
Wärme- und Stoffübertragung I

Kleines Rechenbeispiel

Verdunstung an einer flüssigen Oberfläche
- Stefanstrom -

Prof. Dr.-Ing. Reinhold Kneer

Dr.-Ing. Dr. rer. pol. Wilko Rohlf

Frage: Wieviel Wasser verdunstet über dem Bodensee im Sommer



Überlegungen

- Wie kann das Problem beschrieben werden?
 - Limitiert der Stofftransport das Problem?
 $\text{Massenstrom} = \text{Transportkoeffizient} * \text{Treibendes Potenzial}$
 - Limitiert der Wärmetransport das Problem?
 $\text{Wärmestrom} = \text{Wärmeübergangskoeffizient} * \text{Treibendes Potenzial}$
 $\text{Massenstrom} = \text{Wärmestrom} / \text{Verdampfungsenthalpie}$

Frage: Wieviel Wasser verdunstet über dem Bodensee im Sommer

Luft (Gas)

$$T_{Luft} = 25\text{ °C}$$

Wasser (Flüssigkeit)

$$T_{Wasser} = 25\text{ °C}$$

Überlegungen

- Wie kann das Problem beschrieben werden?
 - Limitiert der Stofftransport das Problem?
Massenstrom = Transportkoeffizient * Treibendes Potenzial
 - Limitiert der Wärmetransport das Problem?
Wärmestrom = Wärmeübergangskoeffizient * Treibendes Potenzial
Massenstrom = Wärmestrom / Verdampfungsenthalpie

Annahme: Luft- und Wassertemperatur sind gegeben und bleiben konstant, die Wassertemperatur sinkt nicht durch den verdunstenden Massenstrom

Frage: Wieviel Wasser verdunstet über dem Bodensee im Sommer

Luft (Gas)

$T_{Luft} = 25\text{ °C}$

rel. Feuchte: $\phi = 50\%$

Wasser (Flüssigkeit)

$T_{Wasser} = 25\text{ °C}$

Überlegungen

- Wie lässt sich das treibende Potenzial ermitteln?

Annahme: Die Wasseroberfläche ist undurchlässig für Luft, daher muss im treibenden Potenzial der Stefanstrom mit berücksichtigt werden

$$\dot{m}_w'' \propto \frac{\xi_{H_2O,0} - \xi_{H_2O,\infty}}{1 - \xi_{H_2O,0}}$$

- Wie lassen sich die Massenanteile bestimmen?
- Der Wassermassenanteil in der Luft ist abhängig von der Sättigung.
- An der Wasseroberfläche ist die Luft voll mit Wasser gesättigt ($\phi = 1$).
- Die Temperatur der Luft an der Wasseroberfläche entspricht der Wassertemperatur.
- Die Luftfeuchtigkeit in der Umgebung muss angenommen werden.

Frage: Wieviel Wasser verdunstet über dem Bodensee im Sommer

Luft (Gas)

$$T_{Luft} = 25 \text{ °C}$$

rel. Feuchte: $\phi = 50\%$

Wasser (Flüssigkeit)

$$T_{Wasser} = 25 \text{ °C}$$

Überlegungen

- Wie lässt sich der Stoffübergangskoeffizient ermitteln?

$$\dot{m}_w'' \propto g$$

- Annahme: Das Gesetz von Lewis ist anwendbar, der Stoffübergangskoeffizient g kann durch den Wärmeübergangskoeffizienten α bestimmt werden.
- Voraussetzung: Thermische Diffusion \approx Stoffdiffusion, d.h. $Pr \approx Sc$

Bodensee im Sommer

Luft (Gas)

$$v = 10 \frac{m}{s}, T_{Luft} = 25 \text{ °C}$$

rel. Feuchte: $\phi = 50\%$

$$c_p = 1000 \frac{J}{kg \cdot K}$$

Wasser (Flüssigkeit)

$$T_{Wasser} = 25 \text{ °C}$$

$$A = 536 \text{ km}^2$$

Verdunstung der Flüssigkeit an der Wasseroberfläche

- Diffusion von **Wasser** und **Luft**
- Wasseroberfläche als Phasengrenze bei $x = 0$
- Phasengrenze durchlässig für **Wasserdampf** und undurchlässig für **Luft**
- semipermeable Phasengrenze bzw. einseitige Diffusion

Herangehensweise zur Berechnung

1. Ermittlung des Wärmeübergangskoeffizienten $\bar{\alpha}$
2. Herleitung einer Gleichung für den Massenanteil $\xi_{H_2O,i}$
3. Massenanteil des Wasserdampfes an der Oberfläche $\xi_{H_2O,0}$
4. Massenanteil des Wasserdampfes in der Luft $\xi_{H_2O,\infty}$
5. Lewis Gesetz und Stoffübergangskoeffizient g
6. Masse des verdunsteten Wassers an der Oberfläche \dot{m}_w''
7. Benötigter Wärmestrom \dot{Q}

Ermittlung des Wärmeübergangskoeffizienten $\bar{\alpha}$

Tabelle 4: Gase bei 1 bar

	T	ρ	c	λ	ν	a	Pr
	°C	kg/m ³	kJ/kg K	10 ⁻³ W/m K	10 ⁻⁶ m ² /s	10 ⁻⁶ m ² /s	1
Luft	-200	5,106	1,186	6,886	0,979	1,137	0,8606
	-100	2,019	1,011	16,2	5,829	7,851	0,7423
	0	1,275	1,006	24,18	13,52	18,83	0,7179
	20	1,188	1,007	25,69	15,35	21,47	0,7148
	40	1,112	1,007	27,16	17,26	24,24	0,7122
	80	0,9859	1,01	30,01	21,35	30,14	0,7083
	100	0,9329	1,012	31,39	23,51	33,26	0,707
	200	0,7356	1,026	37,95	35,47	50,3	0,7051
	400	0,517	1,069	49,96	64,51	90,38	0,7137
	600	0,3986	1,116	61,14	99,63	137,5	0,7247
	800	0,3243	1,155	71,54	140,2	191	0,7342
	1000	0,2734	1,185	80,77	185,9	249,2	0,7458
Wasserdampf	100	0,5896	2,042	25,08	20,81	20,83	0,999

Herleitung einer Gleichung für den Massenanteil $\xi_{H_2O,i}$

Wie werden die Massenanteile in diesem Fall berechnet?

$$\xi_{H_2O,i} = \frac{m_{H_2O}}{m_{ges}} = \frac{m_{H_2O}}{m_{Luft} + m_{H_2O}}$$

- Setze: $m_{Luft} = \frac{p_{Luft} \cdot V}{R_{Luft} \cdot T_{Luft}}$ $m_{H_2O} = \frac{p_{H_2O} \cdot V}{R_{H_2O} \cdot T_{H_2O}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{p_{H_2O} \cdot V}{R_{H_2O} \cdot T_{H_2O}}}{\frac{p_{Luft} \cdot V}{R_{Luft} \cdot T_{Luft}} + \frac{p_{H_2O} \cdot V}{R_{H_2O} \cdot T_{H_2O}}} = \frac{\frac{p_{H_2O}}{R_{H_2O}}}{\frac{p_{Luft}}{R_{Luft}} + \frac{p_{H_2O}}{R_{H_2O}}} = \frac{p_{H_2O} \cdot M_{H_2O}}{\underbrace{p_{Luft} \cdot M_{Luft} + p_{H_2O} \cdot M_{H_2O}}_{(p_{ges} - p_{H_2O}) = (1 - p_{Sättigung})}} \\ &\quad (T_{Luft} = T_{H_2O}) \end{aligned}$$

$$\xi_{H_2O,i} = \frac{1}{\frac{1 - p_{H_2O}}{p_{H_2O}} \cdot \frac{M_{Luft}}{M_{H_2O}} + 1}$$

Tabelle 8: Dampfdrücke reiner Stoffe: Antoine-Gleichung (p^* in mbar, T in °C)

$$\log p^* = A - \frac{B}{T+C}$$

Stoffe	Temperaturbereich [°C]	A -	B -	C -
Aceton	-13-55	7,24208	1210,595	229,664
Aceton	57-205	7,75624	1566,690	273,419
Ethanol	20-93	8,23714	1592,864	226,184
Benzol	8-80	7,00481	1196,760	219,161
i-Butanol	72-107	7,32625	1157,000	168,270
Chloroform	-10-60	7,07959	1170,966	226,232
n-Heptan	-3-127	7,01880	1264,370	216,640
Methanol	15-84	8,20591	1582,271	239,726
Methanol	25-56	7,89373	1408,360	223,600
i-Octan	24-100	6,92798	1252,590	220,119
Propan		6,95467	813,200	248,000
Sauerstoff		7,11577	370,757	273,200
Stickstoff		6,99100	308,365	273,200
Wasser	1-100	8,19625	1730,630	233,426

 $M_{H_2O,0}$ $= 18 \frac{g}{mol}$

bar

Lewis Gesetz und Stoffübergangskoeffizient g

Herleitung Lewis Gesetz für alle Gase

$$\left(\frac{Sh}{Nu}\right) = \left(\frac{Sc}{Pr}\right)^n$$
$$\frac{g}{\alpha/c_p} = \left(\frac{Sc}{Pr}\right)^{n-1}$$

Bei Gasen sind die Prandtl-Zahl und die Schmidt-Zahl nahezu gleich groß.

➔ $\frac{g}{\alpha/c_p} = 1$ bzw. $g = \frac{\alpha}{c_p}$

Berechnung des Stoffübergangskoeffizient g

$$\alpha = 3,89 \frac{W}{m^2 K} \quad (\text{aus Teil 1})$$

$$c_p = 1000 \frac{J}{kg \cdot K} \quad (\text{aus A.S.})$$

$$g = \frac{\alpha}{c_p} = \frac{3,89 \frac{W}{m^2 K}}{1000 \frac{J}{kg \cdot K}} = 3,89 \cdot 10^{-3} \frac{kg \cdot s}{m^2}$$

Masse des verdunstenden Wassers \dot{m}_w'' bzw. \dot{m}_w'' und Wärmestrom \dot{Q}

Verdunstender Massenstrom pro Fläche \dot{m}_w''

$$\dot{m}_w'' = g \cdot \frac{\xi_{H_2O,0} - \xi_{H_2O,\infty}}{1 - \xi_{H_2O,0}} = \frac{\alpha}{c_p} \cdot \frac{\xi_{H_2O,0} - \xi_{H_2O,\infty}}{1 - \xi_{H_2O,0}} = \frac{3,89 \frac{W}{m^2 \cdot K}}{1000 \frac{J}{kg \cdot K}} \cdot \frac{(20 - 10) \cdot 10^{-3}}{(1 - 20 \cdot 10^{-3})} = 3,97 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{m^2 \cdot s}$$

Verdunstender Massenstrom über die gesamte Seeoberfläche \dot{m}_w

$$\dot{m}_w = \dot{m}_w'' \cdot A = 3,97 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{m^2 \cdot s} \cdot 536 \cdot 10^6 m^2 = 2,13 \cdot 10^4 \frac{kg}{s}$$

Welcher Wärmestrom \dot{Q} wird dafür benötigt?

$$\dot{Q} = \dot{m}_w \cdot \Delta h_v = 2,13 \cdot 10^4 \frac{kg}{s} \cdot 2500 \frac{kJ}{kg} = 5,32 \cdot 10^7 kW$$

Verständnisfragen

Wie werden Massenanteile berechnet?

Unter welchen Voraussetzungen gilt das Lewis- Gesetz?

Wie wird der Stoffübertragungskoeffizient unter Geltung des Lewis Gesetzes berechnet?

Wie wird die Masse des verdunstenden Wassers bestimmt?