

---

# **Wärme- und Stoffübertragung I**

## **Anwendung der Ähnlichkeitstheorie**

**Prof. Dr.-Ing. Reinhold Kneer**  
**Dr.-Ing. Dr. rer. pol. Wilko Rohlfs**

## Lernziele

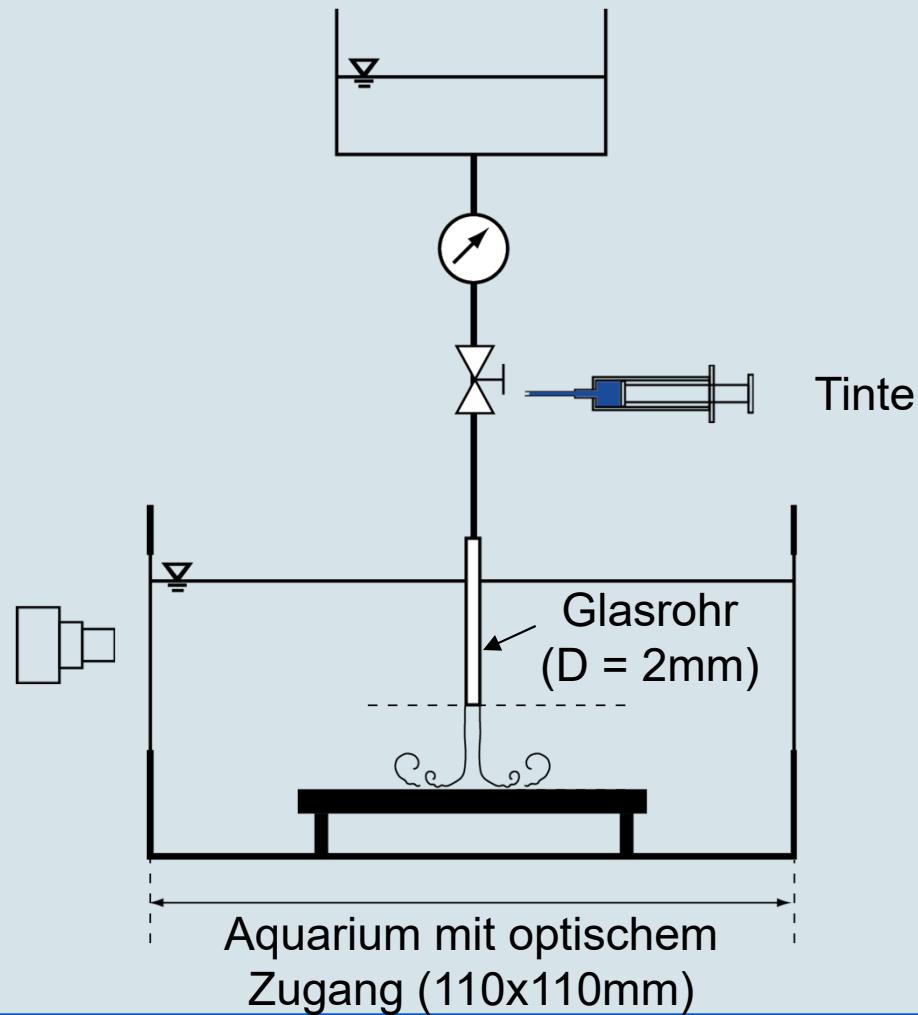
---

- Ähnlichkeitstheorie in der Wärme- und Stoffübertragung
  - Grundverständnis von der Ähnlichkeitstheorie.
  - Verständnisse der physikalischen Bedeutungen relevanter dimensionsloser Kennzahlen, die ein Konvektionsproblem beschreiben können.
  - Fähigkeit unterschiedliche konvektive Wärmeübergangsprobleme im Hinblick auf die Strömungs- und Randbedingungen zu unterscheiden.

$$Nu = Nu(Re, Gr, Pr)$$

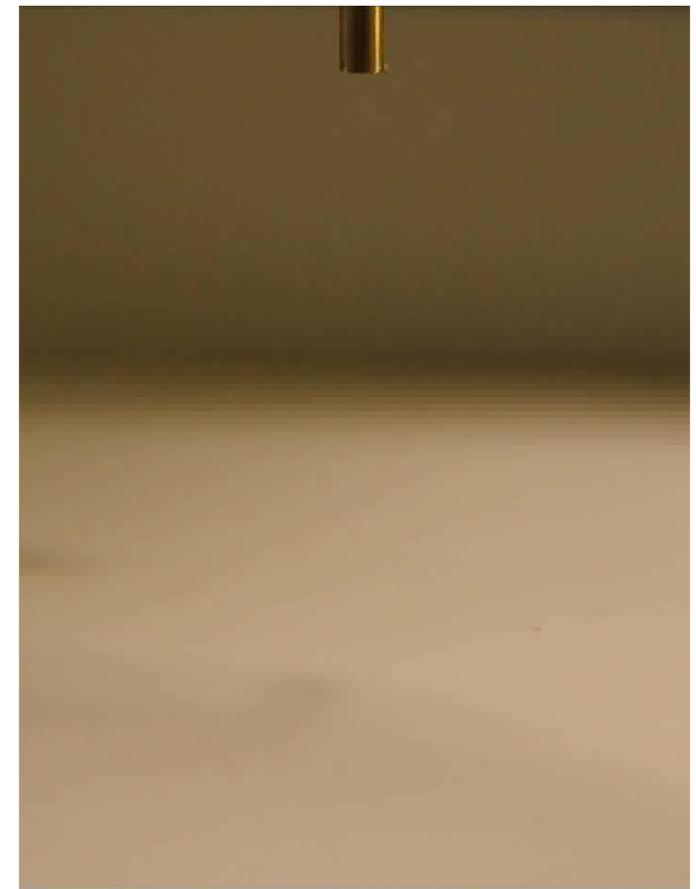
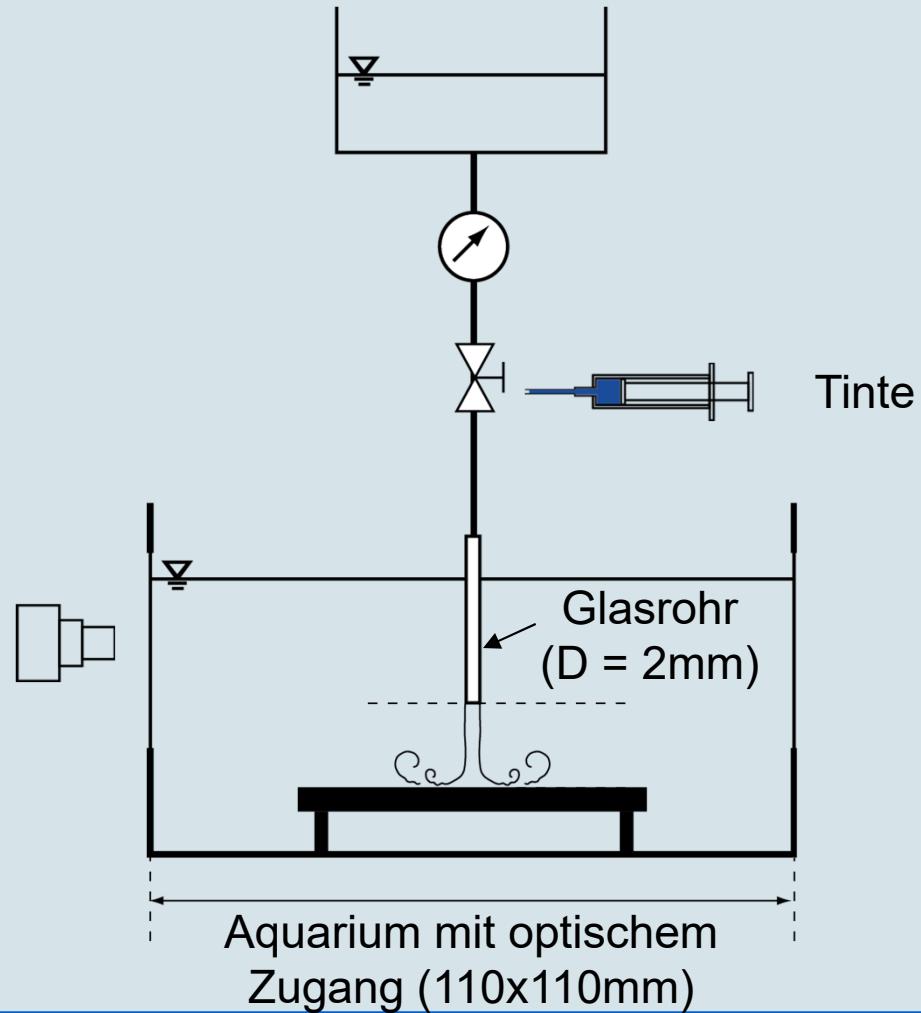
# Ähnlichkeitstheorie ---

## Prallstrahl: Experiment



# Ähnlichkeitstheorie

## Prallstrahl: Experiment



# Ähnlichkeitstheorie

## Welche Größen sind entscheiden?

Stoffeigenschaften:

- Viskosität
- Dichte

Strömungsbedingungen:

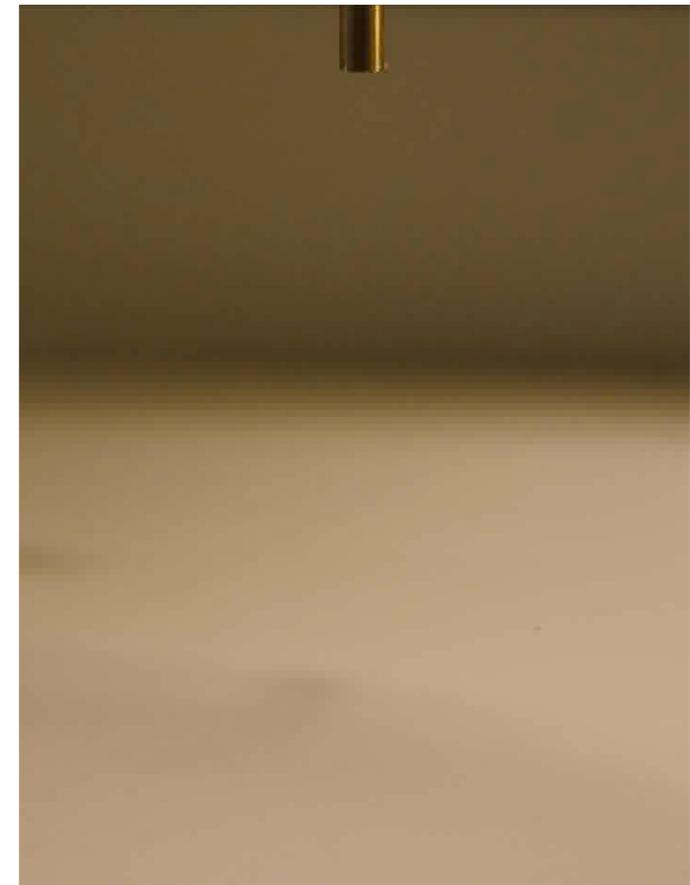
- Geschwindigkeit

Geometrie:

- Düsendurchmesser
- Abstand Prallplatte

Sind Experimente mit  
Öl und Wasser  
vergleichbar?

Entscheidend ist, dass alle  
Kräfteverhältnis identisch sind



# Welche Kräfte spielen eine Rolle: Betrachtung der Erhaltungsgleichungen

Kontinuitäts-  
gleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Impuls-  
gleichung

Impulsströme

Druck

Scherspannungen

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

# Welche Kräfte spielen eine Rolle: Betrachtung der Erhaltungsgleichungen

Kontinuitäts-  
gleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

Entdimensionierung

$$x^* = \frac{x}{L}, y^* = \frac{y}{L}, u^* = \frac{u}{u_\infty}, v^* = \frac{v}{u_\infty}, p^* = \frac{p}{\rho u_\infty^2}$$

Impuls-  
gleichung

Impulsströme

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

Druck

Scherspannungen

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

Die Reynolds-Zahl ist **die** relevante Kennzahl

Entscheidend für dieses Problem ist das Kräfteverhältnis  
zwischen viskosen Kräften und Trägheitskräften

Achtung: Oft kommen weitere Effekte durch die Randbedingungen zum Tragen

**Re = 2500**



**Re = 1600**

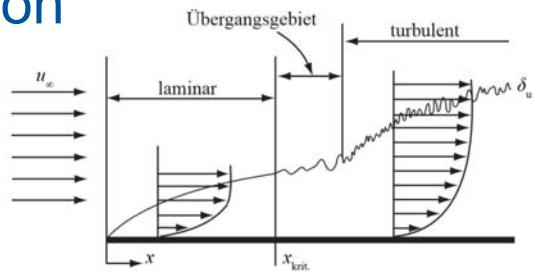


**Re = 800**



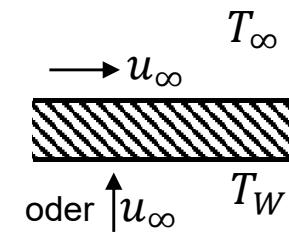
# Beispiele für konvektive Wärmetransportkonfigurationen

Erzwungene  
Konvektion

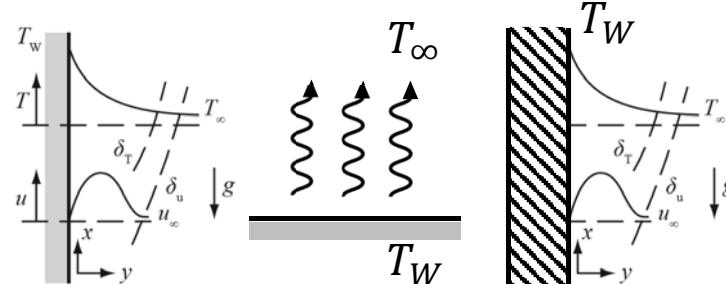


Platten

Umströmung  
Zylinder  
(axial / radial)  
Glattrohrbündel  
usw. ...

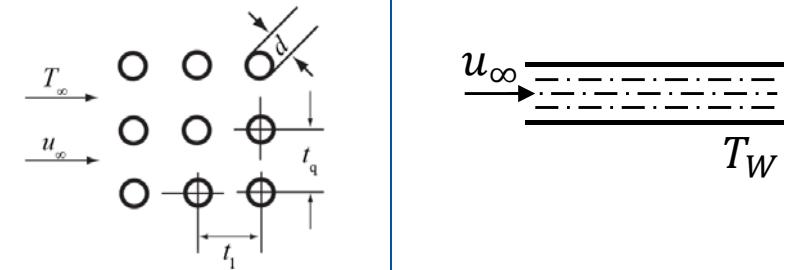


Natürliche  
Konvektion

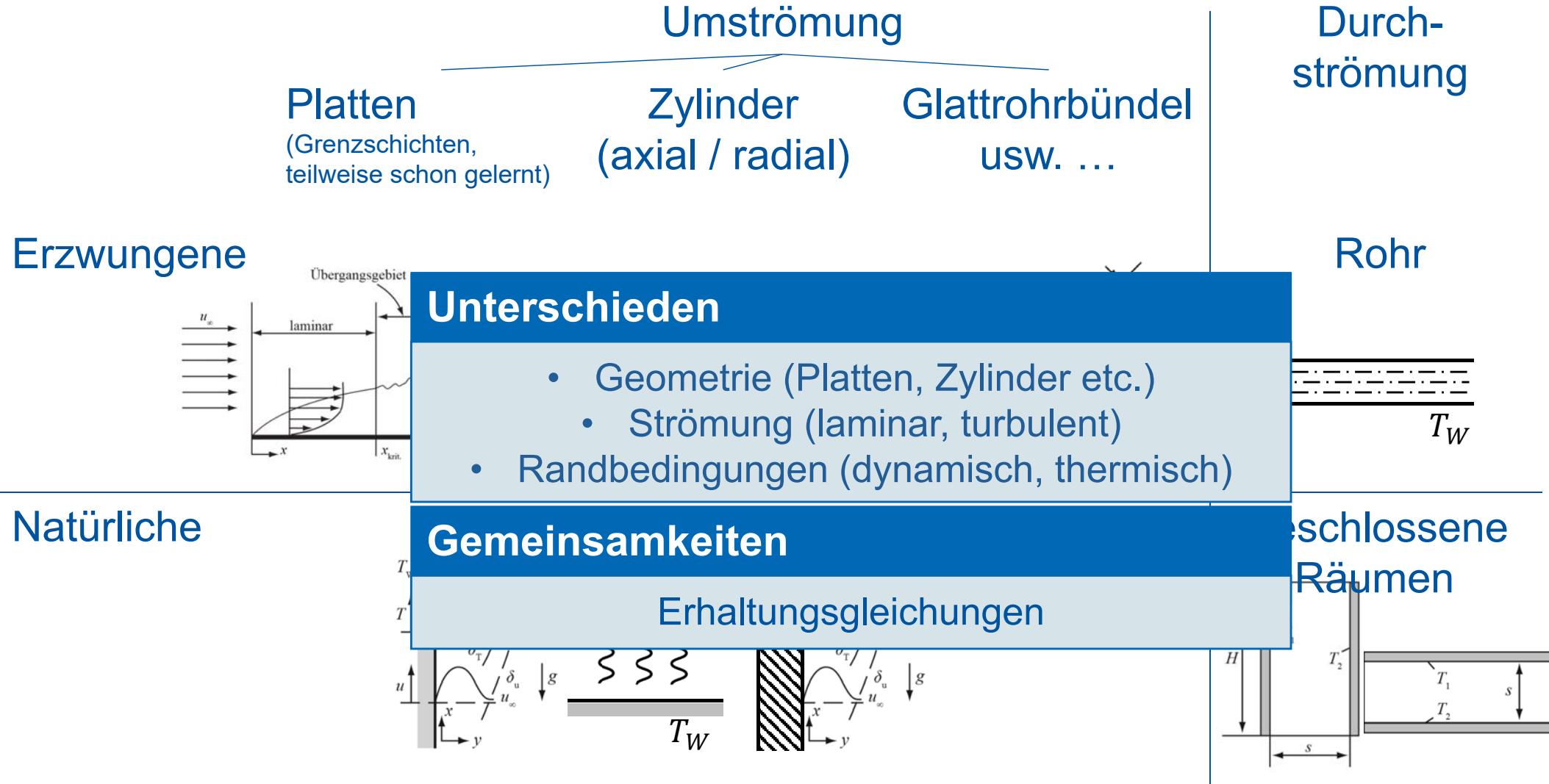


Durch-  
strömung

Rohr



# Beispiele für konvektive Wärmetransportkonfigurationen



# Rückblick: Erzwungene Konvektion

Kontinuitäts-  
gleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Impuls-  
gleichung

Impulsströme

Druck

Scherspannungen

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Energie-  
gleichung

Enthalpieströme

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} =$$

Wärmeleitung

$$\frac{\nu}{Pr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

# Rückblick: Erzwungene Konvektion

Kontinuitäts-  
gleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

Entdimensionierung

$$x^* = \frac{x}{L}, y^* = \frac{y}{L}, u^* = \frac{u}{u_\infty}, v^* = \frac{v}{u_\infty}, p^* = \frac{p}{\rho u_\infty^2}, \Theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_W - T_\infty}$$

Impuls-  
gleichung

Impulsströme

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

Druck

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

Scherspannungen

Energie-  
gleichung

Enthalpieströme

$$u^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial y^*} =$$

Wärmeleitung

$$\underbrace{\frac{1}{RePr}}_{Pe} \left( \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$Nu = Nu(Re, Pr)$$

# Rückblick: Natürliche Konvektion

Kontinuitäts-  
gleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Impuls-  
gleichung

Impulsströme

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \beta g (T - T_\infty)$$

Druck

Scherspannungen

Schwerkraft

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Energie-  
gleichung

Enthalpieströme

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} =$$

Wärmeleitung

$$\frac{\nu}{Pr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

# Rückblick: Natürliche Konvektion

Kontinuitäts-  
gleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

Entdimensionierung

$$x^* = \frac{x}{L}, y^* = \frac{y}{L}, u^* = \frac{u}{u_\infty}, v^* = \frac{v}{u_\infty}, p^* = \frac{p}{\rho u_\infty^2}, \Theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_W - T_\infty}$$

Impuls-  
gleichung

Impulsströme

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

Druck

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

Energie-  
gleichung

Enthalpieströme

$$u^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial y^*} =$$

Scherspannungen

Schwerkraft

$$+ \underbrace{Gr \cdot \left( \frac{1}{Re} \right)^2}_{Ar} \Theta^*$$

Wärmeleitung

$$\underbrace{\frac{1}{RePr}}_{Pe} \left( \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$Nu = Nu(Gr, Pr)$$

# Zusammenfassung: Dimensionslose Zahlen

## Allgemeiner Form der Wärmeübergangskoeffizient

$$Nu \equiv \frac{\alpha L}{\lambda} = \text{Dimensionsloser Wärmeübergangskoeffizient}$$
$$= C \cdot Re^m \cdot Pr^n \cdot Gr^p$$

mit

$$Re \equiv \frac{\rho u_\infty L}{\eta} = \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Zähigkeitskräfte}}$$

$$Pr \equiv \frac{\eta c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a} = \frac{\text{Diffusiver Impulstransport}}{\text{Diffusiver Wärmetransport}}$$

$$Gr \equiv \frac{\beta g \rho^2 (T_w - T_\infty) L^3}{\eta^2} = \frac{\text{Auftriebskräfte}}{\text{Zähigkeitskräfte}}$$

$$Pe \equiv Re \cdot Pr = \frac{\text{Advectiver Wärmefluss}}{\text{Diffusiver Wärmefluss}}$$

$$Ar \equiv \frac{Gr}{Re^2} = \frac{\text{Auftriebskräfte}}{\text{Reibungskräfte}}$$

# Verständnisfragen

---

**Was besagt die Ähnlichkeitstheorie und auf was muss geachtet werden, damit die Lösung zweier unterschiedlicher Probleme identisch ist?**

**Welche Kennzahlen sind für die empirisch begründeten Wärmeübergangsgesetze von essentieller Bedeutung?**