2}\left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right)+1\right]\right)$$
$$P_D = \int_{D_1} p_1(x)dx = \int_{V_T}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2\sigma_n^2}\right)dx = Q\left(\frac{V_T-1}{\sigma_n}\right) = Q\left(\sqrt{2}\left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right)-1\right]\right)$$

总的平均代价为

$$\begin{aligned} C &= C_{00}P(H_0)(1-P_F) + C_{10}P(H_0)P_F + C_{01}P(H_1)(1-P_D) + C_{11}P(H_1)P_D \\ &= \frac{1}{2}[(1-P_F) + 4P_F + 8(1-P_D) + 2P_D] \\ &= \frac{9}{2} + \frac{3}{2}P_F - 3P_D \\ &= \frac{9}{2} + \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{2}\left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right)+1\right]\right) - 3Q\left(\sqrt{2}\left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right)-1\right]\right) \end{aligned}$$

2. 什么假设下代价函数曲线是上凸的?

【解答】

平均代价函数

$$C = C_{00}P(H_0)P(D_0 \mid H_0) + C_{10}P(H_0)P(D_1 \mid H_0) + C_{01}P(H_1)P(D_0 \mid H_1) + C_{11}P(H_1)P(D_1 \mid H_1)$$
$$= \xi C_{00}\int_{D_0} p_0(r)dr + \xi C_{10}\int_{D_1} p_0(r)dr + (1-\xi)C_{01}\int_{D_0} p_1(r)dr + (1-\xi)C_{11}\int_{D_1} p_1(r)dr$$
$$= \xi C_{10} + (1-\xi)C_{11} + \int_{D_0}[\xi p_0(r)(C_{00}-C_{10}) + (1-\xi)p_1(r)(C_{01}-C_{11})]dr$$

猜测先验概率为$P(H_0)=x$。假设正确判决的代价小于错误判决的代价，即$C_{10}-C_{00}>0$且$C_{01}-C_{11}>0$，则此时判决准则为

$$\lambda(r) = \frac{p_1(r)}{p_0(r)} \gtrless_{H_0}^{H_1} \frac{x(C_{10}-C_{00})}{(1-x)(C_{01}-C_{11})} \triangleq \lambda_0(x)$$

则平均代价为

$$C(\xi,x) = \xi C_{00}(1-P_F(x)) + \xi C_{10}P_F(x) + (1-\xi)C_{01}P_M(x) + (1-\xi)C_{11}(1-P_M(x))$$
$$= \xi C_{10} + (1-\xi)C_{11} + \int_{D_0(x)}[\xi p_0(r)(C_{00}-C_{10}) + (1-\xi)p_1(r)(C_{01}-C_{11})]dr$$

其中$D_0(x)=\{r|\lambda(r)<\lambda_0(x)\}$。注意$D_0(x)$有可能是分段的，取决于$\lambda(r)$的形式。

最小平均代价函数（对应贝叶斯准则的情形）为

$$C_{min}(\xi) = C(\xi,x)|_{x=\xi}$$

任意取定一个$x=\xi_1$，此时$C(\xi,\xi_1)$为一条直线（关于ξ的一次函数），且当$\xi\neq\xi_1$，即猜测的先验概率不等于实际的先验概率时，平均代价更大，则

$$C(\xi,\xi_1) \geq C(\xi_1,\xi_1) = C_{min}(\xi_1)$$

上式在$\xi=\xi_1$时取等。

又由于

$$\frac{\partial C_{min}(\xi)}{\partial \xi} = C_{10} - C_{11} + \int_{D_0(\xi)}[p_0(r)(C_{00}-C_{10}) + p_1(r)(C_{11}-C_{01})]dr$$
$$\frac{\partial C(\xi,\xi_1)}{\partial \xi} = C_{10} - C_{11} + \int_{D_0(\xi_1)}[p_0(r)(C_{00}-C_{10}) + p_1(r)(C_{11}-C_{01})]dr = \left.\frac{\partial C_{min}(\xi)}{\partial \xi}\right|_{\xi=\xi_1}$$

因此$C(\xi,\xi_1)$为$C_{min}(\xi)$在$\xi=\xi_1$处的切线。

记$f(r)=p_0(r)(C_{00}-C_{10})+p_1(r)(C_{11}-C_{01})$，则$f(r)$在$D_0(\xi)$上的积分可写为

$$\int_{D_0(\xi)} f(r)dr = \int_{-\infty}^{\lambda_0(\xi)}\int_{\lambda(r)=u} f(r)dr\,du$$

记$g(u)=\int_{\lambda(r)=u}f(r)dr=\int_{\lambda(r)=u}[p_0(r)(C_{00}-C_{10})+p_1(r)(C_{11}-C_{01})]dr$，则$\frac{\partial C_{min}(\xi)}{\partial \xi}$可化为

$$\frac{\partial C_{min}(\xi)}{\partial \xi} = C_{10} - C_{11} + \int_{-\infty}^{\lambda_0(\xi)} g(u)du$$

则$C_{min}(\xi)$的二阶导为

$$\frac{\partial^2 C_{min}(\xi)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(C_{10} - C_{11} + \int_{D_0(\xi)} f(r)dr\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\int_{-\infty}^{\lambda_0(\xi)} g(u)du\right) = \lambda_0'(\xi)g(\lambda_0(\xi))$$

其中

$$\lambda_0'(\xi) = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi(C_{10}-C_{00})}{(1-\xi)(C_{01}-C_{11})}\right) = \frac{(C_{10}-C_{00})}{(1-\xi)^2(C_{01}-C_{11})} > 0$$
$$g(\lambda_0(\xi)) = \int_{\lambda(r)=\lambda_0(\xi)} f(r)dr = \int_{\lambda(r)=\lambda_0(\xi)}[p_0(r)(C_{00}-C_{10}) + p_1(r)(C_{11}-C_{01})]dr \leq 0$$

（由于概率非负，即$p_0(r) \geq 0$且$p_1(r) \geq 0$，而$C_{00} - C_{10} < 0$且$C_{11} - C_{01} < 0$，因此恒有$f(r) \leq 0$，因此对$f(r)$的积分也将不大于 0，故上式成立。）

因此有

$$\frac{\partial^2 C_{min}(\xi)}{\partial \xi^2} = \lambda_0'(\xi) g(\lambda_0(\xi)) \leq 0$$

此式即满足$C_{min}(\xi)$上凸要求（上凸函数的二阶条件）。

综上所述，在正确判决的代价小于错误判决的代价的条件下（充分条件），$C_{min}(\xi)$恒为上凸函数。

统计信号处理基础 第 02 次作业

许凌玮 2018011084

1. 设有下列两种假设：

$$\begin{cases} H_0:\ x = n \\ H_1:\ x = a + n \end{cases}$$

其中$a > 0$为常数，$n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$。如果要求$P_F = \alpha$，试设计相应的最佳接收机，确定其检测概率$P_D$，并画出$P_D \sim SNR = a/\sigma$或$(a/\sigma)^2$的关系曲线。

【解答】

两种假设下的概率密度函数分别为

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

先验概率与代价函数均未知，且虚警概率给定，因此应用 NP 准则，可得似然比

$$\lambda(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \exp\left(\frac{2ax - a^2}{2\sigma^2}\right) \gtrless_{H_0}^{H_1} \lambda_0$$

则判别规则为

$$x \gtrless_{H_0}^{H_1} \frac{a}{2} + \frac{\sigma^2}{a} \ln\lambda_0 \triangleq V_T$$

由$P_F = \alpha$可确定门限

$$P_F = \int_{V_T}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = Q\left(\frac{V_T}{\sigma}\right) = \alpha \quad \Rightarrow \quad V_T = \sigma Q^{-1}(\alpha)$$

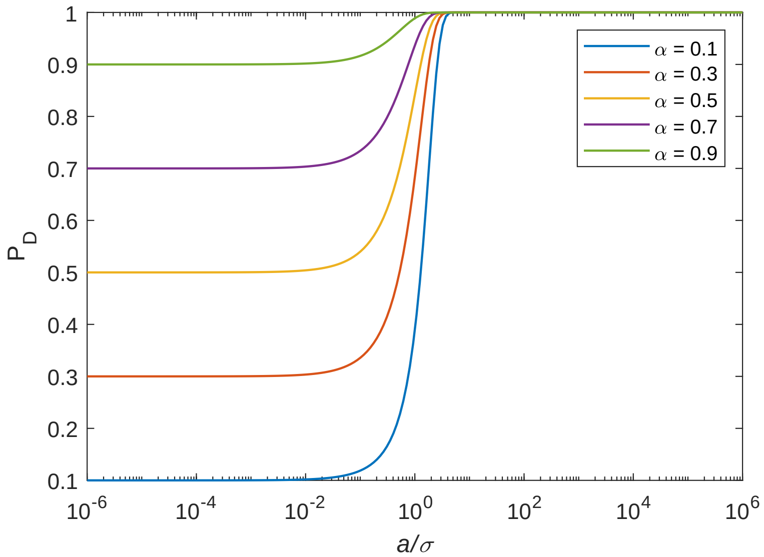
因此最佳接收机（NP 准则）的判别规则为

$$x \gtrless_{H_0}^{H_1} \sigma Q^{-1}(\alpha)$$

检测概率为

$$P_D = \int_{D_1} p_1(x) dx = \int_{V_T}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx = Q\left(\frac{V_T - a}{\sigma}\right) = Q\left(Q^{-1}(\alpha) - \frac{a}{\sigma}\right)$$

$P_D \sim SNR = a/\sigma$的关系曲线（α不同取值下）如下图所示



2. 设有下列两种假设：

$$\begin{cases} H_0: \ x = n \\ H_1: \ x = a + n \end{cases}$$

其中$a > 0$为常数。假定$C_{00} = C_{11} = 1, C_{10} = 10, C_{01} = 100$，$n \sim \mathcal{N}(0,1)$，试求：

1) 设计相应的最佳接收机；

2) $a = 3$时ξ_0的值，并画出$\bar{C}_{\min}(\xi)$的曲线。(此处是指求先验概率的估计值)

【解答】

1) 两种假设下的概率密度函数分别为

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-a)^2\right)$$

似然比为

$$\lambda(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \exp\left(ax - \frac{1}{2}a^2\right)$$

先验概率未知，代价函数已知，因此应用极小极大准则。猜测先验概率为$P(H_0) = s$，此时判决准则为

$$\lambda(x) = \exp\left(ax - \frac{1}{2}a^2\right) \gtrless_{H_0}^{H_1} \frac{s(C_{10} - C_{00})}{(1-s)(C_{01} - C_{11})} = \frac{s}{11(1-s)}$$

解得

$$x \gtrless_{H_0}^{H_1} \frac{1}{a} \ln\left(\frac{s}{11(1-s)}\right) + \frac{a}{2} \triangleq V_T$$

虚警概率和检测概率分别为

$$P_F(s) = \int_{D_1} p_0(x)dx = \int_{V_T}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx = Q(V_T)$$

$$P_D(s) = \int_{D_1} p_1(x)dx = \int_{V_T}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-a)^2\right) dx = Q(V_T - a)$$

平均代价为

$$\begin{aligned} C_{\min}(\xi, s) &= C_{00}P(H_0)(1-P_F) + C_{10}P(H_0)P_F + C_{01}P(H_1)(1-P_D) + C_{11}P(H_1)P_D \\ &= \xi\big(1 - P_F(s)\big) + 10\xi P_F(s) + 100(1-\xi)\big(1 - P_D(s)\big) + (1-\xi)P_D(s) \\ &= 100 - 99\xi + 9\xi Q(V_T) - 99(1-\xi)Q(V_T - a) \end{aligned}$$

极小极大方程

$$C_{\min}(0, s) = C_{\min}(1, s) \quad \Rightarrow \quad 100 - 99Q(V_T - a) = 1 + 9Q(V_T)$$

因此V_T为方程

$$Q(V_T) + 11Q(V_T - a) - 11 = 0$$

的解。对应的接收机判别规则为

$$x \gtrless_{H_0}^{H_1} V_T$$

2) $a = 3$时极小极大方程化为

$$Q(V_T) + 11Q(V_T - 3) - 11 = 0$$

数值解为

$$V_T = 0.883$$

$$V_T=\frac{1}{a}\ln\left(\frac{s^*}{11(1-s^*)}\right)+\frac{a}{2}=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{s^*}{11(1-s^*)}\right)+\frac{3}{2}\quad\Rightarrow\quad s^*=\left[1+\frac{1}{11}\exp\left(-3V_T+\frac{9}{2}\right)\right]^{-1}=0.633$$

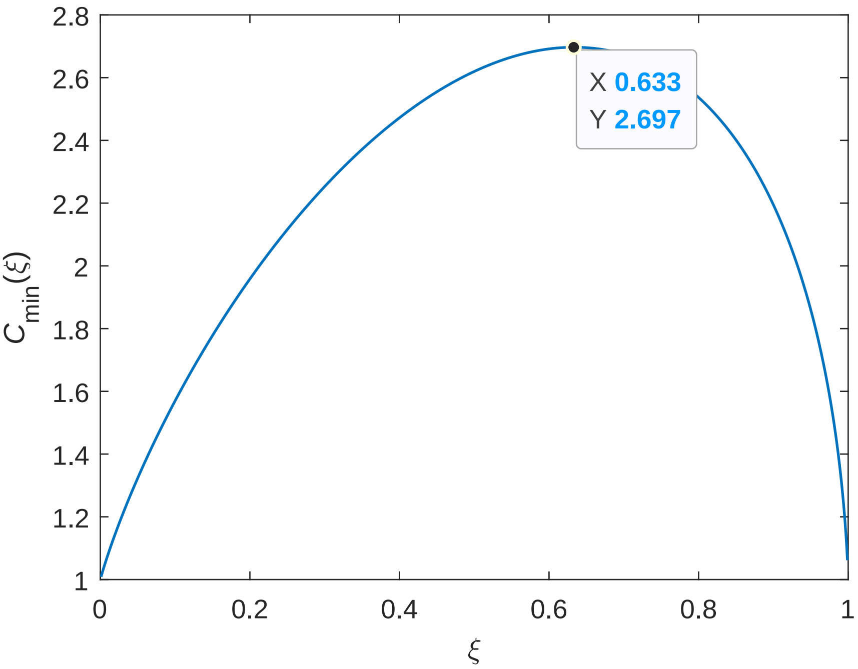
因此对先验概率的估计值为

$$\xi_0=s^*=0.633$$

$\bar{C}_{\min}(\xi)$的曲线方程为

$$\begin{aligned}\bar{C}_{\min}(\xi)&=C_{\min}(\xi,s)|_{s=\xi}=[100-99\xi+9\xi Q(V_T)-99(1-\xi)Q(V_T-3)]|_{s=\xi}\\&=100-99\xi+9\xi Q\left(\frac{1}{3}\ln\left(\frac{\xi}{11(1-\xi)}\right)+\frac{3}{2}\right)-99(1-\xi)Q\left(\frac{1}{3}\ln\left(\frac{\xi}{11(1-\xi)}\right)-\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

因此$\bar{C}_{\min}(\xi)$曲线如下图所示



3. 若接收信号的m次独立观测为$r_1,r_2,\dots,r_m$，每个噪声样本$n_i,i=1,2,\dots,m$都是独立同分布的拉普拉斯噪声，噪声样本与信号样本统计独立

$$p(n_i)=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma_n}\exp\left\{-\frac{\sqrt{2}|n_i|}{\sigma_n}\right\}$$

多样本的二元假设检验

$$\begin{cases}H_1\colon\ r_i=A+n_i & i=1,2,\dots,m\\H_0\colon\ r_i=n_i & i=1,2,\dots,m\end{cases}$$

其中$A=-10$。

给出似然比检验最佳检测器的形式。

【解答】

两种假设下r_i的概率密度函数为

$$p_1(r_i)=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma_n}\exp\left\{-\frac{\sqrt{2}|r_i-A|}{\sigma_n}\right\},\qquad p_0(r_i)=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma_n}\exp\left\{-\frac{\sqrt{2}|r_i|}{\sigma_n}\right\}$$

由于噪声是统计独立的，所以各个r_i也是统计独立的。样本矢量的概率密度分布函数为

$$p_1(\boldsymbol{r})=\prod_{i=1}^{m}p_1(r_i)=\left(\frac{1}{2\sigma_n^2}\right)^{m/2}\exp\left\{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_n}\sum_{i=1}^{m}|r_i-A|\right\}$$

$$p_0(\boldsymbol{r})=\prod_{i=1}^{m}p_0(r_i)=\left(\frac{1}{2\sigma_n^2}\right)^{m/2}\exp\left\{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_n}\sum_{i=1}^{m}|r_i|\right\}$$

对数似然比为

$$\ln(\lambda(\boldsymbol{r})) = \ln\left(\frac{p_1(\boldsymbol{r})}{p_0(\boldsymbol{r})}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_n}\sum_{i=1}^{m}(|r_i| - |r_i - A|)$$

设样本总数为N，$r_i < A$的样本数为N_1，$\mathrm{A} < r_i < 0$的样本数为N_2，$r_i > 0$的样本数为N_3，则对数似然比为

$$\ln\big(\lambda(\boldsymbol{r})\big) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_n}\left[N_1(-A) + N_2 A - 2\sum_{A<r_i<0} r_i + N_3 A\right] = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_n}\left[NA - 2N_1 A - 2\sum_{A<r_i<0} r_i\right]$$

因此判决规则为

$$\frac{\sqrt{2}}{\sigma_n}\left[NA - 2N_1 A - 2\sum_{A<r_i<0} r_i\right] \gtrless_{H_0}^{H_1} \ln(\lambda_0) \quad \Rightarrow \quad N_1 A + \sum_{A<r_i<0} r_i \gtrless_{H_1}^{H_0} \frac{NA}{2} - \frac{\sigma_n}{2\sqrt{2}}\ln(\lambda_0)$$

判决过程为：对小于A的样本值计数，对在A和0之间的样本值求和，再通过特定门限比较作出判决。

统计信号处理基础 第 03 次作业

许凌玮 2018011084

1. 证明复数情况下的积分形式的柯西-施瓦兹不等式为

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad f(x), g(x) \in \mathbb{C}$$

取等充要条件$f(x) = tg^*(x)$ $(t \in \mathbb{C})$。

【证明】

首先证明实数情形的积分形式的柯西-施瓦兹不等式为

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad f(x), g(x) \in \mathbb{R}$$

取等充要条件$f(x) = tg(x)$ $(t \in \mathbb{R})$。

由模的性质易知$|f(x) - tg(x)| \ge 0$，则对其积分可得

$$\int_a^b |f(x) - tg(x)|^2 dx \ge 0$$

由于

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x) - tg(x)|^2 dx &= \int_a^b [f(x)^2 - 2tf(x)g(x) + t^2 g(x)^2] dx \\ &= t^2 \int_a^b |g(x)|^2 dx - 2t \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b |f(x)|^2 dx \ge 0\end{aligned}$$

将其视为关于t的二次函数，恒不小于 0，要求$\Delta \le 0$。

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(2\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - 4\int_a^b |g(x)|^2 dx \int_a^b |f(x)|^2 dx \\ &= 4\left(\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|^2 - \int_a^b |g(x)|^2 dx \int_a^b |f(x)|^2 dx\right) \le 0\end{aligned}$$

此即实数情形的积分形式的柯西-施瓦兹不等式，取等充要条件为$f(x) - tg(x) = 0$，即

$$f(x) = tg(x) \ (t \in \mathbb{R})$$

然后证明复数情形的积分形式的三角不等式

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx, \qquad f(x) \in \mathbb{C}$$

由定积分的定义

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right)\right|, \qquad \int_a^b |f(x)|dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \left|f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right)\right|$$

由求和形式的三角不等式（由复平面的向量相加易证）

$$\left|\sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right)\right| \le \sum_{i=1}^n \left|f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right)\right|$$

两边对n取极限即可得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\right| \le \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\right|$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

等号成立的条件为$f(x)$的幅角为定值，使得向量同向相加

$$\arg\big(f(x)\big) \equiv \theta_0$$

现将上式中的$f(x)$换为$f(x)g(x)$，即得

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)g(x)|dx = \left|\int_a^b |f(x)||g(x)|dx\right|$$

等号成立的条件为

$$\arg(f(x)g(x)) \equiv \theta_0$$

也即

$$\arg\big(f(x)\big) = \arg\big(g^*(x)\big) + \theta_0$$

由于$|f(x)|$与$|g(x)|$均为实数，它们满足前面已证的实数情形的积分形式的柯西-施瓦兹不等式

$$\left|\int_a^b |f(x)||g(x)|dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

因此有

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)||g(x)|dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

复数情形的积分形式的柯西-施瓦兹不等式即得证。

上式两个$\le$号取等条件依次为

$$\arg\big(f(x)\big) = \arg\big(g^*(x)\big) + \theta_0, \qquad |f(x)| = r|g(x)| \ \ (r \in \mathbb{R})$$

整理得

$$f(x) = tg^*(x), \qquad t = re^{j\theta_0} \in \mathbb{C}$$

综上所述，复数情况下的积分形式的柯西-施瓦兹不等式为

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad f(x), g(x) \in \mathbb{C}$$

取等充要条件$f(x) = tg^*(x)$ $(t \in \mathbb{C})$。

统计信号处理基础 第 04 次作业

许凌玮 2018011084

1. 信号：$x(t)=1-\cos\omega_0 t\ \ (0\le t\le 2\pi/\omega_0)$，噪声：$\Phi_n(\omega)=\omega_1^2/(\omega^2+\omega_1^2)$，设$T=2\pi/\omega_0$，求匹配滤波器及最大信噪比。

【解答】

记输入信号为

$$s_i(t)=x(t)=\begin{cases}1-\cos\omega_0 t & 0\le t\le 2\pi/\omega_0\\ 0 & else\end{cases}$$

对应频谱为

$$\begin{aligned}S_i(j\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}s_i(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi/\omega_0}(1-\cos\omega_0 t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi/\omega_0}\mathrm{e}^{-j\omega t}-\frac{1}{2}e^{j(\omega_0-\omega)t}-\frac{1}{2}e^{-j(\omega_0+\omega)t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{j\omega}\left(1-e^{-j2\pi\frac{\omega}{\omega_0}}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{j(\omega_0-\omega)}\left(1-e^{j2\pi\frac{(\omega_0-\omega)}{\omega_0}}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{j(\omega_0+\omega)}\left(1-e^{-j2\pi\frac{(\omega_0+\omega)}{\omega_0}}\right)\\&=\frac{1}{2j}\left(\frac{2}{\omega}+\frac{1}{\omega_0-\omega}-\frac{1}{\omega_0+\omega}\right)\left(1-e^{-j2\pi\frac{\omega}{\omega_0}}\right)=\frac{2\pi\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)e^{-j\pi\frac{\omega}{\omega_0}}\end{aligned}$$

其中$\mathrm{sinc}(x)=\sin(\pi x)/\pi x$。

则匹配滤波器的传递函数为

$$\begin{aligned}H(j\omega)&=\frac{kS_i^*(j\omega)}{\Phi_n(\omega)}e^{-j\omega t_0}=k\frac{\omega^2+\omega_1^2}{\omega_1^2}e^{-j\omega t_0}\cdot\frac{2\pi\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)e^{j\pi\frac{\omega}{\omega_0}}\\&=k\frac{2\pi\omega_0(\omega^2+\omega_1^2)}{\omega_1^2(\omega_0^2-\omega^2)}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)e^{-j\omega\left(t_0-\frac{\pi}{\omega_0}\right)}\end{aligned}$$

将$\Phi_n(\omega)$分解为

$$\Phi_n(\omega)=\frac{\omega_1^2}{\omega^2+\omega_1^2}=\frac{(j\omega_1)^2}{(j\omega+\omega_1)(j\omega-\omega_1)}=G_n^+(\omega)G_n^-(\omega)$$

则最大信噪比为

$$\begin{aligned}\left(\frac{|s_o(t_0)|^2}{\bar{n}_o^2(t)}\right)_{max}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{S_i(j\omega)}{G_n^-(\omega)}\right|^2\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|S_i(j\omega)|^2}{\Phi_n(\omega)}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)|S_i(j\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|S_i(j\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega+\frac{1}{\omega_1^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|S_i(j\omega)|^2\omega^2\,\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

其中

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|S_i(j\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty}s_i(t)^2\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi/\omega_0}(1-\cos\omega_0 t)^2\mathrm{d}t=\frac{1}{\omega_0}\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi}{\omega_0}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|S_i(j\omega)|^2\omega^2\,\mathrm{d}\omega&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\pi\omega_0\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)^2\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{1-(\omega/\omega_0)^2}\sin\left(\pi\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)^2\mathrm{d}\omega\\&=\frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{1-\omega'^2}\sin(\pi\omega')\right)^2\mathrm{d}\omega'=\frac{\omega_0}{2\pi}\cdot 2\pi^2=\pi\omega_0\end{aligned}$$

因此最大信噪比为

$$\left(\frac{|s_o(t_0)|^2}{\bar{n}_o^2(t)}\right)_{max}=\frac{3\pi}{\omega_0}+\frac{\pi\omega_0}{\omega_1^2}$$

统计信号处理基础 第 05 次作业

许凌玮 2018011084

1. 电平估计问题

接收信号的N次独立观测为$r_1, r_2, \dots, r_N$，其中

$$r_i = A + n_i \qquad (i = 1,2,\cdots,N)$$

每个噪声样本都是独立同分布的高斯噪声$n_i \sim N(0, \sigma_n^2)$，噪声与信号样本统计独立。$A$为有用信号，即待估计参量。试给出待估计量$A$在不同先验概率分布情况下的 MAP 估计量：

(1) 均匀分布 $A \sim U(-A_0, A_0)$

(2) 高斯分布 $A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$

【解答】

(1) 均匀分布 $\boldsymbol{A \sim U(-A_0, A_0)}$

$$P(A) = \begin{cases} \dfrac{1}{2A_0} & ,|A| \le A_0 \\ 0 & ,|A| > A_0 \end{cases}$$

先验概率为

$$P(\boldsymbol{r}|A) = \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{N/2}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^N (r_i - A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

由于

$$\sum_{i=1}^N (r_i - A)^2 = \sum_{i=1}^N r_i^2 + NA^2 - 2N\bar{r}A = N(A-\bar{r})^2 - Nr^2 + NA^2 = N(A-\bar{r})^2 + K_1$$

其中

$$\bar{r} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N r_i$$

因此先验概率可化简为

$$P(\boldsymbol{r}|A) = \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{N/2}} \exp\left(-\frac{N(A-\bar{r})^2 + K_1}{2\sigma_n^2}\right) = K_2 \exp\left(-\frac{N(A-\bar{r})^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

再求后验概率，当$|A| \le A_0$时

$$P(A|\boldsymbol{r}) = \frac{P(\boldsymbol{r}|A)P(A)}{\int_{\mathbb{R}} P(\boldsymbol{r}|A)P(A)dA} = \frac{K_2 \exp\left(-\frac{N(A-\bar{r})^2}{2\sigma_n^2}\right) \cdot \frac{1}{2A_0}}{\int_{-A_0}^{A_0} K_2 \exp\left(-\frac{N(A-\bar{r})^2}{2\sigma_n^2}\right) \cdot \frac{1}{2A_0} dA} = K_3 \exp\left(-\frac{N(A-\bar{r})^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

当$|A| > A_0$时，有$P(A|\boldsymbol{r}) = 0$，因此

$$P(A|\boldsymbol{r}) = \begin{cases} K_3 \exp\left(-\dfrac{N(A-\bar{r})^2}{2\sigma_n^2}\right) & ,|A| \le A_0 \\ 0 & ,|A| > A_0 \end{cases}$$

其中$K_3 > 0$。

因此 MAP 估计量为

$$\hat{A} = \underset{A}{\mathrm{argmax}} P(A|r) = \underset{A\ s.t.|A|\le A_0}{\mathrm{argmax}} \left\{\exp\left(-\frac{N(A-\bar{r})^2}{2\sigma_n^2}\right)\right\} = \underset{A\ s.t.|A|\le A_0}{\mathrm{argmin}} \{(A-\bar{r})^2\}$$

可得

$$\hat{A} = \begin{cases} -A_0 & ,\bar{r} < A_0 \\ \bar{r} & ,|\bar{r}| \le A_0 \\ A_0 & ,\bar{r} > A_0 \end{cases}$$

(2) 高斯分布 $\boldsymbol{A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)}$

$$P(A)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A}\exp\left(-\frac{(A-\mu_A)^2}{2\sigma_A^2}\right)$$

先验概率为

$$P(\boldsymbol{r}|A)=\frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{N/2}}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{N}(r_i-A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

则后验概率仍为高斯分布

$$P(A|\boldsymbol{r})=\frac{P(\boldsymbol{r}|A)P(A)}{\int_{\mathbb{R}}P(\boldsymbol{r}|A)P(A)dA}=K_1\exp\left(-\frac{(A-\mu_A)^2}{2\sigma_A^2}-\frac{\sum_{i=1}^{N}(r_i-A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$=K_1\exp\left(-\frac{\sigma_n^2(A-\mu_A)^2+\sigma_A^2\sum_{i=1}^{N}(r_i-A)^2}{2\sigma_n^2\sigma_A^2}\right)$$

其中

$$\begin{aligned}\text{分子}&=(\sigma_n^2+\sigma_A^2N)A^2-(2\sigma_n^2\mu_A+2\sigma_A^2N\bar{r})A+\text{ 不含 }A\text{ 的常数}\\&=(\sigma_n^2+\sigma_A^2N)\left(A-\frac{\sigma_n^2\mu_A+N\sigma_A^2\bar{r}}{\sigma_n^2+N\sigma_A^2}\right)^2+\text{ 不含 }A\text{ 的常数}\end{aligned}$$

因此

$$P(A|\boldsymbol{r})=K_2\exp\left(-\frac{(A-\mu_{A|r})^2}{2\sigma_{A|r}^2}\right)$$

其中

$$\begin{aligned}\sigma_{A|r}^2&=\frac{\sigma_A^2\sigma_n^2}{\sigma_n^2+\sigma_A^2N}=\frac{1}{\frac{1}{\sigma_A^2}+\frac{N}{\sigma_n^2}}\\\mu_{A|r}&=\frac{\sigma_n^2\mu_A+N\sigma_A^2\bar{r}}{\sigma_n^2+N\sigma_A^2}=\frac{\frac{\sigma_n^2}{N}}{\frac{\sigma_n^2}{N}+\sigma_A^2}\mu_A+\frac{\sigma_A^2}{\frac{\sigma_n^2}{N}+\sigma_A^2}\bar{r}\end{aligned}$$

因此 MAP 估计量为

$$\hat{A}=\underset{A}{\operatorname{argmax}}P(A|r)=\underset{A}{\operatorname{argmin}}\{(A-\mu_{A|r})^2\}=\mu_{A|r}=\frac{\sigma_n^2\mu_A+N\sigma_A^2\bar{r}}{\sigma_n^2+N\sigma_A^2}$$

统计信号处理基础 第 06 次作业

许凌玮 2018011084

1. 目标

给定特征方程

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

特征方程的系数已知，且$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$。令

$$p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

试利用上述特征多项式的系数近似表示下面的表达式

$$H = -\sum_{i=1}^{3} p_i \log_3 p_i$$

2. 分析与建模

首先推导韦达定理。特征方程用特征根表示，可推得

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)\lambda - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\ b = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \\ c = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{cases}$$

由于

$$p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = -\frac{\lambda_i}{a} \quad (i = 1{,}2{,}3)$$

因此可用p_i来替换λ_i，得到关于p的特征方程

$$p^3 - p^2 + \frac{b}{a^2}p - \frac{c}{a^3} = 0$$

它满足$1 \geq p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq 0$且$p_1 + p_2 + p_3 = 1$。

由此可见系数的自由度只剩两个了（还有一个自由度被p_i的和为 1 约束住了），可以将如下α、β作为观测值

$$\alpha = \frac{b}{a^2}, \qquad \beta = \frac{c}{a^3}$$

拟合的目标为

$$H = -\sum_{i=1}^{3} p_i \log_3 p_i$$

由于$p_i (i = 1{,}2{,}3)$与估计量H的任何先验均未知，因此可以采用最小二乘估计进行拟合。依据多元函数的泰勒展开，我们可以将H用如下n阶二元多项式逼近

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} C_{ij} \alpha^{i-j} \beta^j$$

其中系数C_{ij}可构成如下$l = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$维的系数矩阵

$$\boldsymbol{w} = [C_{00}, C_{10}, C_{11}, \dots, C_{ij}, \dots, C_{nn}]^T \in \mathbb{R}^{l \times 1} \quad (i = 0, \dots, n;\ \ j = 0, \dots, i)$$

将每次的观测值记为

$$\boldsymbol{q}=[\alpha,\beta,\alpha^2,\alpha\beta,\beta^2,\dots,\alpha^{i-j}\beta^j,\dots,\alpha^n\beta^n]\in\mathbb{R}^{1\times l}\quad(i=0,\dots,n;\ \ j=0,\dots,i)$$

记第i次观测的噪声为n_i（对应模型拟合的误差），则相应的观测值为

$$H_i=\boldsymbol{q_i}\boldsymbol{w}+n_i\quad(i=1,2,\dots,N)$$

则对于全部观测，可记为

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{n}\quad(i=1,2,\dots,N)$$

其中

$$\boldsymbol{H}=[H_1,H_2,\dots,H_n]^T\in\mathbb{R}^{N\times 1}$$

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{q_1^T},\boldsymbol{q_2^T},\dots,\boldsymbol{q_N^T}]^T\in\mathbb{R}^{N\times l}$$

利用最小二乘法可以对系数矩阵$\boldsymbol{w}$进行估计，最小化如下均方误差（MSE）代价函数

$$J(\boldsymbol{w})=\parallel\boldsymbol{H}-\boldsymbol{Q}\boldsymbol{w}\parallel^2=(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{Q}\boldsymbol{w})^T(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{Q}\boldsymbol{w})$$

可以导出计算式如下

$$\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{H}$$

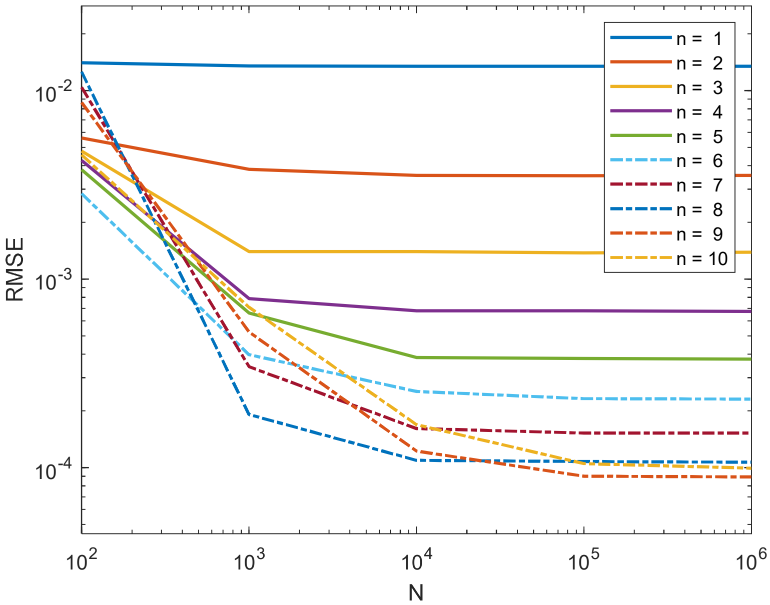
3. 模型训练与结果

为了得到合适的系数矩阵$\boldsymbol{w}$，使用 MATLAB 编程，生成N个随机样本进行最小二乘估计。相应的代码写在了 myLSE.m 中。

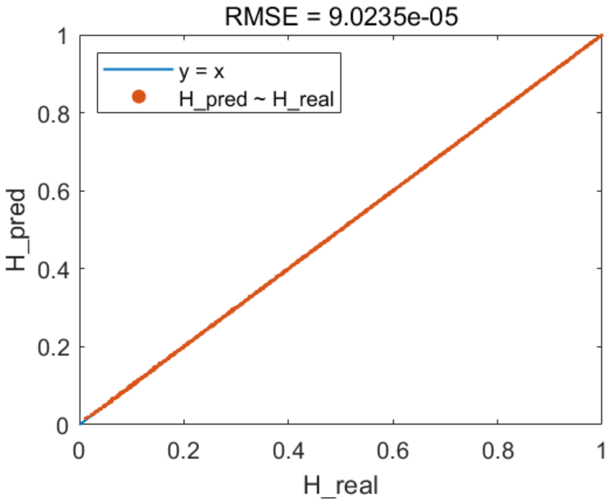
在生成样本时，为了保证$\lambda_1\ge\lambda_2\ge\lambda_3\ge 0$且为实数，采用随机生成$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$然后用韦达公式反推$a,b,c$，进而计算得到相应的$\alpha,\beta$生成观测值，并计算得到相应的用于生成$p_1,p_2,p_3$真值。

首先采用不同的阶数n以及数据规模N训练模型，作出损失曲线，选取合适的n、N值。

损失函数取 RMSE（与上面的 MSE 本质上是一致的，采用 RMSE 能更直观地看出量级），损失曲线如下图所示，可以看到在$N>10^5$以后随着N的增长 RMSE 基本不再减小，而当$n>7$以后随着n的增大 RMSE 变化的程度非常小，且在$n=9$时达到了最小，而n继续增大时由于可能发生了过拟合，模型性能反而略微有所下降。综合考虑模型复杂度，最终采取$N=10^5,n=9$作为训练的参数。



作出此时模型的预测值-真值曲线，可以看出拟合度非常好，RMSE 略小于10^{-4}数量级。



然后将相应的模型参数封装起来，写为一个函数 function H = predict_H(a, b, c)（代码在 predict_H.m 中），它的作用是输入指定的a、b、c，输出根据拟合的多项式计算得到的H值。

4. 总结

这次大作业通过实践巩固了最小二乘法的相关知识，可以看出这种方法简单而强大，可以很快地将复杂的非线性函数用多项式拟合出来，而且精度也比较高。本题要拟合的函数是三次方程的解经过归一化后通过对数的非线性变化得到的函数，整个过程下来非线性比较强。而我们的观测参数有两个自由度，所以这是多元最小二乘估计。通过损失曲线可以看出，经过最小二乘法拟合后，即使拟合的多项式阶数较低也能达到较小的 RMSE（3 阶就已经收敛到10^{-3}量级了），但随着阶数的增加也不是一直性能变好的，因为有可能出现过拟合的问题，所以要折中选取合适的参数。

在编程时也发现，用 MATLAB 计算高维矩阵的逆时有可能由于内置算法的问题出现矩阵接近奇异值而导致结果不精确的问题，且有可能出现随着N的增大，RMSE 出现一定上下波动的问题，但从结果看来，软件计算的误差在可接受范围内。

统计信号处理基础 第 07 次作业

许凌玮 2018011084

1. 维纳滤波

已知

$$S_{ss}(z)=\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}$$

信号和噪声不相关，即$r_{sv}(m)=0$，噪声$v(n)$零均值，单位功率的白噪声（$\sigma_v^2=1, m_v=0$），求$H_{opt}(z)$和$E[|e(n)|^2]$。

【解答】

根据白噪声特点得$S_{vv}=1$，由信号和噪声不相关得

$$r_{xx}(m)=r_{ss}(m)+r_{vv}(m)$$

两边取Z变换，代入已知条件，对$x(n)$进行功率谱分解

$$S_{xx}(z)=S_{ss}(z)+S_{vv}(z)=\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}+1=\frac{1.6\times(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}=\sigma_w^2B(z)B(z^{-1})$$

$B(z)$必须为因果稳定的系统，得

$$B(z)=\frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}\quad,\qquad \sigma_w^2=1.6$$

(1) 分析物理可实现情况

$$H_{opt}=\frac{1}{\sigma_w^2}\frac{1}{B(z)}\left[\frac{S_{xs}(z)}{B(z^{-1})}\right]_+=\frac{1}{\sigma_w^2}\frac{1}{B(z)}\left[\frac{S_{ss}(z)}{B(z^{-1})}\right]_+=\frac{1-0.8z^{-1}}{1.6\times(1-0.5z^{-1})}\times\left[\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)}\right]_+$$

令

$$F(z)=\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)}\quad,\qquad F_+(z)=\left[\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)}\right]_+$$

$F(z)$的极点为 0.8 和 2，考虑因果性、稳定性，仅取单位圆内的极点$z_v=0.8$，$f(n)$为$F(z)$的Z反变换，应用留数定理，有

$$f(n)=R_{es}\left[\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)}\times z^{n-1},0.8\right]$$

$$f(n)=\frac{0.36\times z^{n-1}}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)}\times(z-0.8)|_{z=0.8}=0.6\times0.8^n$$

取$f(n)$的因果部分

$$f_+(n)=0.6\times0.8^n\times u(n)$$

对齐作Z变换得

$$F_+(z)=ZT[f_+(n)]=ZT[0.6\times0.8^n\times u(n)]=\frac{0.6}{1-0.8z^{-1}}$$

因此$H_{opt}(z)$为

$$H_{opt}(z)=\frac{1-0.8z^{-1}}{1.6\times(1-0.5z^{-1})}\times\frac{0.6}{1-0.8z^{-1}}=\frac{3}{8}\times\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

然后求相应的$E[|e(n)|^2]_{min}$

$$
\begin{aligned}
E[|e(n)|^2]_{min} &= \frac{1}{2\pi j}\oint_c \left(S_{ss}(z) - H_{opt}S_{ss}(z^{-1})\right)\frac{dz}{z}\\
&= \frac{1}{2\pi j}\oint_c \left[\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)} - \frac{3}{8}\times\frac{1}{1-0.5z^{-1}}\times\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}\right]\frac{dz}{z}\\
&= \frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{0.36\left(\frac{5}{8}-0.5z^{-1}\right)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)(1-0.5z^{-1})}\frac{dz}{z}
\end{aligned}
$$

取单位圆为积分围线，上式等于单位圆内极点（$z=0.8$及$z=0.5$）的留数之和，即

$$
\begin{aligned}
E[|e(n)|^2]_{min} &= \frac{0.36\left(\frac{5}{8}-0.5z^{-1}\right)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)(1-0.5z^{-1})z}\times(z-0.8)\Big|_{z=0.8}\\
&\quad+\frac{0.36\left(\frac{5}{8}-0.5z^{-1}\right)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)(1-0.5z^{-1})z}\times(z-0.5)\Big|_{z=0.5} = 0+\frac{3}{8}=\frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

未经滤波器的均方误差

$$
E[|e(n)|^2] = E[|x(n)-s(n)|^2] = E[|v(n)|^2] = \sigma_v^2 = 1
$$

可见维纳滤波器有效减小了均方误差。

(2) 分析非物理可实现情况

类似可得

$$
\begin{aligned}
H_{opt}(z) &= \frac{S_{ss}(z)}{S_{xx}(z)} = \frac{S_{ss}(z)}{S_{ss}(z)+S_{vv}(z)} = \frac{0.225}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}\\
E[|e(n)|^2]_{min} &= \frac{1}{2\pi j}\oint_c \left(S_{ss}(z) - H_{opt}S_{xs}(z^{-1})\right)\frac{dz}{z}\\
&= \frac{1}{2\pi j}\oint_c \left[\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)} - \frac{0.225}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}\times\frac{0.36}{(1-0.8z)(1-0.8z^{-1})}\right]\frac{dz}{z}\\
&= \frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{0.36(1.025-0.5z^{-1}-0.5z)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}\frac{dz}{z}
\end{aligned}
$$

应用留数定理，取单位圆为积分围线，上式等于单位圆内极点（$z=0.8$及$z=0.5$）的留数之和，即

$$
\begin{aligned}
E[|e(n)|^2]_{min} &= \frac{0.36(1.025-0.5z^{-1}-0.5z)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}\times(1-0.8z^{-1})\Big|_{z=0.8}\\
&\quad+\frac{0.36(1.025-0.5z^{-1}-0.5z)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}\times(1-0.5z^{-1})\Big|_{z=0.5} = 0+\frac{3}{10}=\frac{3}{10}
\end{aligned}
$$

可见，非物理可实现情况的最小均方误差小于物理可实现情况的均方误差。

统计信号处理基础 第 08 次作业

许凌玮 2018011084

1. 标量卡尔曼滤波

对于标量的卡尔曼滤波，状态量为标量s_k，观测量为标量x_k，已知

$$\begin{cases}\text{状态方程：} s_k = a s_{k-1} + w_{k-1} \quad (0 \le a < 1) \\ \text{观测方程：} x_k = c s_k + n_k\end{cases}$$

其中w_k、n_k均为零均值的白噪声序列，$E[w_k] = E[n_k] = 0$，$E[w_i w_j] = \sigma_w^2 \delta_{ij}$，$E[n_i n_j] = \sigma_n^2 \delta_{ij}$，$E[s_i w_j] = E[s_i n_j] = 0$，$E[s_k] = 0$，$E[s_k^2] = \sigma_s^2 = \sigma_w^2/(1-a^2)$，$E[s_k s_{k+j}] = a^{|j|}\sigma_s^2$。

状态量的估计公式写为

$$\hat{s}_k = a_k \hat{s}_{k-1} + b_k x_k$$

求解a_k、b_k使得$P_k = E[e_k^2] = E[(s_k - \hat{s}_k)^2]$最小。

【解答】

状态量的估计公式为

$$\hat{s}_k = a_k \hat{s}_{k-1} + b_k x_k \quad \cdots\cdots (1)$$

为使P_k达到最小，令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P_k}{\partial a_k} = 0 \\ \dfrac{\partial P_k}{\partial b_k} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}E[e_k \hat{s}_{k-1}] = 0 \quad \cdots\cdots (2) \\ E[e_k x_k] = 0 \quad \cdots\cdots (3)\end{cases}$$

则由$a_k \times (2) + b_k \times (3)$得

$$E[e_k \hat{s}_k] = 0 \quad \cdots\cdots (4)$$

利用$e_k = s_k - \hat{s}_k$展开(2)、(4)两式得

$$\begin{cases}E[s_k \hat{s}_{k-1}] = E[\hat{s}_k \hat{s}_{k-1}] \quad \cdots\cdots (5) \\ E[s_k \hat{s}_k] = E[\hat{s}_k^2] \quad \cdots\cdots (6)\end{cases}$$

对于(5)式左边，有（最后一步用到了(6)式）

$$E[s_k \hat{s}_{k-1}] = E[(a s_{k-1} + w_{k-1})\hat{s}_{k-1}] = a E[s_{k-1}\hat{s}_{k-1}] = a E[\hat{s}_{k-1}^2] \quad \cdots\cdots (7)$$

对于(5)式右边，有

$$E[\hat{s}_k \hat{s}_{k-1}] = E[(a_k \hat{s}_{k-1} + b_k x_k)\hat{s}_{k-1}] = a_k E[\hat{s}_{k-1}^2] + b_k E[x_k \hat{s}_{k-1}]$$

其中（最后一步用到了(7)式）

$$E[x_k \hat{s}_{k-1}] = E[(c s_k + n_k)\hat{s}_{k-1}] = c E[s_k \hat{s}_{k-1}] = ca E[\hat{s}_{k-1}^2]$$

因此

$$E[\hat{s}_k \hat{s}_{k-1}] = a_k E[\hat{s}_{k-1}^2] + b_k E[x_k \hat{s}_{k-1}] = (a_k + acb_k) E[\hat{s}_{k-1}^2] \quad \cdots\cdots (8)$$

比较(7)、(8)两式得

$$\begin{aligned} a &= a_k + acb_k \\ \Rightarrow \quad a_k &= a(1 - cb_k) \quad \cdots\cdots (9)\end{aligned}$$

将(9)式带回(1)式，整理得状态量估计的递推表达式

$$\hat{s}_k = a\hat{s}_{k-1} + b_k(x_k - ac\hat{s}_{k-1}) \quad \cdots\cdots (10)$$

定义“新息”y_k为测量残差

$$y_k = x_k - ac\hat{s}_{k-1} \quad \cdots\cdots (11)$$

此时

$$\begin{aligned} e_k &= s_k - \hat{s}_k = s_k - a\hat{s}_{k-1} - b_k y_k = s_k - a\hat{s}_{k-1} - b_k(cs_k + n_k - ac\hat{s}_{k-1}) \\ &= (1 - cb_k)(s_k - a\hat{s}_{k-1}) - b_k n_k\end{aligned}$$

则

$$P_k = E[e_k^2] = E\left[\left((1-cb_k)(s_k - a\hat{s}_{k-1}) - b_k n_k\right)^2\right] = (1-cb_k)^2 E[(s_k - a\hat{s}_{k-1})^2] + b_k^2 E[n_k^2]$$

其中

$$E[(s_k - a\hat{s}_{k-1})^2] = E\left[\left((as_{k-1} + w_{k-1}) - a\hat{s}_{k-1}\right)^2\right] = a^2 E[(s_{k-1} - \hat{s}_{k-1})^2] + E[w_{k-1}^2]$$

则

$$P_k = (1-cb_k)^2(a^2 P_{k-1} + \sigma_w^2) + b_k^2 \sigma_n^2 \quad \cdots\cdots(12)$$

对其最小化

$$\frac{\partial P_k}{\partial b_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2c(1-cb_k)(a^2 P_{k-1} + \sigma_w^2) + 2b_k \sigma_n^2 = 0$$

解得

$$b_k = \frac{c(a^2 P_{k-1} + \sigma_w^2)}{c^2(a^2 P_{k-1} + \sigma_w^2) + \sigma_n^2} \quad \cdots\cdots(13)$$

以及

$$a^2 P_{k-1} + \sigma_w^2 = \frac{b_k \sigma_n^2}{c(1-cb_k)} \quad \cdots\cdots(14)$$

将(14)式代入(12)式，解得

$$P_k = \frac{1}{c} b_k \sigma_n^2 \quad \cdots\cdots(15)$$

将(15)式中的下标k换成$(k-1)$，代入(13)式可得题目所要求的最优卡尔曼增益b_k的递推式

$$b_k = \frac{c\left(\frac{a^2}{c} b_{k-1}\sigma_n^2 + \sigma_w^2\right)}{c^2\left(\frac{a^2}{c} b_{k-1}\sigma_n^2 + \sigma_w^2\right) + \sigma_n^2} = \frac{a^2 b_{k-1}\sigma_n^2 + c\sigma_w^2}{ca^2 b_{k-1}\sigma_n^2 + c^2\sigma_w^2 + \sigma_n^2} \quad \cdots\cdots(16)$$

【注 1】下面重新整理**标量卡尔曼滤波过程**如下。

卡尔曼滤波器的状态由以下两个量表征：
$\hat{s}_k$：在时刻k的状态的估计
P_k：后验估计误差协方差矩阵，度量估计值的精确程度

卡尔曼滤波的操作包括两个阶段：预测与更新。

I. 预测阶段（依据状态方程与观测方程，由$(k-1)$时刻的最优状态估计去预测k时刻的状态）
预测状态：$\hat{s}_{k|k-1} = a\hat{s}_{k-1}$
预测估计协方差：$P_{k|k-1} = a^2 P_{k-1} + \sigma_w^2$

II. 更新阶段（由k时刻的观测去修正前面作出的预测）
首先计算以下各量。
测量残差：$\tilde{y}_k = x_k - c\hat{s}_{k|k-1}$
测量残差的协方差：$M_k = c^2 P_{k|k-1} + \sigma_n^2$
最优卡尔曼增益：$b_k = cP_{k|k-1}/M_k$

然后用它们来更新滤波器状态变量。
更新的状态估计：$\hat{s}_k = \hat{s}_{k|k-1} + b_k\tilde{y}_k$
更新的协方差估计：$P_k = (1-cb_k)P_{k|k-1}$

【注 2】类似地，**矢量卡尔曼滤波**过程如下。

状态量为矢量$\boldsymbol{s}_k$，状态转移矩阵为$\boldsymbol{F}_k$，状态转移噪声为$\boldsymbol{w}_k$；观测量为矢量$\boldsymbol{z}_k$，观测矩阵为$\boldsymbol{H}_k$，观测噪声为$\boldsymbol{v}_k$。已知

$$\begin{cases} \text{状态方程：} \boldsymbol{s}_k = \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{s}_{k-1} + \boldsymbol{w}_k \\ \text{观测方程：} \boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k \end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{w}_k \sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{Q}_k) \ , \qquad \boldsymbol{v}_k \sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{R}_k)$$

卡尔曼滤波器的状态由以下两个量表征：

$\hat{\boldsymbol{s}}_{k|k}$：在时刻$k$的状态的估计

$\boldsymbol{P}_{k|k}$：后验估计误差协方差矩阵，度量估计值的精确程度

卡尔曼滤波的操作包括两个阶段：预测与更新。

I. 预测阶段（依据状态方程与观测方程，由$(k-1)$时刻的最优状态估计去预测k时刻的状态）

预测状态：$\hat{\boldsymbol{s}}_{k|k-1} = \boldsymbol{F}_k \hat{\boldsymbol{s}}_{k-1|k-1}$

预测估计协方差矩阵：$\boldsymbol{P}_{k|k-1} = \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{P}_{k-1|k-1} \boldsymbol{F}_k^T + \boldsymbol{Q}_k$

II. 更新阶段（由k时刻的观测去修正前面作出的预测）

首先计算以下各量。

测量残差：$\tilde{\boldsymbol{y}}_k = \boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{H}_k \hat{\boldsymbol{s}}_{k|k-1}$

测量残差的协方差矩阵：$\boldsymbol{S}_k = \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{P}_{k|k-1} \boldsymbol{H}_k^T + \boldsymbol{R}_k$

最优卡尔曼增益：$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_{k|k-1} \boldsymbol{H}_k^T \boldsymbol{S}_k^{-1}$

然后用它们来更新滤波器状态变量。

更新的状态估计：$\hat{s}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{s}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k \tilde{\boldsymbol{y}}_k$

更新的协方差矩阵估计：$\boldsymbol{P}_{k|k} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{H}_k) \boldsymbol{P}_{k|k-1}$

基于此，我们还可以推得扩展卡尔曼滤波（EKF）、无迹卡尔曼滤波（UKF）、自适应卡尔曼滤波（AKF）等。

2. 矢量卡尔曼滤波建模

设xOy平面上有一点目标作匀加速直线运动，对状态方程与观测方程进行建模。

【解答】

设点目标在二维空间中的坐标为(x, y)，k到$(k+1)$时刻的时间间隔为ΔT，则匀加速直线运动的建模为

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + x'_k \Delta T \\ x'_{k+1} = x'_k + x''_k \Delta T \\ x''_{k+1} = x''_k + u_1(k) \\ y_{k+1} = y_k + y'_k \Delta T \\ y'_{k+1} = y'_k + y''_k \Delta T \\ y''_{k+1} = y''_k + u_2(k) \end{cases}$$

其中$u_1(k)$、$u_2(k)$为零均值的状态转移白噪声，附加在期望为常量的加速度上。

记状态量为$\boldsymbol{s}_k$，则系统方程为

$$\boldsymbol{s}_{k+1}=\begin{bmatrix}s_1(k+1)\\s_2(k+1)\\s_3(k+1)\\s_4(k+1)\\s_5(k+1)\\s_6(k+1)\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}x_{k+1}\\x'_{k+1}\\x''_{k+1}\\y_{k+1}\\y'_{k+1}\\y''_{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\Delta T&0&0&0&0\\0&1&\Delta T&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&\Delta T&0\\0&0&0&0&1&\Delta T\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1(k)\\s_2(k)\\s_3(k)\\s_4(k)\\s_5(k)\\s_6(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\u_1(k)\\0\\0\\u_2(k)\end{bmatrix}$$

仅观测物体的空间位置，记观测量为$\boldsymbol{z}_k$，则观测方程为

$$\boldsymbol{z}_k=\begin{bmatrix}z_1(k)\\z_2(k)\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}x_k\\y_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1(k)\\s_2(k)\\s_3(k)\\s_4(k)\\s_5(k)\\s_6(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n_1(k)\\n_2(k)\end{bmatrix}$$

其中$n_1(k)$、$n_2(k)$为观测噪声。

下面用矢量与矩阵的形式来表示以上方程，记状态转移矩阵$\boldsymbol{F}_k$与观测矩阵$\boldsymbol{H}_k$分别为

$$\boldsymbol{F}_k=\begin{bmatrix}1&\Delta T&0&0&0&0\\0&1&\Delta T&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&\Delta T&0\\0&0&0&0&1&\Delta T\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}_k=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

状态转移噪声与观测噪声分别记为

$$\boldsymbol{u}_k=[0\quad 0\quad u_1(k)\quad 0\quad 0\quad u_2(k)]^T$$
$$\boldsymbol{n}_k=[n_1(k)\quad n_2(k)]^T$$

其协方差矩阵分别为

$$\boldsymbol{Q}_k=E[\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{u}_k^*]=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&\sigma_x^2&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\sigma_y^2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}_k=E[\boldsymbol{n}_k\boldsymbol{n}_k^*]=\begin{bmatrix}\sigma_A^2&0\\0&\sigma_B^2\end{bmatrix}$$

综上可得该情境下的矢量卡尔曼滤波模型

$$\begin{cases}\text{状态方程：}\ s_k=\boldsymbol{F}_k s_{k-1}+\boldsymbol{u}_k\\\text{观测方程：}\ \boldsymbol{z}_k=\boldsymbol{H}_k s_k+\boldsymbol{n}_k\end{cases}$$

其中独立噪声满足

$$E[\boldsymbol{u}_k]=0,\qquad E[\boldsymbol{n}_k]=0,\qquad E[\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{u}_k^*]=\boldsymbol{Q}_k,\qquad E[\boldsymbol{n}_k\boldsymbol{n}_k^*]=\boldsymbol{R}_k$$

各量含义见前述表达式。

注：对于三维空间中的匀加速直线运动，只需与x、y类似地加上z坐标分量，各方程扩维，形式基本不变。

Recursive Algorithm

Minimum Variance (MV) estimate in the recursive form

$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$: The estimation of the state at time k
$\mathbf{P}_{k|k}$: Measures the accuracy of the estimate

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_k\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k$$
$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$
$$\mathbf{w}_k \sim N(0, \mathbf{Q}_k)$$
$$\mathbf{v}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = cov(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})$$
$$\mathbf{P}_{k|k-1} = cov(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$$
$$\mathbf{S}_k = cov(\tilde{\mathbf{y}}_k)$$

1) Prediction:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_k\mathbf{u}_k \text{ (Predicted State)}$$
$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k \text{ (Predicted Covariance)}$$

2) Update:

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \text{ (Measurement Residual)}$$
$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \text{ (Measurement Residual Covariance)}$$
$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^T\mathbf{S}_k^{-1} \text{ (Optimal Kalman Gain)}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k\tilde{\mathbf{y}}_k \text{ (Updated Predicted State)}$$
$$\mathbf{P}_{k|k} = (I - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)\mathbf{P}_{k|k-1} \text{ (Updated predicted Covariance)}$$ (only when $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^T\mathbf{S}_k^{-1}$)

Minimum Mean Squared Error Estimator

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{k|k} &= \operatorname{cov}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}) \\
&= \operatorname{cov}\left((I - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \mathbf{K}_k\mathbf{v}_k\right) \\
&= (I - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)\operatorname{cov}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(I - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k\operatorname{cov}(\mathbf{v}_k)\mathbf{K}_k^T \\
&= (I - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)\mathbf{P}_{k|k-1}(I - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k\mathbf{R}_k\mathbf{K}_k^T \\
&= \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^T\mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k\mathbf{S}_k\mathbf{K}_k^T
\end{aligned}$$

Minimize $\mathbf{P}_{k|k} = \operatorname{cov}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})$:

$$\frac{d\,\operatorname{tr}(\mathbf{P}_{k|k})}{d\mathbf{K}_k} = -2(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1})^T + 2\mathbf{K}_k\mathbf{S}_k = 0 \longrightarrow \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^T\mathbf{S}_k^{-1}$$

When $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^T\mathbf{S}_k^{-1}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{k|k} &= \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^T\mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k\mathbf{S}_k\mathbf{K}_k^T \\
&= (I - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)\mathbf{P}_{k|k-1}
\end{aligned}$$