统计信号处理基础 第 05 次作业

许凌玮 2018011084

1. 电平估计问题

接收信号的N次独立观测为$r_1, r_2, \dots, r_N$，其中

$$r_i = A + n_i \qquad (i = 1,2,\cdots,N)$$

每个噪声样本都是独立同分布的高斯噪声$n_i \sim N(0,\sigma_n^2)$，噪声与信号样本统计独立。A为有用信号，即待估计参量。试给出待估计量A在不同先验概率分布情况下的 MAP 估计量：

(1) 均匀分布 $A \sim U(-A_0, A_0)$

(2) 高斯分布 $A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$

【解答】

(1) 均匀分布 $\boldsymbol{A \sim U(-A_0, A_0)}$

$$P(A) = \begin{cases} \dfrac{1}{2A_0} & ,|A| \le A_0 \\ 0 & ,|A| > A_0 \end{cases}$$

先验概率为

$$P(\boldsymbol{r}|A) = \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{N/2}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^N (r_i - A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

由于

$$\sum_{i=1}^N (r_i - A)^2 = \sum_{i=1}^N r_i^2 + NA^2 - 2N\bar{r}A = N(A-\bar{r})^2 - Nr^2 + NA^2 = N(A-\bar{r})^2 + K_1$$

其中

$$\bar{r} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N r_i$$

因此先验概率可化简为

$$P(\boldsymbol{r}|A) = \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{N/2}} \exp\left(-\frac{N(A-\bar{r})^2 + K_1}{2\sigma_n^2}\right) = K_2 \exp\left(-\frac{N(A-\bar{r})^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

再求后验概率，当$|A| \le A_0$时

$$P(A|\boldsymbol{r}) = \frac{P(\boldsymbol{r}|A)P(A)}{\int_{\mathbb{R}} P(\boldsymbol{r}|A)P(A)dA} = \frac{K_2 \exp\left(-\frac{N(A-\bar{r})^2}{2\sigma_n^2}\right) \cdot \frac{1}{2A_0}}{\int_{-A_0}^{A_0} K_2 \exp\left(-\frac{N(A-\bar{r})^2}{2\sigma_n^2}\right) \cdot \frac{1}{2A_0} dA} = K_3 \exp\left(-\frac{N(A-\bar{r})^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

当$|A| > A_0$时，有$P(A|\boldsymbol{r}) = 0$，因此

$$P(A|\boldsymbol{r}) = \begin{cases} K_3 \exp\left(-\dfrac{N(A-\bar{r})^2}{2\sigma_n^2}\right) & ,|A| \le A_0 \\ 0 & ,|A| > A_0 \end{cases}$$

其中$K_3 > 0$。

因此 MAP 估计量为

$$\hat{A} = \underset{A}{\operatorname{argmax}} P(A|r) = \underset{A\ s.t. |A| \le A_0}{\operatorname{argmax}} \left\{\exp\left(-\frac{N(A-\bar{r})^2}{2\sigma_n^2}\right)\right\} = \underset{A\ s.t. |A| \le A_0}{\operatorname{argmin}} \{(A-\bar{r})^2\}$$

可得

$$\hat{A} = \begin{cases} -A_0 & ,\bar{r} < A_0 \\ \bar{r} & ,|\bar{r}| \le A_0 \\ A_0 & ,\bar{r} > A_0 \end{cases}$$

(2) 高斯分布 $\boldsymbol{A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)}$

$$P(A)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A}\exp\left(-\frac{(A-\mu_A)^2}{2\sigma_A^2}\right)$$

先验概率为

$$P(\boldsymbol{r}|A)=\frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{N/2}}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^N(r_i-A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

则后验概率仍为高斯分布

$$P(A|\boldsymbol{r})=\frac{P(\boldsymbol{r}|A)P(A)}{\int_{\mathbb{R}}P(\boldsymbol{r}|A)P(A)dA}=K_1\exp\left(-\frac{(A-\mu_A)^2}{2\sigma_A^2}-\frac{\sum_{i=1}^N(r_i-A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$=K_1\exp\left(-\frac{\sigma_n^2(A-\mu_A)^2+\sigma_A^2\sum_{i=1}^N(r_i-A)^2}{2\sigma_n^2\sigma_A^2}\right)$$

其中

$$\begin{aligned}\text{分子}&=(\sigma_n^2+\sigma_A^2N)A^2-(2\sigma_n^2\mu_A+2\sigma_A^2N\bar{r})A+\text{ 不含 }A\text{ 的常数}\\&=(\sigma_n^2+\sigma_A^2N)\left(A-\frac{\sigma_n^2\mu_A+N\sigma_A^2\bar{r}}{\sigma_n^2+N\sigma_A^2}\right)^2+\text{ 不含 }A\text{ 的常数}\end{aligned}$$

因此

$$P(A|\boldsymbol{r})=K_2\exp\left(-\frac{(A-\mu_{A|r})^2}{2\sigma_{A|r}^2}\right)$$

其中

$$\sigma_{A|r}^2=\frac{\sigma_A^2\sigma_n^2}{\sigma_n^2+\sigma_A^2N}=\frac{1}{\dfrac{1}{\sigma_A^2}+\dfrac{N}{\sigma_n^2}}$$

$$\mu_{A|r}=\frac{\sigma_n^2\mu_A+N\sigma_A^2\bar{r}}{\sigma_n^2+N\sigma_A^2}=\frac{\dfrac{\sigma_n^2}{N}}{\dfrac{\sigma_n^2}{N}+\sigma_A^2}\mu_A+\frac{\sigma_A^2}{\dfrac{\sigma_n^2}{N}+\sigma_A^2}\bar{r}$$

因此 MAP 估计量为

$$\hat{A}=\underset{A}{\operatorname{argmax}}P(A|r)=\underset{A}{\operatorname{argmin}}\{(A-\mu_{A|r})^2\}=\mu_{A|r}=\frac{\sigma_n^2\mu_A+N\sigma_A^2\bar{r}}{\sigma_n^2+N\sigma_A^2}$$