Klausur zur Vorlesungsveranstaltung Wärme- und Stoffübertragung

12.02.2011

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________________

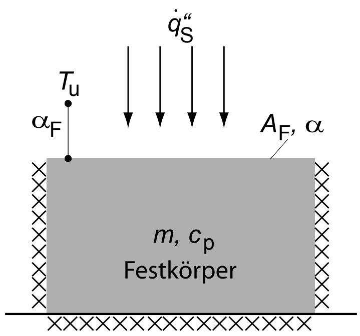
Aufgabe 1 (Teilaufgaben a – d, 17 Punkte)

Dieser Aufgabenteil enthält vier unabhängig voneinander lösbare Teilaufgaben. In allen Teilaufgaben sind die im Text und in den Zeichnungen gegebenen Größen bekannt. Die Stoffwerte sind konstant. Dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg und die Lösung unterhalb der Aufgabenstellung. Bei Aufgabenteil d) reicht die Dokumentation der Ergebnisse.

a) Ein Festkörper wird plötzlich einer senkrecht einfallenden Strahlungsdichte $\dot{q}_S''$ ausgesetzt. Der Körper ist grau (Absorptionsgrad α, Transmissionsgrad $\tau = 0$). Für den konvektiven Wärmeübergang zur Umgebung gilt der Wärmeübergangskoeffizient α_F. Die Temperatur im Körper ist zu jedem Zeitpunkt als homogen anzunehmen. Stellen Sie eine Differentialgleichung für die zeitliche Änderung der Festkörpertemperatur T_F auf. (5 P)

Hinweise:

- Über die Seitenwände und den Boden des Festkörpers geht kein Wärmestrom verloren.
- Die Strahlung der Umgebung ist zu vernachlässigen.

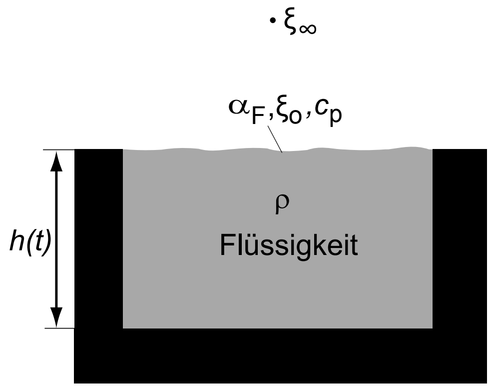


b) Zur Kühlung eines Rohres (mit Durchmesser D) wird dieses von Luft (Temperatur T_L, Druck p_L, Volumenstrom $\dot{V}_\mathrm{L}$) turbulent durchströmt. Wie ändert sich der Wärmeübergangskoeffizient bei Erhöhung des Druckes p_L, wenn Temperatur T_L und Volumenstrom $\dot{V}_\mathrm{L}$ konstant bleiben? Begründen Sie Ihre Antwort anhand der relevanten Kennzahlen. (4 P)

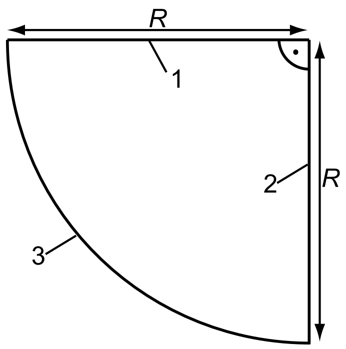
Hinweise:

- Luft kann als ideales Gas betrachtet werden.
- Die Stoffwerte η, λ und c_p sind konstant.

c) Eine Schale ist mit Flüssigkeit gefüllt, die eine zeitlich konstante Temperatur besitzt. Der Wärmeübergangskoeffizient an der Flüssigkeitsoberfläche α_{F} ist bekannt. Über die Wände und den Boden der Schale findet kein Wärme- oder Stofftransport statt. Die Analogie zwischen Wärme- und Stoffübertragung nach dem Lewisschen Gesetz kann angewendet werden. Stellen Sie eine Differentialgleichung ($\frac{dh}{dt}$) für die zeitliche Änderung der Füllhöhe auf. (3 P)



d) Gegeben ist ein unendlich langes Rohrsegment (Draufsicht siehe Zeichnung). Geben Sie die Einstrahlzahlen Φ_{12}, Φ_{31} und Φ_{33} in Abhängigkeit von Φ_{13} an. Bestimmen Sie anschließend den Zahlenwert von Φ_{13}. (5 P)



Φ_{12} =

Formel

Φ_{31} =

Formel

Φ_{33} =

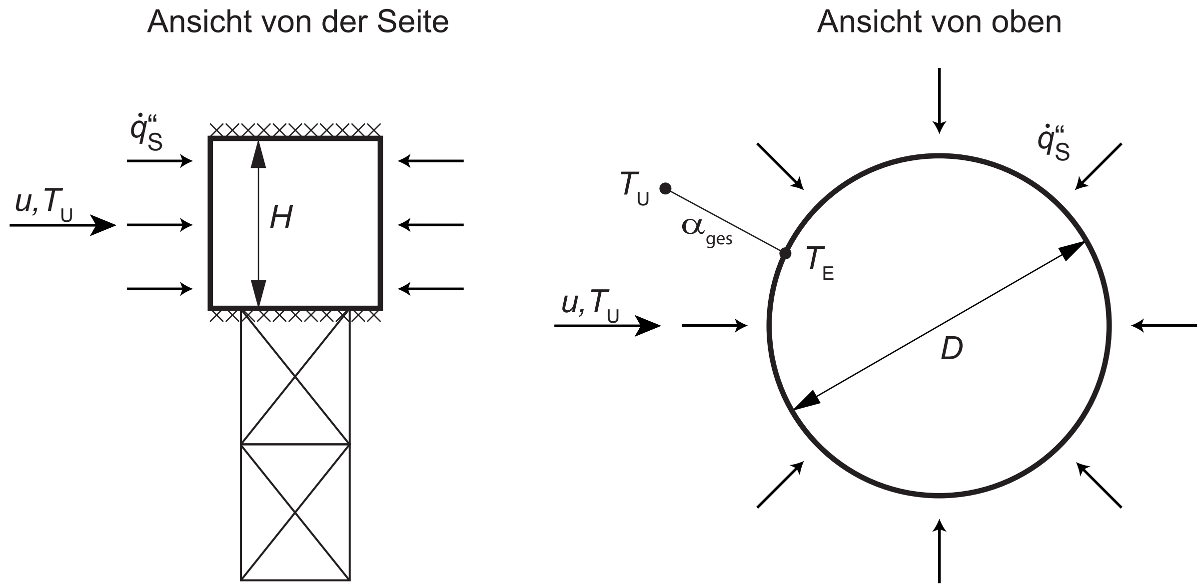
Formel

Φ_{13} =

Wert

Aufgabe 2 (Teilaufgaben a/b, 10 Punkte)

Im einem Solarturmkraftwerk wird Sonnenstrahlung von Spiegeln homogen und radial auf einen zentralen, zylinderförmigen Empfänger (Durchmesser D, Höhe H) konzentriert (Strahlungsdichte $\dot{q}''_\mathrm{S}$). Die Empfängeroberfläche wird dadurch auf eine mittlere Temperatur $T_\mathrm{E} = 480°\mathrm{C}$ aufgeheizt. Die aufgenommene thermische Leistung des Kraftwerks ist $\dot{Q}_\mathrm{th}$.



a) Berechnen Sie die konvektiven Wärmeverluste $\dot{Q}_\mathrm{K}$ sowie die Wärmeverluste durch Strahlung $\dot{Q}_\mathrm{S}$ (Eigenemission des Empfängers) an der Außenseite des Empfängers. Bestimmen Sie für die Berechnung der konvektiven Verluste zunächst getrennt die Wärmeübergangskoeffizienten für erzwungene (Windgeschwindigkeit $u = 3\,\mathrm{m/s}$) und natürliche Konvektion und führen Sie diese nach der Formel $\alpha_\mathrm{ges} = \left((\alpha_\mathrm{nat})^a + (\alpha_\mathrm{erzw})^a\right)^{\frac{1}{a}}$ mit $a = 3{,}2$ zusammen. (9 P)

b) Bestimmen Sie aus einer Bilanz um den Empfänger die mittlere Strahlungsdichte $\dot{q}''_\mathrm{S}$ in Abhängigkeit von der thermischen Leistung $\dot{Q}_\mathrm{th}$. Setzen Sie hierzu in Aufgabenteil a) bestimmte Größen als bekannt voraus. (1 P)

Hinweis: Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Aufgabenteil a) gelöst werden.

Fortsetzung auf der nächsten Seite...

Hinweise:

- Wärmeverluste im Inneren des Empfängers und an den Enden können vernachlässigt werden.
- Strahlung aus der Umgebung kann vernachlässigt werden.
- Der Empfänger kann als grauer Strahler angenommen werden.

Zahlenwerte:

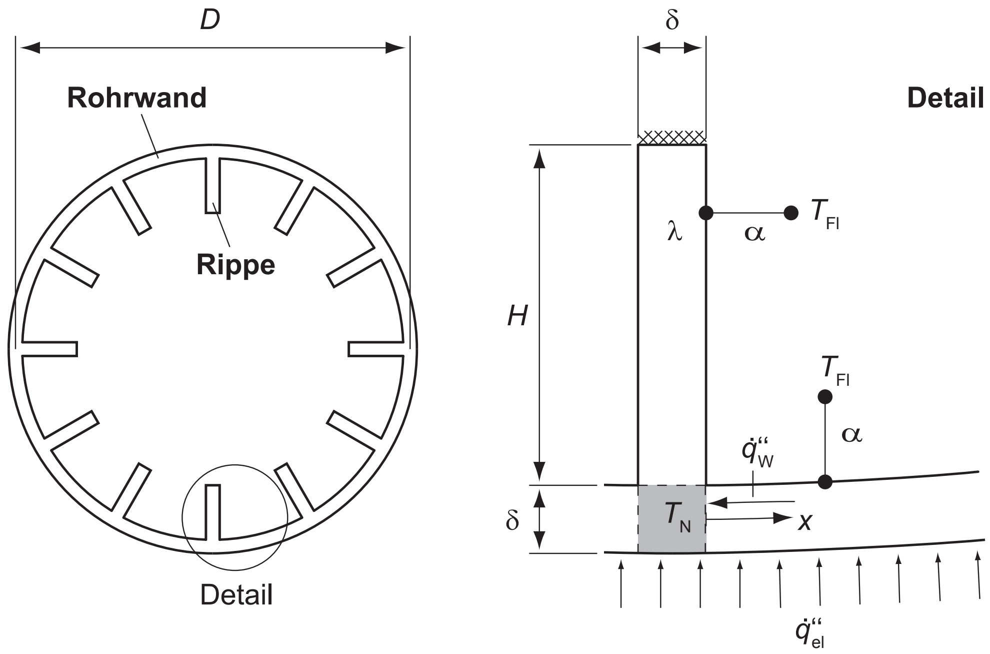
Empfänger:	
Empfängerhöhe:	$H = 5\,\mathrm{m}$
Außendurchmesser Empfänger:	$D = 5\,\mathrm{m}$
Oberflächentemperatur:	$T_\mathrm{E} = 480\,°\mathrm{C}$
Emissionsgrad der Empfängeroberfläche:	$\varepsilon = 0{,}95$
Umgebungsbedingungen:	
Windgeschwindigkeit:	$u = 3\,\mathrm{m/s}$
Umgebungstemperatur:	$T_\mathrm{U} = 20\,°\mathrm{C}$

Stoffdaten von Luft

T	ν	λ	ρ	Pr
°C	$10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$	$10^{-3}\,\mathrm{W/(m\cdot K)}$	$\mathrm{kg/m^3}$	-
20	15,35	25,69	1,188	0,7148
145	28,67	34,41	0,833	0,7053
250	42,11	41,06	0,665	0,7063
355	57,44	47,34	0,554	0,7112
480	77,91	54,51	0,463	0,7183

Aufgabe 3 (Teilaufgaben a – d, 16 Punkte)

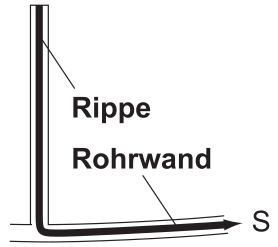
Ein Rohr (Durchmesser D, Wandstärke δ, Wärmeleitfähigkeit λ) wird von einem Wärmeträgerfluid durchströmt (Temperatur T_{Fl}, Wärmeübergangskoeffizient α). Zur Verbesserung des Wärmeübergangs sind in Strömungsrichtung 12 ebene Rippen angeordnet (Dicke δ, Wärmeleitfähigkeit λ, Rippenkopf adiabat). Das Rohr wird von außen elektrisch beheizt (Wärmestromdichte $\dot{q}''_{\mathrm{el}}$). In der Rohrwand stellt sich in Umfangsrichtung x ein eindimensionales Temperaturprofil ein. In der Nahtstelle zwischen Rohrwand und Rippe (grau hinterlegt) stellt sich die Temperatur T_{N} ein. Im Folgenden soll die Rippenhöhe H bestimmt werden.



a) Leiten Sie die Differentialgleichung für das Temperaturprofil in der Rohrwand her und stellen Sie geeignete Randbedingungen auf. (7 P)

Hinweis: Die Krümmung des Rohres ist zu vernachlässigen. Homogenisieren Sie die Differentialgleichung mit der Übertemperatur $\Theta = T - T^*$ mit $T^* = T_{\mathrm{Fl}} + \dot{q}''_{\mathrm{el}}/\alpha$.

b) Zeichnen Sie qualitativ das Temperaturprofil entlang der Sehne S. Machen Sie die Gradienten an den Enden der Kurvenabschnitte kenntlich und begründen Sie diese kurz. (3 P)



Fortsetzung auf der nächsten Seite...

c) Formulieren Sie den auf die Rohrlänge bezogenen Wärmestrom $\dot{q}'_{\mathrm{W}}$, der von der Rohrwand in eine Nahtstelle fließt, als Funktion bekannter Größen. (3 P)

d) Bestimmen Sie die Rippenhöhe H als Funktion bekannter Größen. Der Wärmestrom $\dot{q}'_{\mathrm{W}}$ darf als bekannt angenommen werden, auch wenn Sie Aufgabenteil c) nicht lösen konnten. (3 P)

Hinweise:

- Die Nahtstelle ist vernachlässigbar klein ($\delta \ll D, H$).
- Die Temperatur in der Nahtstelle ist homogen (T_{N}).

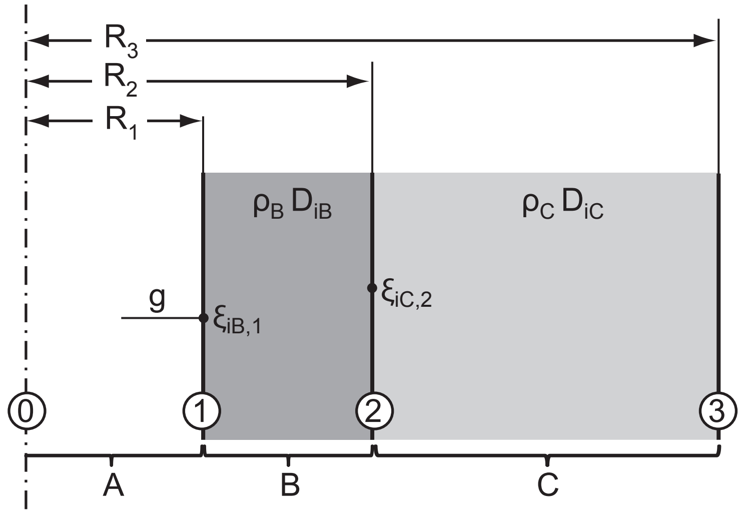
Bekannte Größen:

El. Wärmestromdichte:	$\dot{q}''_{\mathrm{el}}$
Rohrdurchmesser:	D
Wandstärke:	δ
Wärmeleitfähigkeit:	λ
Wärmeübergangskoeffizient:	α
Temperatur in der Naht:	T_{N}
Temperatur des Fluids:	T_{Fl}
Bezugstemperatur:	$T^* = T_{\mathrm{Fl}} + \dot{q}''_{\mathrm{el}}/\alpha$

Aufgabe 4 (Teilaufgaben a – c, 11 Punkte)

Durch eine zylindrische Rohrleitung der Länge L strömt ein Gemisch in dem die Komponente i mit mittlerer Massenkonzentration $\overline{\xi}_{\mathrm{iA}}$ enthalten ist (Stoffübergangskoeffizient g). Die Komponente i diffundiert mit konstantem Massenstrom $\dot{m}_{\mathrm{i}}$ in radialer Richtung nach außen durch die mehrschichtige Rohrwand. Dadurch stellt sich ein zeitlich konstanter radialer Konzentrationsverlauf $\xi_{\mathrm{i}}(r)$ im Rohr ein. Die Konzentrationen $\xi_{\mathrm{iB,1}}$ in Rohrwand B und $\xi_{\mathrm{iC,2}}$ in Rohrwand C sind bekannt.

Die Partialdichte der Komponente i bleibt an Position 1 beim Übergang von der Rohrströmung A zu Rohrwand B konstant (d.h. $\xi_{\mathrm{iA,1}}/\xi_{\mathrm{iB,1}} = \rho_{\mathrm{B}}/\rho_{\mathrm{A}}$). Analog gilt an Position 2: $\xi_{\mathrm{iB,2}}/\xi_{\mathrm{iC,2}} = \rho_{\mathrm{C}}/\rho_{\mathrm{B}}$.



a) Zeichnen Sie qualitativ den radialen Konzentrationsverlauf im Rohr und in den Rohrwänden unter Einbeziehung der gegebenen Größen $\xi_{\mathrm{iB,1}}$ und $\xi_{\mathrm{iC,2}}$.
   - Bestimmen Sie dazu das Verhältnis der Konzentrationsgradienten an Position 2 zwischen den Wänden B und C.
   - Kennzeichnen Sie die mittlere Konzentration $\overline{\xi}_{\mathrm{iA}}$. (6 P)

b) Stellen Sie die Differentialgleichung und die Randbedingungen für den Konzentrationsverlauf in Rohrwand B auf. (3 P)

c) Bestimmen Sie den Massenstrom $\dot{m}_{\mathrm{i}}$ in radialer Richtung in Abhängigkeit von den Konzentrationen $\xi_{\mathrm{iB,1}}$ und $\xi_{\mathrm{iC,2}}$. (2 P)

Hinweise:

- Vernachlässigen Sie Stofftransport in axialer Richtung.
- Vernachlässigen Sie den Stefanstrom.

Bekannte Größen:

Länge des Rohres:	L
Innenradius des Rohres:	R_1
Außenradius von Rohrwand B:	$R_2 = 2 \cdot R_1$
Außenradius von Rohrwand C:	$R_3 = 2 \cdot R_2$
Gesamtdichte von Rohrwand B, inkl. i:	ρ_B
Gesamtdichte von Rohrwand C, inkl. i:	$\rho_\mathrm{C} = 0{,}5 \cdot \rho_\mathrm{B}$
Gesamtdichte Rohrströmung A, inkl. i:	$\rho_\mathrm{A} = 0{,}8 \cdot \rho_\mathrm{B}$
Stoffübergangskoeffizient an der Rohrinnenseite:	g
Diffusionskoeffizient von i in B:	D_iB
Diffusionskoeffizient von i in C:	$D_\mathrm{iC} = 2 \cdot D_\mathrm{iB}$
Konzentration an Stelle 1 in Rohrwand B:	$\xi_\mathrm{iB,1}$
Konzentration an Stelle 2 in Rohrwand C:	$\xi_\mathrm{iC,2}$

Aufgabe 5 (Teilaufgaben a/b, 10 Punkte)

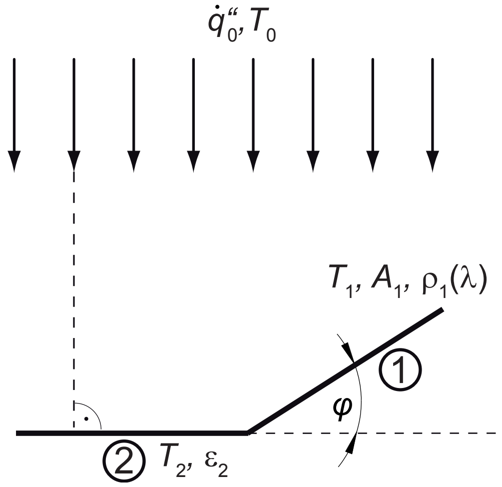
Parallele Strahlung eines schwarzen Körpers ($\dot{q}_0''$, T_0) fällt auf ein System aus zwei ebenen Flächen. Fläche 2 strahlt schwarz. Fläche 1 hat einen wellenlängenabhängigen Reflexionsgrad $\rho_1(\lambda)$, der durch folgenden Zusammenhang gegeben ist:

$$\rho_1(\lambda) = \begin{cases} \rho_\mathrm{K} = 0{,}8 & \text{für } \lambda < 1{,}5\ \mu\mathrm{m} \\ \rho_\mathrm{L} = 0{,}05 & \text{für } \lambda \geq 1{,}5\ \mu\mathrm{m} \end{cases}$$

Der Emissionsanteil $F_{\lambda\mathrm{T}}$ im Wellenlängenbereich $0 \ldots \lambda$ für einen schwarzen Strahler der Temperatur T ist gegeben durch folgende Tabelle:

λT [µmK]	0	1000	2000	4000	6000	7333	8667	10000
$F_{\lambda\mathrm{T}}$ [−]	0	0,000	0,067	0,480	0,737	0,825	0,879	0,913

$$\text{mit: } F_{\lambda\mathrm{T}} = \frac{\int_0^\lambda \dot{q}_{s\lambda}''(\lambda,T)\,d\lambda}{\sigma T^4}$$



a) Stellen Sie den Ansatz für die Flächenhelligkeit der Fläche 1, $\dot{q}_1'' A_1$, auf und definieren Sie die darin auftretenden Strahlungswärmeströme. Berechnen Sie anschließend die Flächenhelligkeit der Fläche 1. (8 P)

b) Stellen Sie die Formel zur Berechnung des Wärmestroms $\dot{Q}_\mathrm{netto}$ auf, der Fläche 1 im stationären Zustand hält. Muss dieser ab- oder zugeführt werden? (2 P)

Hinweise:

- Alle Flächen strahlen diffus.
- Das System befindet sich im stationären Zustand.
- Strahlung aus der Umgebung ist vernachlässigbar.

Zahlenwerte:

Einfallende Strahlung:

Wärmestromdichte der einfallenden Strahlung:	$\dot{q}''_0 = 1400\,\mathrm{W/m^2}$
Temperatur des strahlenden Körpers:	$T_0 = 5778\,\mathrm{K}$

Flächen 1 und 2:

Temperatur von Fläche 1:	$T_1 = 0\,^\circ\mathrm{C}$
Flächeninhalt der Fläche 1:	$A_1 = 2\,\mathrm{m^2}$
Neigung der Fläche 1:	$\varphi = 35\,^\circ$
Transmissionsgrad von Fläche 1:	$\tau_1 = 0$
Reflexionsgrad von Fläche 1:	$\rho_1(\lambda) = \begin{cases} \rho_\mathrm{K} = 0{,}8 & \text{für } \lambda < 1{,}5\ \mu\mathrm{m} \\ \rho_\mathrm{L} = 0{,}05 & \text{für } \lambda \geq 1{,}5\ \mu\mathrm{m} \end{cases}$
Einstrahlzahl von Fläche 1 auf Fläche 2:	$\Phi_{12} = 0{,}05$
Temperatur von Fläche 2:	$T_2 = 0\,^\circ\mathrm{C}$
Emissionsgrad von Fläche 2:	$\varepsilon_2 = 1$

Klausur Wärme- und Stoffübertragung

Lösungsblätter

12.2.2011

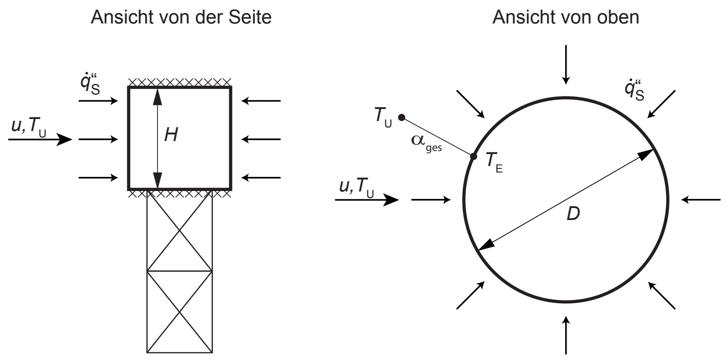
Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________________

Für alle Aufgaben (mit Ausnahme von Aufgabe 1) werden nur die Lösungsbestandteile bewertet, die auf diese Lösungsblätter übertragen worden sind. Für die Bearbeitung gilt:

1. Alle verwendeten Größen müssen
   - entweder in der Aufgabenstellung gegeben sein,
   - oder auf dem Lösungsblatt mit gegebenen Größen definiert werden; d.h. Sie dürfen eigene Größen einführen, sofern diese auf dem Lösungsblatt eindeutig definiert werden.
2. Verwenden Sie die Indizes und Nomenklatur der Aufgabenstellung.
3. Übertragen Sie Gleichungen in die für die jeweilige Gleichungskategorie vorgesehenen Felder. Die Anzahl der Felder steht dabei in keinem Zusammenhang mit der Anzahl der benötigten Gleichungen.
4. Gleichungen, die sich durch Umformung aus bereits übertragenen Gleichungen ergeben und die nicht explizit als Endergebnis verlangt werden, müssen nicht auf das Lösungsblatt übertragen werden.

Die Lösungsblätter und die Aufgabenstellung von Aufgabe 1 sind die einzige Bewertungsgrundlage.

Aufgabe 2



Kennzahlen und Wärmeübergangsgesetze:

Formel und Zahlenwert

Formel und Zahlenwert

Formel und Zahlenwert

Formel und Zahlenwert

Formel und Zahlenwert

Formel und Zahlenwert

Fortsetzung auf der nächsten Seite...

Kennzahlen und Wärmeübergangsgesetze (Fortsetzung):

Formel und Zahlenwert

Formel und Zahlenwert

Wärmeübergangskoeffizienten:

$\alpha_{\mathrm{erzw}} =$

Formel und Zahlenwert

$\alpha_{\mathrm{nat}} =$

Formel und Zahlenwert

$\alpha_{\mathrm{ges}} =$

Zahlenwert

Ergebnisse:

$\dot{Q}_{\mathrm{K}} =$

Formel

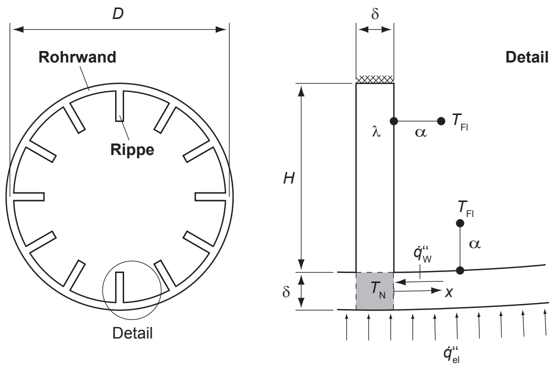
$\dot{Q}_{\mathrm{S}} =$

Formel

$\dot{q}''_{\mathrm{S}} =$

Formel

Aufgabe 3



Energiebilanzen:

Formel

Differentialgleichung und Randbedingungen:

Formel

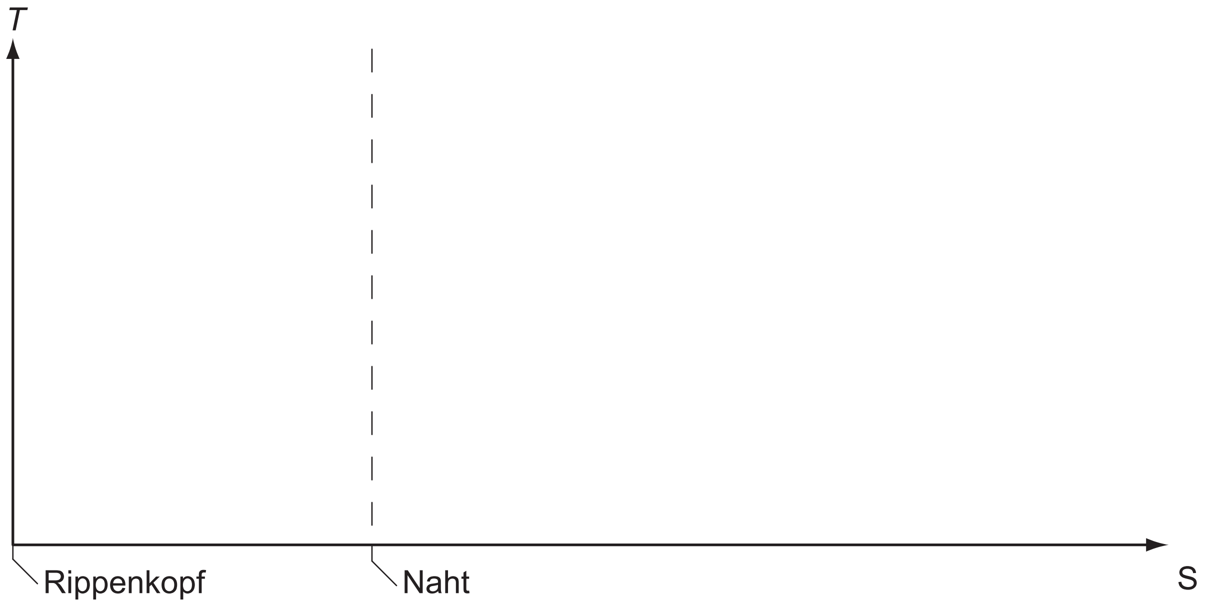
Ergebnisse:

$\dot{q}_{\mathrm{W}}' =$

Formel

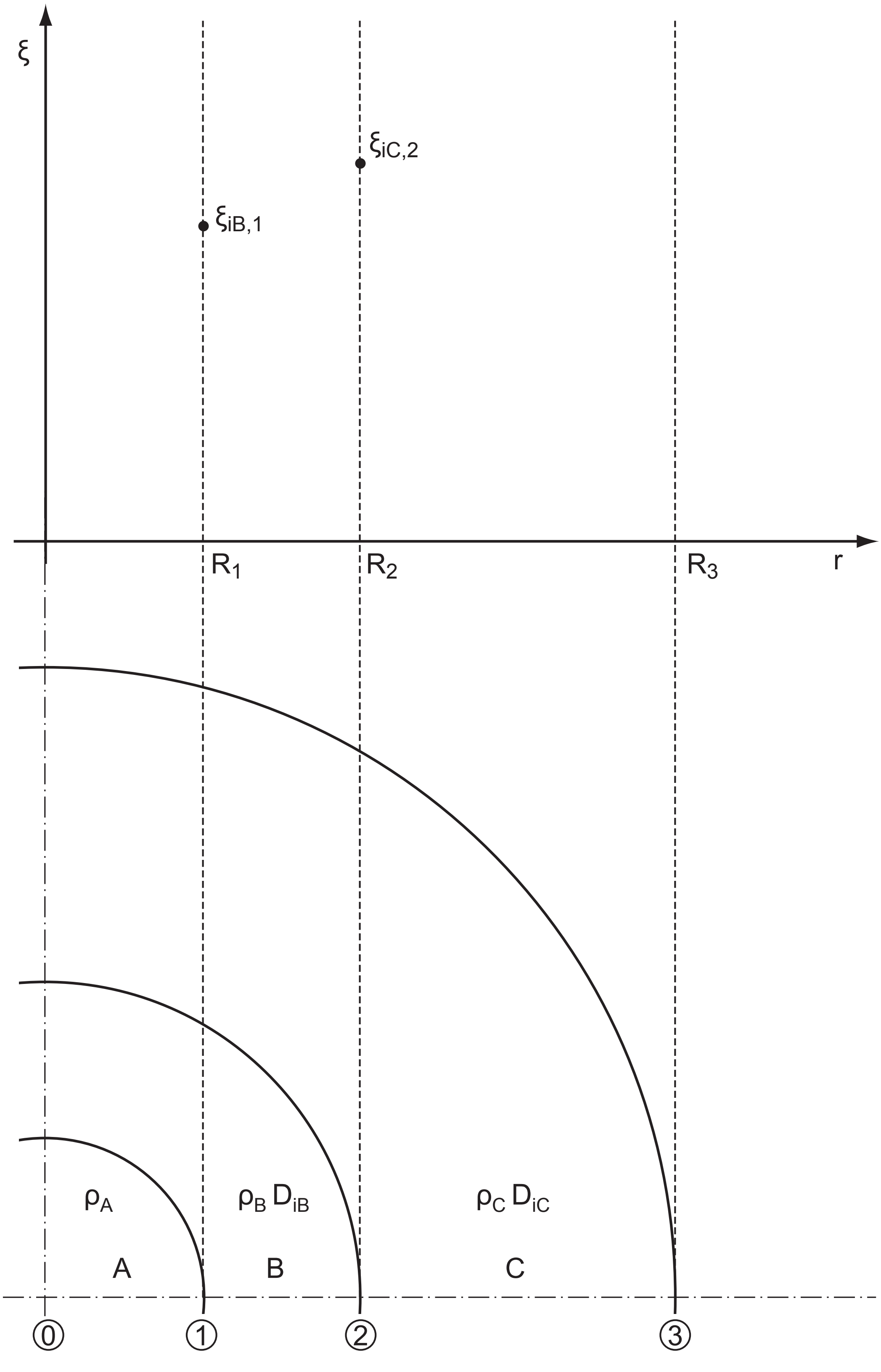
$H =$

Formel



Aufgabe 4

Teil a)



Verhältnis der Konzentrationsgradienten an Position 2 zwischen den Rohrwänden B und C:

$$\frac{\left.\frac{d\xi}{dr}\right|_{B,2}}{\left.\frac{d\xi}{dr}\right|_{C,2}} =$$

Zahlenwert

Teil b)

Differentialgleichung:

Formel

Randbedingungen:

Formel

Formel

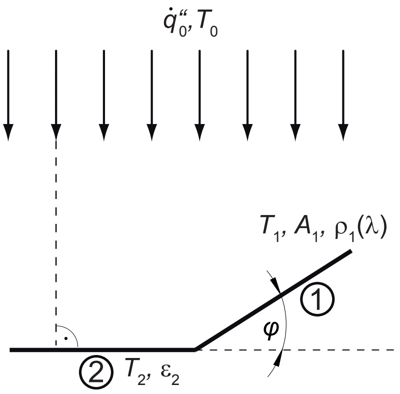
Teil c)

Analytischer Ausdruck für den radialen Massenstrom durch die Rohrwände als Funktion der Konzentrationen $\xi_{\mathrm{iB},1}$ und $\xi_{\mathrm{iC},2}$:

$$\dot{m}_{\mathrm{i}} =$$

Formel

Aufgabe 5



Ansatz für die Flächenhelligkeit von Fläche 1

$$\dot{q}_1'' A_1 = $$

Formel

Unbekannte Strahlungswärmeströme / Größen

Formel

Formel

Formel

Formel

Formel

Formel

Formel

Formel

Flächenhelligkeit von Fläche 1

$\dot{q}_1'' A_1 =$

Wert

Nettostrahlungswärmestrom

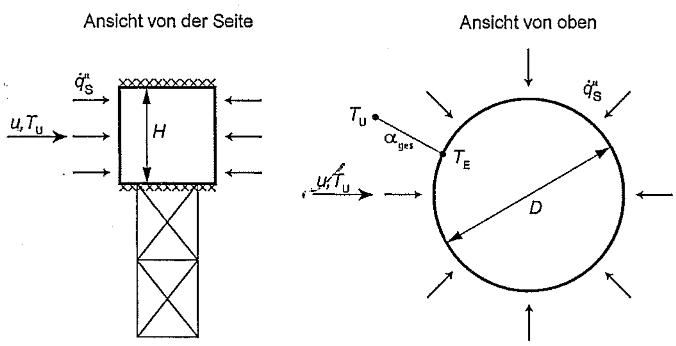
$\dot{Q}_{\mathrm{netto}} =$

Formel

Muss Fläche 1 Wärme zugeführt oder von ihr abgeführt werden?

zugeführt/abgeführt

Aufgabe 2



Kennzahlen und Wärmeübergangsgesetze:

$$T_{Stoff} = \frac{T_E + T_u}{2} = 250\,°C$$ (1P)

Formel und Zahlenwert

$$Re_D = \frac{\rho_{u,T_{Stoff}} \cdot u \cdot D}{\eta_{u,T_{Stoff}}} = \frac{u \cdot D}{\nu_{u,250°C}} = 356210$$

Formel und Zahlenwert

$$\overline{Nu}_D = 0{,}0266\, Re_D^{0{,}805} \cdot Pr^{0{,}4} = 682 \quad (\text{WÜK. 7})$$ (1P)

Formel und Zahlenwert

$$Pr_{250°C} = 0{,}7063$$

Formel und Zahlenwert

$$\nu_{u,250°C} = 42{,}11 \cdot 10^{-6}\,\frac{m^2}{s}; \quad \lambda_{u,250°C} = 41{,}06 \cdot 10^{-3}\,\frac{W}{mK}$$

Formel und Zahlenwert

$$Gr_H = \frac{g \cdot \beta \cdot (T_E - T_u) \cdot H^3}{\nu^2_{u,250°C}} = 1{,}085 \cdot 10^{12}$$ (1P)

Formel und Zahlenwert

Fortsetzung auf der nächsten Seite...

Kennzahlen und Wärmeübergangsgesetze (Fortsetzung):

$\overline{Nu}_H = 0{,}13\,(Gr_H Pr)^{1/3} = 1190$ (WÜK. 19) (1P)

Formel und Zahlenwert

$\beta = \frac{1}{T_u}$

Formel und Zahlenwert

Wärmeübergangskoeffizienten:

$\alpha_{erzw} = \frac{\overline{Nu}_D \cdot \lambda_{u,250°C}}{D} = 5{,}6\ \frac{W}{m^2K}$ (1P)

Formel und Zahlenwert

$\alpha_{nat} = \frac{\overline{Nu}_H \cdot \lambda_{u,250°C}}{H} = 9{,}8\ \frac{W}{m^2K}$ (1P)

Formel und Zahlenwert

$\alpha_{ges} = 10{,}3\ \frac{W}{m^2K}$ (1P)

Zahlenwert

Ergebnisse:

$\dot{Q}_K = \alpha_{ges}\,\pi D H\,(T_E - T_u) = 372\ kW$ (1P)

Formel

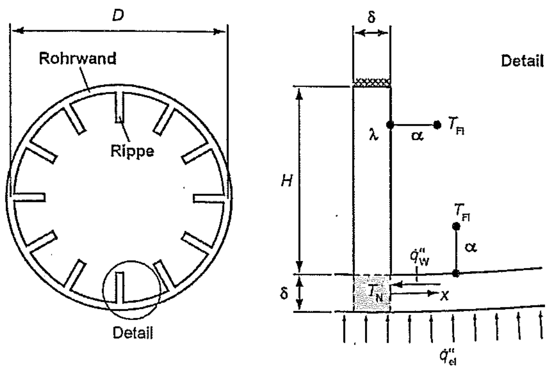
$\dot{Q}_S = \varepsilon \pi D H \sigma T_E^4 = 1361\ kW$ (1P)

Formel

$\dot{q}_S'' = \frac{\dot{Q}_{th} + \dot{Q}_S + \dot{Q}_K}{\varepsilon \pi D H}$ (1P)

Formel

Aufgabe 3



Energiebilanzen:

$$-\frac{d\dot{Q}_\lambda}{dx}\,dx + L\cdot dx\cdot \dot{q}''_{el} - L\,dx\,\alpha\,(T - T_{Fl}) = 0$$ (1) (1) (1)

Formel

$$\dot{Q}_\lambda = -\lambda \frac{dT}{dx} L\cdot\delta$$ (1)

Naht: $2\dot{q}'_w - \dot{q}'_R = 0$ (1)

$$\dot{q}'_R = \lambda\delta m\,(T_N - T_{Fl})\tanh(mH)$$

$$m = \sqrt{\frac{2\alpha}{L\delta}}$$ (1)

Differentialgleichung und Randbedingungen:

1 $$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{\alpha}{\lambda\delta}\theta = 0 \qquad m^* = \frac{\alpha}{\lambda\delta}$$ 1

Formel

1 $$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=\frac{\pi D}{2\cdot 12}} = 0 \qquad L^* = \frac{\pi D}{2\cdot 12}$$ 1

1 $$\theta(x=0) = T_N - T^*$$

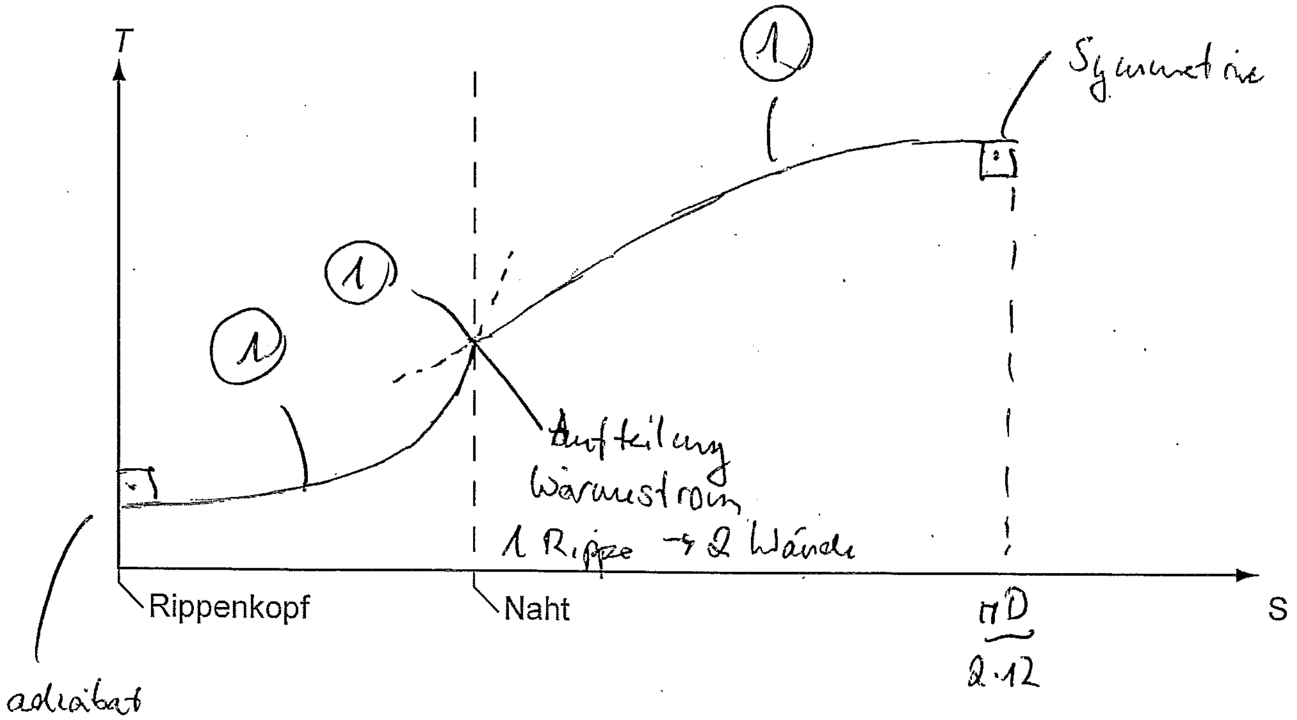
Ergebnisse:

$$\dot{q}'_W = -\cancel{\#}\lambda\delta m^*(T_N - T^*)\tanh(m^* L^*)$$ 1

Formel

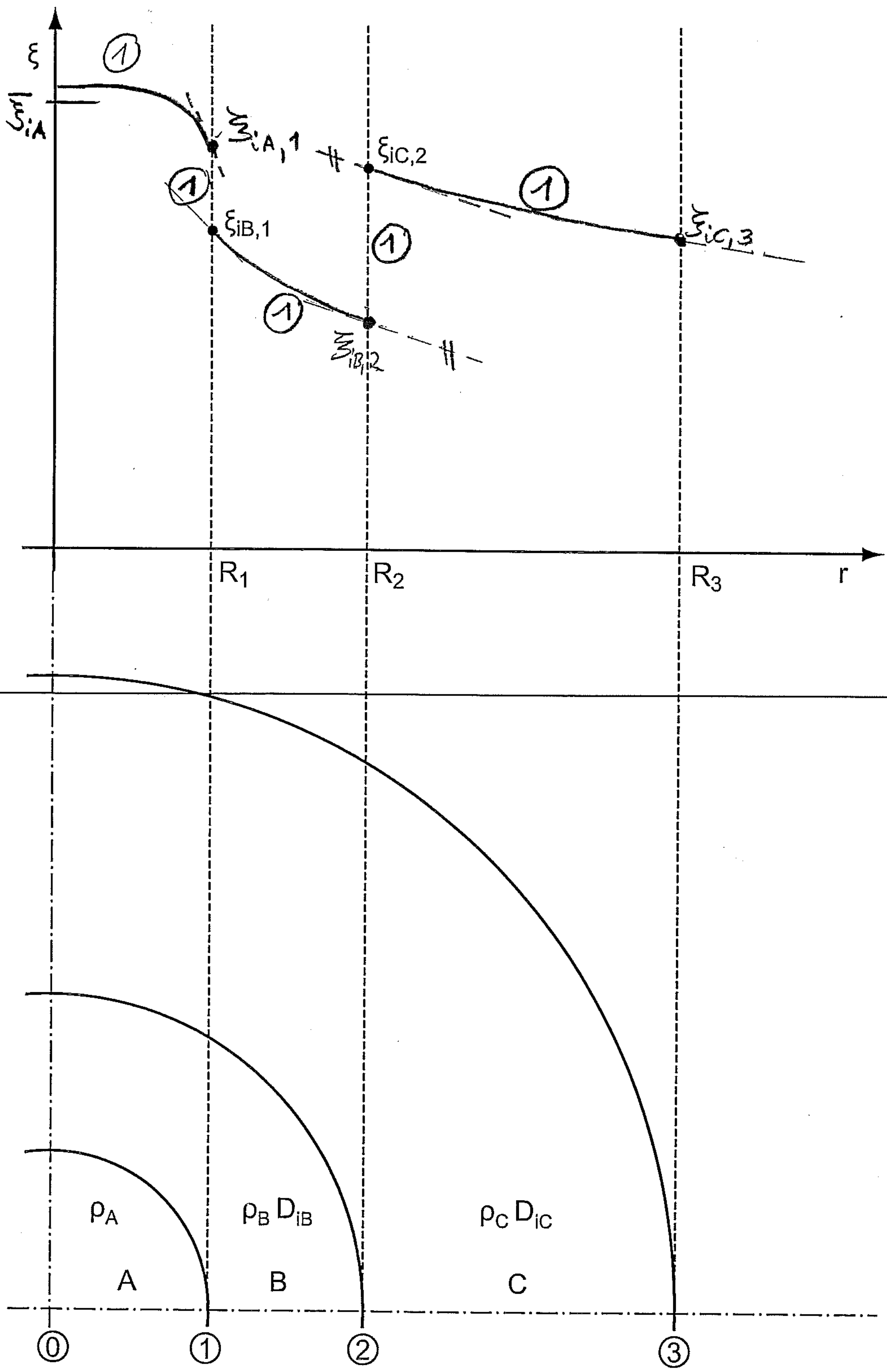
$$H = \frac{1}{m}\operatorname{arctanh}\left(\frac{2\dot{q}'_W}{\lambda\delta m(T_N - T_{fl})}\right)$$ 1

Formel



Aufgabe 4

Teil a)



Verhältnis der Konzentrationsgradienten an Position 2 zwischen den Rohrwänden B und C:

$$\frac{\left.\frac{d\xi}{dr}\right|_{B,2}}{\left.\frac{d\xi}{dr}\right|_{C,2}} = 1$$

Zahlenwert

1

Teil b)

Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{d\xi}{dr}\right) = 0$$

Formel

1

Randbedingungen:

$$\xi(r = R_1) = \xi_{iB,1}$$

Formel

1

$$\xi(r = R_2) = \xi_{iB,2} = \frac{\rho_C}{\rho_B} \cdot \xi_{iC,2}$$

Formel

1

Teil c)

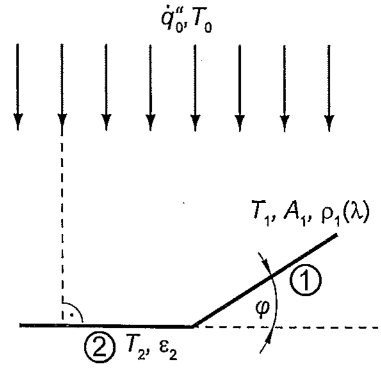
Analytischer Ausdruck für den radialen Massenstrom durch die Rohrwände als Funktion der Konzentrationen $\xi_{iB,1}$ und $\xi_{iC,2}$:

$$\dot{m}_i = -\rho_B D_{iB} \cdot 2\pi L \cdot \frac{\xi_{iB,1} - \frac{\rho_C}{\rho_B} \cdot \xi_{iC,2}}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}$$

Formel

2

Aufgabe 5



Ansatz für die Flächenhelligkeit von Fläche 1

$$\dot{q}_1'' A_1 = \boxed{\begin{aligned} &\varepsilon_K \dot{q}''_{s,1,K} A_1 + \varepsilon_L \dot{q}''_{s,1,L} A_1 + \\ &\rho_K \dot{q}''_{2,K} A_2 \Phi_{21} + \rho_L \dot{q}''_{2,L} A_2 \Phi_{21} + \\ &\rho_K \dot{q}''_{0,K} A_1 \cos\varphi + \rho_L \dot{q}''_{0,L} A_1 \cos\varphi \end{aligned}} \quad (2P)$$

Formel

Unbekannte Strahlungswärmeströme / Größen

$$\dot{q}''_{s,1,K} = \int_0^{1,5\mu m} \dot{q}''_{s\lambda}\, d\lambda = F_{409,7\mu mK}\, \sigma T_1^4 = 0$$

Formel

$$\dot{q}''_{s,1,L} = \int_{1,5\mu m}^{\infty} \dot{q}''_{s\lambda}\, d\lambda = (1 - F_{409,7\mu mK})\, \sigma T_1^4 = 315,6\ \frac{W}{m^2} \quad (1P)$$

Formel

$$\dot{q}''_{2,K} = \int_0^{1,5\mu m} \dot{q}''_{s\lambda}\, d\lambda = F_{409,7\mu mK}\, \sigma T_2^4 = 0$$

Formel

$$\dot{q}''_{2,L} = \int_{1,5\mu m}^{\infty} \dot{q}''_{s\lambda}\, d\lambda = (1 - F_{409,7\mu mK})\, \sigma T_2^4 = 315,6\ \frac{W}{m^2} \quad (1P)$$

Formel

$$\dot{q}^{4}_{0,K} = \int_{0}^{1{,}5\mu m} \dot{q}^{4}_{s\lambda}\, d\lambda = F_{8667\mu mK}\, \dot{q}^{4}_{0} = 0{,}879 \cdot 1400 \frac{W}{m^2} = 1230{,}6 \frac{W}{m^2}$$

Formel

$$\dot{q}^{4}_{0,L} = \int_{1{,}5\mu m}^{\infty} \dot{q}^{4}_{s\lambda}\, d\lambda = \left(1 - F_{8667\mu mK}\right) \dot{q}^{4}_{0} = 0{,}121 \cdot 1400 \frac{W}{m^2} = 169{,}4 \frac{W}{m^2}$$ (1P)

Formel

$$\varepsilon_L = (1 - \rho_L)$$ (1P)

Formel

$$A_2 \Phi_{21} = A_1 \Phi_{12}$$ (1P)

Formel

Flächenhelligkeit von Fläche 1

$\dot{q}_1'' A_1 =$ 2228 W (1P)

Wert

Nettostrahlungswärmestrom

$\dot{Q}_{\text{netto}} =$

$$-\dot{q}^{4}_{1} A_1 + \dot{q}^{4}_{0} A_1 \cos\varphi + \dot{q}^{4}_{2,L} A_1 \Phi_{12}$$ (1P)

oder

$$-\varepsilon_L \dot{q}^{4}_{s,1,L} A_1 + \left(\varepsilon_K \dot{q}^{4}_{0,K} + \varepsilon_L \dot{q}^{4}_{0,L}\right) A_1 \cos\varphi + \varepsilon_L \dot{q}^{4}_{2,L} A_1 \Phi_{12}$$

Formel

mit $\varepsilon_K = 1 - \rho_K = 0{,}2$

Muss Fläche 1 Wärme zugeführt oder von ihr abgeführt werden?

abgeführt (1P)

zugeführt/abgeführt

Musterlösung Wärme- und Stoffübertragung

12.02.2011

Aufgabe 1 (Teilaufgaben a – d, 17 Punkte)

a) *Ein Festkörper wird plötzlich einer senkrecht einfallenden Strahlungsdichte $\dot{q}_S''$ ausgesetzt. Der Körper ist grau (Absorptionsgrad α, Transmissionsgrad $\tau = 0$). Für den konvektiven Wärmeübergang zur Umgebung gilt der Wärmeübergangskoeffizient α_F. Die Temperatur im Körper ist zu jedem Zeitpunkt als homogen anzunehmen. Stellen Sie eine Differentialgleichung für die zeitliche Änderung der Festkörpertemperatur T_F auf.* (5 P)

Die Bilanz um den Festkörper ergibt:

$$\frac{dU}{dt} = \dot{Q}_S + \dot{Q}_K - \dot{Q}_V \tag{1 P}$$

Dabei ist die vom Festkörper absorbierte Einstrahlung:

$$\dot{Q}_S = \alpha \cdot \dot{q}_S'' \cdot A_F \tag{1 P}$$

Die Abstrahlung der Festkörperoberfläche ist:

$$\dot{Q}_V = \epsilon \cdot \sigma \cdot {T_F}^4 \cdot A_F$$

mit $\epsilon = \alpha$

$$\Longrightarrow \dot{Q}_V = \alpha \cdot \sigma \cdot {T_F}^4 \cdot A_F$$

(1 P)

Konvektion an der Festkörperoberfläche:

$$\dot{Q}_K = \alpha_F \cdot (T_U - T_F) \cdot A_F \tag{1 P}$$

Zeitliche Änderung der Inneren Energie des Festkörpers:

$$\frac{dU}{dt} = m \cdot c_p \cdot \frac{dT_F}{dt} \tag{1 P}$$

Einsetzen und Auflösen:

$$\frac{dT_F}{dt} = \frac{1}{m \cdot c_p} \cdot (\alpha \cdot \dot{q}_S'' \cdot A_F + \alpha_F \cdot (T_U - T_F) \cdot A_F - \alpha \cdot \sigma \cdot {T_F}^4 \cdot A_F)$$

b) *Zur Kühlung eines Rohres (mit Durchmesser D) wird dieses von Luft (Temperatur T_L, Druck p_L, Volumenstrom $\dot{V}_L$) turbulent durchströmt. Wie ändert sich der Wärmeübergangskoeffizient bei Erhöhung des Druckes p_L, wenn Temperatur T_L und Volumenstrom $\dot{V}_L$ konstant bleiben? Begründen Sie Ihre Antwort anhand der relevanten Kennzahlen.* (4 P)

Der Wärmeübergangskoeffizient α ist wie folgt definiert:

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda}{D} \tag{1 P}$$

Gemäß der Aufgabenstellung sind λ und D konstant.

$$Nu = f(Re, Pr)$$

Die Prandl-Zahl bleibt konstant, da die relevanten Stoffwerte nach der Aufgabenstellung keine Funktion des Druckes sind. (1 P)

Für die Reynolds-Zahl gilt:

$$Re = \frac{\rho \cdot u \cdot D}{\eta}$$

Da der Volumenstrom nicht verändert wird, bleibt neben dem Durchmesser D und η die Geschwindigkeit u konstant.
Für Luft als ideales Gas gilt:

$$p \cdot V = m \cdot R \cdot T \Rightarrow p = \rho \cdot R \cdot T$$

Eine Erhöhung des Druckes führt daher zu einer Erhöhung der Gasdichte und somit zur Erhöhung der Reynolds-Zahl. (1 P)

Die Zunahme der Reynolds-Zahl führt zu einem Anstieg der Nusselt-Zahl und somit zu einem Anstieg des Wärmeübergangskoeffizienten. (1 P)

c) *Eine Schale ist mit Flüssigkeit gefüllt, die eine zeitlich konstante Temperatur besitzt. Der Wärmeübergangskoeffizient an der Flüssigkeitsoberfläche α_F ist bekannt. Über die Wände und den Boden der Schale findet kein Wärme- oder Stofftransport statt. Die Analogie zwischen Wärme- und Stoffübertragung nach dem Lewisschen Gesetz kann angewendet werden. Stellen Sie eine Differentialgleichung ($\frac{dh}{dt}$) für die zeitliche Änderung der Füllhöhe auf.* (3 P)

Die Füllhöhe kann wie folgt berechnet werden:

$$h = \frac{m}{\rho \cdot A}$$

Damit kann die zeitliche Änderung der Füllhöhe wie folgt beschrieben werden:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \frac{dm}{dt} = -\frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \dot{m} = -\frac{1}{\rho} \cdot \dot{m}'' \qquad (1\,\text{P})$$

Das negative Vorzeichen rührt daher, dass ein positiver Massenstrom die Schale nach folgender Definition verlässt:

$$\dot{m}'' = g \cdot \frac{\xi_o - \xi_\infty}{1 - \xi_o} \qquad (1\,\text{P})$$

Mit dem Lewisschen Gesetz gilt:

$$g = \frac{\alpha_F}{c_p} \qquad (1\,\text{P})$$

Damit gilt für die zeitliche Änderung der Füllhöhe nach Einsetzen:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\alpha_F}{c_p \cdot \rho} \cdot \frac{\xi_o - \xi_\infty}{1 - \xi_o}$$

d) *Gegeben ist ein unendlich langes Rohrsegment (Draufsicht siehe Zeichnung). Geben Sie die Einstrahlzahlen Φ_{12}, Φ_{31} und Φ_{33} in Abhängigkeit von Φ_{13} an. Bestimmen Sie anschließend den Zahlenwert von Φ_{13}.* (5 P)

Summenregel für Fläche 1:

$$\Phi_{11} + \Phi_{12} + \Phi_{13} = 1$$

Mit der Summenregel und $\Phi_{11} = 0$ kann Φ_{12} wie folgt bestimmt werden:

$$\Phi_{12} = 1 - \Phi_{13} \qquad (1\,\text{P})$$

Reziprozitätsbeziehung zwischen den Flächen 1 und 3:

$$\Phi_{31} \cdot A_3 = \Phi_{13} \cdot A_1$$

Flächenbeziehung zwischen den Flächen 1 und 3 (unter Annahme einer Rohrlänge H):

$$\frac{A_1}{A_3} = \frac{R \cdot H}{\frac{\pi}{2} \cdot R \cdot H} = \frac{2}{\pi}$$

Aus der Reziprozitätsbeziehung und dem Flächenverhältnis $\frac{A_1}{A_3}$ kann Φ_{31} abgeleitet werden:

$$\Phi_{31} = \frac{A_1}{A_3} \cdot \Phi_{13}$$

$$\Phi_{31} = \frac{2}{\pi} \cdot \Phi_{13} \qquad (1\,\text{P})$$

Aus Symmetriegründen gilt: $\Phi_{31} = \Phi_{32}$

Summenregel für Fläche 3:

$$\Phi_{31} + \Phi_{32} + \Phi_{33} = 1$$

Aus der Summenregel unter Verwendung der Symmetrie folgt Φ_{33}:

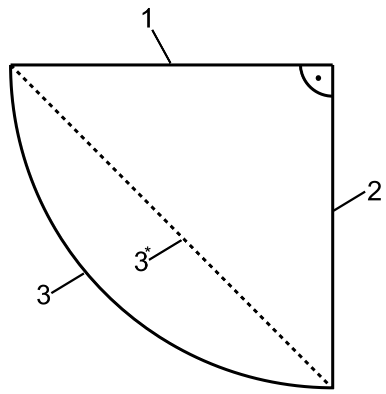
$$\Phi_{33} = 1 - \Phi_{31} - \Phi_{32} = 1 - 2 \cdot \Phi_{31}$$

$$\Phi_{33} = 1 - \frac{4}{\pi} \cdot \Phi_{13} \qquad (1\,\text{P})$$

Für die Bestimmung von Φ_{13} wird eine virtuelle Fläche A^* eingeführt.

Für die virtuelle Fläche gilt:

$$\Phi_{3^*1} = \frac{1}{2}$$



$$\Phi_{13^*} \cdot A_1 = \Phi_{3^*1} \cdot A_{3^*}$$
$$A_{3^*} = \sqrt{2} \cdot A_1$$

$$\Phi_{13} = \Phi_{13^*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (2\,\mathrm{P})$$

Aufgabe 2 (Teilaufgaben a/b, 10 Punkte)

a) *Berechnen Sie die konvektiven Wärmeverluste $\dot{Q}_K$ sowie die Wärmeverluste durch Strahlung $\dot{Q}_S$ (Eigenemission des Empfängers) an der Außenseite des Empfängers. Bestimmen Sie für die Berechnung der konvektiven Verluste zunächst getrennt die Wärmeübergangskoeffizienten für erzwungene (Windgeschwindigkeit $u = 3$ m/s) und natürliche Konvektion und führen Sie diese nach der Formel $\alpha_{ges} = ((\alpha_{nat})^a + (\alpha_{erzw})^a)^{\frac{1}{a}}$ mit $a = 3{,}2$ zusammen.* (9 P)

Um die Verluste durch erzwungene Konvektion abschätzen zu können, muß zunächst die Reynoldszahl bestimmt werden.

$$\mathrm{Re}_D = \frac{\rho_{\mathrm{U},T_{\mathrm{Stoff}}}\, u\, D}{\eta_{\mathrm{U},T_{\mathrm{Stoff}}}} = \frac{u\, D}{\nu_{\mathrm{U},250}} = 356210$$

Dabei sind die Stoffwerte bei der mittleren Grenzschichttemperatur zu bestimmen.

$$T_{\mathrm{Stoff}} = \frac{T_{\mathrm{E}} + T_{\mathrm{U}}}{2} = 250°\mathrm{C} \qquad (1\,\mathrm{P})$$

$$\nu_{\mathrm{U},250} = 42{,}11 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$$

$$\mathrm{Pr}_{250} = 0{,}7063$$

$$\lambda_{\mathrm{U},250} = 41{,}06 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$$

Aus WÜK.7 ergibt sich mit $\mathrm{C} = 0{,}0266$ und $\mathrm{m} = 0{,}805$ da $40000 < \mathrm{Re}_D < 400000$

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = \mathrm{C}\,\mathrm{Re}_D^{\mathrm{m}}\,\mathrm{Pr}^{0.4} = 0{,}0266\,\mathrm{Re}_D^{0{,}805}\,\mathrm{Pr}^{0{,}4} = 682 \qquad (1\,\mathrm{P})$$

und daraus der Wärmeüberganskoeffizient für erzwungene Konvektion

$$\overline{\alpha}_{\mathrm{erzw}} = \frac{\overline{\mathrm{Nu}}_D\,\lambda_{\mathrm{U},250}}{D} = 5{,}6\,\mathrm{W/(m^2\,K)} \qquad (1\,\mathrm{P})$$

Zudem ist die Temperaturdifferenz zwischen der Empfängeroberfläche und der Umgebung so groß, dass natürliche Konvektion ebenso berücksichtigt werden muß. Hierzu muß zunächst die Grashofzahl bestimmt werden.

$$\mathrm{Gr}_H = \frac{\mathrm{g}\,\beta\,(T_{\mathrm{E}} - T_{\mathrm{U}})\,H^3}{\nu^2_{\mathrm{U},250}} = 1{,}085 \cdot 10^{12} \qquad (1\,\mathrm{P})$$

wobei der isobare Ausdehnungskoeffizient β mit der Freistromtemperatur gebildet wird: $\beta = 1/T_{\mathrm{U}}$. Die mittlere Nusseltzahl für natürliche Konvektion ergibt sich aus WÜK.19 ($\mathrm{Gr}_H\mathrm{Pr} = 7{,}66 \cdot 10^{11} < 10^{12}$)

$$\overline{\mathrm{Nu}}_H = 0{,}13\,(\mathrm{Gr}_H\,\mathrm{Pr})^{\frac{1}{3}} = 1190 \qquad (1\,\mathrm{P})$$

und daraus der mittlere Wärmeübergangskoeffizient für natürliche Konvektion

$$\overline{\alpha}_{\mathrm{nat}} = \frac{\overline{\mathrm{Nu}}_H \, \lambda_{\mathrm{U},250}}{H} = 9{,}8\,\mathrm{W/(m^2\,K)} \qquad (1\,\mathrm{P})$$

Für die gesamten konvektiven Verluste müssen die jeweiligen Wärmeübergangskoeffizienten nach der in der Aufgabenstellung gegebenen Formel addiert werden.

$$\alpha_{\mathrm{ges}} = (\alpha_{\mathrm{nat}}^a + \alpha_{\mathrm{erzw}}^a)^{\frac{1}{a}} = 10{,}3\,\mathrm{W/(m^2\,K)} \qquad (1\,\mathrm{P})$$

Daraus ergibt sich der Verlustwärmestrom durch Konvektion

$$\dot{Q}_{\mathrm{K}} = \alpha_{\mathrm{ges}}\, O_{\mathrm{E}}\, (T_{\mathrm{E}} - T_{\mathrm{U}}) = \alpha_{\mathrm{ges}}\, \pi\, D\, H\, (T_{\mathrm{E}} - T_{\mathrm{U}}) = 372\,\mathrm{kW} \qquad (1\,\mathrm{P})$$

Die Verluste durch Strahlung entsprechen denen der Eigenemission des Empfängers.

$$\dot{Q}_{\mathrm{S}} = \varepsilon\, O_{\mathrm{E}}\, \sigma\, T_{\mathrm{E}}^4 = \varepsilon\, \pi\, D\, H\, \sigma\, T_{\mathrm{E}}^4 = 1361\,\mathrm{kW} \qquad (1\,\mathrm{P})$$

b) *Bestimmen Sie aus einer Bilanz um den Empfänger die mittlere Strahlungsdichte $\dot{q}_S''$ in Abhängigkeit von der thermischen Leistung $\dot{Q}_{th}$. Setzen Sie hierzu in Aufgabenteil a) bestimmte Größen als bekannt voraus.* (1 P)

Positiv geht in die Energiebilanz um den Empfänger die Einstrahlung ein. Austretende Wärmeströme sind die gewünschte thermische Leistung sowie die Verlustwärmeströme durch Konvektion und Strahlung.

$$\alpha\, \dot{q}_{\mathrm{S}}''\, O_{\mathrm{E}} = \dot{Q}_{\mathrm{th}} + \dot{Q}_{\mathrm{S}} + \dot{Q}_{\mathrm{K}}$$

Durch Umformen und Einsetzen von $\alpha = \varepsilon$ (grauer Strahler) ergibt sich

$$\dot{q}_{\mathrm{S}}'' = \frac{\dot{Q}_{\mathrm{th}} + \dot{Q}_{\mathrm{S}} + \dot{Q}_{\mathrm{K}}}{\varepsilon\, O_{\mathrm{E}}} = \frac{\dot{Q}_{\mathrm{th}} + \dot{Q}_{\mathrm{S}} + \dot{Q}_{\mathrm{K}}}{\varepsilon\, \pi\, D\, H} \qquad (1\,\mathrm{P})$$

Aufgabe 3 (Teilaufgaben a – d, 16 Punkte)

a) *Leiten Sie die Differentialgleichung für das Temperaturprofil in der Rohrwand her und stellen Sie geeignete Randbedingungen auf.* (7 P)

Zum Aufstellen der Differentialgleichung wird eine infinitesimale Energiebilanz um einen Abschnitt der Rohrwand gebildet. Diese umfasst die Wärmeleitung in Umfangsrichtung, den Heizwärmestrom $\dot{q}''_{\mathrm{el}}$ und den konvektiven Wärmeübergang ins Fluid. Die Länge des Rohres wird als l angenommen.

$$\dot{Q}_\lambda(x) - \dot{Q}_\lambda(x+dx) + l\,dx\,\dot{q}''_{\mathrm{el}} - l\,dx\,\alpha(T - T_{\mathrm{Fl}}) = 0 \qquad (3\,\mathrm{P})$$

Der Wärmeleitungsstrom an der Stelle $x + dx$ wird durch eine Taylorreihenentwicklung ersetzt:

$$\dot{Q}_\lambda(x+dx) = \dot{Q}_\lambda(x) + \frac{d\dot{Q}_\lambda}{dx}dx + \ldots$$

Einsetzen und Kürzen von dx ergibt:

$$-\frac{d\dot{Q}_\lambda}{dx} + l\,\dot{q}''_{\mathrm{el}} - l\,\alpha(T - T_{\mathrm{Fl}}) = 0$$

Der Wärmeleitungsstrom ergibt sich aus dem Fourierschen Gesetz:

$$\dot{Q}_\lambda = -\lambda\frac{dT}{dx}l\,\delta \qquad (1\,\mathrm{P})$$

Einsetzen und Kürzen von l ergibt:

$$\lambda\delta\frac{d^2T}{dx^2} + \dot{q}''_{\mathrm{el}} - \alpha(T - T_{\mathrm{Fl}}) = 0$$

Zur Homogenisierung kann die gegebene Übertemperatur verwendet werden:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{\alpha}{\lambda\delta}\left[T - \left(T_{\mathrm{Fl}} + \dot{q}''_{\mathrm{el}}/\alpha\right)\right] = \frac{d^2\Theta}{dx^2} - \frac{\alpha}{\lambda\delta}\Theta = 0 \qquad (1\,\mathrm{P})$$

Über den Umfang πD des Rohres sind 12 Rippen verteilt. In der Mitte zwischen zwei Rippen bei $x = \pi D/(2\cdot 12)$ findet sich deshalb eine Symmetrierandbedingung:

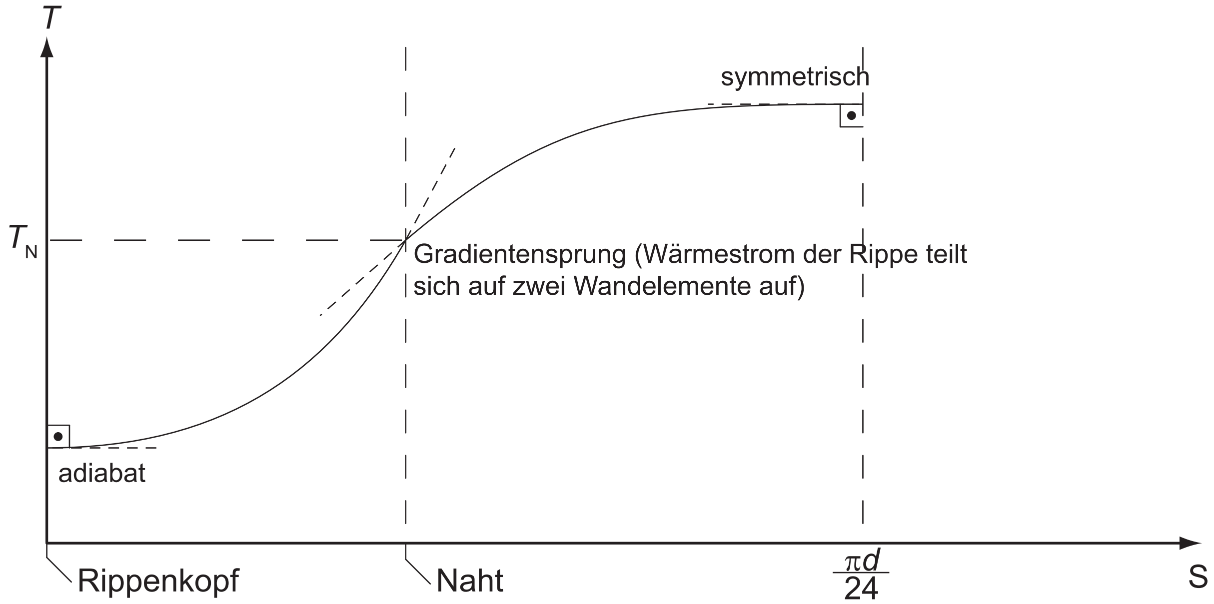
$$\left.\frac{d\Theta}{dx}\right|_{x=\frac{\pi D}{2\cdot 12}} = 0 \qquad (1\,\mathrm{P})$$

An der Nahtstelle $x = 0$ herrscht die Temperatur T_{N}:

$$\Theta\,(x=0) = T_{\mathrm{N}} - T^* \qquad (1\,\mathrm{P})$$

Die gefundene DGL und die gefundenen Randbedingungen entsprechen denen einer Rippe mit adiabatem Rippenkopf.

b) *Zeichnen Sie qualitativ das Temperaturprofil entlang der Sehne S. Machen Sie die Gradienten an den Enden der Kurvenabschnitte kenntlich und begründen Sie diese kurz.* (3 P)



c) *Formulieren Sie den auf die Rohrlänge bezogenen Wärmestrom $\dot{q}'_W$, der von der Rohrwand in eine Nahtstelle fließt, als Funktion bekannter Größen.* (3 P)

Der übertragene Wärmestrom von der Rohrwand in die Naht entspricht dem übertragenen Wärmestrom der „Wandrippen" und lässt sich ohne Herleitung der Formelsammlung entnehmen:

$$\dot{q}'_{\mathrm{W}} = -\lambda\,\delta\,m^*\,(T_{\mathrm{N}} - T^*)\tanh(m^* L^*) \qquad (1\,\mathrm{P})$$

Der Rippenparameter für die „Wandrippe" ist

$$m^* = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda\delta}} \qquad (1\,\mathrm{P})$$

Die Länge der „Wandrippe" ist in Übereinstimmung mit der Symmetrierandbedingung der halbe Abstand zwischen zwei Nähten

$$L^* = \frac{\pi D}{2 \cdot 12} \qquad (1\,\mathrm{P})$$

d) *Bestimmen Sie die Rippenhöhe H als Funktion bekannter Größen. Der Wärmestrom $\dot{q}'_W$ darf als bekannt angenommen werden, auch wenn Sie Aufgabenteil c) nicht lösen konnten.* (3 P)

Die minimale Rippenhöhe lässt sich anhand einer Energiebilanz um die Naht ermitteln, die den beidseitigen Wärmestrom aus der Rohrwand mit dem Wärmestrom in die Rippe gleichsetzt:

$$2\,\dot{q}'_{\mathrm{W}} - \dot{q}'_{\mathrm{R}} = 0 \qquad (1\,\mathrm{P})$$

Der Rippenparameter für die ebene Rippe ist

$$m = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda\delta}} \qquad (1\,\mathrm{P})$$

Einsetzen der Formel für den übertragenen Wärmestrom (Formelsammlung) in die Energiebilanz liefert

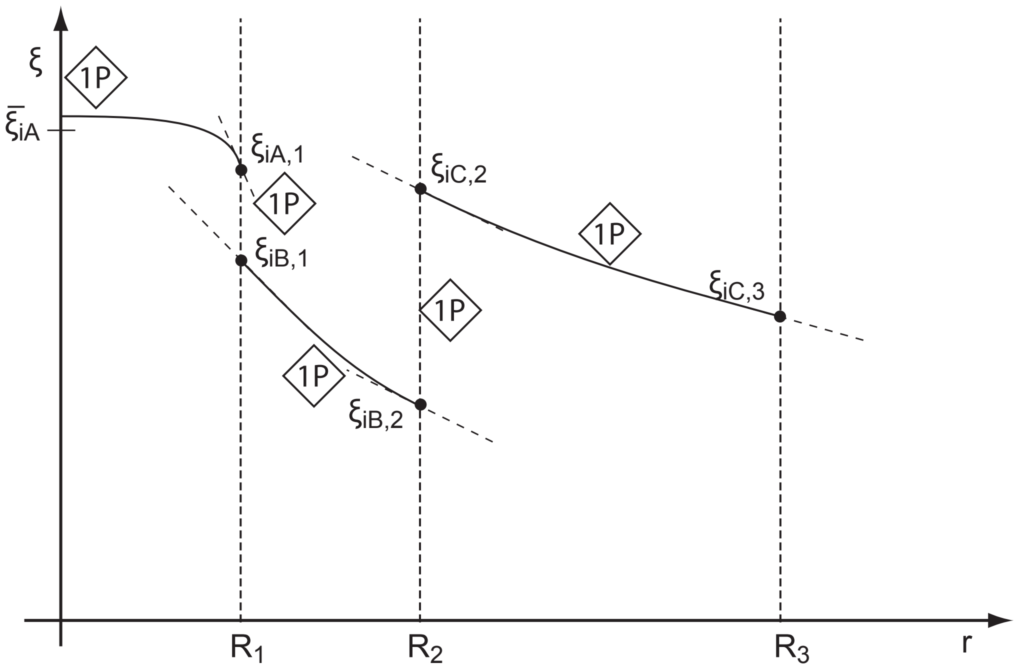
$$2\,\dot{q}_{\mathrm{W}}' - \lambda\,\delta\,m\,(T_{\mathrm{N}} - T_{\mathrm{fl}})\tanh(mH) = 0$$

Kürzen und Umformen liefert schließlich

$$H = \frac{1}{m}\operatorname{arctanh}\left(\frac{2\,\dot{q}_{\mathrm{W}}'}{\lambda\,\delta\,m\,(T_{\mathrm{N}} - T_{\mathrm{fl}})}\right) \qquad (1\,\mathrm{P})$$

Aufgabe 4 (Teilaufgaben a – c, 11 Punkte)

a) *Zeichnen Sie qualitativ den radialen Konzentrationsverlauf im Rohr und in den Rohrwänden unter Einbeziehung der gegebenen Größen $\xi_{iB,1}$ und $\xi_{iC,2}$.*
- *Bestimmen Sie dazu das Verhältnis der Konzentrationsgradienten an Position 2 zwischen den Wänden B und C.*
- *Kennzeichnen Sie die mittlere Konzentration $\bar{\xi}_{iA}$.* (6 P)



Radialer Konzentrationsverlauf in Rohrströmung A:

Aus der qualitativen Skizze muss ersichtlich werden, dass die Konzentration auf der Rohrachse größer ist als die mittlere Konzentration $\bar{\xi}_{\mathrm{iA}}$. Des Weiteren gilt auf der Rohrachse:

$$\left.\frac{d\xi_{\mathrm{iA}}}{dr}\right|_{r=0} = 0.$$

Korrektes Zeichnen von Konzentrationsverlauf im Rohr. (1 P)

Konzentrationsverlauf in Rohrwand B:

Konzentrationssprung an Position 1 zwischen Rohrströmung A und Rohrwand B:

Laut Aufgabenstellung gilt, dass Konzentrationssprünge an Phasen- bzw. Materialgrenzen lediglich aufgrund der Dichteänderung der Trägermaterialien bestehen. Somit lässt sich schreiben:

$$\xi_{\mathrm{iB},1} = \frac{\rho_{\mathrm{i},1}}{\rho_\mathrm{B}} = \frac{0{,}8 \cdot \rho_{\mathrm{i},1}}{\rho_\mathrm{A}} = 0{,}8 \cdot \xi_{\mathrm{iA},1}$$

d.h.

$$\xi_{\mathrm{iB},1} < \xi_{\mathrm{iA},1}.$$

Korrektes Zeichnen des Konzentrationssprungs von A nach B. (1 P)

Konzentrationsgradienten an den Positionen 1 und 2 in Rohrwand B:

Für stationäre Verhältnisse gilt nach dem Fickschen Gesetz:

$$\rho_B \cdot D_{iB} \cdot (L \cdot 2\pi R_1) \cdot \left.\frac{d\xi_{\mathrm{iB}}}{dr}\right|_{r=R_1} = \rho_B \cdot D_{iB} \cdot (L \cdot 2\pi R_2) \cdot \left.\frac{d\xi_{\mathrm{iB}}}{dr}\right|_{r=R_2}$$

mit $R_2 = 2 \cdot R_1$ folgt:

$$\left.\frac{d\xi_{\mathrm{iB}}}{dr}\right|_{r=R_1} = 2 \cdot \left.\frac{d\xi_{\mathrm{iB}}}{dr}\right|_{r=R_2}$$

Mithilfe des Verhältnisses der Tangenten in den Stützstellen kann nun der Konzentrationsverlauf in der Rohrwand B qualitativ gezeichnet werden.

Korrektes Zeichnen des Konzentrationsverlaufs in B (Verhältnis der Tangenten). (1 P)

Konzentrationsverlauf in Rohrwand C:

Konzentrationssprung an Position 2 zwischen den Rohrwänden B und C:

Laut Aufgabenstellung gilt, dass Konzentrationssprünge an Phasen- bzw. Materialgrenzen lediglich aufgrund der Dichteänderung der Trägermaterialien bestehen. Somit lässt sich schreiben:

$$\xi_{\mathrm{iC},2} = \frac{\rho_{\mathrm{i},2}}{\rho_\mathrm{C}} = \frac{2 \cdot \rho_{\mathrm{i},2}}{\rho_\mathrm{B}} = 2 \cdot \xi_{\mathrm{iB},2}$$

d.h.

$$\xi_{\mathrm{iC},2} > \xi_{\mathrm{iB},2}.$$

Korrektes Zeichnen des Konzentrationssprungs von B nach C. (1 P)

Änderung des Konzentrationsgradients an Position 2 zwischen den Rohrwänden B und C:

Für stationäre Verhältnisse gilt nach dem Fickschen Gesetz:

$$\rho_\mathrm{B} \cdot D_\mathrm{iB} \cdot (L \cdot 2\pi R_2) \cdot \left.\frac{d\xi_{\mathrm{iB}}}{dr}\right|_{r=R_2} = \rho_\mathrm{C} \cdot D_\mathrm{iC} \cdot (L \cdot 2\pi R_2) \cdot \left.\frac{d\xi_{\mathrm{iC}}}{dr}\right|_{r=R_2}$$

mit $2 \cdot \rho_\mathrm{C} = \rho_\mathrm{B}$ und $D_\mathrm{iB} = 0{,}5 \cdot D_\mathrm{iC}$ folgt:

$$\left.\frac{d\xi_{\mathrm{iB}}}{dr}\right|_{r=R_2} = \left.\frac{d\xi_{\mathrm{iC}}}{dr}\right|_{r=R_2} \qquad (1\,\mathrm{P})$$

Konzentrationsgradient an Position 3 in Rohrwand C:

$$\left.\frac{d\xi_{\mathrm{iC}}}{dr}\right|_{r=R_2} = 2 \cdot \left.\frac{d\xi_{\mathrm{iC}}}{dr}\right|_{r=R_3}$$

Mithilfe des Verhältnisses der Tangenten in den Stützstellen 2 und 3 kann nun der Konzentrationsverlauf in Rohrwand C qualitativ gezeichnet werden.

Korrektes Zeichnen von Konzentrationsverlauf in C (Verhältnis der Tangenten). (1 P)

b) *Stellen Sie die Differentialgleichung und die Randbedingungen für den Konzentrationsverlauf in Rohrwand B auf.* (3 P)

Die differentielle Bilanz in radialer Richtung:

$$\dot{m}_{\mathrm{i}}(r) - \dot{m}_{\mathrm{i}}(r + dr) = 0$$

unter Zuhilfenahme des Fickschen Gesetzes:

$$\dot{m}_{\mathrm{i}}(r) = -\rho_{\mathrm{B}} \cdot D_{\mathrm{iB}} \cdot 2\pi r L \cdot \frac{d\xi}{dr}$$

und der Taylor Entwicklung:

$$\dot{m}_{\mathrm{i}}(r + dr) = \dot{m}_{\mathrm{i}}(r) + \frac{d\dot{m}_{\mathrm{i}}(r)}{dr} \cdot dr$$

führt auf die folgende Differentialgleichung:

$$-\frac{d\dot{m}_{\mathrm{i}}(r)}{dr} \cdot dr = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{d\xi}{dr}\right) = 0. \qquad (1\,\mathrm{P})$$

Es lassen sich die folgenden Randbedingungen aufstellen:

$$\xi(r = R_1) = \xi_{\mathrm{iB},1}, \qquad (1\,\mathrm{P})$$

$$\xi(r = R_2) = \xi_{\mathrm{iB},2} = \frac{\rho_{\mathrm{C}}}{\rho_{\mathrm{B}}} \cdot \xi_{\mathrm{iC},2}. \qquad (1\,\mathrm{P})$$

c) *Bestimmen Sie den Massenstrom $\dot{m}_i$ in radialer Richtung in Abhängigkeit von den Konzentrationen $\xi_{iB,1}$ und $\xi_{iC,2}$.* (2 P)

Die Differentialgleichung aus Aufgabenteil b) wird gelöst durch zweimalige Integration:

$$\frac{d\xi}{dr} = C_1 \cdot \frac{1}{r},$$

$$\xi = C_1 \cdot \ln r + C_2.$$

Anschliessend werden die Randbedingungen eingesetzt:

$$\xi_{\mathrm{iB},1} = C_1 \cdot \ln R_1 + C_2,$$
$$\xi_{\mathrm{iB},2} = C_1 \cdot \ln R_2 + C_2.$$

Aus der Substraktion beider Gleichungen resultiert ein Ausdruck für die Integrationskonstante C_1:

$$C_1 = \frac{\xi_{\mathrm{iB},1} - \xi_{\mathrm{iB},2}}{\ln \frac{R_1}{R_2}}. \qquad (1\,\mathrm{P})$$

Zusammen mit der ersten Integration der DGL folgt ein Ausdruck für den Konzentrationsgradienten in der Rohrwand:

$$\frac{d\xi_{\mathrm{iB}}}{dr} = \frac{\xi_{\mathrm{iB},1} - \xi_{\mathrm{iB},2}}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{1}{r}.$$

Unter Zuhilfenahme des Fickschen Gesetzes lässt sich nun ein Ausdruck für den radialen Massenstrom $\dot{m}_\mathrm{i}$ aufstellen.

$$\dot{m}_\mathrm{i} = -\rho_\mathrm{B} \cdot D_{\mathrm{iB}} \cdot 2\pi R_1 L \cdot \left.\frac{d\xi_{\mathrm{iB}}}{dr}\right|_{r=R_1} =$$
$$= -\rho_\mathrm{B} \cdot D_{\mathrm{iB}} \cdot 2\pi R_1 L \cdot \frac{\xi_{\mathrm{iB},1} - \xi_{\mathrm{iB},2}}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{1}{R_1}.$$

Als Funktion von $\xi_{\mathrm{iB},1}$ in der Rohrwand B und $\xi_{\mathrm{iC},2}$ in der Rohrwand C lässt sich der gesuchte Massenstrom $\dot{m}_\mathrm{i}$ wie folgt ausdrücken:

$$\dot{m}_\mathrm{i} = -\rho_\mathrm{B} \cdot D_{\mathrm{iB}} \cdot 2\pi L \cdot \frac{\xi_{\mathrm{iB},1} - \frac{\rho_\mathrm{C}}{\rho_\mathrm{B}} \cdot \xi_{\mathrm{iC},2}}{\ln \frac{R_1}{R_2}}. \qquad (1\,\mathrm{P})$$

Alternativ kann in diesem Aufgabenteil auch direkt die Analogie zwischen Wärme- und Stoffübertragung genutzt werden.

Aufgabe 5 (Teilaufgaben a/b, 10 Punkte)

a) *Stellen Sie den Ansatz für die Flächenhelligkeit der Fläche 1, $\dot{q}_1''A_1$, auf und definieren Sie die darin auftretenden Strahlungswärmeströme. Berechnen Sie anschließend die Flächenhelligkeit der Fläche 1.* (8 P)

Die Flächenhelligkeit $\dot{q}_1''A_1$ setzt sich aus der Emission und den Reflexionen für den kurzwelligen (K) und den langwelligen Strahlunganteil (L) zusammen:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1''A_1 = &\varepsilon_\mathrm{K}\dot{q}_{s,1,K}''A_1\\ &+\varepsilon_\mathrm{L}\dot{q}_{s,1,L}''A_1\\ &+\rho_\mathrm{K}\dot{q}_{2,\mathrm{K}}''A_2\Phi_{21}\\ &+\rho_\mathrm{L}\dot{q}_{2,\mathrm{L}}''A_2\Phi_{21}\\ &+\rho_\mathrm{K}\dot{q}_{0,\mathrm{K}}''A_1\cos(\varphi)\\ &+\rho_\mathrm{L}\dot{q}_{0,\mathrm{L}}''A_1\cos(\varphi)\end{aligned} \qquad (2\,\mathrm{P})$$

Da Fläche 2 schwarz ist und die einfallende Strahlung $\dot{q}_0''$ von einem schwarzen Körper kommt, kann die Zerlegung der Terme aus dem Ansatz mit Hilfe der gegebenen Tabelle erfolgen:

$$\dot{q}_{s,1,K}'' = \int_0^{1,5\mu m} \dot{q}_{s\lambda}''d\lambda = F_{409,7\mu mK}\cdot\sigma T_1^4 = 0$$

$$\dot{q}_{s,1,L}'' = \int_{1,5\mu m}^{\infty} \dot{q}_{s\lambda}''d\lambda = (1-F_{409,7\mu mK})\cdot\sigma T_1^4 = \sigma T_1^4 = 315{,}6 W/m^2 \qquad (1\,\mathrm{P})$$

$$\dot{q}_{2,\mathrm{K}}'' = \int_0^{1,5\mu m} \dot{q}_{s\lambda}''d\lambda = F_{409,7\mu mK}\cdot\sigma T_2^4 = 0$$

$$\dot{q}_{2,\mathrm{L}}'' = \int_{1,5\mu m}^{\infty} \dot{q}_{s\lambda}''d\lambda = (1-F_{409,7\mu mK})\cdot\sigma T_2^4 = \sigma T_2^4 = 315{,}6 W/m^2 \qquad (1\,\mathrm{P})$$

$$\dot{q}_{0,\mathrm{K}}'' = \int_0^{1,5\mu m} \dot{q}_{s\lambda}''d\lambda = F_{8667\mu mK}\cdot\dot{q}_0'' = 0{,}879\cdot 1400 W/m^2 = 1230{,}6 W/m^2$$

$$\dot{q}_{0,\mathrm{L}}'' = \int_{1,5\mu m}^{\infty} \dot{q}_{s\lambda}''d\lambda = (1-F_{8667\mu mK})\cdot\dot{q}_0'' = 0{,}121\cdot 1400 W/m^2 = 169{,}4 W/m^2 \qquad (1\,\mathrm{P})$$

Da der kurzwellige Emissionsanteil der Fläche 1 null ist, wird nur der langwellige Emissionsgrad der Fläche 1 benötigt:

$$\varepsilon_\mathrm{L} = (1-\rho_\mathrm{L}) = 0{,}95 \qquad (1\,\mathrm{P})$$

Der unbekannte Ausdruck $A_2\Phi_{21}$ ist über die Reziprozitätsbeziehung zu berechnen:

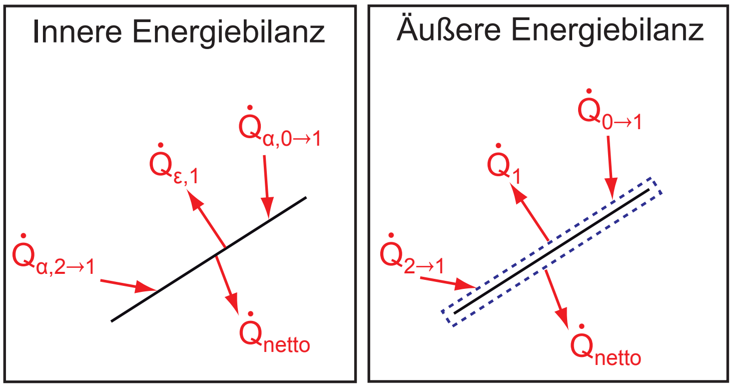
$$A_2\Phi_{21} = A_1\Phi_{12} \qquad (1\,\mathrm{P})$$

Nun ist alles bekannt zur Berechnung der Flächenhelligkeit:

$$\dot{q}_1''A_1 = 2228{,}0W \text{ (korrekter Zahlenwert)} \qquad (1\,\mathrm{P})$$

b) *Stellen Sie die Formel zur Berechnung des Wärmestroms $\dot{Q}_{netto}$ auf, der Fläche 1 im stationären Zustand hält. Muss dieser ab- oder zugeführt werden?* (2 P)

Der gleichgewichthaltende Wärmestrom wird als abzuführend angenommen und entspricht dem Nettostrahlungswärmestrom auf die Fläche 1. Er ergibt sich aus einer inneren oder einer äußeren Energiebilanz für Fläche 1.



Alternative 1: Äußere Energiebilanz

$$\begin{aligned}
0 &= \dot{Q}_{\text{netto}} + \dot{Q}_1 - \dot{Q}_{0\to1} - \dot{Q}_{2\to1}\\
\dot{Q}_{\text{netto}} &= -\dot{Q}_1 + \dot{Q}_{0\to1} + \dot{Q}_{2\to1}\\
\dot{Q}_{\text{netto}} &= -\dot{q}_1'' A_1 + \dot{q}_0'' A_1 \cos(\varphi) + \dot{q}_2'' A_2 \Phi_{21}\\
\dot{Q}_{\text{netto}} &= -\dot{q}_1'' A_1 + \dot{q}_0'' A_1 \cos(\varphi) + \dot{q}_{2,L}'' A_1 \Phi_{12} \qquad (1\,\text{P})\\
\dot{Q}_{\text{netto}} &= -2228{,}0\ W + 1400 \cdot 2 \cdot \cos(35^\circ)\ W + 315{,}6 \cdot 2 \cdot 0{,}05\ W\\
&= 97{,}1\ W \text{ (korrekter Zahlenwert)}
\end{aligned}$$

Alternative 2: Innere Energiebilanz

$$\begin{aligned}
0 &= \dot{Q}_{\text{netto}} + \dot{Q}_{\varepsilon,1} - \dot{Q}_{\alpha,0\to1} - \dot{Q}_{\alpha,2\to1}\\
\dot{Q}_{\text{netto}} &= -\dot{Q}_{\varepsilon,1} + \dot{Q}_{\alpha,0\to1} + \dot{Q}_{\alpha,2\to1}\\
\dot{Q}_{\text{netto}} &= -\varepsilon_{\text{L}} \dot{q}_{s,1,L}'' A_1 + \left(\alpha_{\text{K}} \dot{q}_{0,K}'' + \alpha_{\text{L}} \dot{q}_{0,L}''\right) A_1 \cos(\varphi) + \left(\alpha_{\text{K}} \dot{q}_{2,K}'' + \alpha_{\text{L}} \dot{q}_{2,L}''\right) A_2 \Phi_{21}\\
\dot{Q}_{\text{netto}} &= -\varepsilon_{\text{L}} \dot{q}_{s,1,L}'' A_1 + \left(\varepsilon_{\text{K}} \dot{q}_{0,K}'' + \varepsilon_{\text{L}} \dot{q}_{0,L}''\right) A_1 \cos(\varphi) + \varepsilon_{\text{L}} \dot{q}_{2,L}'' A_1 \Phi_{12}\\
&\text{mit } \varepsilon_{\text{K}} = 1 - \rho_{\text{K}} = 0{,}2 \qquad (\text{P})\\
\dot{Q}_{\text{netto}} &= -0{,}95 \cdot 315{,}6 \cdot 2\ W + (0{,}2 \cdot 1230{,}6 + 0{,}95 \cdot 169{,}4) \cdot 2 \cdot \cos(35^\circ)\ W\\
&+ 0{,}95 \cdot 315{,}6 \cdot 2 \cdot 0{,}05 = 97{,}1\ W \text{ (korrekter Zahlenwert)}
\end{aligned}$$

Der Fläche 1 muss Wärme entzogen werden, um sie im Gleichgewicht zu halten. (1 P)