噪声中信号的统计检测

清华大学电子工程系

杨健

1.引言

- 在噪声中检测信号，不论采用何种准则，都归结为似然比检验。
- 信号的检测也就是要利用概率与统计的工具来设计“最佳”接收机。这些接收机应尽可能地从噪声中分离出有用信号。
- 匹配滤波器是信号检测理论中的一个重要课题，它根据最大输出信噪比的准则来设计最佳接收机形式。

2. 匹配滤波器

- **Cauchy-Schwartz不等式**

信号 $\boldsymbol{x}$ 的能量给定时，什么样的 $\boldsymbol{x}$ 能够最大化 $\sum_{i=1}^{N} a_i x_i$

$$\begin{aligned} \max \quad & a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \\ s.t. \quad & x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \end{aligned}$$

2. 匹配滤波器

- **Cauchy-Schwartz不等式**

信号 $\boldsymbol{x}$ 的能量给定时，什么样的 $\boldsymbol{x}$ 能够最大化 $\sum_{i=1}^{N} a_i x_i$

$$\max \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

$$s.t. \quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

柯西许瓦兹不等式： $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$

等号取到当且仅当： $x_i = t y_i \qquad i = 1, 2, \cdots, N$

3分钟时间：如何证明？复数形式的不等式应该是何形式？

柯西-施瓦兹不等式的证明

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

$$x_i = t y_i \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

对任意 $t \in \mathbb{R}$ $\quad \sum_{i=1}^{N} (x_i - t y_i)^2 \ge 0$

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i - t y_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i^2 + t^2 y_i^2 - 2t x_i y_i) = t^2 \sum_{i=1}^{N} y_i^2 - t \sum_{i=1}^{N} 2 x_i y_i + \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \ge 0$$

柯西-施瓦兹不等式的证明

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

$$x_i = t y_i \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

对任意$t \in \mathbb{R}$ $\quad \sum_{i=1}^{N} (x_i - t y_i)^2 \ge 0$

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i - t y_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i^2 + t^2 y_i^2 - 2t x_i y_i) = t^2 \sum_{i=1}^{N} y_i^2 - t \sum_{i=1}^{N} 2 x_i y_i + \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \ge 0$$

一个关于 t 的二次函数，何时才能对任意$t \in \mathbb{R}$恒大于等于0

$$\Rightarrow \Delta = \left(\sum_{i=1}^{N} 2 x_i y_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2 \right) \le 0$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i \right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2 \right)$$

何时取等于号 $\Leftrightarrow \Delta = 0$

$\Leftrightarrow$ 存在$t \in \mathbb{R}, s.t.\ x_i - t y_i = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, N$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

$$x_i = t y_i \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

柯西-施瓦兹不等式可以推广至连续情况

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \le \left(\int_a^b f^2(x) dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x) dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

等号充要条件：$f(x) = t g(x)$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

$$x_i = t y_i \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

柯西-施瓦兹不等式可以推广至连续情况

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \le \left(\int_a^b f^2(x) dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x) dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

等号充要条件：$f(x) = t g(x)$

也可以推广至复数情况

$$\left|\int_a^b f(x) g(x) dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

等号充要条件：$f(x) = t g^*(x)$

作业：证明复数情况下的积分形式的柯西-施瓦兹不等式

2. 匹配滤波器

- **Cauchy-Schwartz不等式**

信号 $\boldsymbol{x}$ 的能量给定时，什么样的 $\boldsymbol{x}$ 能够最大化 $\sum_{i=1}^{N} a_i x_i$

柯西许瓦兹不等式： $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$

等号取到当且仅当： $x_i = t y_i \qquad i = 1, 2, \cdots, N$

复数形式时当且仅当 $x_i = t\, y_i^*$ **时目标函数取最大值**

$$\max |3x - 4y + 5iz|$$

$$|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1$$

2. 白噪声下的匹配滤波器

- **Cauchy-Schwartz不等式**

信号$\boldsymbol{x}$的能量给定时，什么样的$\boldsymbol{x}$能够最大化$\sum_{i=1}^{N} a_i x_i$

柯西许瓦兹不等式：$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$

等号取到当且仅当：$x_i = t y_i \quad i = 1, 2, \cdots, N$

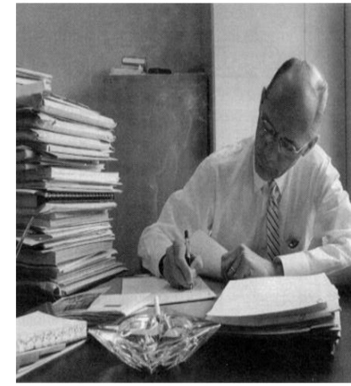
复数形式时当且仅当 $x_i = t\, y_i^*$ 时目标函数取最大值

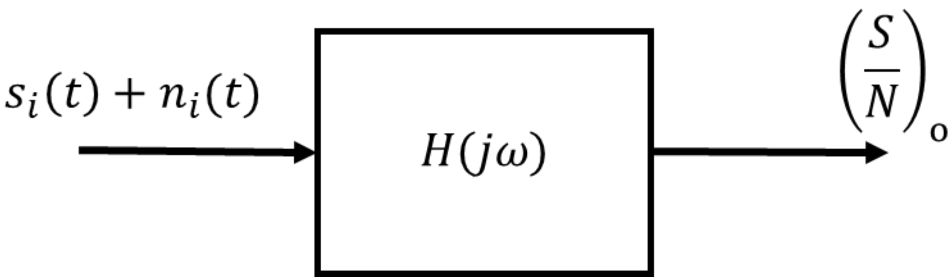
$$\max|3x - 4y + 5iz| \qquad x = \frac{3}{5\sqrt{2}}, y = \frac{-4}{5\sqrt{2}}, z = \frac{-5i}{5\sqrt{2}}$$

$$|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1$$

最初的匹配滤波器

- **回到匹配滤波器：对于线性系统而言，输入端为信号加噪声，在输入信号形式和噪声统计特性已知的条件下，选择滤波器的特性，使输出信号/噪声比达到最大可能值，这种滤波器为“匹配滤波器”**

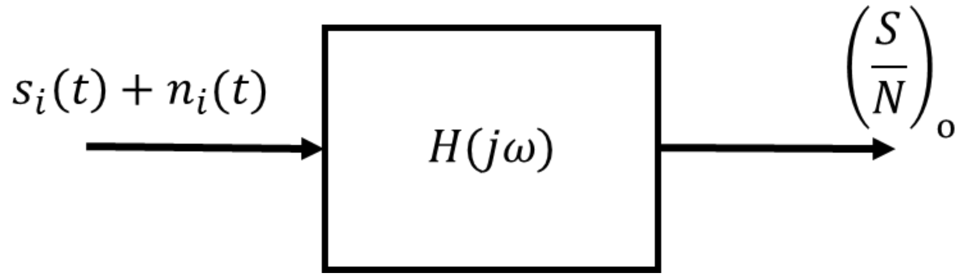




诺斯1943年提出匹配滤波理论，1988年获IEEE信息学会金奖

其中，滤波器的传递函数为$H(j\omega)$

信号为 $s_i(t)$，噪声$n_i(t)$为功率谱密度$\Phi_n(\omega)=\dfrac{N_0}{2}$的高斯白噪声



- 输入信号频谱为

$$s_i(t) \rightleftarrows S_i(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t) e^{-j\omega t} dt$$

- 输出信号频谱为

$$S_o(j\omega) = S_i(j\omega) H(j\omega)$$

- 输出信号为

$$s_o(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_o(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- 高斯白噪声输出端平均功率为

$$\overline{n_o^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\Phi_n(\omega)|H(j\omega)|^2 d\omega = \frac{N_0}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2 d\omega$$

$$s_o(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_o(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- 高斯白噪声输出端平均功率为

$$\overline{n_o^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \Phi_n(\omega)|H(j\omega)|^2 d\omega = \frac{N_0}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega$$

- 在 $t = t_0$ 时刻，输出信号为

$$s_o(t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_i(j\omega) H(j\omega) e^{jwt_0} d\omega$$

$$s_o(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_o(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

- 高斯白噪声输出端平均功率为

$$\overline{n_o^2(t)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\Phi_n(\omega)|H(j\omega)|^2d\omega=\frac{N_0}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2d\omega$$

- 在 $t=t_0$ 时刻，输出信号为

$$s_o(t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_i(j\omega)H(j\omega)e^{jwt_0}d\omega$$

- 输出信噪比为

$$\gamma=\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{|s_o(t_0)|^2}{\overline{n_o^2(t)}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\left[\int_{-\infty}^{\infty}S_i(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right]^2}{\frac{N_0}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2d\omega}$$

- 输入信号能量为

$$
\begin{aligned}
E &= \int_{-\infty}^{\infty} s_i^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t) \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_i(j\omega)e^{j\omega t}\, d\omega dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_i(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t)e^{j\omega t}\, dt d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_i(j\omega) S_i^*(j\omega) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |S_i(j\omega)|^2 d\omega
\end{aligned}
$$

- 输入信号能量为

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}s_i^2(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}s_i(t)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_i(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_i(j\omega)\int_{-\infty}^{\infty}s_i(t)e^{j\omega t}\,dtd\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_i(j\omega)S_i^*(j\omega)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|S_i(j\omega)|^2d\omega$$

$$\gamma=\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{|s_o(t_0)|^2}{\overline{n_o^2(t)}}=\frac{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\left[\int_{-\infty}^{\infty}S_i(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right]^2}{\frac{N_0}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2d\omega}$$

- 则

- 输入信号能量为

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}s_i^2(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}s_i(t)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_i(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_i(j\omega)\int_{-\infty}^{\infty}s_i(t)e^{j\omega t}\,dtd\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_i(j\omega)S_i^*(j\omega)d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|S_i(j\omega)|^2d\omega$$

$$\gamma=\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{|s_o(t_0)|^2}{\overline{n_o^2(t)}}$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\left[\int_{-\infty}^{\infty}S_i(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right]^2}{\frac{N_0}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2d\omega}$$

- 则

$$\frac{\gamma}{E}=\frac{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\left[\int_{-\infty}^{\infty}S_i(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right]^2}{\frac{N_0}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2d\omega\int_{-\infty}^{\infty}|S_i(j\omega)|^2d\omega}$$
$$=\frac{2\left[\int_{-\infty}^{\infty}S_i(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right]^2}{N_0\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2d\omega\int_{-\infty}^{\infty}|S_i(j\omega)|^2d\omega}$$

- 利用**Schwatz**不等式

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

等号充要条件：$f(x) = tg^*(x)$

- 利用Schwatz不等式

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

等号充要条件：$f(x) = tg^*(x)$

- 则

$$\boxed{\frac{\gamma}{E} = \frac{2\left[\int_{-\infty}^{\infty} S_i(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right]^2}{N_0\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2\int_{-\infty}^{\infty}|S_i(j\omega)|^2 d\omega}}$$

- 利用Schwatz不等式

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

等号充要条件：$f(x) = tg^*(x)$

$$\frac{\gamma}{E} = \frac{2\left[\int_{-\infty}^{\infty} S_i(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right]^2}{N_0\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2\int_{-\infty}^{\infty}|S_i(j\omega)|^2 d\omega}$$

- 则

$$\therefore \left|\int_{-\infty}^{\infty} S_i(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty}|S_i(j\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2 d\omega$$

$$\therefore \frac{\gamma}{E} \le \frac{2}{N_0} \qquad \left(\frac{S}{N}\right)_o \le \frac{2E}{N_0}$$

$$\frac{\gamma}{E}=\frac{2\left[\int_{-\infty}^{\infty}S_i(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right]^2}{N_0\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2\int_{-\infty}^{\infty}|S_i(j\omega)|^2d\omega}$$

$$\therefore\left|\int_{-\infty}^{\infty}S_i(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2\le\int_{-\infty}^{\infty}|S_i(j\omega)|^2d\omega\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2d\omega$$

$$\therefore\frac{\gamma}{E}\le\frac{2}{N_0}\qquad\left(\frac{S}{N}\right)_o\le\frac{2E}{N_0}$$

- 等号成立时要求

$$H(j\omega)=kS_i^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$\therefore \left|\int_{-\infty}^{\infty} S_i(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty}|S_i(j\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2 d\omega$$

代入 $H(j\omega) = kS_i^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}$ **后**

不等式左边：

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} S_i(j\omega)\left[kS_i^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}\right]e^{j\omega t_0}d\omega\right]^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} k|S_i(j\omega)|^2 d\omega\right]^2$$

不等式右边：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|S_i(j\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty}\left|kS_i^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}\right|^2 d\omega = \left[\int_{-\infty}^{\infty} k|S_i(j\omega)|^2 d\omega\right]^2$$

- 因此，匹配滤波器要求滤波器的频率特性是信号频谱复共轭

设 $S_i(j\omega) = |S_i(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$， $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$

- 因此，匹配滤波器要求滤波器的频率特性是信号频谱复共轭

设 $S_i(j\omega) = |S_i(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$，　　$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$

- 滤波器的幅频特性与信号频谱相同：

$$|H(j\omega)| = k|S_i(j\omega)|$$

- 因此，匹配滤波器要求滤波器的频率特性是信号频谱复共轭

设 $S_i(j\omega) = |S_i(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$，　$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$

- 滤波器的幅频特性与信号频谱相同：

$$|H(j\omega)| = k|S_i(j\omega)|$$

- 滤波器的相频特性与信号相频特性反号：

$$\varphi(\omega) = -[\theta(\omega) + \omega t_0]$$

- 因此，匹配滤波器要求滤波器的频率特性是信号频谱复共轭

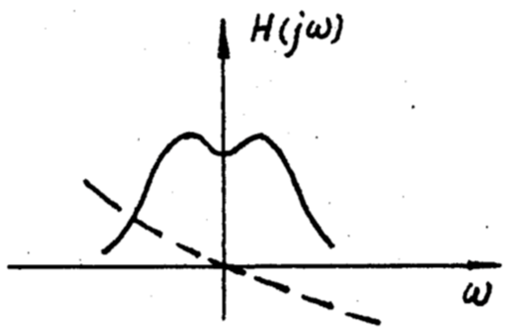
设 $S_i(j\omega) = |S_i(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$，$\quad H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$

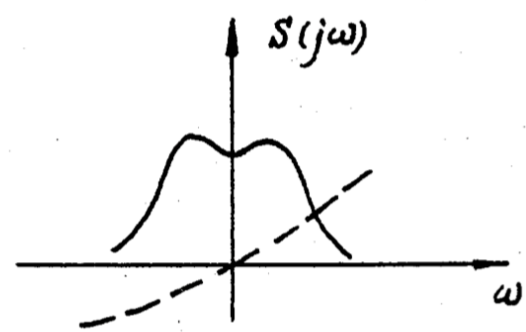
- 滤波器的幅频特性与信号频谱相同：

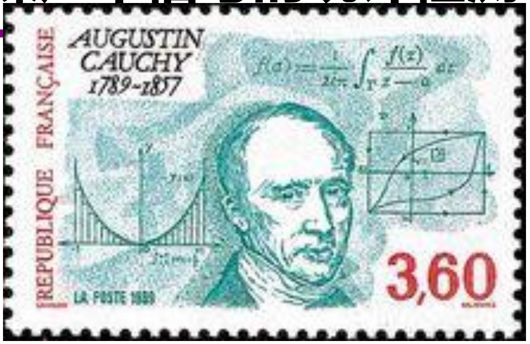
$$|H(j\omega)| = k|S_i(j\omega)|$$

- 滤波器的相频特性与信号相频特性反号：

$$\varphi(\omega) = -[\theta(\omega) + \omega t_0]$$



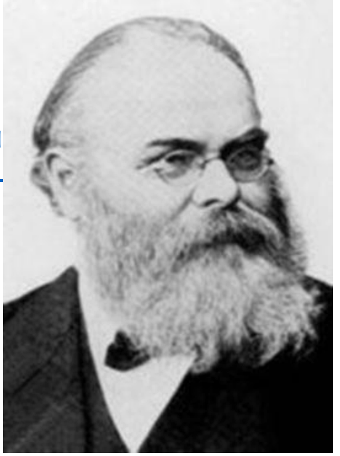




显然匹配滤波器的数学基础是柯西-施瓦兹不等式。

- 柯西（1789-1857）：法国大数学家、物理学家、天文学家。极限理论以及积分几何学的创始人之一。在常微分方程和弹性力学、代数等方面都有突出贡献。青少年时深受拉格朗日和拉普拉斯的器重，拉格朗日预言柯西日后必成数学大家。

（正凸n面体只有五种：n=4, 6, 8, 12, 20）



- 施瓦兹（1843-1921）：法国/德国大数学家，施瓦茨是继克罗内克、库默尔和魏尔斯特拉斯等人之后德国数学界的领导人之一，对20世纪初期的数学发展做出了重要贡献。

时域分析

- 从时域的观点来分析，求匹配滤波器的冲激响应

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} kS^*(j\omega)e^{j\omega(t-t_0)}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} kS_i(-j\omega)e^{j(-\omega)(t_0-t)}d\omega
\end{aligned}
$$

时域分析

- 从时域的观点来分析，求匹配滤波器的冲激响应

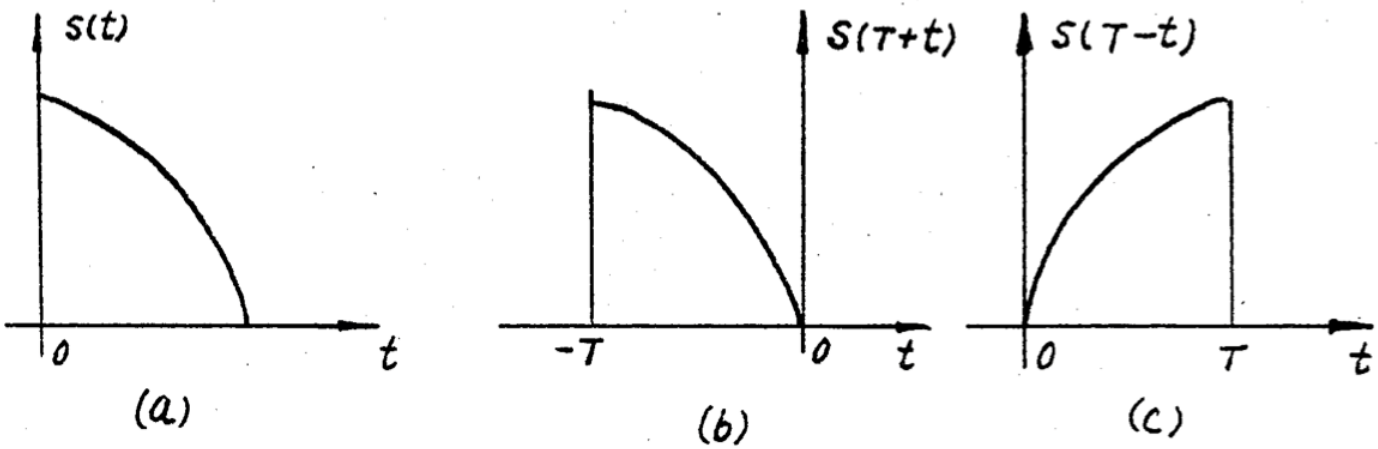
$$
\begin{aligned}
h(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} kS^*(j\omega)e^{j\omega(t-t_0)}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} kS_i(-j\omega)e^{j(-\omega)(t_0-t)}d\omega
\end{aligned}
$$

令 $\omega' = -\omega$

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} kS_i(j\omega')e^{j\omega'(t_0-t)}d\omega' \\
&= ks_i(t_0-t)
\end{aligned}
$$

- 匹配滤波器的冲激响应为信号时间函数的镜像

- 匹配滤波器冲激响应可以用作图的方法得到



- 信号左移T再绕纵轴翻转得到的镜像为冲激响应

- 信号经过匹配滤波器输出为

$$
\begin{aligned}
s_o(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_i(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_i(j\omega)e^{j\omega t}\int_{0}^{\infty} ks_i(t_0-\tau)e^{-j\omega t}\,d\tau d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} ks_i(t_0-\tau)\int_{-\infty}^{\infty} S_i(j\omega)e^{j\omega(t-\tau)}d\omega d\tau \\
&= \int_{0}^{\infty} ks_i(t_0-\tau)s_i(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{0}^{\infty} h(\tau)s_i(t-\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

- 匹配滤波器输出是信号与冲激响应的卷积，所以是信号的自相关函数

举例:单个矩形脉冲的匹配滤波器

$$s(t)=\begin{cases} a & 0\le t\le \tau \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

信号频谱

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\tau} ae^{-j\omega t}dt=\frac{a}{j\omega}(1-e^{-j\omega\tau})$$

取匹配滤波器的时间 $t_0=\tau$

匹配滤波器为

$$H(\omega)=\frac{ca}{-j\omega}(1-e^{j\omega\tau})e^{-j\omega\tau}=\frac{ca}{j\omega}(1-e^{-j\omega\tau})$$

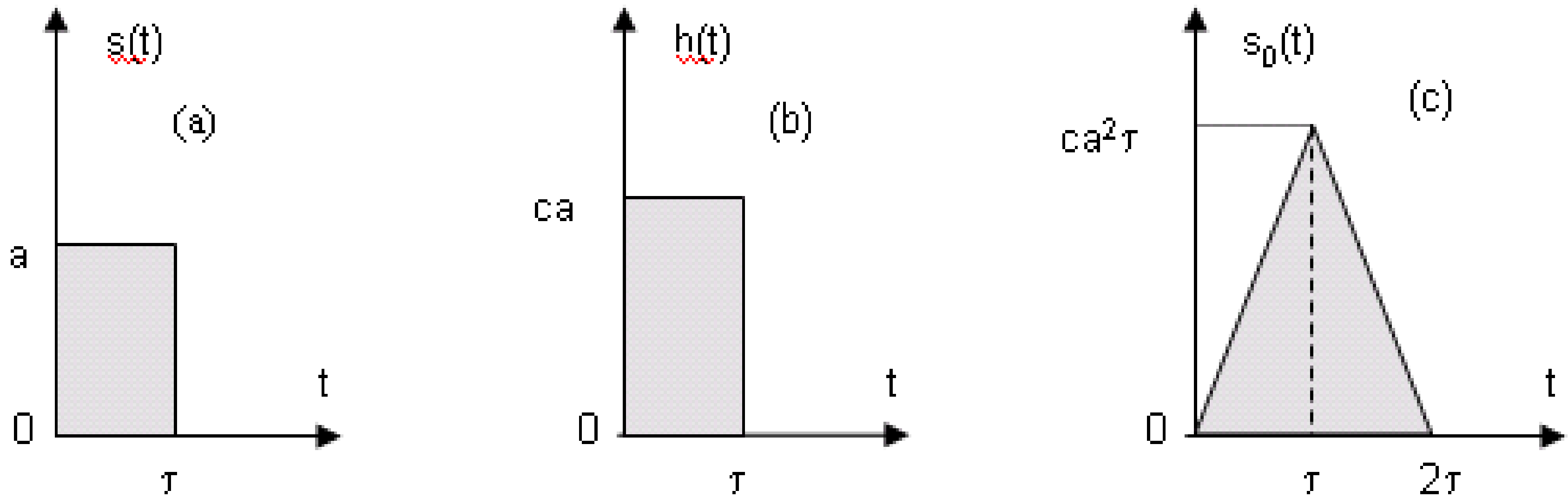
冲激响应为

$$h(t)=cs(t)$$

匹配滤波器的输出信号

$$s_0(t)=s(t)\otimes h(t)=cs(t)\otimes s(t)=\begin{cases} ca^2t & 0\le t\le\tau \\ ca^2(2\tau-t) & \tau\le t\le 2\tau \\ 0 & 0 \end{cases}$$

留意最大值的位置

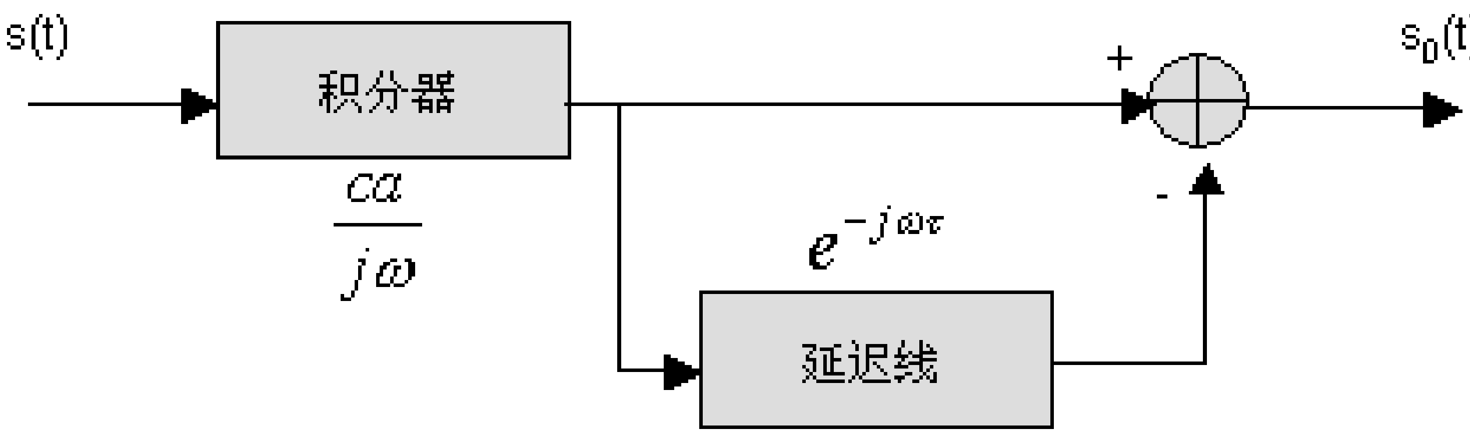


矩形脉冲的匹配滤波器

(a)矩形脉冲信号 (b)匹配滤波器的冲击响应(c)匹配滤波器的输出信号

匹配滤波器的实现

$$H(\omega)=\frac{ca}{j\omega}(1-e^{j\omega\tau})$$



矩形脉冲信号匹配滤波器实现框图

匹配滤波器的性质

1）输出的最大信噪比与输入信号的波形无关

$$d_m = \frac{1}{2\pi} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left| S(\omega) \right|^2 d\omega}{N_0 / 2} = \frac{2E}{N_0}$$

最大信噪比只与信号的能量和噪声的强度有关，与信号的波形无关

2）t_0应该选在信号s(t)结束之后

$$h(t) = cs(t_0 - t)$$

如果要求系统是物理可实现的,则t_0应该选在信号s(t)结束之后

3) 匹配滤波器对信号幅度和时延具有适应性

设 $s_1(t) = cs(t-\tau)$ $\quad S_1(\omega) = aS(\omega)e^{-j\omega\tau}$

$$
\begin{aligned}
H_1(\omega) &= cS_1^*(\omega)e^{-j\omega t_1} \\
&= caS^*(\omega)e^{-j\omega(t_1-\tau)} \\
&= caS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}e^{-j\omega(t_1-\tau-t_0)} \\
&= aH(\omega)e^{-j\omega(t_1-\tau-t_0)}
\end{aligned}
$$

$H(\omega)$

如果选择$t_1=\tau+t_0$ $\quad H_1(\omega) = aH(\omega)$

注意:对频移不具有适应性

$$S_2(\omega)=S(\omega+\omega_d)$$

$$H_2(\omega)=cS^*(\omega+\omega_d)e^{-j\omega t_0}$$

不同于H(ω)

结论

- 信号通过匹配滤波器，可以使 $\left(\frac{S}{N}\right)_o$ 达到最大。$\left(\frac{S}{N}\right)_{omax}=\frac{2E}{N_0}$ 。

- 匹配滤波器传输特性与信号频谱共轭

$$H(j\omega)=kS_i^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

- 匹配滤波器冲击响应等于输入信号时间函数的镜象

$$h(t)=ks_i(t_0-t)$$

- 信号通过匹配滤波器其输出等于信号的自相关函数

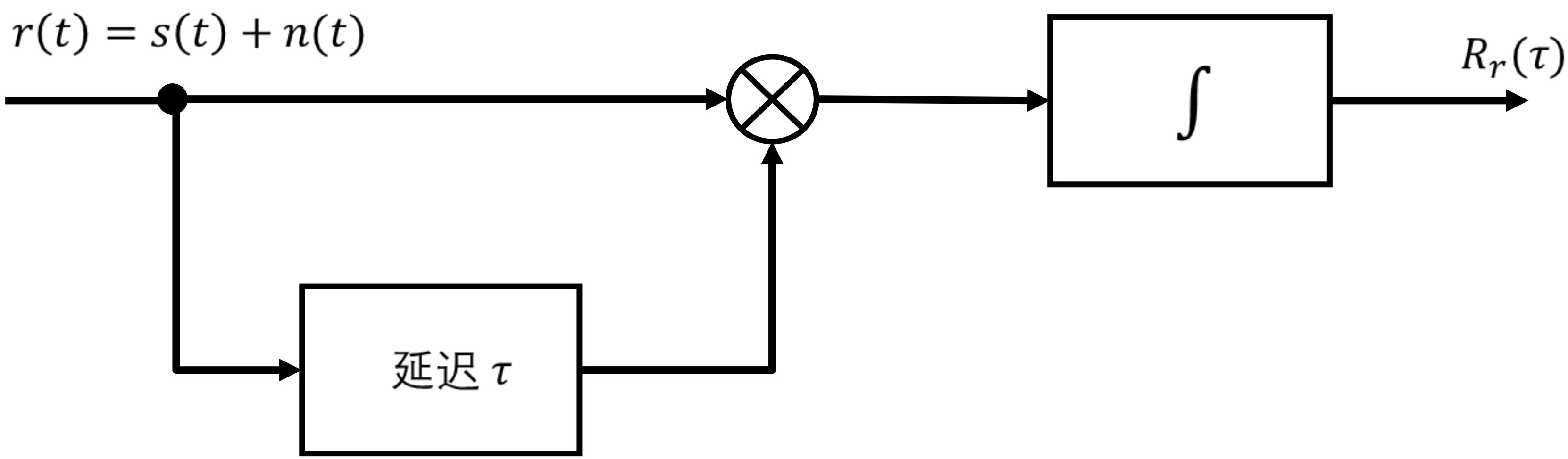
$$s_o(t)=\int_0^{\infty}ks_i(t_0-\tau)s_i(t-\tau)d\tau$$

3 相关器与匹配滤波器的关系

- 在讨论匹配滤波器的性质时已经知道，匹配滤波器的输出信号在形式上与输入信号的自相关函数相同。

- 在白噪声情况下，匹配滤波器和互相关器是等效的。

- 自相关器



- 自相关器可以在功率谱很宽的噪声干扰下，提取出周期信号来
- 自相关器输入信号 $r(t) = s(t) + n(t)$
- 自相关器的输出信号为

$$\begin{aligned} R_r(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(s(t) + n(t)\big)\big(s(t-\tau) + n(t-\tau)\big) dt \\ &= R_s(\tau) + R_n(\tau) + R_{sn}(\tau) + R_{ns}(\tau) \end{aligned}$$

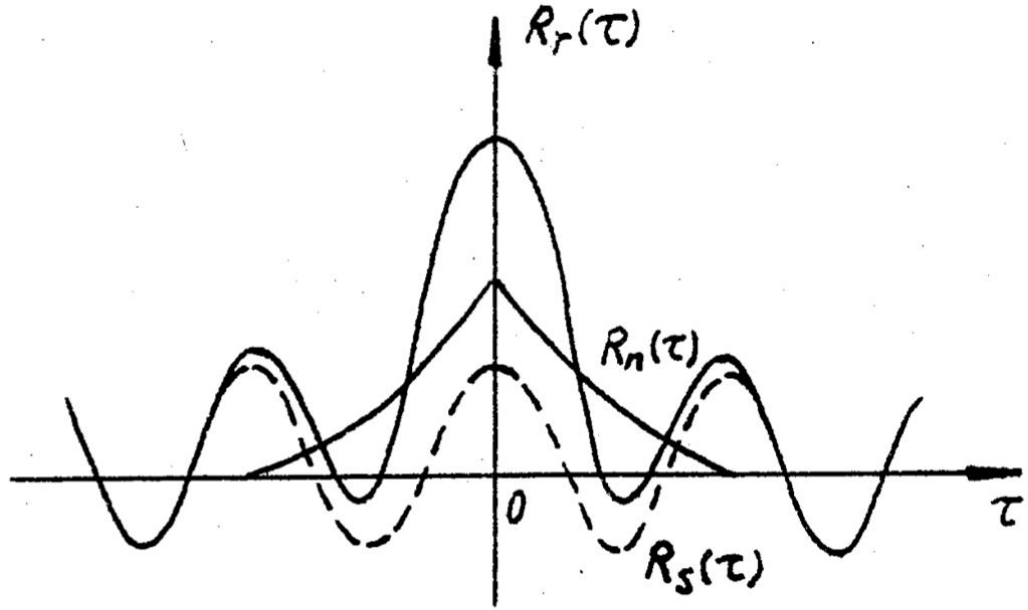
- 自相关器可以在功率谱很宽的噪声干扰下，提取出周期信号来
- 自相关器输入信号 $r(t) = s(t) + n(t)$
- 自相关器的输出信号为

$$
\begin{aligned}
R_r(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(s(t) + n(t)\big)\big(s(t-\tau) + n(t-\tau)\big)dt \\
&= R_s(\tau) + R_n(\tau) + R_{sn}(\tau) + R_{ns}(\tau)
\end{aligned}
$$

- 通常噪声均值为**0**

$$R_{sn}(\tau) = R_{ns}(\tau) = 0$$

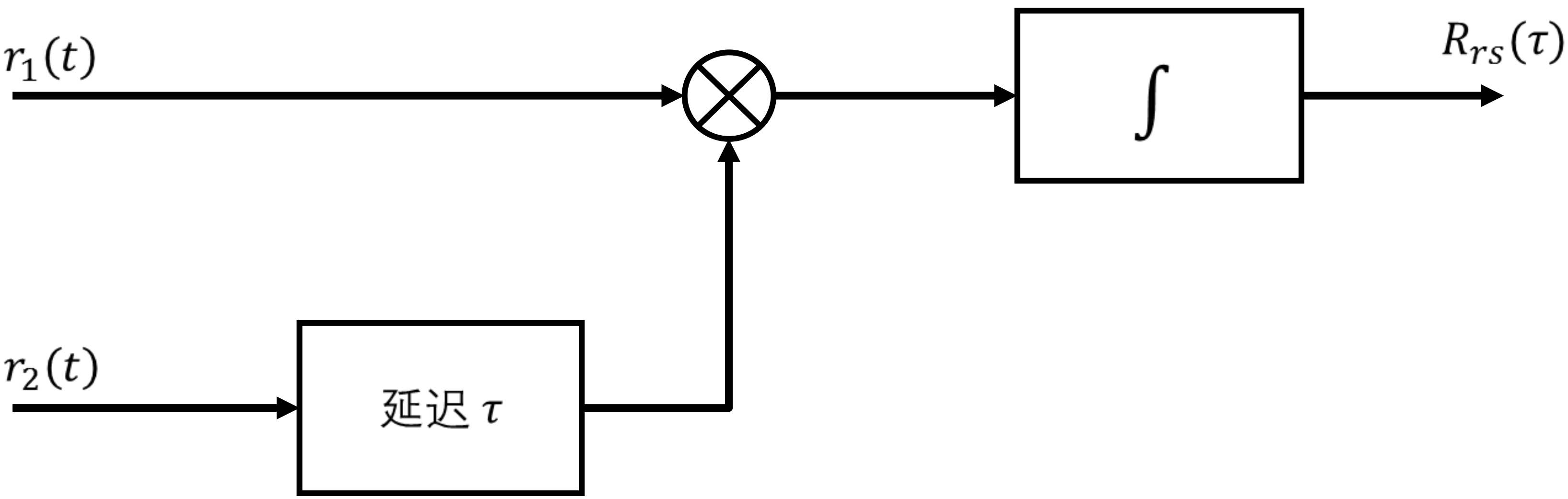
- 信号和噪声的自相关函数可用下图描述



- 自相关器能够用来检测周期信号，是基于噪声的相关时间比信号的相关时间小得多这一事实的。

- 互相关器

$$R_{r_1r_2} = \int_{-\infty}^{\infty} r_1(t)r_2(t-\tau)dt$$



- 雷达系统中，发射信号的形式通常是已知的，原理上较容易实现互相关接收

$$r_1(t) = s(t - t_r) + n(t) = r(t) \qquad t_r = \frac{2R}{C}$$

$$r_2(t) = s(t)$$

$$\begin{aligned} R_{rs}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(s(t - t_r) + n(t)\big) s(t - \tau) dt \\ &= R_r(\tau - t_r) + R_{ns}(\tau) \end{aligned}$$

- 雷达系统中，发射信号的形式通常是已知的，原理上较容易实现互相关接收

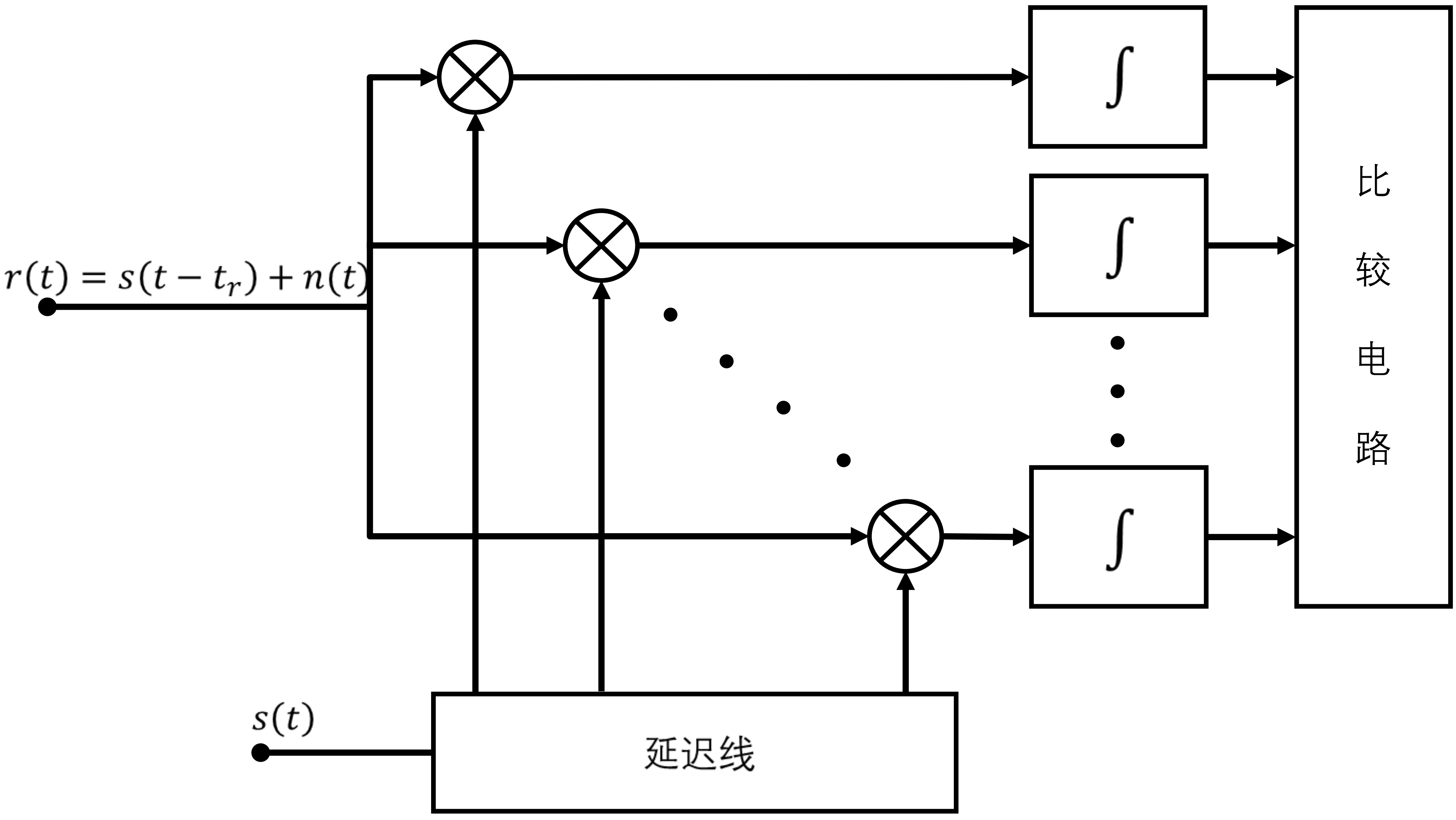
$$r_1(t) = s(t - t_r) + n(t) = r(t) \qquad t_r = \frac{2R}{C}$$

$$r_2(t) = s(t)$$

$$\begin{aligned} R_{rs}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(s(t - t_r) + n(t)\big) s(t - \tau) dt \\ &= R_r(\tau - t_r) + R_{ns}(\tau) \end{aligned}$$

- 当输入信号与噪声不相关时：$R_{ns}(\tau) = 0$
- 此时输出端得到输入信号的自相关函数
- 据此可以判决信号是否存在

- 互相关接收器



- 例：设信号 $s(t-t_r)$ 是振幅为$\boldsymbol{A}$，宽度为$\boldsymbol{\tau}$，重复周期为T_r，时延为 t_r 的$\boldsymbol{m}$个矩形视频脉冲串。若每个重复周期内时延 t_r 都相同，且满足

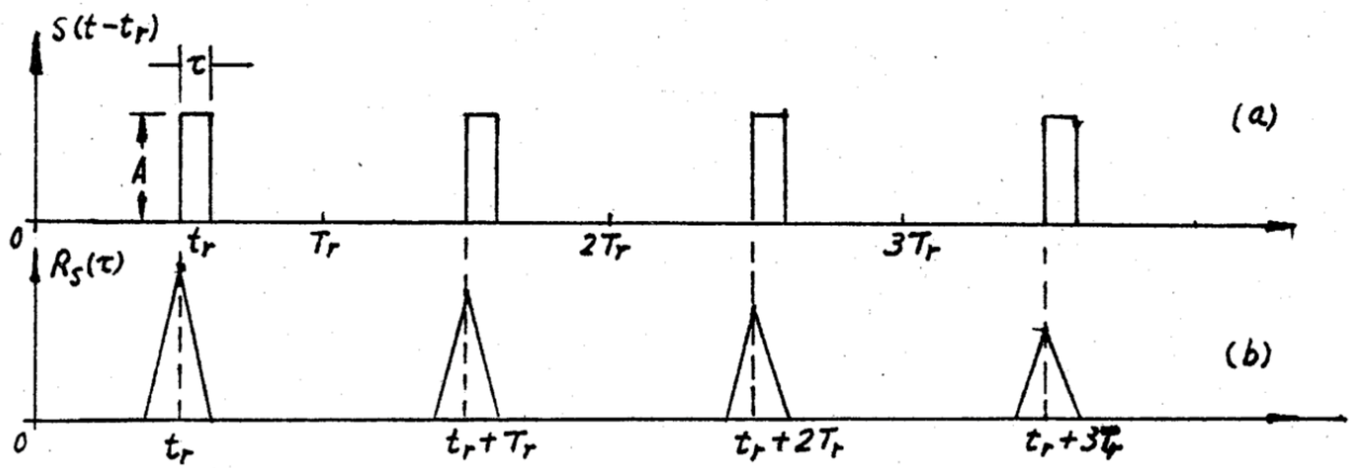
$$(i-1)T_r \le (i-1)T_r + t_r \le iT_r \quad i=1,2,\ldots m$$

- 求：信号的自相关函数 $R_s(\tau)$和互相关器输出的最大峰值信噪比

- 例：设信号 $s(t-t_r)$ 是振幅为$\boldsymbol{A}$，宽度为$\boldsymbol{\tau}$，重复周期为T_r，时延为 t_r 的$\boldsymbol{m}$个矩形视频脉冲串。若每个重复周期内时延 t_r 都相同，且满足

$$(i-1)T_r \le (i-1)T_r + t_r \le iT_r \quad i=1,2,\ldots m$$

- 求：信号的自相关函数 $R_s(\tau)$和互相关器输出的最大峰值信噪比



- $\boldsymbol{m}$个这样的信号的自相关函数$\boldsymbol{Rs}$ $(\boldsymbol{\tau})$为

$$R_s(\tau) = \int_0^{mT_r} s(t-t_r)s(t-\tau)dt$$

- 其高度为

$$R_s\left(\tau_j\right) = (m-j)E_s \qquad \tau_j = t_r + jT_r \quad j = 0,1,2 \ldots m$$

- m个这样的信号的自相关函数$Rs\ (\tau)$为

$$R_s(\tau) = \int_0^{mT_r} s(t - t_r)s(t - \tau)dt$$

- 其高度为

$$R_s(\tau_j) = (m - j)E_s \qquad \tau_j = t_r + jT_r \quad j = 0,1,2 \ldots m$$

- 当$\tau=t_r$时，$Rs\ (\tau)$具有最大峰值，其高度为

$$R_s(t_r) = mE_s$$

- 噪声与信号的互相关函数为输出噪声成份

$$R_{ns}(\tau) = \int_0^{mT_r} n(t)s(t - \tau)dt$$

- 输出噪声的平均功率为

$$\overline{n_o^2(t)} = \overline{R_{ns}^2(\tau)} = \int_0^{mT_r}\int_0^{mT_r}\overline{n(t_1)n(t_2)}s(t_1-\tau)s(t_2-\tau)dt_1dt_2$$

- 输出噪声的平均功率为

$$\overline{n_o^2(t)} = \overline{R_{ns}^2(\tau)} = \int_0^{mT_r}\int_0^{mT_r}\overline{n(t_1)n(t_2)}s(t_1-\tau)s(t_2-\tau)dt_1dt_2$$

- 若噪声是功率谱密度为 $\dfrac{N_0}{2}$ 的白噪声，则

$$\begin{aligned}\overline{n_o^2(t)} &= \frac{N_0}{2}\int_0^{mT_r}s^2(t-\tau)dt \\ &= \frac{N_0}{2}\sum_{i=1}^{m}\int_{(i-1)T_r}^{iT_r}s^2(t-\tau)dt = m\frac{N_0E_s}{2}\end{aligned}$$

- 互相关器输出的最大峰值信噪比为

$$\frac{R_s^2(t_r)}{\overline{n_o^2(t)}} = m\frac{2E_s}{N_0}$$

- 采用自相关器接收信号时，不需要预先知道接收信号$s(t)$的形式,这比需要预先知道信号$s(t)$形式的互相关器应用范围要广一些

- 互相关器与匹配滤波器的关系
- 互相关器输入信号 $r(t) = s(t) + n(t)$
- 互相关器输出信号 $y_c(t) = \int_0^t r(t)s(t)dt$

$$t \geq T: \quad y_c(t \geq T) = \int_0^T r(t)s(t)dt$$

- 匹配滤波器冲激响应函数 $h(t) = s(t_0 - t)$
- 匹配滤波器输出

$$y_m(t) = \int_0^t h(\tau)r(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t s(T-\tau)r(t-\tau)d\tau$$

$$y_m(t=T) = \int_0^T s(T-\tau)r(T-\tau)d\tau$$

$$= \int_0^T s(\tau')r(\tau')d\tau' \qquad (\tau' = T - \tau)$$

- 在白噪声情况下，匹配滤波器和互相关器在 $t=T$ 时刻是等效的，可以用匹配滤波器代替互相关器来组成最佳的检测系统。
- 在具体应用中，匹配滤波器和互相关器考虑问题的出发点和实现方法是有差别的。
- 互相关器：主要考虑输入信号时域上的特性，对互相关器的综合在时域上进行
- 匹配滤波器：主要考虑输入信号频域上的特性，对匹配滤波器的综合在频域上进行
- 实际应用中，必须根据输入信号时间函数和频谱密度函数的不同特性，考虑用互相关器还是匹配滤波器。

3.色噪声下的匹配滤波器

- 依据伯恩斯坦多项式，若 $f(x) \in \mathbb{C}[0,1]$

其n阶伯恩斯坦多项式：$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{x}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$

伯恩斯坦(1880～1968)
(德国？)苏联大数学家？

3.色噪声下的匹配滤波器

- 依据伯恩斯坦多项式，若 $f(x) \in \mathbb{C}[0,1]$

其n阶伯恩斯坦多项式：$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{x}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$

伯恩斯坦(1880～1968)
(德国？)苏联大数学家？

- **1964年，Newman给出了 |x| 在[-1, 1]上的一个有理函数逼近：**

$$p(x) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(x + a^k\right),\quad r_n(x) = \frac{x[p(x) - p(-x)]}{p(x) + p(-x)}.$$

其中 $a = e^{-1/\sqrt{\pi}}$

$$\left||x| - r_n(x)\right| \le \frac{2}{e^{\sqrt{n}} - 1} \le 3e^{-\sqrt{n}} \quad (n \ge 5).$$

$$\sqrt{1+x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}0.5(0.5-1)\ldots(0.5-(n-1))\ x^{n}\Big/ n!$$

$$R_3(x)=\frac{x^3+18x^2+48x+32}{6x^2+32x+32}$$

令 $x=1$ 可得： $\sqrt{2}\approx \mathrm{R}_3\ (1)=\dfrac{99}{70}=1.41429\ldots$

实际上，$\sqrt{2}=1.414213\cdots$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ x^{n}\Big/n$$

$$R_4(x)=\frac{420x+630x^2+260x^3+25x^4}{420+840x+540x^2+120x^3+6x^4}.$$

$$\ln 2\approx R_4(1)=0.6931463\ldots$$

误差小于 10^{-6}

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ x^n \Big/ n$$

$$R_4(x)=\frac{420x+630x^2+260x^3+25x^4}{420+840x+540x^2+120x^3+6x^4}.$$

$$\ln 2\approx R_4(1)=0.6931463\ldots$$

误差小于 10^{-6}

$$e^x=1+\sum_{1}^{\infty}\ x^n \Big/ n!$$

$$e^x\approx\frac{1680+840x+180x^2+20x^3+x^4}{1680-840x+180x^2-20x^3+x^4}\qquad e\approx\frac{2721}{1001}$$

误差小于 10^{-7}

4. 色噪声下的匹配滤波器

- 假设色噪声的功率谱密度函数 $\Phi_n(w)$ 是一个连续函数, 则它可以近似为一个有理函数。

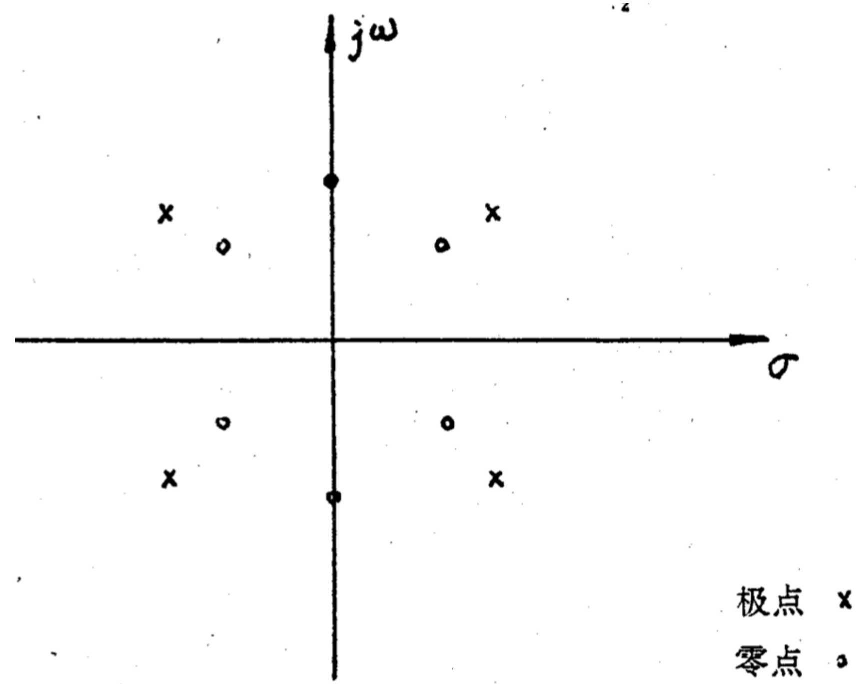
$$\Phi_n(s) \approx P_n(s) / Q_m(s) = a^2 \frac{\prod_{i=1}^{n}(s-\alpha_i)}{\prod_{i=1}^{m}(s-\beta_i)}$$

$$\alpha_k \neq \beta_l$$

其中 α_k 和 β_l 分别是 $\Phi_n(s)$ 的零点和极点

在 $\sigma+j\omega$的复数平面上，零点和极点的分布特点为

- 对于σ轴对称，否则 $\Phi_n(s)$ 将不是实的。
- 对于$j\omega$轴对称，否则 $\Phi_n(s)$ 将不是偶的。
- 在$j\omega$轴上任何零点都成对出现，否则将对ω的某些值是负的。
- 在$j\omega$轴上没有极点。



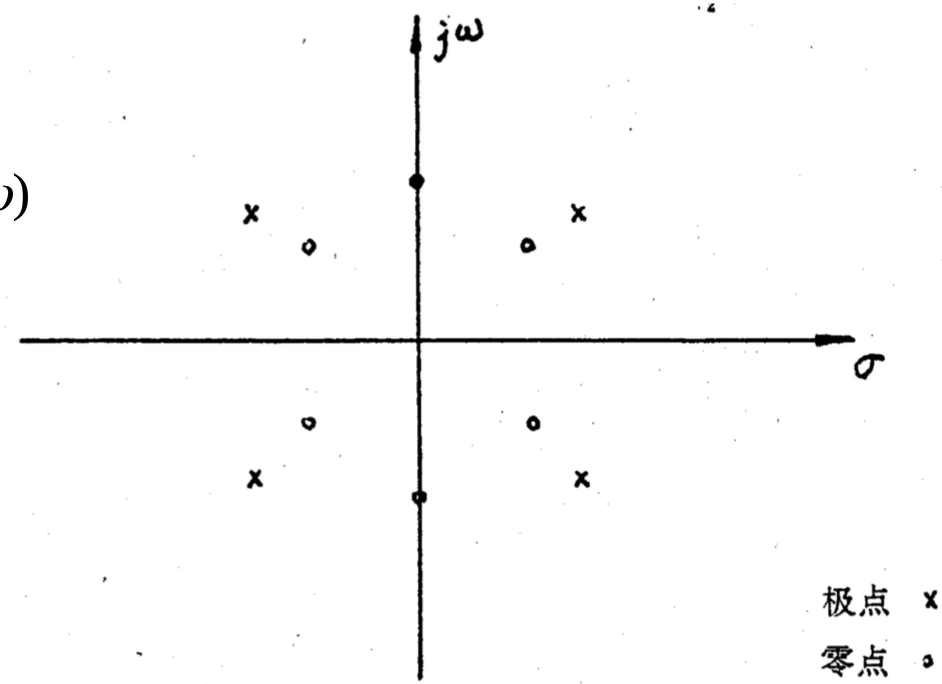
在 $\sigma+j\omega$的复数平面上，零点和极点的分布特点为

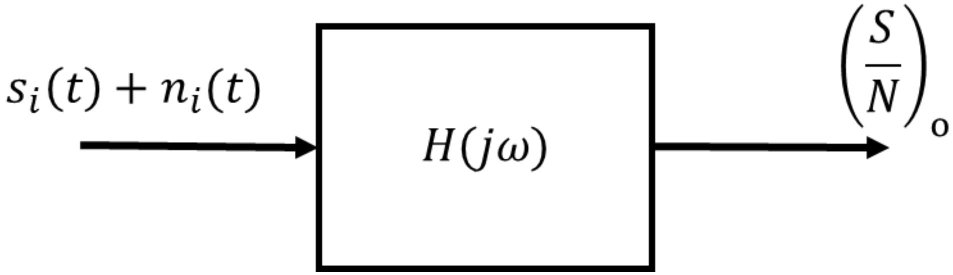
- 对于σ轴对称，否则 $\Phi_n(s)$ 将不是实的。
- 对于$j\omega$轴对称，否则 $\Phi_n(s)$ 将不是偶的。
- 在$j\omega$轴上任何零点都成对出现，否则将对ω的某些值是负的。
- 在$j\omega$轴上没有极点。

$$\Phi_n(s)=\Phi_n(j\omega)\equiv\Phi_n(\omega)=G_n^+(\omega)\,G_n^-(\omega)$$

$$G_n^+(\omega)=a\frac{(j\omega-\alpha_1)\cdots(j\omega-\alpha_{\frac{n}{2}})}{(j\omega-\beta_1)\cdots(j\omega-\beta_{\frac{m}{2}})}$$

$$G_n^-(\omega)=a\frac{(j\omega-\alpha_1^*)\cdots(j\omega-\alpha_{\frac{n}{2}}^*)}{(j\omega-\beta_1^*)\cdots(j\omega-\beta_{\frac{m}{2}}^*)}$$





- 计算使输出信噪比最大的线性滤波器的传递函数
- 设滤波器的输入信号$s_i(t)$，其频谱为 $S_i(jw)$
- 在滤波器的输出端，得到的信号为

$$s_o(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_i(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

- 滤波器输出端噪声的平均功率为

$$\overline{n_o^2(t)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_n(\omega)|H(j\omega)|^2d\omega$$

- 在 $t=t_0$ 时刻，滤波器输出瞬时功率信噪比为

$$\frac{|s_o(t_0)|^2}{\overline{n}_0^2(t)}=\frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_i(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_n(\omega)|H(j\omega)|^2d\omega}=\frac{1}{2\pi}\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty}S(j\omega)/G_n^-(\omega)\cdot H(j\omega)G_n^-(\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_n(\omega)|H(j\omega)|^2d\omega}$$

- 在 $t=t_0$ 时刻，滤波器输出瞬时功率信噪比为

$$\frac{|s_o(t_0)|^2}{\overline{n}_0^2(t)}=\frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_i(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_n(\omega)|H(j\omega)|^2d\omega}=\frac{1}{2\pi}\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty}S(j\omega)/G_n^-(\omega)\cdot H(j\omega)G_n^-(\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_n(\omega)|H(j\omega)|^2d\omega}$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{S_i(j\omega)}{G_n^-(\omega)}\right|^2d\omega\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|G_n^-(\omega)|^2|H(j\omega)|^2d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_n(\omega)|H(j\omega)|^2d\omega}$$

- 在 $t = t_0$ 时刻，滤波器输出瞬时功率信噪比为

$$\frac{|s_o(t_0)|^2}{\overline{n_0^2(t)}} = \frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_i(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_n(\omega)|H(j\omega)|^2 d\omega} = \frac{1}{2\pi}\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)/G_n^-(\omega)\cdot H(j\omega)G_n^-(\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_n(\omega)|H(j\omega)|^2 d\omega}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{S_i(j\omega)}{G_n^-(\omega)}\right|^2 d\omega\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|G_n^-(\omega)|^2|H(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_n(\omega)|H(j\omega)|^2 d\omega}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{S_i(j\omega)}{G_n^-(\omega)}\right|^2 d\omega$$

- 在 $t = t_0$ 时刻，滤波器输出瞬时功率信噪比为

$$\frac{|s_o(t_0)|^2}{\overline{n_0^2}(t)} = \frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_i(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_n(\omega)|H(j\omega)|^2 d\omega} = \frac{1}{2\pi}\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)/G_n^-(\omega)\cdot H(j\omega)G_n^-(\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_n(\omega)|H(j\omega)|^2 d\omega}$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{S_i(j\omega)}{G_n^-(\omega)}\right|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty}|G_n^-(\omega)|^2|H(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_n(\omega)|H(j\omega)|^2 d\omega}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{S_i(j\omega)}{G_n^-(\omega)}\right|^2 d\omega$$

- 等号取到的条件：

$$k\left(S_i(j\omega)/G_n^-(j\omega)\right)^* = G_n^-(j\omega)H(j\omega)e^{(j\omega t_0)}$$

- 根据施瓦兹不等式中等号成立的条件，则

$$k\left(S_i(j\omega)/G_n^-(j\omega)\right)^* = G_n^-(j\omega)H(j\omega)e^{(j\omega t_0)}$$

$$H(j\omega) = \frac{k}{G_n^-}\left(\frac{S_i(j\omega)}{G_n^-(j\omega)}\right)^* e^{-j\omega t_0} = \frac{kS_i^*(j\omega)}{\Phi_n(\omega)}e^{-j\omega t_0}$$

- 根据施瓦兹不等式中等号成立的条件，则

$$k\left(S_i(j\omega)/G_n^-(j\omega)\right)^* = G_n^-(j\omega)H(j\omega)e^{(j\omega t_0)}$$

$$H(j\omega) = \frac{k}{G_n^-}\left(\frac{S_i(j\omega)}{G_n^-(j\omega)}\right)^* e^{-j\omega t_0} = \frac{kS_i^*(j\omega)}{\Phi_n(\omega)}e^{-j\omega t_0}$$

- 匹配滤波器的传递函数***H(jω)***相当于两个滤波器的串联

$$H(j\omega) = W(j\omega)\cdot M(j\omega)$$

$$W(j\omega) = k_1\frac{1}{G_n^-(\omega)}$$

$$M(j\omega) = k_2\frac{S_i^*(j\omega)}{\left[G_n^-(\omega)\right]^*}e^{-j\omega t_0} \qquad k = k_1\cdot k_2$$

色噪声情况下的匹配滤波器

- 输入信号加噪声通过前一个滤波器变为白噪声

$$\Phi_{nw}(w)=\Phi_n(\omega)\cdot|W(j\omega)|^2=\Phi_n(\omega)k_1^2\frac{1}{|G_n^-(\omega)|}=k_1^2$$

色噪声情况下的匹配滤波器

- 输入信号加噪声通过前一个滤波器变为白噪声

$$\Phi_{nw}(w)=\Phi_n(\omega)\cdot\left|W(j\omega)\right|^2=\Phi_n(\omega)k_1^2\frac{1}{\left|G_n^-(\omega)\right|^2}=k_1^2$$

- 信号通过第一个滤波器后，输出信号$s_w(t)$的频谱密度为

$$S_w(jw)=S_i(j\omega)W(j\omega)=k_1\frac{S_i(j\omega)}{G_n^-(\omega)}$$

色噪声情况下的匹配滤波器

- 输入信号加噪声通过前一个滤波器变为白噪声

$$\Phi_{nw}(w)=\Phi_n(\omega)\cdot|W(j\omega)|^2=\Phi_n(\omega)k_1^2\frac{1}{|G_n^-(\omega)|}=k_1^2$$

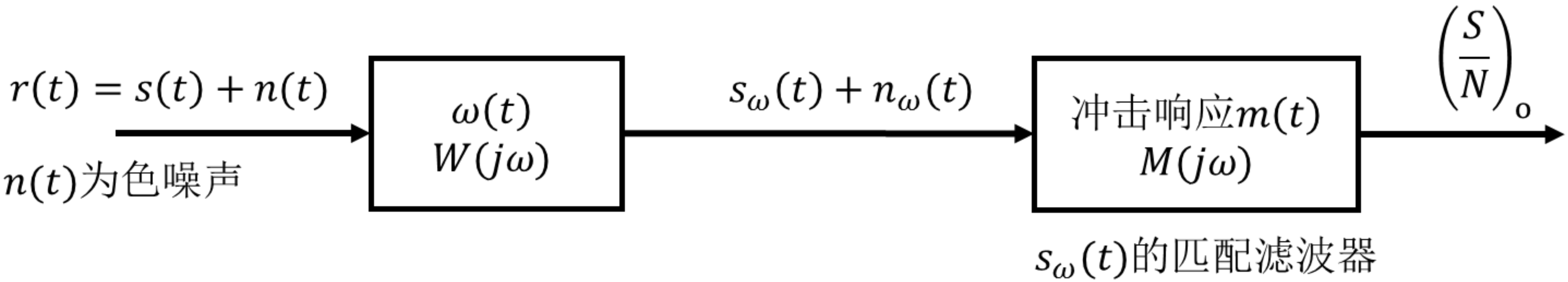
- 信号通过第一个滤波器后，输出信号$s_w(t)$的频谱密度为

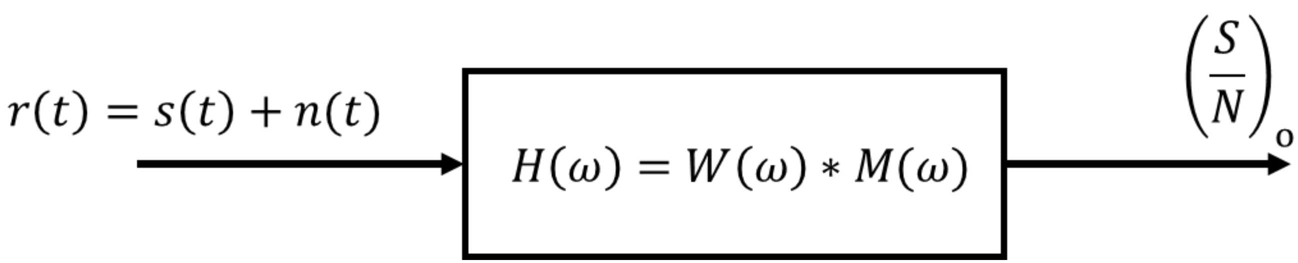
$$S_w(jw)=S_i(j\omega)W(j\omega)=k_1\frac{S_i(j\omega)}{G_n^-(\omega)}$$

- 第二个滤波器是白噪声情况下信号$s_w(t)$进行匹配滤波

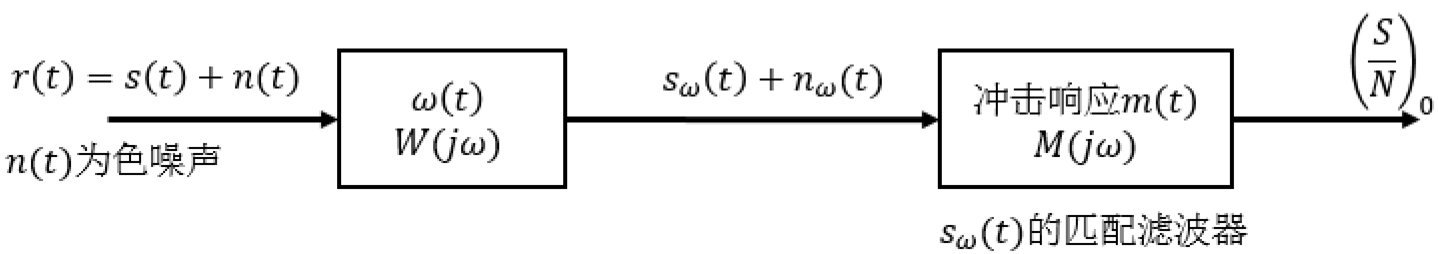
$$M(j\omega)=k_2'S_w^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}=k_2'k_1\frac{S_i^*(j\omega)}{[G_n^-(\omega)]^*}e^{-j\omega t_0}=k_2\frac{S_i^*(j\omega)}{[G_n^-(\omega)]^*}e^{-j\omega t_0}$$

- 予白化方法：利用一个线性滤波器，把色噪声过滤成白噪声，然后再利用熟知的白噪声处理方法





- 初始接收信号 $r(t)=s(t)+n(t)$
- 经过白化滤波输出信号 $s_w(t)+n_w(t)$
- 有用信号成份 $s_\omega(t)=s(t)*\omega(t)$
- 白噪声 $n_\omega(t)=n(t)*\omega(t)$
- 通过白噪声情况下的匹配滤波器，选择 $t=T$ 为抽样时刻，则传递函数为 $M(\omega)=S_\omega^*(\omega)e^{-j\omega T}$
- 其中 $S_\omega(j\omega)=S(j\omega)\cdot W(j\omega)$



复习：

理解和掌握几个基本方法：

广义似然比检测

序贯检测

匹配滤波器（白噪声下）

噪声预白化、色噪声下的匹配滤波器

数学的本质

作业:

信号：$x(t)=1-\cos\omega_0 t \quad (0\le t\le 2\pi/\omega_0)$

噪声：$\Phi_{\mathrm{n}}(\omega)=\omega_1^2/(\omega^2+\omega_1^2)$

设 $T=2\pi/\omega_0$，求匹配滤波器及最大信噪比。

谢谢大家！

自己做到并提醒家人注意自我防护！