统计信号处理基础 第 02 次作业

许凌玮 2018011084

1. 设有下列两种假设：

$$\begin{cases} H_0\text{：}x = n \\ H_1\text{：}x = a + n \end{cases}$$

其中$a > 0$为常数，$n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$。如果要求$P_F = \alpha$，试设计相应的最佳接收机，确定其检测概率$P_D$，并画出$P_D \sim SNR = a/\sigma$或$(a/\sigma)^2$的关系曲线。

【解答】

两种假设下的概率密度函数分别为

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

先验概率与代价函数均未知，且虚警概率给定，因此应用 NP 准则，可得似然比

$$\lambda(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \exp\left(\frac{2ax - a^2}{2\sigma^2}\right) \gtrless_{H_0}^{H_1} \lambda_0$$

则判别规则为

$$x \gtrless_{H_0}^{H_1} \frac{a}{2} + \frac{\sigma^2}{a}\ln\lambda_0 \triangleq V_T$$

由$P_F = \alpha$可确定门限

$$P_F = \int_{V_T}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx = Q\left(\frac{V_T}{\sigma}\right) = \alpha \quad \Rightarrow \quad V_T = \sigma Q^{-1}(\alpha)$$

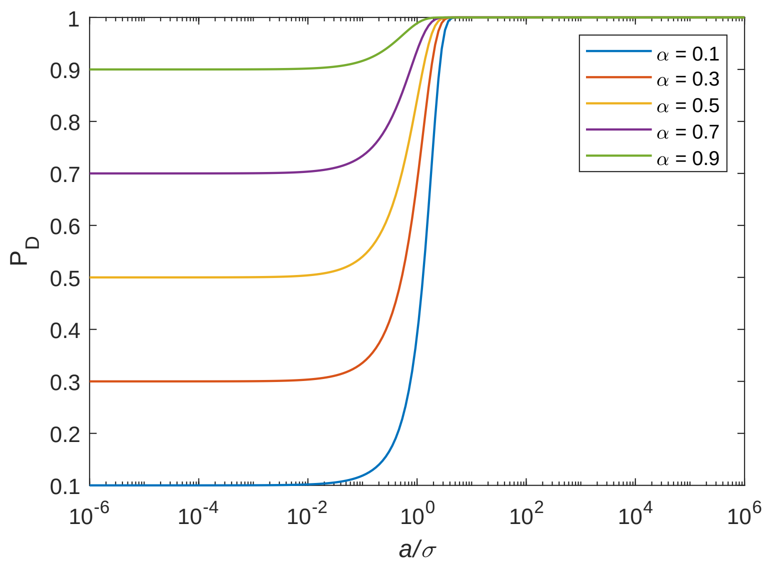
因此最佳接收机（NP 准则）的判别规则为

$$x \gtrless_{H_0}^{H_1} \sigma Q^{-1}(\alpha)$$

检测概率为

$$P_D = \int_{D_1} p_1(x)dx = \int_{V_T}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)dx = Q\left(\frac{V_T - a}{\sigma}\right) = Q\left(Q^{-1}(\alpha) - \frac{a}{\sigma}\right)$$

$P_D \sim SNR = a/\sigma$的关系曲线（α不同取值下）如下图所示



2. 设有下列两种假设：

$$\begin{cases} H_0: \ x = n \\ H_1: \ x = a + n \end{cases}$$

其中$a > 0$为常数。假定$C_{00} = C_{11} = 1, C_{10} = 10, C_{01} = 100$，$n \sim \mathcal{N}(0,1)$，试求：

1) 设计相应的最佳接收机；

2) $a = 3$时ξ_0的值，并画出$\bar{C}_{\min}(\xi)$的曲线。（此处是指求先验概率的估计值）

【解答】

1) 两种假设下的概率密度函数分别为

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-a)^2\right)$$

似然比为

$$\lambda(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \exp\left(ax - \frac{1}{2}a^2\right)$$

先验概率未知，代价函数已知，因此应用极小极大准则。猜测先验概率为$P(H_0) = s$，此时判决准则为

$$\lambda(x) = \exp\left(ax - \frac{1}{2}a^2\right) \gtrless_{H_0}^{H_1} \frac{s(C_{10} - C_{00})}{(1-s)(C_{01} - C_{11})} = \frac{s}{11(1-s)}$$

解得

$$x \gtrless_{H_0}^{H_1} \frac{1}{a} \ln\left(\frac{s}{11(1-s)}\right) + \frac{a}{2} \triangleq V_T$$

虚警概率和检测概率分别为

$$P_F(s) = \int_{D_1} p_0(x)dx = \int_{V_T}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx = Q(V_T)$$

$$P_D(s) = \int_{D_1} p_1(x)dx = \int_{V_T}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-a)^2\right) dx = Q(V_T - a)$$

平均代价为

$$\begin{aligned} C_{\min}(\xi, s) &= C_{00}P(H_0)(1-P_F) + C_{10}P(H_0)P_F + C_{01}P(H_1)(1-P_D) + C_{11}P(H_1)P_D \\ &= \xi\big(1 - P_F(s)\big) + 10\xi P_F(s) + 100(1-\xi)\big(1 - P_D(s)\big) + (1-\xi)P_D(s) \\ &= 100 - 99\xi + 9\xi Q(V_T) - 99(1-\xi)Q(V_T - a) \end{aligned}$$

极小极大方程

$$C_{\min}(0, s) = C_{\min}(1, s) \quad \Rightarrow \quad 100 - 99Q(V_T - a) = 1 + 9Q(V_T)$$

因此V_T为方程

$$Q(V_T) + 11Q(V_T - a) - 11 = 0$$

的解。对应的接收机判别规则为

$$x \gtrless_{H_0}^{H_1} V_T$$

2) $a = 3$时极小极大方程化为

$$Q(V_T) + 11Q(V_T - 3) - 11 = 0$$

数值解为

$$V_T = 0.883$$

$$V_T=\frac{1}{a}\ln\left(\frac{s^*}{11(1-s^*)}\right)+\frac{a}{2}=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{s^*}{11(1-s^*)}\right)+\frac{3}{2}\quad\Rightarrow\quad s^*=\left[1+\frac{1}{11}\exp\left(-3V_T+\frac{9}{2}\right)\right]^{-1}=0.633$$

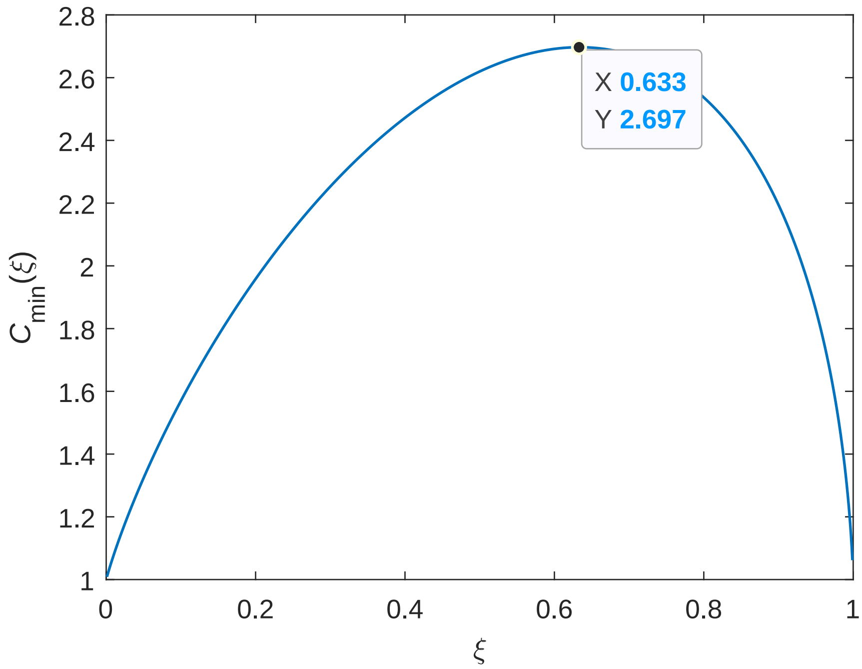
因此对先验概率的估计值为

$$\xi_0=s^*=0.633$$

$\bar{C}_{\min}(\xi)$的曲线方程为

$$\bar{C}_{\min}(\xi)=C_{\min}(\xi,s)|_{s=\xi}=[100-99\xi+9\xi Q(V_T)-99(1-\xi)Q(V_T-3)]|_{s=\xi}$$
$$=100-99\xi+9\xi Q\left(\frac{1}{3}\ln\left(\frac{\xi}{11(1-\xi)}\right)+\frac{3}{2}\right)-99(1-\xi)Q\left(\frac{1}{3}\ln\left(\frac{\xi}{11(1-\xi)}\right)-\frac{3}{2}\right)$$

因此$\bar{C}_{\min}(\xi)$曲线如下图所示



3. 若接收信号的m次独立观测为$r_1,r_2,\dots,r_m$，每个噪声样本$n_i,i=1,2,\dots,m$都是独立同分布的拉普拉斯噪声，噪声样本与信号样本统计独立

$$p(n_i)=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma_n}\exp\left\{-\frac{\sqrt{2}|n_i|}{\sigma_n}\right\}$$

多样本的二元假设检验

$$\begin{cases}H_1:\ r_i=A+n_i & i=1,2,\dots,m\\ H_0:\ r_i=n_i & i=1,2,\dots,m\end{cases}$$

其中$A=-10$。

给出似然比检验最佳检测器的形式。

【解答】

两种假设下r_i的概率密度函数为

$$p_1(r_i)=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma_n}\exp\left\{-\frac{\sqrt{2}|r_i-A|}{\sigma_n}\right\},\qquad p_0(r_i)=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma_n}\exp\left\{-\frac{\sqrt{2}|r_i|}{\sigma_n}\right\}$$

由于噪声是统计独立的，所以各个r_i也是统计独立的。样本矢量的概率密度分布函数为

$$p_1(\boldsymbol{r})=\prod_{i=1}^{m}p_1(r_i)=\left(\frac{1}{2\sigma_n^2}\right)^{m/2}\exp\left\{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_n}\sum_{i=1}^{m}|r_i-A|\right\}$$
$$p_0(\boldsymbol{r})=\prod_{i=1}^{m}p_0(r_i)=\left(\frac{1}{2\sigma_n^2}\right)^{\mathrm{m}/2}\exp\left\{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_n}\sum_{i=1}^{m}|r_i|\right\}$$

对数似然比为

$$\ln(\lambda(\boldsymbol{r})) = \ln\left(\frac{p_1(\boldsymbol{r})}{p_0(\boldsymbol{r})}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_n}\sum_{i=1}^{m}(|r_i| - |r_i - A|)$$

设样本总数为N，$r_i < A$的样本数为N_1，$\mathrm{A} < r_i < 0$的样本数为N_2，$r_i > 0$的样本数为N_3，则对数似然比为

$$\ln\big(\lambda(\boldsymbol{r})\big) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_n}\left[N_1(-A) + N_2 A - 2\sum_{A<r_i<0} r_i + N_3 A\right] = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_n}\left[NA - 2N_1 A - 2\sum_{A<r_i<0} r_i\right]$$

因此判决规则为

$$\frac{\sqrt{2}}{\sigma_n}\left[NA - 2N_1 A - 2\sum_{A<r_i<0} r_i\right] \gtrless_{H_0}^{H_1} \ln(\lambda_0) \quad \Rightarrow \quad N_1 A + \sum_{A<r_i<0} r_i \gtrless_{H_1}^{H_0} \frac{NA}{2} - \frac{\sigma_n}{2\sqrt{2}}\ln(\lambda_0)$$

判决过程为：对小于A的样本值计数，对在A和0之间的样本值求和，再通过特定门限比较作出判决。