苏泓源　2019010448　统计信号 HW3

证明：复数柯西-施瓦茨不等式

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2},\ f(x).\ g(x) \in \mathbb{C}$$

取等充要条件为 $f(x) = tg^*(x)$

首先证明，对实数情形的积分形式的柯西-施瓦茨不等式

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

考虑积分 $\int_a^b |f(x)-tg(x)|^2 dx \geq 0$

$$\Rightarrow \quad t^2\int_a^b |g(x)|^2 dx - 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b |f(x)|^2 dx \geq 0$$

二次函数 $\Delta \le 0$，即可得实数形式，等号在 $f(x)=tg(x)$ 时取.

对复数情形，证明三角不等式：$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

由积分定义

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^n f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\right|$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \left|f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\right|$$

由复数三角不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\right|$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\right| \le \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\right|$$

$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$，等号成立时 $\arg f(x) \equiv \theta$。

将上式中 $f(x)$ 替为 $f(x)g(x)$，得

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)g(x)|dx = \int_a^b |f(x)||g(x)|dx$$

$$\le \left(\int_a^b |f(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b |g(x)|^2dx\right.$$

即得证．取等条件为

$$f(x) = tg^*(t)$$