信号参数的估计

清华大学电子工程系

杨健

4.估计量的基本性质

什么样的估计是最好的估计?

4.估计量的基本性质

什么样的估计是最好的估计?

无偏估计?

4.估计量的基本性质

什么样的估计是最好的估计?

无偏估计?

仅仅是无偏估计够吗?

4.估计量的基本性质

（讨论待估计参量是非随机的实变量的情况）

无偏估计量

- N维观测矢量 $\boldsymbol{r}=(r_1,r_2,...r_N)^T$ 由N个随机变量构成
- 由观测矢量构成的参数估计量 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$ 也是个随机变量
- 在每次试验中，由观测值算出的估计量的具体数值称为估计值。显然，对重复实验，希望估计值的分布趋向于在参量真值附近集中起来。

4.估计量的基本性质

（讨论待估计参量是非随机的实变量的情况）

无偏估计量

- N维观测矢量 $\boldsymbol{r}=(r_1,r_2,...r_N)^T$ 由N个随机变量构成
- 由观测矢量构成的参数估计量 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$ 也是个随机变量
- 在每次试验中，由观测值算出的估计量的具体数值称为估计值。显然，对重复实验，希望估计值的分布趋向于在参量真值附近集中起来。
- **如果一个估计量的均值等于待估计参数的真值，就说此估计量是无偏估计量**

- 令 $\hat{\alpha}_N$ 代表由N维观测矢量 $\boldsymbol{r}$ 构成的估计量，若 $\hat{\alpha}_N$ 满足

$$E\left\{\hat{\alpha}_N\right\} = \alpha$$

- 则称 $\hat{\alpha}_N$ 为 α 的**无偏估计量**

- 令 $\hat{\alpha}_N$ 代表由N维观测矢量 $\boldsymbol{r}$ 构成的估计量，若 $\hat{\alpha}_N$ 满足

$$E\left\{\hat{\alpha}_N\right\}=\alpha$$

- 则称 $\hat{\alpha}_N$ 为 α 的**无偏估计量**
- 若 $\hat{\alpha}_N$ 满足

$$\lim_{N\to\infty} E\left\{\hat{\alpha}_N\right\}=\alpha$$

- 则称 $\hat{\alpha}_N$ 为**渐近无偏估计量**

- 若 $E\left\{\hat{\alpha}\right\} \neq \alpha$
- 则定义估计的偏差为

$$b(\alpha) = E\left\{\hat{\alpha}\right\} - \alpha$$

- 这样的估计量为有偏估计量
- 若有偏估计量的偏差 $b(\alpha)$ 不依赖于 α ，则可以用简单方法把他去掉，得到一个无偏估计量。这样的有偏估计量称为已知偏差估计量。
- 在一般情况下，估计会有一个依赖未知参量因而不能去掉的偏差

- **一致估计量**
- 当用以构成一种估计量 $\hat{\alpha}_N$ 的观测样本数N增大时，估计量的密度函数在真值附近越来越集中，即方差越来越小，则称该估计量是**一致的**。

- **一致估计量**
- 当用以构成一种估计量 $\hat{\alpha}_N$ 的观测样本数N增大时，估计量的密度函数在真值附近越来越集中，即方差越来越小，则称该估计量是**一致的**。
- 如果当 $N \to \infty$ 时，估计量 $\hat{\alpha}_N$ 的取值依概率收敛于 α ,则称估计量 $\hat{\alpha}_N$ 为 α 的**一致估计量。**

$$\lim_{N \to \infty} p\left(\left|\hat{\alpha}_N - \alpha\right| > \epsilon\right) = 0$$

- **一致估计量**

- 当用以构成一种估计量 $\hat{\alpha}_N$ 的观测样本数N增大时，估计量的密度函数在真值附近越来越集中，即方差越来越小，则称该估计量是一致的。

- 如果当 $N \to \infty$ 时，估计量 $\hat{\alpha}_N$ 的取值依概率收敛于 α ,则称估计量 $\hat{\alpha}_N$ 为 α 的**一致估计量。**

$$\lim_{N \to \infty} p\left(\left|\hat{\alpha}_N - \alpha\right| > \epsilon\right) = 0$$

思考2分钟：渐进估计与一致估计量的区别?

想象一下非一致估计的情形

- **充分估计量**
- 令 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$ 代表由N维观测矢量 $\boldsymbol{r}$ 构成的估计量，若 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$ 可以使得似然函数 $p(\boldsymbol{r}|\alpha)$ 分解成为

$$p(\boldsymbol{r}|\alpha)=p\left(\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})|\alpha\right)h(\boldsymbol{r}),\ h(\boldsymbol{r})\geqslant 0$$

- 其中 $h(\boldsymbol{r})$ 与参数 α 无关
- 则称 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$ 为 α 的**一个充分估计量，或称充分统计量**

- **充分估计量**
- 令 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$ 代表由N维观测矢量 $\boldsymbol{r}$ 构成的估计量，若 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$ 可以使得似然函数 $p(\boldsymbol{r}|\alpha)$ 分解成为

$$p(\boldsymbol{r}|\alpha) = p\left(\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})|\alpha\right)h(\boldsymbol{r}),\ h(\boldsymbol{r}) \geqslant 0$$

- 其中 $h(\boldsymbol{r})$ 与参数 α 无关
- 则称 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$ 为 α 的**一个充分估计量，或称充分统计量**
- 充分估计量的意义是：估计量 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$ 体现了含于观测值 $\boldsymbol{r}$ 中有关参量 α 的全部有用信息。

- **有效估计量**
- 一个无偏估计量的均值等于参数真值，如果估计量的方差越小，则它取其均值附近数值的概率越大，因此总希望估计量方差尽可能小。
- **有效估计量就是具有最小方差的无偏估计量。**

- **有效估计量**
- 一个无偏估计量的均值等于参数真值，如果估计量的方差越小，则它取其均值附近数值的概率越大，因此总希望估计量方差尽可能小。
- **有效估计量就是具有最小方差的无偏估计量。**
- **最小方差是多少?**
- **如何判断？有无简单的判断方法?**

- **有效估计量**
- 一个无偏估计量的均值等于参数真值，如果估计量的方差越小，则它取其均值附近数值的概率越大，因此总希望估计量方差尽可能小。
- **有效估计量就是具有最小方差的无偏估计量。**
- 在正规估计（即所有有关的概率密度函数都满足一般的可微和可积条件并且微分和积分的次序可以交换的估计）的情况下，估计量的方差满足如下的不等式：

$$E\left\{\left(\hat{\alpha}-\alpha\right)^2\right\} \geqslant \frac{1}{\int\left[\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha}\right]^2 p(\boldsymbol{r}|\alpha)\, d\boldsymbol{r}}$$

$$E\left\{\left(\hat{\alpha}-\alpha\right)^{2}\right\} \geqslant \frac{1}{\int\left[\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha}\right]^{2} p(\boldsymbol{r}|\alpha) d\boldsymbol{r}}$$

- 上式称为克拉美-罗（**Cramer-Rao**）不等式。不等式右边是最小方差的界限，称为**克拉美-罗界限。达到这个最小方差限的估计量称为有效估计量。**

$$E\left\{\left(\hat{\alpha}-\alpha\right)^2\right\} \geqslant \frac{1}{\int\left[\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha}\right]^2 p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}}$$

- 上式称为克拉美-罗（**Cramer-Rao**）不等式。不等式右边是最小方差的界限，称为**克拉美-罗界限**。**达到这个最小方差限的估计量称为有效估计量**。一个正规无偏估计量是有效估计量的充分必要条件，即上式等号成立的充要条件为：

$$\boxed{\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha} = k(\alpha)\left(\hat{\alpha}-\alpha\right)}$$

$$E\left\{\left(\hat{\alpha}-\alpha\right)^2\right\} \geqslant \frac{1}{\int\left[\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha}\right]^2 p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}}$$

- 上式称为克拉美-罗（**Cramer-Rao**）不等式。不等式右边是最小方差的界限，称为**克拉美-罗界限。达到这个最小方差限的估计量称为有效估计量。**一个正规无偏估计量是有效估计量的充分必要条件，即上式等号成立的充要条件为：

$$\boxed{\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha} = k(\alpha)\left(\hat{\alpha}-\alpha\right)}$$

- **一个有效估计，其取值在 α 附近的密集程度是最高的。**

- 例（电平估计问题）
- 若接收信号的N次独立观测为 $r_1, r_2, \ldots r_N$

$$r_i = m + n_i \quad i = 1, 2, \ldots N$$

- 每个噪声样本 $n_i, i = 1, 2, \ldots N$ 都是独立同分布的 $N(0, \sigma_n^2)$ 高斯变量，噪声样本与信号样本统计独立
- 其中m为有用信号成分，是待估计的参量
- 分析m的最大似然估计量的基本性质

- **m**的最大似然估计量为观测样本的均值

$$\hat{m} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i = \bar{r}$$

- **m**的最大似然估计量为观测样本的均值

$$\hat{m} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i = \bar{r}$$

- 验证该估计量是无偏估计量

$$E\left\{\hat{m}\right\} = m$$

- **均值为未知参数真值，因此该估计量为无偏估计量**

- **验证该估计量是一致估计量**
- $\hat{m}$ 为高斯变量的线性组合仍为高斯变量

$$\hat{m} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i = \bar{r}$$

- **验证该估计量是一致估计量**
- $\widehat{m}$ 为高斯变量的线性组合仍为高斯变量

$$\widehat{m} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i = \bar{r}$$

- 其均值和方差为

$$E\left\{\widehat{m}\right\} = m$$

$$Var\left\{\widehat{m}\right\} = \frac{\sigma_n^2}{N}$$

- **验证该估计量是一致估计量**
- $\hat{m}$ 为高斯变量的线性组合仍为高斯变量

$$\hat{m} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i = \bar{r}$$

- 其均值和方差为

$$E\{\hat{m}\} = m$$

$$Var\{\hat{m}\} = \frac{\sigma_n^2}{N}$$

- 当观测次数 $N \to \infty$，方差趋于0，因此为**一致无偏估计量**

（？）

- **验证该估计量是充分估计量**
- 似然函数 $p(\boldsymbol{r}|m)$ 为

$$p(\boldsymbol{r}|m) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\frac{(r_i - m)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

- **验证该估计量是充分估计量**
- 似然函数 $p(\boldsymbol{r}|m)$ 为

$$
\begin{aligned}
p(\boldsymbol{r}|m) &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\frac{(r_i - m)^2}{2\sigma_n^2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{-\frac{N}{2}} \exp\left\{\left(-\sum_{i=1}^{N} r_i^2 + 2N\widehat{m}m - Nm^2\right)/2\sigma_n^2\right\}
\end{aligned}
$$

- **验证该估计量是充分估计量**
- 似然函数 $p(\boldsymbol{r}|m)$ 为

$$
\begin{aligned}
p(\boldsymbol{r}|m) &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\frac{(r_i-m)^2}{2\sigma_n^2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{-\frac{N}{2}} \exp\left\{\left(-\sum_{i=1}^{N} r_i^2 + 2N\widehat{m}m - Nm^2\right)/2\sigma_n^2\right\} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{-\frac{N}{2}} \exp\left\{-\frac{N\left(\widehat{m}-m\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\} \exp\left\{\frac{N\widehat{m}^2-\sum r_i^2}{2\sigma_n^2}\right\}
\end{aligned}
$$

- **验证该估计量是充分估计量**
- 似然函数 $p(\boldsymbol{r}|m)$ 为

$$
\begin{aligned}
p(\boldsymbol{r}|m) &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\frac{(r_i-m)^2}{2\sigma_n^2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{-\frac{N}{2}} \exp\left\{\left(-\sum_{i=1}^{N} r_i^2 + 2N\widehat{m}m - Nm^2\right)/2\sigma_n^2\right\} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{-\frac{N}{2}} \exp\left\{-\frac{N\left(\widehat{m}-m\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\} \exp\left\{\frac{N\widehat{m}^2-\sum r_i^2}{2\sigma_n^2}\right\} \\
&= \left(\frac{N}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{N\left(\widehat{m}-m\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\} \left(\frac{2\pi\sigma_n^2}{N}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{-\frac{N}{2}} \exp\left\{\frac{N\widehat{m}^2-\sum r_i^2}{2\sigma_n^2}\right\}
\end{aligned}
$$

- 似然函数可以拆分为两部分

$$p(\boldsymbol{r}|m)=\left(\frac{N}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{N\left(\widehat{m}-m\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\}\left(\frac{2\pi\sigma_n^2}{N}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{-\frac{N}{2}}\exp\left\{\frac{N\widehat{m}^2-\sum r_i^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

- 似然函数可以拆分为两部分

$$p(\boldsymbol{r}|m)=\left(\frac{N}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{N\left(\widehat{m}-m\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\}\left(\frac{2\pi\sigma_n^2}{N}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{-\frac{N}{2}}\exp\left\{\frac{N\widehat{m}^2-\sum r_i^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

- 其中

$$p\left(\widehat{m}(\boldsymbol{r})|m\right)=\left(\frac{N}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{N\left(\widehat{m}-m\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

$$h(\boldsymbol{r})=\left(\frac{2\pi\sigma_n^2}{N}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{-\frac{N}{2}}\exp\left\{\frac{N\widehat{m}^2-\sum r_i^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

- **因此该估计量为一个充分估计量**

- **验证该估计量是有效估计量**
- 似然函数为

$$p(\boldsymbol{r}|m)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{-\frac{N}{2}}\exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\frac{(r_i-m)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

- **验证该估计量是有效估计量**
- 似然函数为

$$p(\boldsymbol{r}|m)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{-\frac{N}{2}}\exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\frac{(r_i-m)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

- 因此

$$\frac{\partial}{\partial m}\ln p(\boldsymbol{r}|m)=\frac{N}{\sigma_n^2}\left(\widehat{m}-m\right)$$

- **满足有效估计量的充要条件，所以该估计量是有效估计量。**

- **验证该估计量是有效估计量**
- 似然函数为

$$p(\boldsymbol{r}|m)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{-\frac{N}{2}}\exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\frac{(r_i-m)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

- 因此

$$\frac{\partial}{\partial m}\ln p(\boldsymbol{r}|m)=\frac{N}{\sigma_n^2}\left(\widehat{m}-m\right)$$

- **满足有效估计量的充要条件，所以该估计量是有效估计量。**
- **有效估计量存在时，它们必定是最大似然估计量。**

5.克拉美-罗不等式

- 在一定条件下，任何估计量都存在一个方差的下限，估计方差不可能小于而只能大于或者等于这个下限，这就是所谓的克拉美-罗不等式，下面对非随机未知信号参量的情况给出证明。

5.克拉美-罗不等式

- 在一定条件下，任何估计量都存在一个方差的下限，估计方差不可能小于而只能大于或者等于这个下限，这就是所谓的克拉美-罗不等式，下面对非随机未知信号参量的情况给出证明。
- 设 $\hat{\alpha}$ 是未知参量 α 的估计量，$\boldsymbol{r}$ 为观测样本。
- 根据似然函数的性质

$$\int p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}=1$$

5.克拉美-罗不等式

- 在一定条件下，任何估计量都存在一个方差的下限，估计方差不可能小于而只能大于或者等于这个下限，这就是所谓的克拉美-罗不等式，下面对非随机未知信号参量的情况给出证明。
- 设 $\hat{\alpha}$ 是未知参量 α 的估计量，$\boldsymbol{r}$ 为观测样本。
- 根据似然函数的性质

$$\int p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r} = 1$$

- 将上式对参量 α 求导

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r} = 0$$

- 交换求导和积分顺序

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}=\int \frac{\partial}{\partial \alpha}p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}$$

- 交换求导和积分顺序

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r} = \int \frac{\partial}{\partial \alpha} p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}$$

- 任意函数f(x)，满足

$$\frac{d}{dx}f(x) = \left[\frac{d}{dx}\ln f(x)\right]f(x)$$

- 交换求导和积分顺序

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}=\int \frac{\partial}{\partial \alpha}p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}$$

- 任意函数f(x)，满足

$$\frac{d}{dx}f(x)=\left[\frac{d}{dx}\ln f(x)\right]f(x)$$

- 则

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}=\int \frac{\partial}{\partial \alpha}p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}$$

- 交换求导和积分顺序

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}=\int \frac{\partial}{\partial \alpha}p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}$$

- 任意函数f(x)，满足

$$\frac{d}{dx}f(x)=\left[\frac{d}{dx}\ln f(x)\right]f(x)$$

- 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha}\int p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}&=\int \frac{\partial}{\partial \alpha}p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}\\&=\int\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)\right]p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

- 交换求导和积分顺序

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}=\int \frac{\partial}{\partial \alpha}p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}$$

- 任意函数f(x)，满足

$$\frac{d}{dx}f(x)=\left[\frac{d}{dx}\ln f(x)\right]f(x)$$

- 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha}\int p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}&=\int \frac{\partial}{\partial \alpha}p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}\\&=\int\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)\right]p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}\\&=E\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)\right]\\&=0\end{aligned}$$

- 两边同乘 α 的任意函数 $\psi(\alpha)$

$$\int \psi(\alpha)\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)\right]p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}=0$$

- 两边同乘α的任意函数 $\psi(\alpha)$

$$\int \psi(\alpha)\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)\right]p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r} = 0$$

- 设估计量 $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$,其均值为 $\psi(\alpha)$

$$E\left[\hat{\alpha}\right] = \int \hat{\alpha}\, p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r} = \psi(\alpha)$$

- 两边同乘 α 的任意函数 $\psi(\alpha)$

$$\int \psi(\alpha)\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)\right]p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}=0$$

- 设估计量 $\hat{\alpha}=\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$,其均值为 $\psi(\alpha)$

$$E\left[\hat{\alpha}\right]=\int \hat{\alpha}\,p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}=\psi(\alpha)$$

- 对 α 求偏导

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}E\left[\hat{\alpha}\right]=\int \hat{\alpha}\frac{\partial\ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial\alpha}p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}=\frac{\partial\psi(\alpha)}{\partial\alpha}$$

- 两边同乘 α 的任意函数 $\psi(\alpha)$

$$\int \psi(\alpha)\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)\right] p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r} = 0$$

- 设估计量 $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$,其均值为 $\psi(\alpha)$

$$E\left[\hat{\alpha}\right] = \int \hat{\alpha}\, p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r} = \psi(\alpha)$$

- 对 α 求偏导

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}E\left[\hat{\alpha}\right] = \int \hat{\alpha}\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha} p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha}$$

- 上面的两式子相减，则

$$\int \left(\hat{\alpha} - \psi(\alpha)\right)\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha} p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha}$$

- 由柯西许瓦兹不等式

$$\left[\int U(x)V(x)dx\right]^2 \leqslant \int U^2(x)dx \cdot \int V^2(x)dx$$

- 由柯西许瓦兹不等式

$$\left[\int U(x)V(x)dx\right]^2 \leqslant \int U^2(x)dx \cdot \int V^2(x)dx$$

- 有

$$\int\left(\hat{\alpha}-\psi(\alpha)\right)^2 p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}\int\left[\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial\alpha}\right]^2 p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}$$

$$\geqslant\left\{\int\left(\hat{\alpha}-\psi(\alpha)\right)\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial\alpha}p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}\right\}^2=\left(\frac{\partial\psi(\alpha)}{\partial\alpha}\right)^2$$

- 由柯西许瓦兹不等式

$$\left[\int U(x)V(x)dx\right]^2 \leqslant \int U^2(x)dx \cdot \int V^2(x)dx$$

- 有

$$\int \left(\hat{\alpha} - \psi(\alpha)\right)^2 p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r} \int \left[\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha}\right]^2 p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}$$

$$\geqslant \left\{\int \left(\hat{\alpha} - \psi(\alpha)\right)\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha} p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}\right\}^2 = \left(\frac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2$$

- 又

$$\left(\sigma_{\hat{\alpha}}\right)^2 = \int \left(\hat{\alpha} - \psi(\alpha)\right)^2 p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}$$

$$E\left[\left(\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2\right] = \int \left[\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha}\right]^2 p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}$$

- 则有

$$\left(\sigma_{\hat{\alpha}}\right)^2 \geqslant \frac{\left(\dfrac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2}{E\left[\left(\dfrac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2\right]}$$

- 则有

$$\left(\sigma_{\hat{\alpha}}\right)^2 \geqslant \frac{\left(\dfrac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2}{E\left[\left(\dfrac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2\right]}$$

- 上式称为克拉美-罗限不等式的普遍形式
- 对于克拉美-罗不等式，等号成立的条件为

$$\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha} = K(\alpha)\left(\hat{\alpha} - \psi(\alpha)\right)$$

- 则有

$$\left(\sigma_{\hat{\alpha}}\right)^2 \geqslant \frac{\left(\dfrac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2}{E\left[\left(\dfrac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2\right]}$$

- 上式称为克拉美-罗限不等式的普遍形式
- 对于克拉美-罗不等式，等号成立的条件为

$$\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha} = K(\alpha)\left(\hat{\alpha} - \psi(\alpha)\right)$$

- 满足此式时，估计量的方差达到最小的界限，所以上式也是有效估计量的充分必要条件

- 最小方差限称为克拉美-罗界限

$$\left(\sigma_{\hat{\alpha}}\right)^2_{min} = \frac{\left(\frac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2}{E\left[\left(\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2\right]}$$

- 最小方差限称为克拉美-罗界限

$$\left(\sigma_{\hat{\alpha}}\right)^2_{min} = \frac{\left(\dfrac{\partial\psi(\alpha)}{\partial\alpha}\right)^2}{E\left[\left(\dfrac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial\alpha}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{\partial\psi(\alpha)}{\partial\alpha}\right)^2}{K^2(\alpha)\left(\sigma_{\hat{\alpha}}\right)^2_{min}}$$

- 最小方差限称为克拉美-罗界限

$$\left(\sigma_{\hat{\alpha}}\right)^2_{min} = \frac{\left(\frac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2}{E\left[\left(\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2}{K^2(\alpha)\left(\sigma_{\hat{\alpha}}\right)^2_{min}}$$

$$\left(\sigma_{\hat{\alpha}}\right)^2_{min} = \left|\frac{\frac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha}}{K(\alpha)}\right|$$

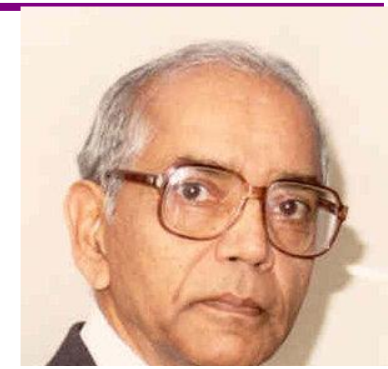
H. Crame

瑞典著名数学家Harald Cramér(1893-1985)在概率论、数理统计、保险精算数学等领域均作出了卓越贡献，被誉为现代概率统计学界的开拓者和奠基人之一。从1912至1982年，Cramér的学术生涯长达70年，多个猜想、定理和不等式均以他的名字命名，他一生中撰写了四本英文专著，还撰写了110篇英、法、德等文字及38篇瑞典文的学术论文和报告。

Crame(左）
与许宝騄

Crame(右）
与钟开莱

C. R. Rao



美国科学院院士，英国皇家统计学会会员， 当今仍健在的国际上最伟大的统计学家之一，他于1920 年9 月10 日出生于印度的一个贵族家庭，1940 年获印度安德拉大学数学学士学位，1943年在印度统计研究所取得统计学硕士学位，随后赴英国剑桥大学师从现代统计学的奠基人R.A.费歇(Fisher)教授，并于1948年获得剑桥大学博士学位。

在青年时期就取得了许多成就，如著名的科拉姆-劳信息不等式(Cramer-Rao)是他1943 年完成、1945 年正式发表的。迄今，C.R. 劳教授已著书14 部，发表学术论文350 余篇，共获得包括英国、印度、俄罗斯、希腊、美国、秘鲁、芬兰、菲律宾、瑞士、波兰、斯洛维亚、德国、西班牙以及加拿大等16 个国家的大学以及研究机构的荣誉博士学位27 个，先后被选为美国科学院、英国皇家学会等31 个国际著名的科学和统计学研究机构的院士、理事或荣誉院士，是第三世界科学院的奠基人之一。

C.R. 劳教授已经获得包括美国统计协会、英国皇家统计学会以及印度科学院的10 余项重大统计学大奖。2002 年C.R. 劳教授又获得美国总统科学大奖，表彰他在“统计学理论的建立，多元统计分析方法及其应用方面所做的开拓性贡献，其丰富了物理学，生物学，数学，经济学和工程科学的发展”。

C.R. 劳教授对统计学发展的杰出贡献主要表现在估计理论、渐进推断、多元分析、概率分布的设定、组合分析等等诸多方面。为改进并推进费歇的一项工作，C.R. 劳教授1945 年在他的一篇文章中提出了二阶效的概念，其奠定了27 年后将微分几何学引入统计学中的这一重要分支的基础。

- 例
- 若接收信号的N次独立观测为 $r_1, r_2, \ldots r_N$

$$r_i = m + n_i \quad i = 1, 2, \ldots N$$

- 每个噪声样本 $n_i, i = 1, 2, \ldots N$ 都是独立同分布的 $N(0, \sigma_n^2)$ 高斯变量，噪声样本与信号样本统计独立
- 其中m为有用信号成分，是待估计的参量
- 求m的估计量的最小方差限

- 似然函数为

$$p(\boldsymbol{r}|m)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{N/2}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{N}\frac{(r_i-m)^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

- 似然函数为

$$p(\boldsymbol{r}|m)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{N/2}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{N}\frac{(r_i-m)^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

- 似然函数取对数并求偏导

$$\frac{\partial}{\partial m}\ln p(\boldsymbol{r}|m)=\sum_{i=1}^{N}(r_i-m)/\sigma_n^2$$

- 似然函数为

$$p(\boldsymbol{r}|m)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{N/2}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{N}\frac{(r_i-m)^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

- 似然函数取对数并求偏导

$$\frac{\partial}{\partial m}\ln p(\boldsymbol{r}|m)=\sum_{i=1}^{N}(r_i-m)/\sigma_n^2$$

- 即

$$\frac{\partial}{\partial m}\ln p(\boldsymbol{r}|m)=\frac{N}{\sigma_n^2}\left(\widehat{m}-m\right)$$

- 似然函数为

$$p(\boldsymbol{r}|m)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{N/2}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{N}\frac{(r_i-m)^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

- 似然函数取对数并求偏导

$$\frac{\partial}{\partial m}\ln p(\boldsymbol{r}|m)=\sum_{i=1}^{N}(r_i-m)/\sigma_n^2$$

- 即

$$\frac{\partial}{\partial m}\ln p(\boldsymbol{r}|m)=\frac{N}{\sigma_n^2}\left(\widehat{m}-m\right)$$

- 因此

$$K(m)=\frac{N}{\sigma_n^2} \qquad \psi(m)=m$$

- 故其克拉美-罗界限为

$$\left(\sigma_{\widehat{m}}\right)^2_{min} = \frac{\frac{\partial \psi(m)}{\partial m}}{K(m)} = \frac{1}{\frac{N}{\sigma_n^2}} = \frac{\sigma_n^2}{N}$$

- 故其克拉美-罗界限为

$$\left(\sigma_{\widehat{m}}\right)^2_{min} = \frac{\frac{\partial \psi(m)}{\partial m}}{K(m)} = \frac{1}{\frac{N}{\sigma_n^2}} = \frac{\sigma_n^2}{N}$$

- 另一方面，可以看出估计量

$$\widehat{m} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i = \bar{r}$$

- 故其克拉美-罗界限为

$$\left(\sigma_{\widehat{m}}\right)^2_{min} = \frac{\frac{\partial\psi(m)}{\partial m}}{K(m)} = \frac{1}{\frac{N}{\sigma_n^2}} = \frac{\sigma_n^2}{N}$$

- 另一方面，可以看出估计量

$$\widehat{m} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i = \bar{r}$$

- 其方差为 $\frac{\sigma_n^2}{N}$ ，**达到了克拉美-罗界限，因此是有效估计量**

克拉美-罗不等式的另一形式

- 由之前的推导可知

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}=\int\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)\right]p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}=0$$

克拉美-罗不等式的另一形式

- 由之前的推导可知

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}=\int\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)\right]p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}=0$$

- 再对参数 α 求偏导

$$\int\frac{\partial^2\ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial\alpha^2}p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}+\int\left(\frac{\partial\ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial\alpha}\right)^2p(\boldsymbol{r}|\alpha)=0$$

克拉美-罗不等式的另一形式

- 由之前的推导可知

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}=\int\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)\right]p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}=0$$

- 再对参数 α 求偏导

$$\int\frac{\partial^2\ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial\alpha^2}p(\boldsymbol{r}|\alpha)d\boldsymbol{r}+\int\left(\frac{\partial\ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial\alpha}\right)^2p(\boldsymbol{r}|\alpha)=0$$

- 即

$$E\left[\left(\frac{\partial\ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial\alpha}\right)^2\right]=-E\left[\frac{\partial^2\ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial\alpha^2}\right]$$

- 代入克拉美-罗不等式

$$\left(\sigma_{\hat{\alpha}}\right)^2 \geqslant \frac{\left(\dfrac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2}{E\left[\left(\dfrac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2\right]}$$

- 代入克拉美-罗不等式

$$\left(\sigma_{\hat{\alpha}}\right)^2 \geqslant \frac{\left(\dfrac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2}{E\left[\left(\dfrac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2\right]}$$

- 可得克拉美-罗不等式的另一形式

$$\left(\sigma_{\hat{\alpha}}\right)^2 \geqslant \frac{\left(\dfrac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2}{-E\left[\dfrac{\partial^2 \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha^2}\right]}$$

- 代入克拉美-罗不等式

$$\left(\sigma_{\hat{\alpha}}\right)^2 \geqslant \frac{\left(\dfrac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2}{E\left[\left(\dfrac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2\right]}$$

- 可得克拉美-罗不等式的另一形式

$$\left(\sigma_{\hat{\alpha}}\right)^2 \geqslant \frac{\left(\dfrac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2}{-E\left[\dfrac{\partial^2 \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha^2}\right]}$$

- 对于无偏估计量 $\psi(\alpha)=\alpha$,克拉美-罗不等式成为

$$\left(\sigma_{\hat{\alpha}}\right)^2 \geqslant \frac{1}{E\left[\left(\dfrac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2\right]} = \frac{-1}{E\left[\dfrac{\partial^2 \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha^2}\right]}$$

有效估计量和最大似然估计量的关系

- 无偏的有效估计量 $\hat{\alpha}$ 满足

$$\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha} = K(\alpha)\left(\hat{\alpha} - \psi(\alpha)\right)$$

有效估计量和最大似然估计量的关系

- 无偏的有效估计量 $\hat{\alpha}$ 满足

$$\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha} = K(\alpha)\left(\hat{\alpha} - \psi(\alpha)\right)$$

- 最大似然估计量 $\hat{\alpha}_1$ 满足

$$\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\hat{\alpha}_1} = 0$$

有效估计量和最大似然估计量的关系

- 无偏的有效估计量 $\hat{\alpha}$ 满足

$$\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha}=K(\alpha)\left(\hat{\alpha}-\psi(\alpha)\right)$$

- 最大似然估计量 $\hat{\alpha}_1$ 满足

$$\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=\hat{\alpha}_1}=0$$

- 因此，无偏有效估计量如果存在的话，一定是最大似然估计量。反之不然，最大似然估计量不一定是有效估计量。

有效估计量和最大似然估计量的关系

- 无偏的有效估计量 $\hat{\alpha}$ 满足

$$\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha} = K(\alpha)\left(\hat{\alpha} - \psi(\alpha)\right)$$

- 最大似然估计量 $\hat{\alpha}_1$ 满足

$$\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\hat{\alpha}_1} = 0$$

- 因此，无偏有效估计量如果存在的话，一定是最大似然估计量。反之不然，最大似然估计量不一定是有效估计量。

有效估计量的性质

- 1. 达到最小方差即克拉美-罗界限
- 2. 无偏的有效估计量一定是最大似然估计量
- 3. 有效估计量一定是充分估计量（？考虑5分钟）

- **充分估计量**
- 令 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$ 代表由N维观测矢量 $\boldsymbol{r}$ 构成的估计量，若 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$ 可以使得似然函数 $p(\boldsymbol{r}|\alpha)$ 分解成为

$$p(\boldsymbol{r}|\alpha)=p\left(\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})|\alpha\right)h(\boldsymbol{r}),\ h(\boldsymbol{r})\geqslant 0$$

- 其中 $h(\boldsymbol{r})$ 与参数 α 无关
- 则称 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$ 为 α 的**一个充分估计量，或称充分统计量**

- **充分估计量**
- 令 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$ 代表由N维观测矢量 $\boldsymbol{r}$ 构成的估计量，若 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$ 可以使得似然函数 $p(\boldsymbol{r}|\alpha)$ 分解成为

$$p(\boldsymbol{r}|\alpha)=p\left(\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})|\alpha\right)h(\boldsymbol{r}),\ h(\boldsymbol{r})\geqslant 0$$

- 其中 $h(\boldsymbol{r})$ 与参数 α 无关
- 则称 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$ 为 α 的**一个充分估计量，或称充分统计量**

$$\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial\alpha}=K(\alpha)\left(\hat{\alpha}-\psi(\alpha)\right)$$

- **充分估计量**
- 令 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$ 代表由N维观测矢量 $\boldsymbol{r}$ 构成的估计量，若 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$ 可以使得似然函数 $p(\boldsymbol{r}|\alpha)$ 分解成为

$$p(\boldsymbol{r}|\alpha) = p\left(\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})|\alpha\right)h(\boldsymbol{r}),\ h(\boldsymbol{r}) \geqslant 0$$

- 其中 $h(\boldsymbol{r})$ 与参数 α 无关
- 则称 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$ 为 α 的**一个充分估计量，或称充分统计量**

$$\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha} = K(\alpha)\left(\hat{\alpha} - \psi(\alpha)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} p(\mathbf{r} \mid \alpha) = \int K(\alpha)(\hat{\alpha} - \alpha)$$

- **充分估计量**
- 令 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$ 代表由N维观测矢量 $\boldsymbol{r}$ 构成的估计量，若 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$ 可以使得似然函数 $p(\boldsymbol{r}|\alpha)$ 分解成为

$$p(\boldsymbol{r}|\alpha)=p\left(\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})|\alpha\right)h(\boldsymbol{r}),\ h(\boldsymbol{r})\geqslant 0$$

- 其中 $h(\boldsymbol{r})$ 与参数 α 无关
- 则称 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{r})$ 为 α 的**一个充分估计量，或称充分统计量**

$$\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{r}|\alpha)}{\partial \alpha}=K(\alpha)\left(\hat{\alpha}-\psi(\alpha)\right)$$

$$\ln p(\mathbf{r}\,|\,\alpha)=\int K(\alpha)(\hat{\alpha}-\alpha)+\mathrm{C}$$

$$p(\mathbf{r}\,|\,\alpha)=\exp\left(\int K(\alpha)(\hat{\alpha}-\alpha)\right)h(\mathbf{r})=\mathrm{p}(\hat{\alpha}\,|\,\mathbf{r})h(\mathbf{r})\ A$$

$$A=\int \exp\left(\int K(\alpha)(\hat{\alpha}-\alpha)\right)d\mathbf{r}$$

复习

- 估计量的基本性质

  无偏　渐进无偏

  充分估计量

  一致估计量

  有效估计量

  克拉美-罗不等式

谢谢大家！