第二章. 信号的统计检测理论

清华大学电子工程系

杨健

上次上课内容回顾：

1 统计信号处理的发展概况

2 几个基本概念和基本方法：

假设检验、先验概率、虚警概率、检测概率、似然函数、似然比

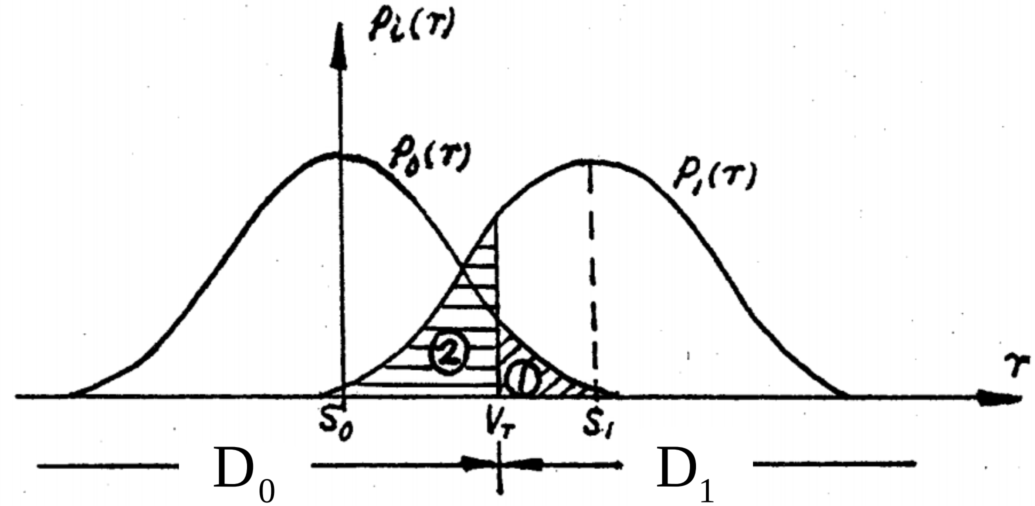
最大后验概率准则、最小错误概率准则

（二者等价）

贝叶斯准则

清楚知道每种检测准则的前提条件

3 记住一张图



4 用统计信号处理的观点去思考问题和解释现象

（如何用最大后验概率准则和贝叶斯准则去分析这次疫情的诊断）

假如代价因子知道，先验概率不知道，该如何处理?

1939年瓦尔德提出了极小极大风险准则

猜测先验概率 $P'(H_0)=x$

$$\frac{p_1(r)}{p_0(r)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{x(C_{10}-C_{00})}{(1-x)(C_{01}-C_{11})}$$

$$\begin{aligned} C = &C_{00}P(H_0)(1-P_F)+C_{10}P(H_0)P_F \\ &+C_{01}P(H_1)P_M+C_{11}P(H_1)(1-P_M) \end{aligned}$$

$$v=v(x)$$

猜测先验概率 $P'(H_0) = x$

$$\frac{p_1(r)}{p_0(r)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{x(C_{10} - C_{00})}{(1-x)(C_{01} - C_{11})}$$

$$\boxed{\begin{aligned} C = {} & C_{00}P(H_0)(1-P_F) + C_{10}P(H_0)P_F \\ & + C_{01}P(H_1)P_M + C_{11}P(H_1)(1-P_M) \end{aligned}}$$

$$v = v(x)$$

实际先验概率 $P(H_0) = \xi$

平均代价是关于 ξ, x 的函数

$$\begin{aligned} C(\xi,x) = {} & \xi C_{00}(1 - P_F(v)) + \xi C_{10}P_F(v) \\ & + (1-\xi)C_{01}P_M(v) + (1-\xi)C_{11}(1 - P_M(v)) \end{aligned}$$

猜测先验概率 $P'(H_0) = x$

$$\frac{p_1(r)}{p_0(r)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{x(C_{10} - C_{00})}{(1-x)(C_{01} - C_{11})}$$

$$C = C_{00}P(H_0)(1 - P_F) + C_{10}P(H_0)P_F + C_{01}P(H_1)P_M + C_{11}P(H_1)(1 - P_M)$$

$$v = v(x)$$

实际先验概率 $P(H_0) = \xi$

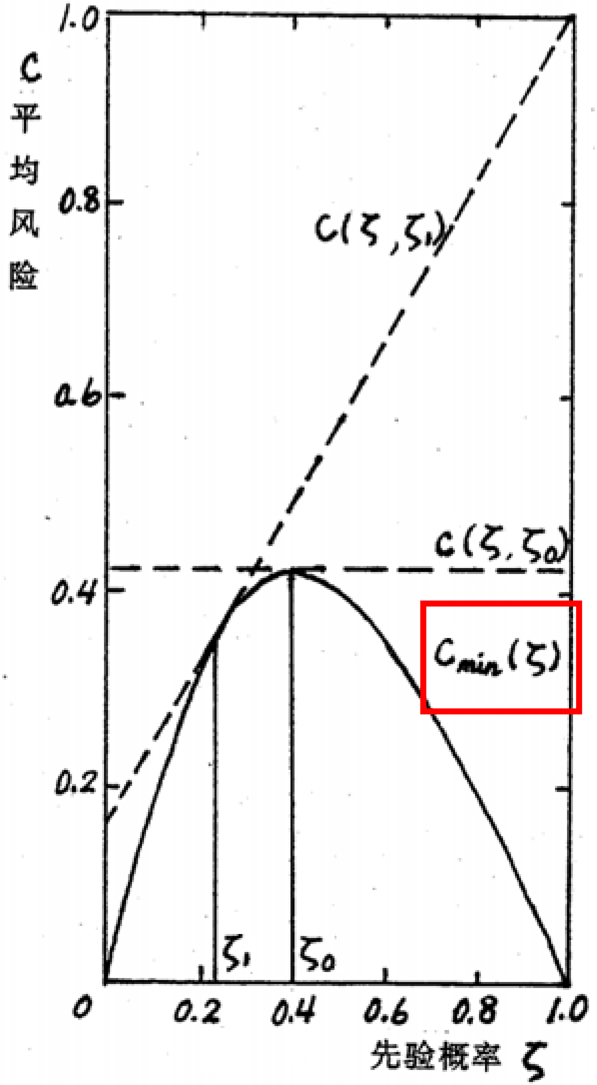
平均代价是关于 $\xi,\ x$ 的函数

$$C(\xi, x) = \xi C_{00}(1 - P_F(v)) + \xi C_{10}P_F(v) + (1-\xi)C_{01}P_M(v) + (1-\xi)C_{11}(1 - P_M(v))$$

当 $x = \xi$ 时，就是贝叶斯准则的情况

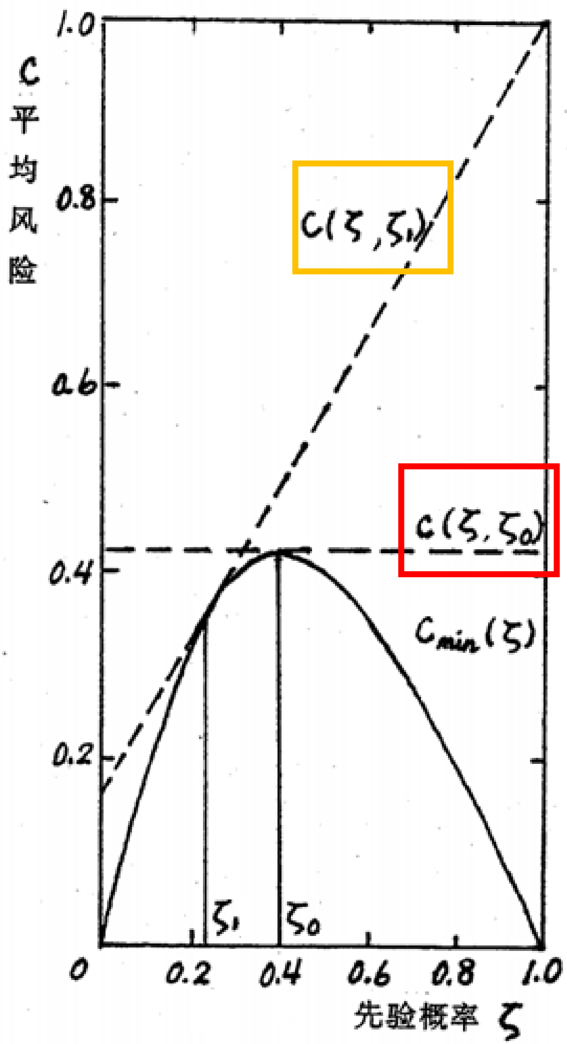
$$C_{min}(\xi) = \xi C_{00}(1 - P_F(v)) + \xi C_{10}P_F(v) + (1-\xi)C_{01}P_M(v) + (1-\xi)C_{11}(1 - P_M(v))$$

$$C(\xi,x)=\xi C_{00}(1-P_F(\nu))+\xi C_{10}P_F(\nu)$$
$$+(1-\xi)C_{01}P_M(\nu)+(1-\xi)C_{11}(1-P_M(\nu))$$



如果选取 $x=\xi$，$C_{min}(\xi)$ 是可能得到的最小平均代价（贝叶斯准则）

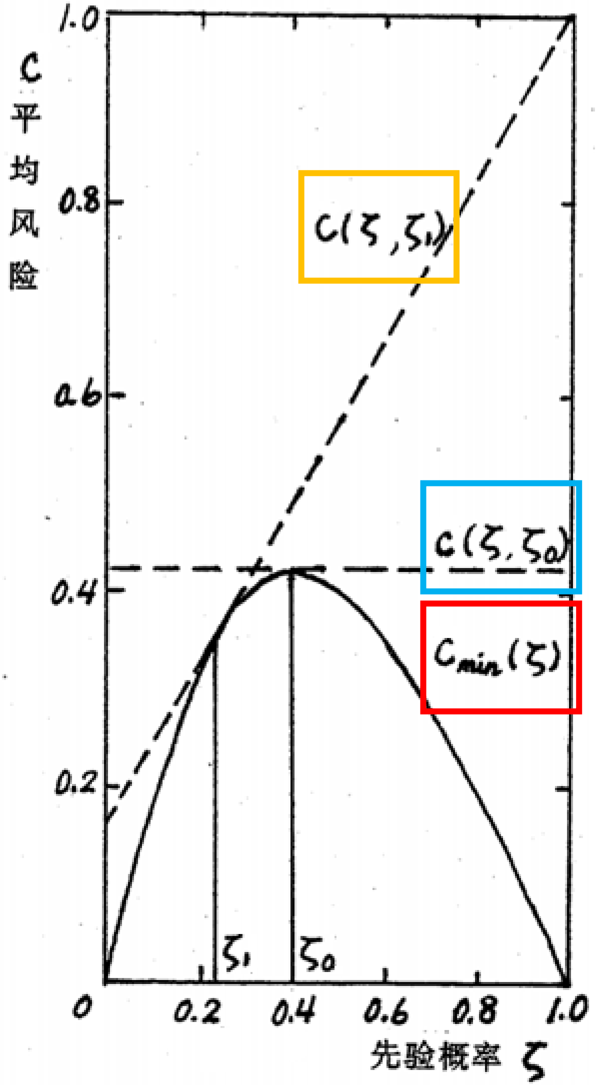
$$C(\xi,x)=\xi C_{00}(1-P_F(\nu))+\xi C_{10}P_F(\nu)$$
$$+(1-\xi)C_{01}P_M(\nu)+(1-\xi)C_{11}(1-P_M(\nu))$$



如果选取 $x=\xi$，$C_{min}(\xi)$ 是可能得到的最小平均代价（贝叶斯准则）

任意取定一个 $x=\xi_1$，此时 $C(\xi,\xi_1)$ 为一条直线，并且在 $C_{min}(\xi)$ 之上，在 $\xi=\xi_1$ 相切。极大风险在 $\xi=0,1$ 取到

$$C(\xi,x)=\xi C_{00}(1-P_F(\nu))+\xi C_{10}P_F(\nu)+(1-\xi)C_{01}P_M(\nu)+(1-\xi)C_{11}(1-P_M(\nu))$$



如果选取 $x=\xi$ ，$C_{min}(\xi)$ 是可能得到的最小平均代价（贝叶斯准则）

任意取定一个 $x=\xi_1$ ，此时 $C(\xi,\xi_1)$ 为一条直线，并且在 $C_{min}(\xi)$ 之上，在 $\xi=\xi_1$ 相切。极大风险在 $\xi=0,1$ 取到

极小极大准则：当取到 $x=\xi_0$ ，且 ξ_0 满足 $C(\xi,\xi_0)$ 斜率为0时，可以使极大风险极小化，即 $\xi_0=\underset{x}{\operatorname{argmin}}\ \underset{\xi}{\max}\ C(\xi,x)$

极小极大方程：

$$C(\xi,x^*)\text{关于}\xi\text{的斜率为}0 \quad \Rightarrow \quad C(0,x^*)=C(1,x^*)$$

$$C_{01}P_M(\nu)+C_{11}(1-P_M(\nu))=C_{00}(1-P_F(\nu))+C_{10}P_F(\nu)$$

极小极大方程：

$$C(\xi,x^*)\text{关于}\xi\text{的斜率为}0 \quad \Rightarrow \quad C(0,x^*)=C(1,x^*)$$

$$C_{01}P_M(v)+C_{11}(1-P_M(v))=C_{00}(1-P_F(v))+C_{10}P_F(v)$$

得到 x^* 或 v 后，判决规则归结于似然比检验：

$$\lambda(r)=\frac{p_1(r)}{p_0(r)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0=\frac{x^*(C_{10}-C_{00})}{(1-x^*)(C_{01}-C_{11})}$$

此准则下，在任意先验概率下的代价均为 $C_{min}(x^*)=\max\ C_{min}(\xi)$

极小极大方程：

$$C(\xi, x^*)\text{关于}\xi\text{的斜率为}0 \quad \Rightarrow \quad C(0, x^*) = C(1, x^*)$$

$$C_{01}P_M(v) + C_{11}(1 - P_M(v)) = C_{00}(1 - P_F(v)) + C_{10}P_F(v)$$

得到 x^* 或 v 后，判决规则归结于似然比检验：

$$\lambda(r) = \frac{p_1(r)}{p_0(r)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0 = \frac{x^*(C_{10} - C_{00})}{(1 - x^*)(C_{01} - C_{11})}$$

此准则下，在任意先验概率下的代价均为 $C_{min}(x^*) = \max\ C_{min}(\xi)$

特殊情况 $C_{00} = C_{11} = 0$，$C_{10} = C_{01} = 1$ 下，极小极大方程简化为：

$$P_F = P_M$$

瓦尔德提出的极小极大风险准则

生活启示：

当我们面临重大问题的抉择时，一定要想清楚万一出现最坏的情况时怎么办？由此所带来的后果是否我们能够承受？

1812年，拿破仑带领57万大军进攻俄国，并最终占领了莫斯科，但最后却败于寒冬，最终回国时仅剩3万人。

1941年6月，德国闪击进攻前苏联，虽然歼灭了苏联红军的大量军队，但由于战线过长加上寒冬，最终导致失败。

4. Neyman-Pearson准则

在许多信号检测问题中,要确定代价因子和先验概率是十分困难的,这时,贝叶斯准则就不能采用,在这种情况下可采用Neyman-Pearson准则。

4. Neyman-Pearson准则

在许多信号检测问题中,要确定代价因子和先验概率是十分困难的,这时,贝叶斯准则就不能采用,在这种情况下可采用Neyman-Pearson准则。

Neyman-Pearson准则的基本思想是保持虚警概率恒定，使检测概率最大（或漏检概率最小）。即

4. Neyman-Pearson准则

在许多信号检测问题中,要确定代价因子和先验概率是十分困难的,这时,贝叶斯准则就不能采用,在这种情况下可采用Neyman-Pearson准则。

Neyman-Pearson准则的基本思想是保持虚警概率恒定，使检测概率最大（或漏检概率最小）。即

$$\begin{cases} \min\ P_M \text{ 或 } \max\ P_D \\ s.t.\ P_F = \alpha \end{cases}$$

核心问题：$\begin{cases} \max \ P_D \\ s.t. \ P_F = \alpha \end{cases}$

核心问题：$\begin{cases} \max \ P_D \\ s.t. \ P_F = \alpha \end{cases}$

拉格朗日乘子法：

$$J = P_D + \gamma(P_F - \alpha)$$

$$= \int_{D_1} p_1(r)dr + \gamma\left(\int_{D_1} p_0(r)dr - \alpha\right)$$

核心问题：$\begin{cases} \max\ P_D \\ s.t.\ P_F = \alpha \end{cases}$

拉格朗日乘子法：

$$
\begin{aligned}
J &= P_D + \gamma(P_F - \alpha) \\
&= \int_{D_1} p_1(r)dr + \gamma\left(\int_{D_1} p_0(r)dr - \alpha\right) \\
&= \int_{D_1} (p_1(r) + \gamma p_0(r))dr - \gamma\alpha
\end{aligned}
$$

核心问题：$\begin{cases} \max\ P_D \\ s.t.\ P_F = \alpha \end{cases}$

拉格朗日乘子法：

$$J = P_D + \gamma(P_F - \alpha)$$

$$= \int_{D_1} p_1(r)dr + \gamma\left(\int_{D_1} p_0(r)dr - \alpha\right)$$

$$= \int_{D_1} (p_1(r) + \gamma p_0(r))dr - \gamma\alpha$$

最大化J：

$p_1(r) + \gamma p_0(r) > 0$, 选择$H_1$成立

$$\Rightarrow \frac{p_1(r)}{p_0(r)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} -\gamma = \lambda$$

如何确定门限λ：

$$P_F = \int_{D_1:\lambda(r)>\lambda} p_0(r)dr = \alpha$$

奈曼（内曼）：美国统计学家，1894年生于俄国，于1981年在美国去世。

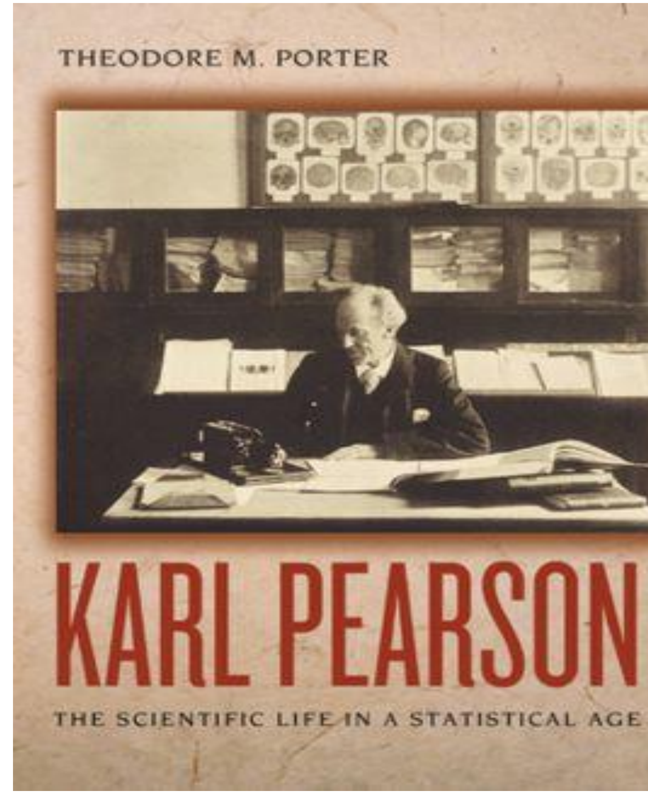
内曼是假设检验的统计理论的创始人之一。他与小皮尔逊合著《统计假设试验理论》，发展了假设检验的数学理论，其要旨是把假设检验问题作为一个最优化问题来处理。他们把所有可能的总体分布族看作一个集合，其中考虑了一个与解消假设相对应的备择假设，引进了检验功效函数的概念，以此作为判断检验程序好坏的标准。这种思想使统计推断理论变得非常明确。 内曼还提出了置信区间的概念，建立置信区间估计理论.内曼还对抽样引进某些随机操作，以保证所得结果的客观性和可靠性，在统计理论中有以他的姓氏命名的内曼置信区间法、内曼—皮尔森引理、内曼结构等.

小皮尔逊 (E.S. Pearson), 卡尔.皮尔逊之子

◆ 奈曼和皮尔逊在塞尔

卡尔. 皮尔逊

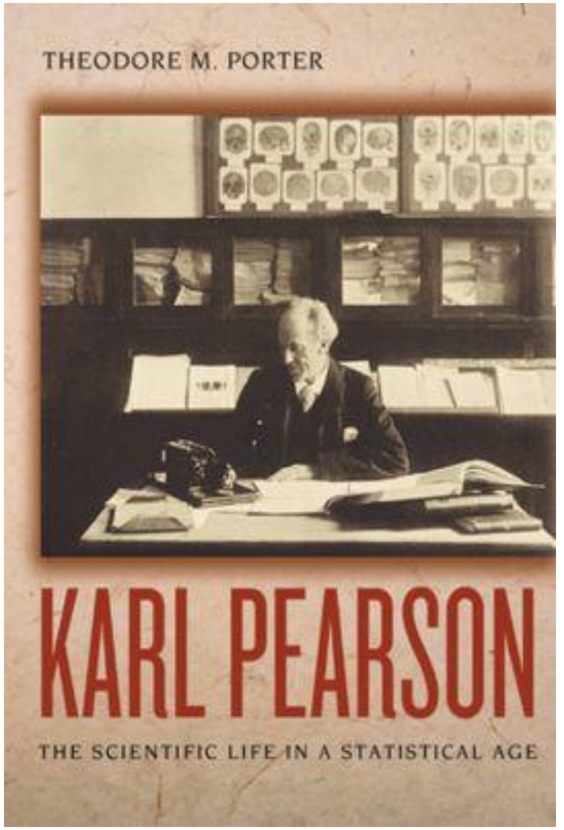
卡尔•皮尔逊（Karl Pearson，1857年3月27日～1936年4月27日）是英国数学家，生物统计学家，数理统计学的创立者，自由思想者，对生物统计学、气象学、社会达尔文主义理论和优生学做出了重大贡献。他被公认是旧派理学派和描述统计学派的代表人物，并被誉为现代统计科学的创立者。



在1901年，皮尔逊与高尔顿等一起创办了《生物统计》杂志。

卡尔皮尔逊的学术贡献：提出复数相关分析，创立直方图分析法，提出卡方分布

卡尔. 皮尔逊



K皮尔逊应该算是早期统计学的创始人之一，在他年轻的时候，受到了高尔顿的影响，对统计学开始感兴趣。当高尔顿离开统计学领域，转而研究其它问题的时候，K皮尔逊接替了他的工作，接管了高尔顿的生物统计实验室，而且后来成了《生物统计》期刊的唯一编辑（共同合伙人高尔顿和威尔登已死亡）。

K皮尔逊最大的成就之一就是创造出了**拟合优度检验**。现在我们依然在用，也就是卡方拟合优度检验。这一检验即使在现在依然能看出它的重要性，它可以让你模拟现实中不同的数学模型，然后利用拟合优度检验来确定哪一个更好。

K皮尔逊还完善了高尔顿提出的**相关系数**，并证明了回归中的复相关系数，可以认为，K皮尔逊是复相关系数的提出人。

可惜的是，K皮尔逊晚年控制欲太强，以至于与另一伟大的统计学家Fisher有了很大的分歧，当年Fisher投稿《生物统计》，结果被K皮尔逊百般刁难，最终导致Fisher不再投稿这一杂志，而改投其它杂志，而且几乎以后所有文章也都不再发表在《生物统计》上。二人之间的分歧一直是统计学的一大遗憾。

- 例 $\boldsymbol{H}_1: \quad r = a + n \quad (a > 0)$

  $\boldsymbol{H}_0: \quad r = n$

  $n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

  给出 $P_F = \alpha$ 下的NP准则的判决规则

- 例 $\boldsymbol{H}_1: \quad r = a + n \quad (a > 0)$

  $\boldsymbol{H}_0: \quad r = n$ $\qquad n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

  给出 $P_F = \alpha$ 下的**NP**准则的判决规则

$$p_1(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(r-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p_0(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

- 例 $\boldsymbol{H}_1: \quad r = a + n \quad (a > 0)$

  $\boldsymbol{H}_0: \quad r = n$

  $n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

  给出 $P_F = \alpha$ 下的NP准则的判决规则

$$p_1(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{(r-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p_0(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda(r) = \frac{p_1(r)}{p_0(r)} = \exp\left(\frac{2ra - a^2}{2\sigma^2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0$$

- 例 $\boldsymbol{H}_1$: $r = a + n \quad (a > 0)$ $\quad n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

  $\boldsymbol{H}_0$: $r = n$

  给出 $P_F = \alpha$ 下的NP准则的判决规则

$$p_1(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{(r-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p_0(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda(r) = \frac{p_1(r)}{p_0(r)} = \exp\left(\frac{2ra - a^2}{2\sigma^2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2ra - a^2}{2\sigma^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\lambda_0$$

- 例 $\boldsymbol{H}_1$: $r = a + n \quad (a > 0)$ $\quad n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

  $\boldsymbol{H}_0$: $r = n$

  给出 $P_F = \alpha$ 下的**NP**准则的判决规则

$$p_1(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{(r-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p_0(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda(r) = \frac{p_1(r)}{p_0(r)} = \exp\left(\frac{2ra - a^2}{2\sigma^2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2ra - a^2}{2\sigma^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\lambda_0 \quad \Rightarrow \quad r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{a}{2} + \frac{\sigma^2}{a}\ln\lambda_0 = V$$

- 例 $\boldsymbol{H}_1:\quad r=a+n \quad (a>0)$ $\quad n\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$

  $\boldsymbol{H}_0:\quad r=n$

  给出 $P_F=\alpha$ 下的NP准则的判决规则

$$p_1(r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{(r-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p_0(r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda(r)=\frac{p_1(r)}{p_0(r)}=\exp\left(\frac{2ra-a^2}{2\sigma^2}\right)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\lambda_0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2ra-a^2}{2\sigma^2}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\ln\lambda_0 \quad \Rightarrow \quad r\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{a}{2}+\frac{\sigma^2}{a}\ln\lambda_0=V$$

确定门限 V ：

$$P_F=\int_V^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)dr=Q\left(\frac{V}{\sigma}\right)=\alpha \quad \Rightarrow \quad V=\sigma Q^{-1}(\alpha)$$

NP准则的特点：不知道代价因子，也不知道先验概率。

主要应用于雷达领域。

通常的雷达虚警概率一般设定为 10^{-6}

NP准则的特点：不知道代价因子，也不知道先验概率。

主要应用于雷达领域。

通常的雷达虚警概率一般设定为 10^{-6}

5. 似然比检验的工作特性

前面的几个准则均导出似然比检验： $\lambda(r)=\dfrac{p_1(r)}{p_0(r)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\lambda_0$

5. 似然比检验的工作特性

前面的几个准则均导出似然比检验： $\lambda(r)=\dfrac{p_1(r)}{p_0(r)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\lambda_0$

若将似然比$\lambda(r)$ **本身当做一个随机变量（本节中之后简记为** λ **），则** λ **也有对应的条件概率密度函数：**

5. 似然比检验的工作特性

前面的几个准则均导出似然比检验： $\lambda(r)=\dfrac{p_1(r)}{p_0(r)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0$

若将似然比 $\lambda(r)$ **本身当做一个随机变量（本节中之后简记为** λ **），则** λ **也有对应的条件概率密度函数：**

H_0假设为真时， $q_0(\lambda)=\dfrac{p_0(r)}{|d\lambda/dr|}$

H_1假设为真时， $q_1(\lambda)=\dfrac{p_1(r)}{|d\lambda/dr|}$

$$q_i(\lambda)|d\lambda| = p_i(r)|dr|$$

5. 似然比检验的工作特性

前面的几个准则均导出似然比检验： $\lambda(r)=\dfrac{p_1(r)}{p_0(r)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0$

若将似然比 $\lambda(r)$ **本身当做一个随机变量（本节中之后简记为** λ **），**

则 λ **也有对应的条件概率密度函数：**

H_0假设为真时， $q_0(\lambda)=\dfrac{p_0(r)}{|d\lambda/dr|}$

H_1假设为真时， $q_1(\lambda)=\dfrac{p_1(r)}{|d\lambda/dr|}$

$$q_i(\lambda)|d\lambda|=p_i(r)|dr|$$

$$\Rightarrow \frac{p_1(r)}{p_0(r)}=\frac{q_1(\lambda)}{q_0(\lambda)}$$

因此原本用 r 表示的公式现在可用 λ 来表示：

似然比 $\lambda = \dfrac{p_1(r)}{p_0(r)} = \dfrac{q_1(\lambda)}{q_0(\lambda)}$

门限 $\lambda_0 = \dfrac{q_1(\lambda_0)}{q_0(\lambda_0)}$

因此原本用 r 表示的公式现在可用 λ 来表示：

似然比 $\lambda = \dfrac{p_1(r)}{p_0(r)} = \dfrac{q_1(\lambda)}{q_0(\lambda)}$

门限 $\lambda_0 = \dfrac{q_1(\lambda_0)}{q_0(\lambda_0)}$

两类错误概率

$$P_F = \int_{\lambda_0}^{\infty} q_0(\lambda)d\lambda$$

$$P_M = \int_0^{\lambda_0} q_1(\lambda)d\lambda$$

因此原本用 r 表示的公式现在可用λ 来表示：

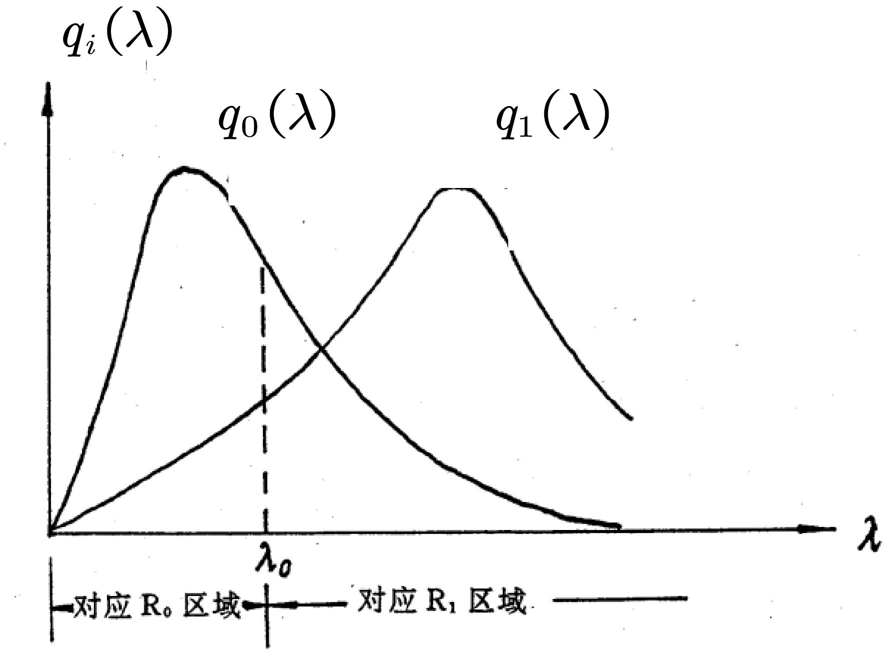
似然比 $\lambda = \dfrac{p_1(r)}{p_0(r)} = \dfrac{q_1(\lambda)}{q_0(\lambda)}$

门限 $\lambda_0 = \dfrac{q_1(\lambda_0)}{q_0(\lambda_0)}$

两类错误概率

$$P_F = \int_{\lambda_0}^{\infty} q_0(\lambda) d\lambda$$

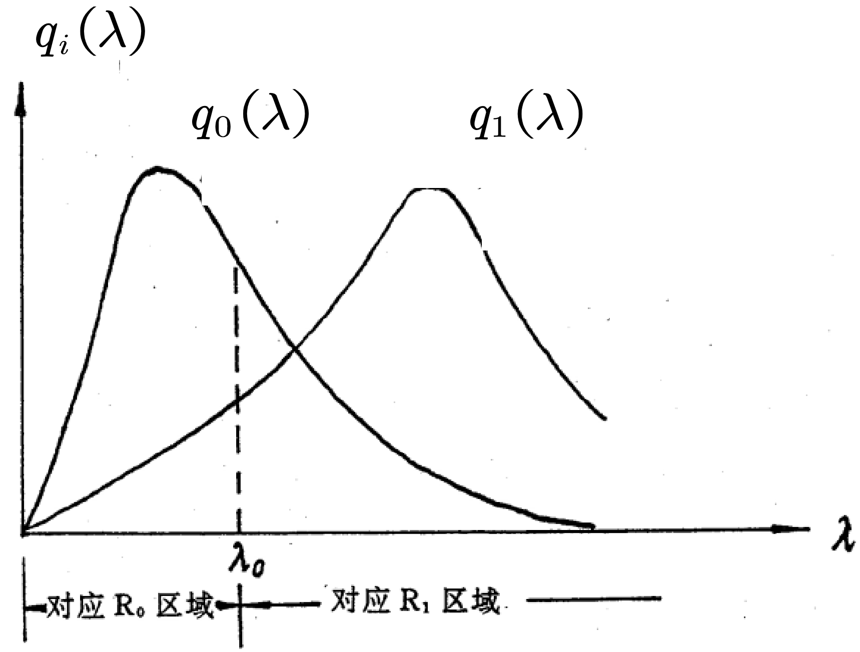
$$P_M = \int_{0}^{\lambda_0} q_1(\lambda) d\lambda$$



因此原本用 r 表示的公式现在可用λ 来表示：

似然比 $\lambda=\dfrac{p_1(r)}{p_0(r)}=\dfrac{q_1(\lambda)}{q_0(\lambda)}$

门限 $\lambda_0=\dfrac{q_1(\lambda_0)}{q_0(\lambda_0)}$



两类错误概率

$$P_F=\int_{\lambda_0}^{\infty} q_0(\lambda)d\lambda$$

$$P_M=\int_{0}^{\lambda_0} q_1(\lambda)d\lambda$$

如果门限看成是个变量，则有：

$$dP_F=-q_0(\lambda_0)d\lambda_0$$

$$dP_M=q_1(\lambda_0)d\lambda_0$$

$$dP_D=-dP_M=-q_1(\lambda_0)d\lambda_0$$

因此原本用 r 表示的公式现在可用 λ 来表示：

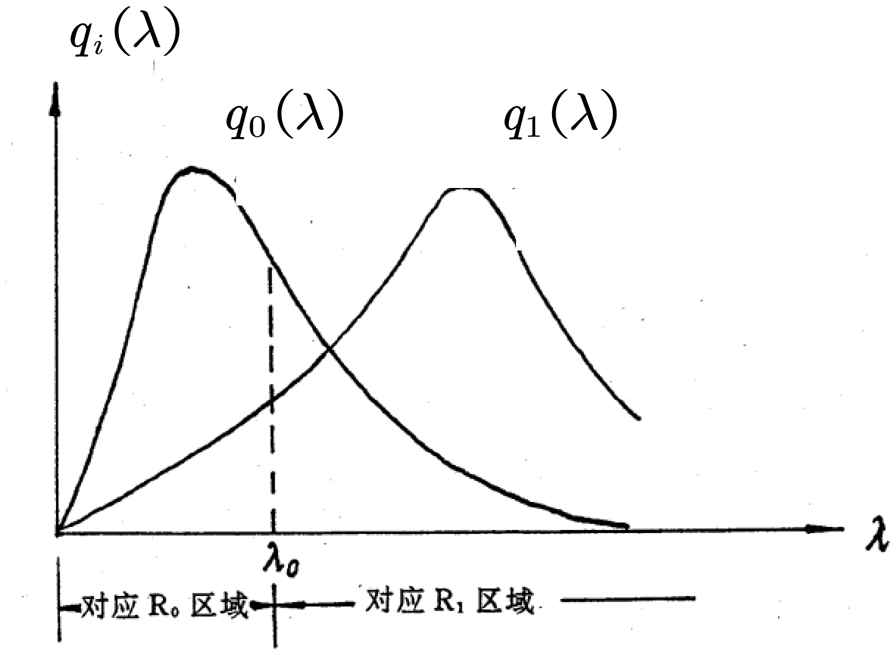
似然比 $\lambda = \dfrac{p_1(r)}{p_0(r)} = \dfrac{q_1(\lambda)}{q_0(\lambda)}$

门限 $\lambda_0 = \dfrac{q_1(\lambda_0)}{q_0(\lambda_0)}$

两类错误概率

$$P_F = \int_{\lambda_0}^{\infty} q_0(\lambda)\,d\lambda$$

$$P_M = \int_0^{\lambda_0} q_1(\lambda)\,d\lambda$$



如果门限看成是个变量，则有：

$$dP_F = -q_0(\lambda_0)\,d\lambda_0$$

$$dP_M = q_1(\lambda_0)\,d\lambda_0$$

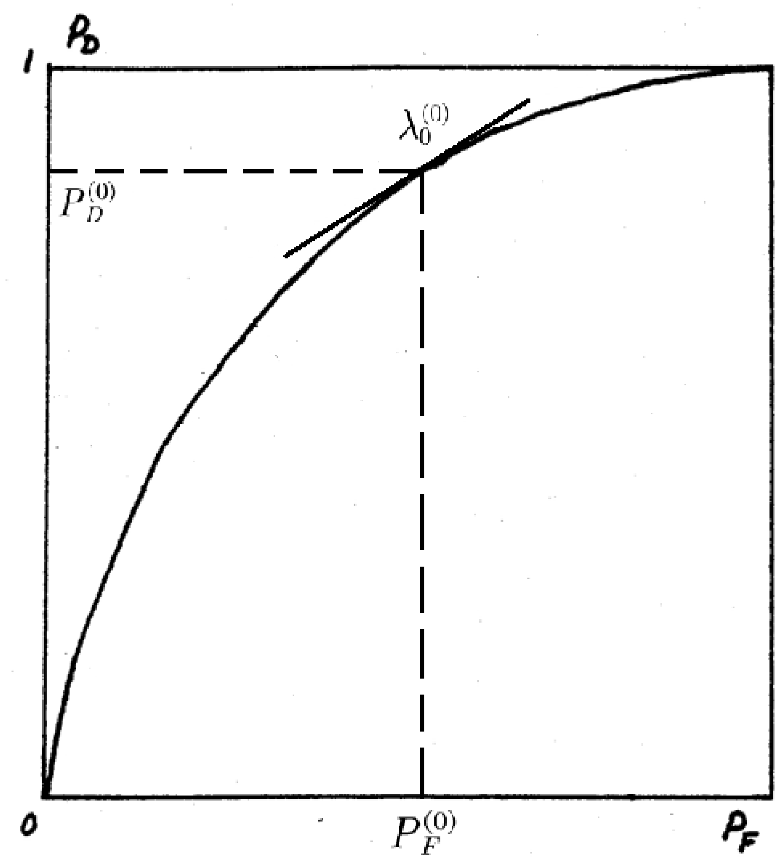
$$dP_D = -dP_M = -q_1(\lambda_0)\,d\lambda_0$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = \frac{q_1(\lambda_0)}{q_0(\lambda_0)} = \frac{dP_D}{dP_F}$$

似然比检验的工作特性，也叫接收机工作特性，简称ROC(Receiver Operating Characteristic)，为检测概率与虚警概率的函数关系。

似然比检验的工作特性，也叫接收机工作特性，简称ROC(Receiver Operating Characteristic)，为检测概率与虚警概率的函数关系。

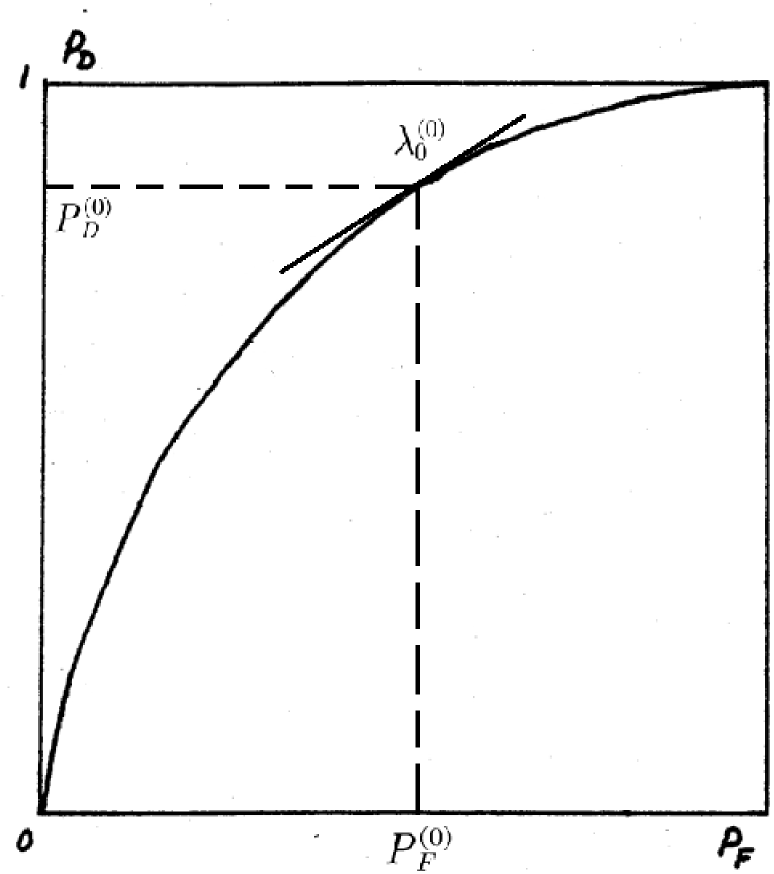
ROC曲线由$\{(P_F, P_D) | \lambda_0 \in \mathbb{R}^+\}$ **组成**



似然比检验的工作特性，也叫接收机工作特性，简称ROC(Receiver Operating Characteristic)，为检测概率与虚警概率的函数关系。

ROC曲线由$\{(P_F, P_D)|\lambda_0 \in \mathbb{R}^+\}$ **组成**

$(P_F^{(0)}, P_D^{(0)})$ **处的切线斜率就是其对应的门限** $\lambda_0^{(0)}$



似然比检验的工作特性，也叫接收机工作特性，简称ROC(Receiver Operating Characteristic)，为检测概率与虚警概率的函数关系。

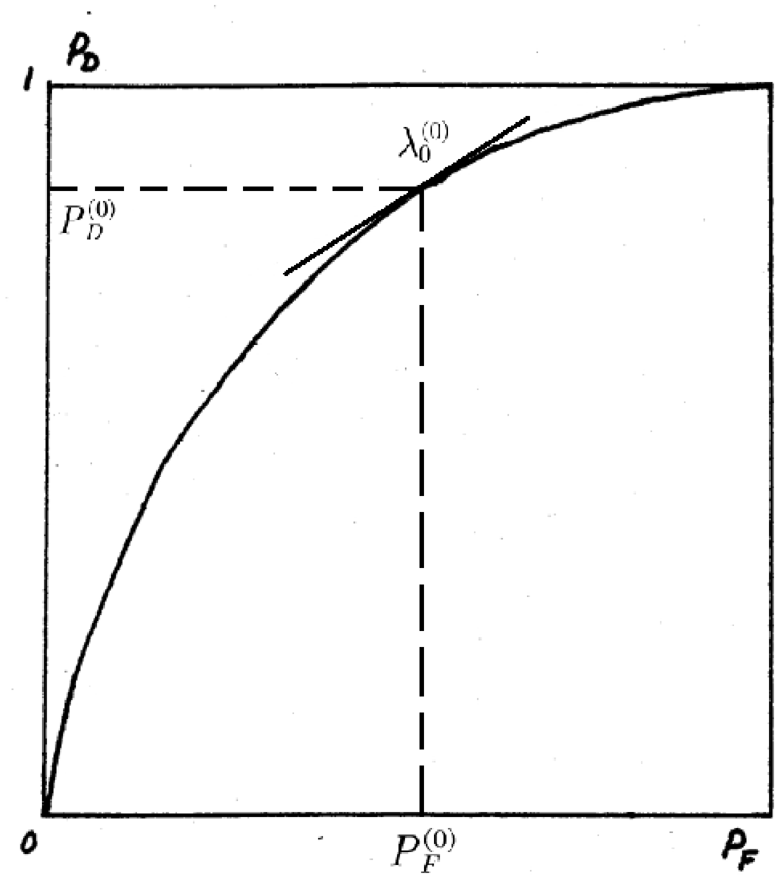
ROC曲线由$\{(P_F, P_D) | \lambda_0 \in \mathbb{R}^+\}$**组成**

$(P_F^{(0)}, P_D^{(0)})$ **处的切线斜率就是其对应的门限** $\lambda_0^{(0)}$

$$P_F = \int_{\lambda_0}^{\infty} q_0(\lambda) d\lambda$$

$$P_D = \int_{\lambda_0}^{\infty} q_1(\lambda) d\lambda$$

$$\lambda_0 = \frac{dP_D}{dP_F}$$



在ROC曲线上可以通过作图求解贝叶斯准则、极小极大准则、NP准则的似然比门限值 λ_0 **，以及相应的**P_F, P_D

在ROC曲线上可以通过作图求解贝叶斯准则、极小极大准则、NP准则的似然比门限值 λ_0 ，以及相应的P_F, P_D

贝叶斯准则：

$$\lambda_0 = \frac{\xi\left(C_{10} - C_{00}\right)}{\left(1-\xi\right)\left(C_{01} - C_{11}\right)}$$

在ROC曲线上可以通过作图求解贝叶斯准则、极小极大准则、NP准则的似然比门限值 λ_0 ，以及相应的P_F, P_D

贝叶斯准则：

$$\lambda_0 = \frac{\xi(C_{10} - C_{00})}{(1-\xi)(C_{01} - C_{11})}$$

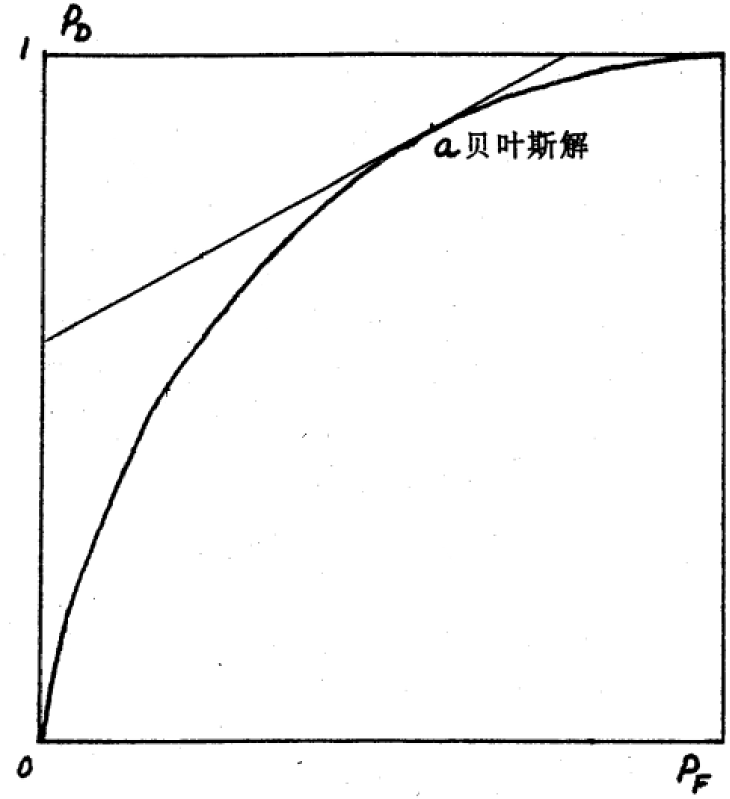
可求出贝叶斯准则的似然比门限 λ_0 ，并在ROC曲线上找到斜率等于 λ_0 的切线。

在ROC曲线上可以通过作图求解贝叶斯准则、极小极大准则、NP准则的似然比门限值 λ_0 ，以及相应的P_F, P_D

贝叶斯准则：

$$\lambda_0 = \frac{\xi(C_{10} - C_{00})}{(1-\xi)(C_{01} - C_{11})}$$

可求出贝叶斯准则的似然比门限 λ_0 ，并在ROC曲线上找到斜率等于 λ_0 的切线。



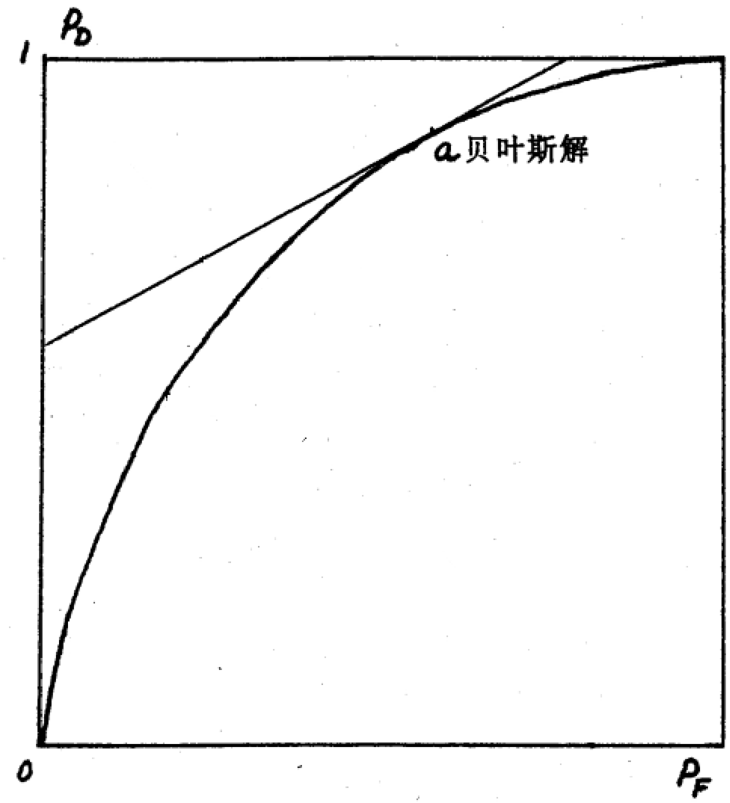
在ROC曲线上可以通过作图求解贝叶斯准则、极小极大准则、NP准则的似然比门限值 λ_0 ，以及相应的P_F, P_D

贝叶斯准则：

$$\lambda_0 = \frac{\xi(C_{10} - C_{00})}{(1-\xi)(C_{01} - C_{11})}$$

可求出贝叶斯准则的似然比门限 λ_0 ，并在ROC曲线上找到斜率等于 λ_0 的切线。

$$\boxed{\lambda_0 = \frac{dP_D}{dP_F}}$$



极小极大准则：

极小极大解应满足"极小极大方程"

极小极大准则：

极小极大解应满足“极小极大方程”

$$
\begin{aligned}
&C_{01}(1-P_D)+C_{11}P_D \\
&\quad =C_{00}(1-P_F)+C_{10}P_F
\end{aligned}
$$

极小极大准则：

极小极大解应满足“极小极大方程”

$$
\begin{aligned}
&C_{01}(1-P_D)+C_{11}P_D \\
&\quad =C_{00}(1-P_F)+C_{10}P_F
\end{aligned}
$$

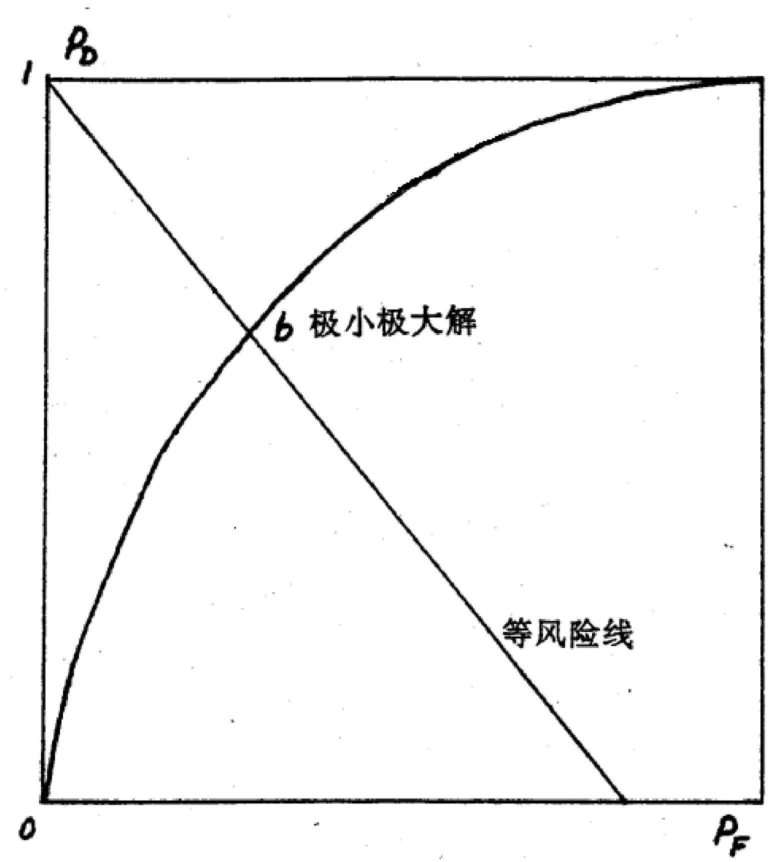
即为图中“等风险线”。其与ROC曲线的交点即为极小极大解。

极小极大准则：

极小极大解应满足“极小极大方程”

$$C_{01}(1-P_D)+C_{11}P_D$$
$$=C_{00}(1-P_F)+C_{10}P_F$$

即为图中“等风险线”。其与ROC曲线的交点即为极小极大解。

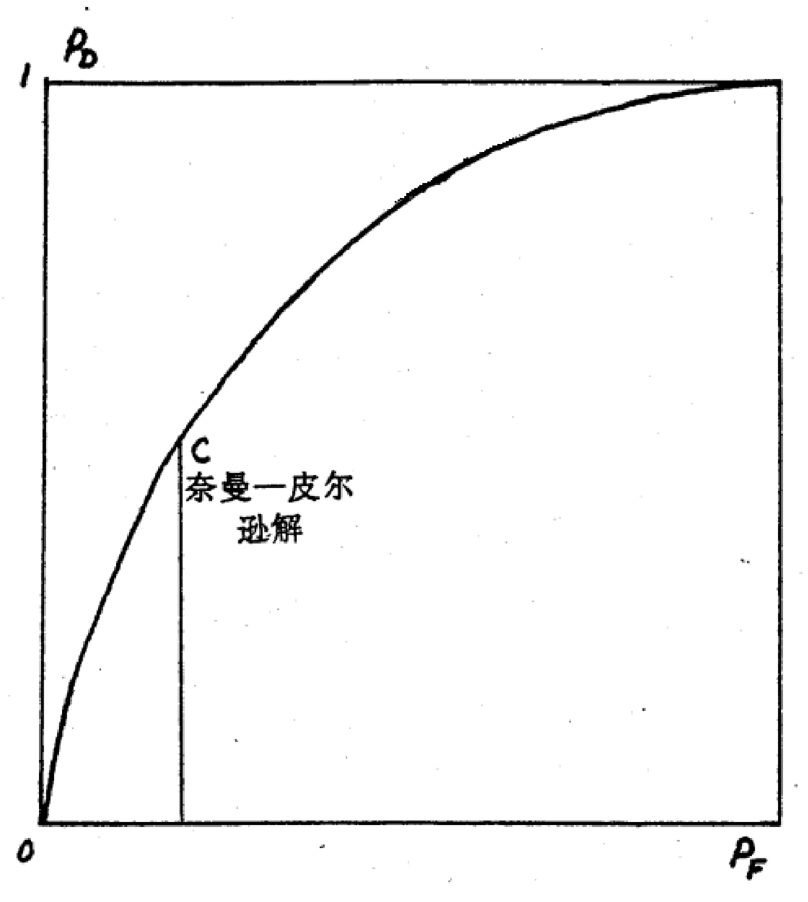


NP准则：

虚警概率 $P_F = \alpha$ **代表的直线与ROC曲线的交点为NP准则的解**

NP准则：

虚警概率 $P_F = \alpha$ **代表的直线与ROC曲线的交点为NP准则的解**



思考：

如何才能提高检测性能?

6. 多次测量下的简单假设检验

- 假设检验理论由一次测量推广到多次测量
- 令n次测量的值为 $r_1, r_2, \ldots r_n$

多次测量下的简单假设检验

- 假设检验理论由一次测量推广到多次测量
- 令n次测量的值为 $r_1, r_2, \ldots r_n$

$$p_0(\mathbf{r}) = p_0(r_1, r_2, ..., r_n)$$

$$p_1(\mathbf{r}) = p_1(r_1, r_2, ..., r_n)$$

多次测量下的简单假设检验

- 假设检验理论由一次测量推广到多次测量
- 令n次测量的值为 $r_1, r_2, \ldots r_n$

$$p_0(\mathbf{r}) = p_0(r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

$$p_1(\mathbf{r}) = p_1(r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

- 多次测量下的简单假设检验，似然比检验的判决规则为

$$\lambda(\mathbf{r}) = \frac{p_1(\mathbf{r})}{p_0(\mathbf{r})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0$$

直观表示

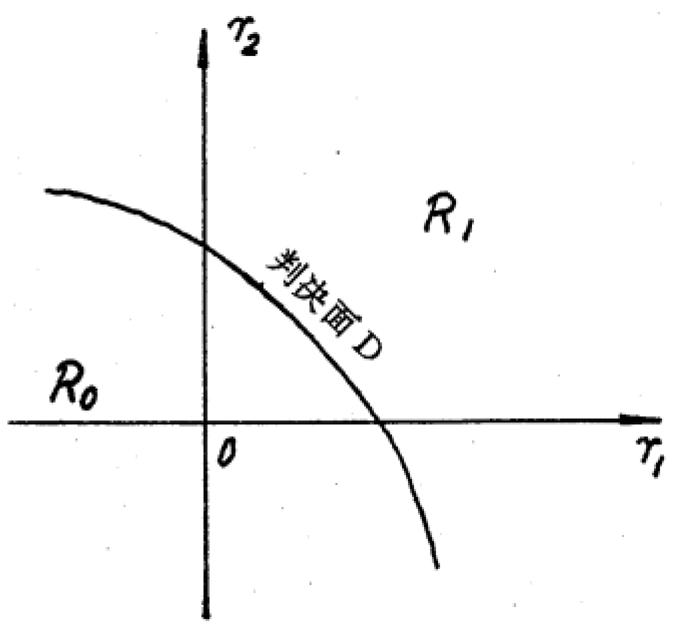
- N次测量结果 $\Longrightarrow$ N维笛卡尔空间的一点
- 判决策略 $\Longrightarrow$ 空间划分策略
- 判决面 $\Longrightarrow$ 空间超曲面

直观表示

- **N次测量结果** $\Longrightarrow$ **N维笛卡尔空间的一点**
- **判决策略** $\Longrightarrow$ **空间划分策略**
- **判决面** $\Longrightarrow$ **空间超曲面**
- **判决面方程** $\lambda(\boldsymbol{r}) = \lambda_0$
- **观测矢量落在** R_0 **区域时** $\lambda(\boldsymbol{r}) < \lambda_0$
- **观测矢量落在** R_1 **区域时** $\lambda(\boldsymbol{r}) > \lambda_0$

直观表示

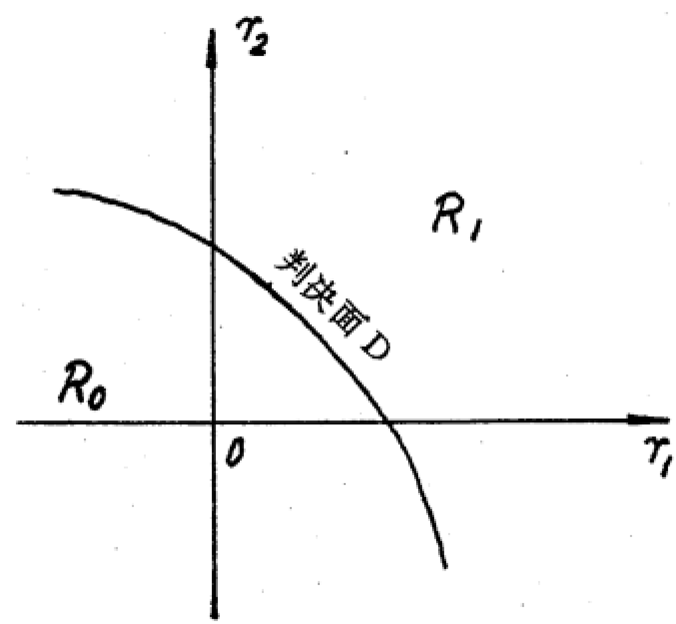
- N次测量结果 $\Longrightarrow$ N维笛卡尔空间的一点
- 判决策略 $\Longrightarrow$ 空间划分策略
- 判决面 $\Longrightarrow$ 空间超曲面
- 判决面方程 $\lambda(\boldsymbol{r}) = \lambda_0$
- 观测矢量落在 R_0 区域时 $\lambda(\boldsymbol{r}) < \lambda_0$
- 观测矢量落在 R_1 区域时 $\lambda(\boldsymbol{r}) > \lambda_0$



数学上：把一元函数推广到多元函数
统计上：一元统计推广到多元统计

直观表示

- N次测量结果 ⟹ N维笛卡尔空间的一点
- 判决策略 ⟹ 空间划分策略
- 判决面 ⟹ 空间超曲面
- 判决面方程 $\lambda(\boldsymbol{r}) = \lambda_0$
- 观测矢量落在 R_0 区域时 $\lambda(\boldsymbol{r}) < \lambda_0$
- 观测矢量落在 R_1 区域时 $\lambda(\boldsymbol{r}) > \lambda_0$



6.1 多次测量下的贝叶斯准则

- **已知判决的代价矩阵**

$$C=\begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix}$$

- **已知假设 H_0 的先验概率ξ ,假设H_1 的先验概率$(1-\xi)$**

多次测量下的贝叶斯准则

- 已知判决的代价矩阵

$$C = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix}$$

- 已知假设 H_0 的先验概率ξ ,假设H_1 的先验概率$(1-\xi)$
- 类似单次测量贝叶斯准则，可推导出每一判决的平均风险是

$$\overline{C} = \xi C_{10} + (1-\xi)C_{11} +$$
$$\int_{R_0}[(1-\xi)(C_{01}-C_{11})p_1(\mathbf{r}) - \xi(C_{10}-C_{00})p_0(\mathbf{r})]d\mathbf{r}$$

- **选择区域 R_0 ，使上式积分中被积函数为负值，就可以使平均代价最小，则判定 H_0 为真的条件是**

$$\xi(C_{10}-C_{00})p_0(\mathbf{r}) > (1-\xi)(C_{01}-C_{11})p_1(\mathbf{r})$$

- 选择区域 R_0 ，使上式积分中被积函数为负值，就可以使平均代价最小，则判定 H_0 为真的条件是

$$\xi(C_{10}-C_{00})p_0(\mathbf{r}) > (1-\xi)(C_{01}-C_{11})p_1(\mathbf{r})$$

$$\frac{p_1(\mathbf{r})}{p_0(\mathbf{r})} < \frac{\xi(C_{10}-C_{00})}{(1-\xi)(C_{01}-C_{11})} = \lambda_0$$

- 判决面方程由 $\lambda(\boldsymbol{r})=\lambda_0$ 决定

- 例
- 若接收信号的m次独立观测为$r_1, r_2, \ldots r_m$
- 每个噪声样本 $n_i, i=1,2,\ldots m$ 都是独立同分布的$(0, \sigma_n^2)$高斯变量，噪声样本与信号样本统计独立
- 多样本的二元假设检验

$$\begin{cases} H_1: \ r_i = A + n_i, & i = 1,2,\ldots m \\ H_0: \ r_i = n_i & i = 1,2,\ldots m \end{cases}$$

- 给出似然比检验最佳检测器的形式

- 在假设H_1下，r_i 是$N(A,\sigma_n^2)$ 变量
- 在假设H_0下，r_i 是$N(0,\sigma_n^2)$ 变量
- **两种假设下 r_i 的概率密度分布函数为**

$$p_1(r_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left\{-\frac{(r_i-A)^2}{2\sigma_n^2}\right\}\qquad p_0(r_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left\{-\frac{r_i^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

- 在假设 H_1下，r_i 是 $N(A,\sigma_n^2)$ 变量
- 在假设H_0下，r_i 是 $N(0,\sigma_n^2)$ 变量
- **两种假设下 r_i 的概率密度分布函数为**

$$p_1(r_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left\{-\frac{(r_i-A)^2}{2\sigma_n^2}\right\} \qquad p_0(r_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left\{-\frac{r_i^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

- **由于噪声是统计独立的，所以各个 r_i 也是统计独立的**
- **样本矢量的概率密度分布函数为**

$$p_1(\boldsymbol{r}) = \prod_{i=1}^{m} p_1(r_i) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{\frac{m}{2}}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{m}\frac{(r_i-A)^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

$$p_0(\boldsymbol{r}) = \prod_{i=1}^{m} p_0(r_i) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{\frac{m}{2}}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{m}\frac{r_i^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

- 似然比为

$$\lambda(\boldsymbol{r}) = \frac{p_1(\boldsymbol{r})}{p_0(\boldsymbol{r})} = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{m} \frac{A^2 - 2Ar_i}{2\sigma_n^2}\right\}$$

- 似然比为

$$\lambda(\boldsymbol{r})=\frac{p_1(\boldsymbol{r})}{p_0(\boldsymbol{r})}=\exp\left\{-\sum_{i=1}^{m}\frac{A^2-2Ar_i}{2\sigma_n^2}\right\}$$

- 对数似然比为

$$\ln\lambda(\boldsymbol{r})=\frac{A}{\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{m}r_i-\frac{mA^2}{2\sigma_n^2}$$

- 似然比为

$$\lambda(\boldsymbol{r}) = \frac{p_1(\boldsymbol{r})}{p_0(\boldsymbol{r})} = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{m} \frac{A^2 - 2Ar_i}{2\sigma_n^2}\right\}$$

- 对数似然比为

$$\ln\lambda(\boldsymbol{r}) = \frac{A}{\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{m} r_i - \frac{mA^2}{2\sigma_n^2}$$

- 似然比检验为

$$\frac{A}{\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{m} r_i - \frac{mA^2}{2\sigma_n^2} \mathop{\gtrless}_{H_0}^{H_1} \ln\lambda_0$$

- 似然比为

$$\lambda(\boldsymbol{r})=\frac{p_1(\boldsymbol{r})}{p_0(\boldsymbol{r})}=\exp\left\{-\sum_{i=1}^{m}\frac{A^2-2Ar_i}{2\sigma_n^2}\right\}$$

- 对数似然比为

$$\ln\lambda(\boldsymbol{r})=\frac{A}{\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{m}r_i-\frac{mA^2}{2\sigma_n^2}$$

- 似然比检验为

$$\frac{A}{\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{m}r_i-\frac{mA^2}{2\sigma_n^2}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\ln\lambda_0$$

- 等效为

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}r_i\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{A}{2}+\frac{\sigma_n^2}{mA}\ln\lambda_0=V_T$$

检验统计量的似然函数：$\hat{r} = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} r_i$

检验统计量的似然函数：$\hat{r} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} r_i$

$$E(\hat{r}) = E\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} r_i\right) = \begin{cases} 0, & H_0 \\ A, & H_1 \end{cases}$$

检验统计量的似然函数：$\hat{r}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}r_i$

$$E(\hat{r})=E\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}r_i\right)=\begin{cases}0, & H_0\\ A, & H_1\end{cases}$$

$$Var(\hat{r})=E\left(\left(\hat{r}-E(\hat{r})\right)^2\right)=E\left(\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}n_i\right)^2\right)=\frac{\sigma^2}{m}$$

检验统计量的似然函数：$\hat{r} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} r_i$

$$E(\hat{r}) = E\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} r_i\right) = \begin{cases} 0, & H_0 \\ A, & H_1 \end{cases}$$

$$Var(\hat{r}) = E((\hat{r} - E(\hat{r}))^2) = E\left(\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} n_i\right)^2\right) = \frac{\sigma^2}{m}$$

$$p_0(\hat{r}) = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{m\hat{r}^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p_1(\hat{r}) = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{m(\hat{r} - A)^2}{2\sigma^2}\right)$$

检验统计量的似然函数： $\hat{r}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}r_i$

$$E(\hat{r})=E\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}r_i\right)=\begin{cases}0, & H_0\\ A, & H_1\end{cases}$$

$$Var(\hat{r})=E\left((\hat{r}-E(\hat{r}))^2\right)=E\left(\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}n_i\right)^2\right)=\frac{\sigma^2}{m}$$

$$p_0(\hat{r})=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{m\hat{r}^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p_1(\hat{r})=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{m(\hat{r}-A)^2}{2\sigma^2}\right)$$

相比单次观测，方差减小

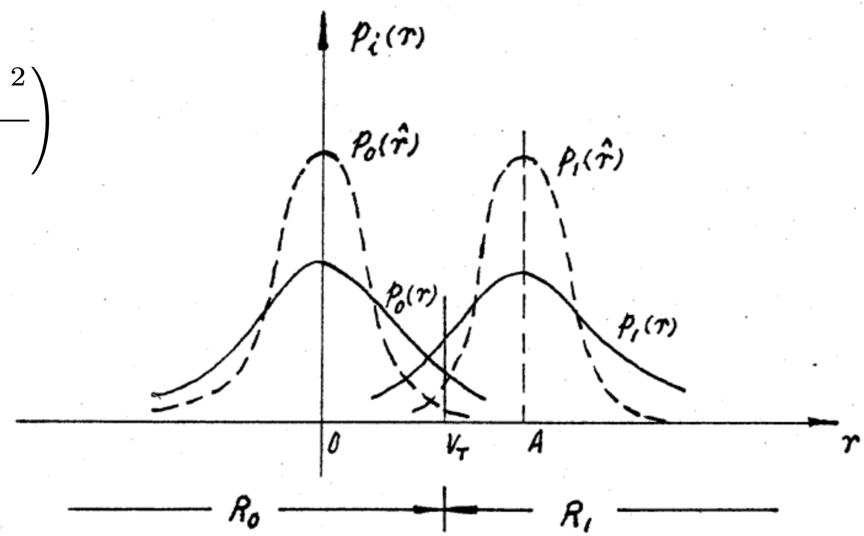
检验统计量的似然函数：$\hat{r} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} r_i$

$$E(\hat{r}) = E\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} r_i\right) = \begin{cases} 0, & H_0 \\ A, & H_1 \end{cases}$$

$$Var(\hat{r}) = E((\hat{r} - E(\hat{r}))^2) = E\left(\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} n_i\right)^2\right) = \frac{\sigma^2}{m}$$

$$p_0(\hat{r}) = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{m\hat{r}^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p_1(\hat{r}) = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{m(\hat{r}-A)^2}{2\sigma^2}\right)$$



相比单次观测，方差减小

错误概率

$$P_F = \int_{V_T}^{\infty} p_0(\hat{r})\,d\hat{r} = \int_{V_T}^{\infty} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{m\hat{r}^2}{2\sigma^2}\right) d\hat{r} = Q\left(\frac{V_T}{\sqrt{\sigma^2/m}}\right)$$

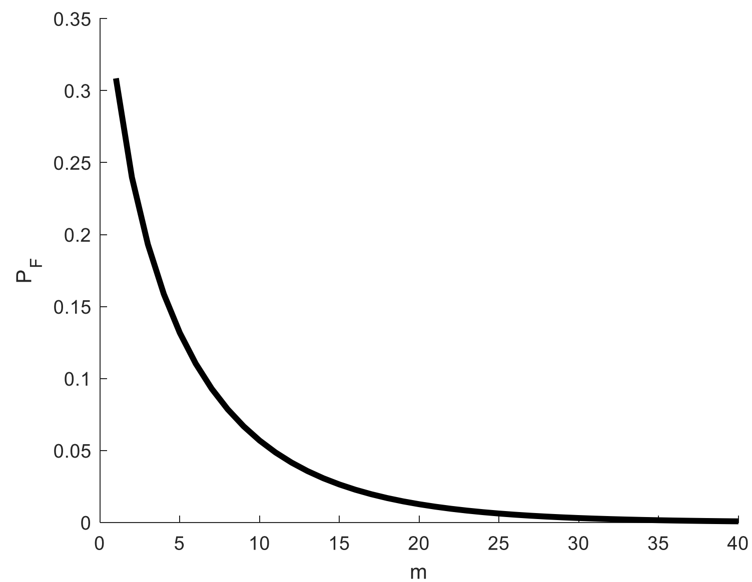
$$P_M = \int_{V_T}^{\infty} p_0(\hat{r})\,d\hat{r} = \int_{-\infty}^{V_T} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{m(\hat{r}-A)^2}{2\sigma^2}\right) d\hat{r} = Q\left(\frac{A-V_T}{\sqrt{\sigma^2/m}}\right)$$

错误概率

$$P_F=\int_{V_T}^{\infty}p_0(\hat{r})d\hat{r}=\int_{V_T}^{\infty}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{m\hat{r}^2}{2\sigma^2}\right)d\hat{r}=Q\left(\frac{V_T}{\sqrt{\sigma^2/m}}\right)$$

$$P_M=\int_{V_T}^{\infty}p_0(\hat{r})d\hat{r}=\int_{-\infty}^{V_T}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{m(\hat{r}-A)^2}{2\sigma^2}\right)d\hat{r}=Q\left(\frac{A-V_T}{\sqrt{\sigma^2/m}}\right)$$

虚警概率随观测样本数的曲线 $(A=1,V_T=0.5,\sigma^2=1)$



思考与讨论

学会用统计信号处理的思维去思考

以COVID-19为例：

*中日友好医院：三次核酸检测仍呈阴性

如何从统计信号处理的观点看待这些问题？

复习:

1 理解和掌握几个基本概念与检测方法

奈曼-皮尔逊准则

贝叶斯准则

似然比工作特性、 ROC曲线

多次测量下的检测及优点

清楚知道每种检测准则的前提条件

2 逐步学会如何用统计信号处理的思维去分析问题和解决问题

作业：

1. 设有下列两种假设：

$$H_0 \;:\; \mathrm{x}=\mathrm{n}$$

$$H_1 \;:\; \mathrm{x}=\mathrm{a}+\mathrm{n}$$

其中 a>0 为常数， $n \square N(0,\sigma^2)$ 。如果要求 $P_F=\alpha$,试设计相应的最佳接收机，

确定其检测概率 P_D，并画出 $P_D \square SNR=a/\sigma$或（$(a/\sigma)^2$ 的关系曲线。

2. 针对上述两个假设，假定 $C_{00}=C_{11}=1, C_{10}=10, C_{01}=100$ ， $n \square N(0,1)$ 。

试求：

1）设计相应的最佳接收机；

2）a=3 时的 ξ_0 值，并画出 $\bar{C}_{\min}(\xi)$ 的曲线；(此处是指求先验概率的估计值)

谢谢大家！