Wärme- und Stoffübertragung I

Lösung der Rippen DGL

Prof. Dr.-Ing. Reinhold Kneer
Dr.-Ing. Dr. rer. pol. Wilko Rohlfs

Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Lernziel

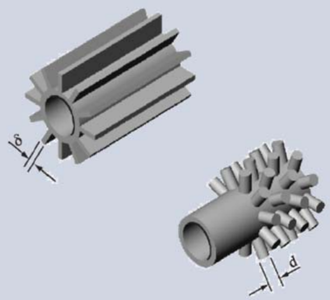
Differentialgleichung für Rippen

- Homogenisierung der Rippen DGL
- Allgemeine Lösung der DGL

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - m^2\, \theta(x) = 0$$

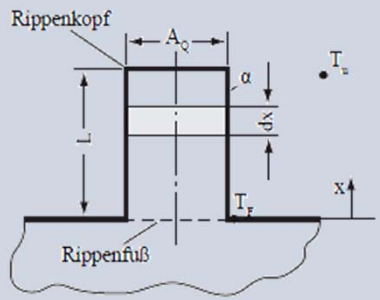
Definition des Rippenparameters m

- Interpretation des Rippenparameters m für verschiedene Rippengeometrien

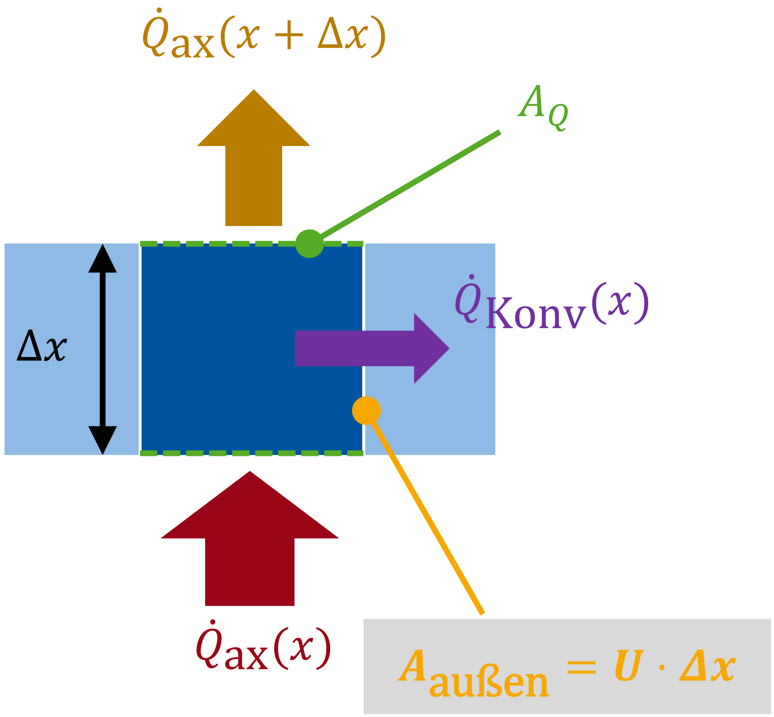


Randbedingungen

- Erkennen und Umsetzen unterschiedlicher Randbedingungen für das Rippenproblem



Wiederholung-DGL von Rippen

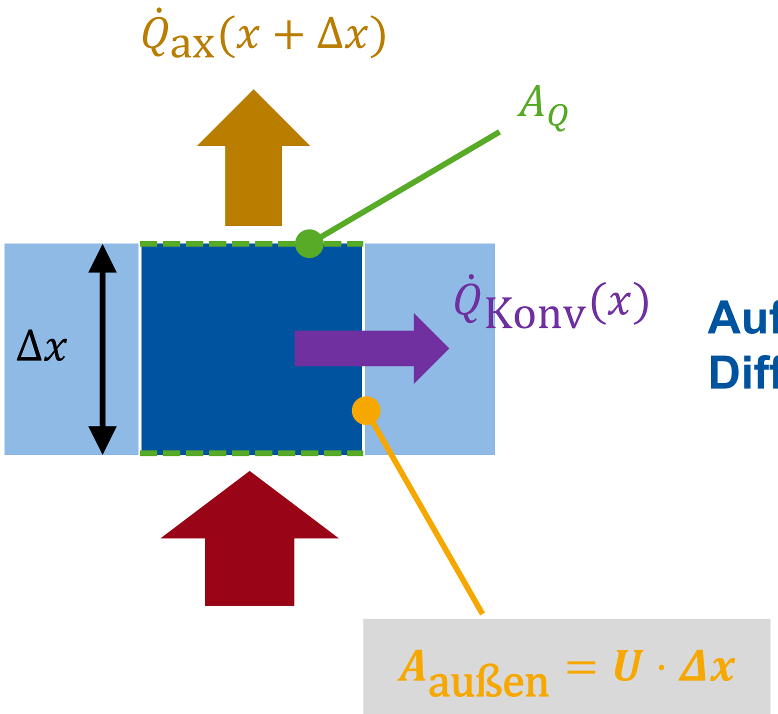


Inhomogene Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$-\lambda \cdot A_Q \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha \cdot U \left(T(x) - T_u\right) = 0$$

$\dot{Q}_{\mathrm{ax}}$:	Wärmeleitung in axialer Richtung
$\dot{Q}_{\mathrm{Konv}}$:	Konvektive Wärmeabfuhr auf die Umgebung
Δx:	Länge des finiten Elements
A_Q:	Querschnittsfläche der Rippe
$A_{\mathrm{außen}}$:	Äußere Oberflächenfläche (Mantelfläche) des finiten Elements
U:	Umfang der Rippe
$\mathrm{T_U}$:	Umgebungstemperatur

Lösung der Differential Gleichung für Rippen



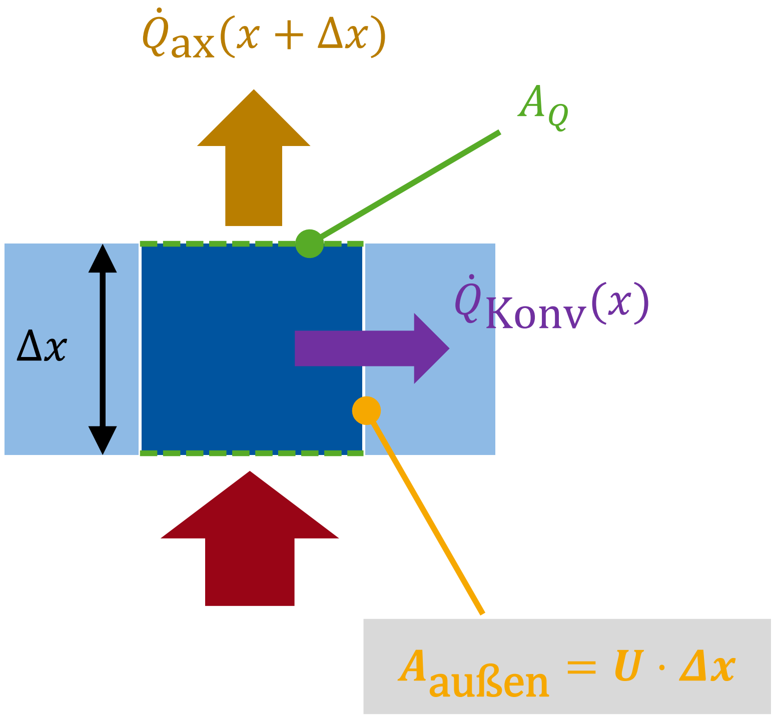
Inhomogene Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$-\lambda \cdot A_Q \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha \cdot U \left(T(x) - T_u\right) = 0$$

Aufgrund von T_U als konstante Umgebungstemperatur in der Differentialgleichung ist die Gleichung inhomogen.

→ **Zur Lösung der DGL bietet sich das Verfahren der Homogenisierung an.**

Homogenisierung der Differential Gleichung



Inhomogene Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$-\lambda \cdot A_Q \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha \cdot U\,(T\,(x) - T_u) = 0$$

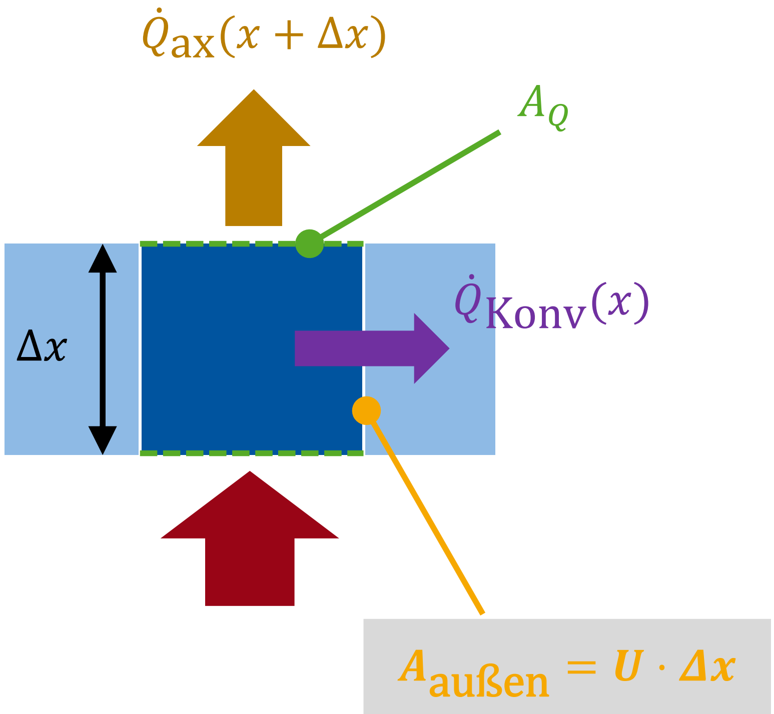
Homogenisierung der Gleichung durch Einführung des Parameters θ (Übertemperatur)

Definition: $\theta(x) = T(x) - T_u$

1. Ableitung: $\dfrac{\partial \theta(x)}{\partial x} = \dfrac{\partial T(x)}{\partial x}$

2. Ableitung: $\dfrac{\partial^2 \theta(x)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2}$

Lösung der Differential Gleichung für Rippen



Inhomogene Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$-\lambda \cdot A_Q \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} + \alpha \cdot U \left(T(x) - T_u\right) = 0$$

$$\theta(x) = T(x) - T_u$$

Einsetzen von $\theta(x)$ in der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \theta(x)}{\partial x^2} - \underbrace{\frac{\alpha \cdot U}{\lambda \cdot A_Q}}_{= m^2} \theta(x) = 0$$

$= m^2$ „Rippenparameter“

$$\frac{\partial^2 \theta(x)}{\partial x^2} - m^2 \, \theta(x) = 0$$

Rippenparameter m

Rippenparameter *ist abhängig von:*

- ***Wärmeleitfähigkeit der Rippe***
- ***Geometrie der Rippe***
- ***Wärmeübergangskoeffizient zum umgebenden Medium***

$$\boxed{m^2 = \frac{\alpha \cdot U}{\lambda \cdot A_Q}}$$

Beispiel zur Geometrie:

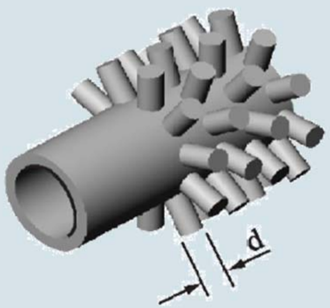
Stabrippen

Umfang: $U = \pi\, d$

Querschnittsfläche: $A_Q = \frac{\pi d^2}{4}$

$$m^2 = \frac{\pi\, d}{\pi d^2 / 4}$$

$$\boxed{m^2 = \frac{4\,\alpha}{\lambda\, d}}$$



Ebene Rippen

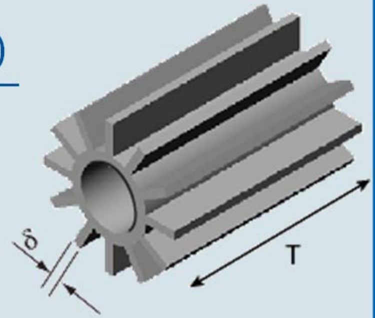
Umfang: $U = 2\,(\,\delta + T)$

Querschnittsfläche: $A_Q = \delta \cdot T$

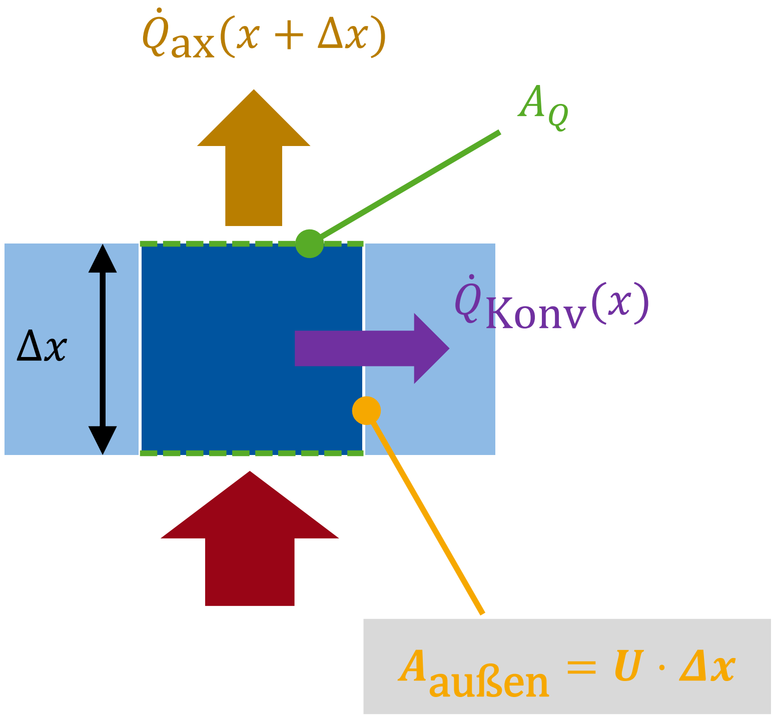
$$m^2 = \frac{2\,(\,\delta + T)}{\delta \cdot T}$$

Für $\delta \ll T$:

$$\boxed{m^2 \approx \frac{2\,\alpha}{\lambda\,\delta}}$$



Lösung der Differential Gleichung für Rippen



Homogene Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{\partial^2 \theta(x)}{\partial x^2} - m^2\, \theta(x) = 0$$

Allgemeine Lösung der Rippen-DGL:

$$\theta(x) = A \cdot sinh(m \cdot x) + B\, cosh(m \cdot x)$$

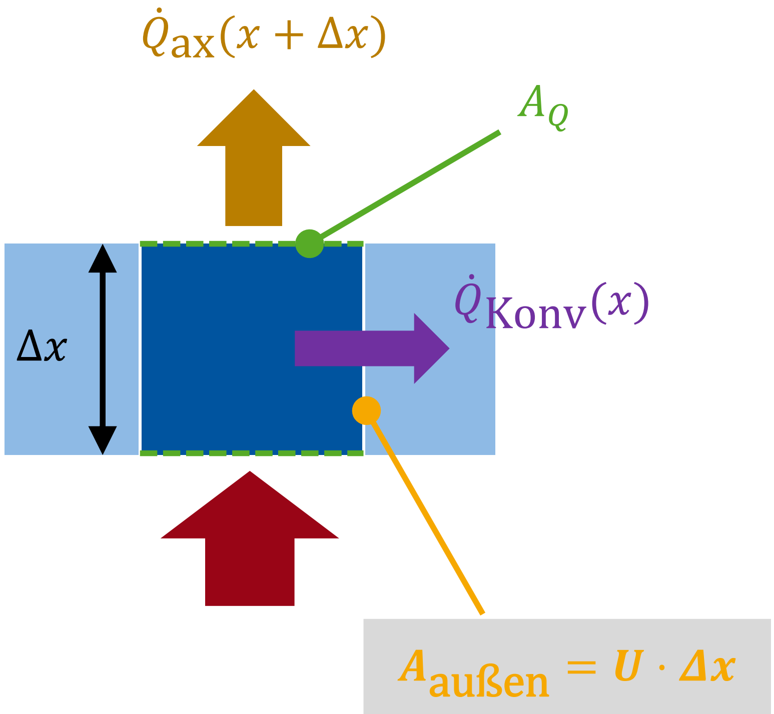
$$\theta(x) = C \cdot e^{m\,x} + D \cdot e^{-m\,x}$$

DGL 2. Ordnung ➔ **Zwei Randbedingungen benötigt!**

A , B bzw. C, D sind die unbekannten Konstanten, die mit Hilfe von Randbedingungen herauszufinden sind.

Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung

Mathematische Beziehungen



Allgemeine Lösung der Rippen-DGL:

$$\theta(x) = A \cdot \sinh(m \cdot x) + B \cosh(m \cdot x)$$

$$\theta(x) = C \cdot e^{m\,x} + D \cdot e^{-m\,x}$$

Mathematische Umformung

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

$$\Longrightarrow$$

$$C = \frac{A+B}{2}, \qquad D = \frac{A-B}{2}$$

Randbedingungen

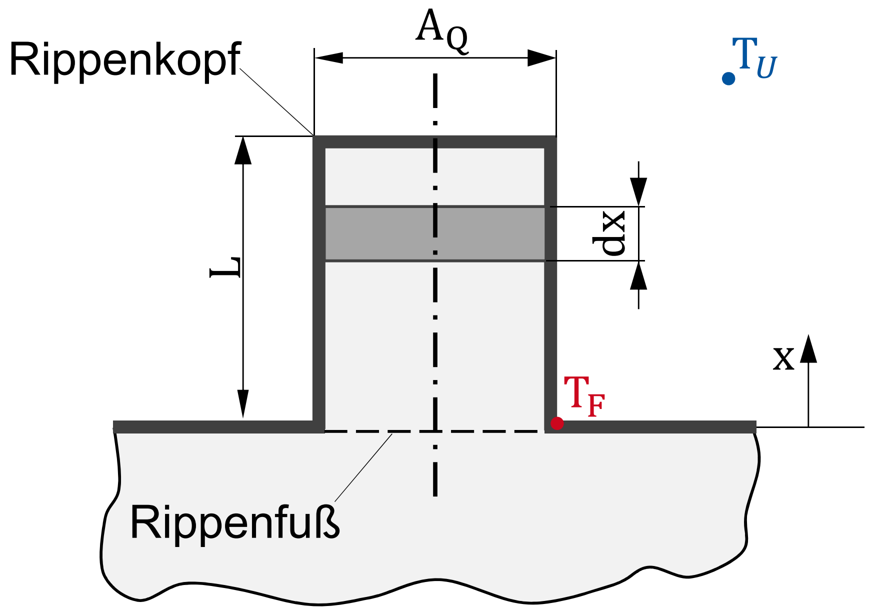
- Üblicherweise werden Randbedingungen am Fuß und am Kopf der Rippen definiert.
- Der Fuß der Rippe ist dort, wo die Rippe startet Wärme durch Konvektion an die Umgebung abzugeben.

Randbedingung am Fuß von Rippen $(x = 0)$

Bekannte Temperatur am Fuß der Rippe:

$$T(x = 0) = T_F$$

$$\theta(x = 0) = T_F - T_U$$



Randbedingungen

- **Üblicherweise werden Randbedingungen am Fuß und am Kopf der Rippen definiert.**
- **Der Fuß der Rippe ist dort, wo die Rippe startet Wärme durch Konvektion an die Umgebung abzugeben.**

Randbedingung am Kopf der Rippe $(x = L)$

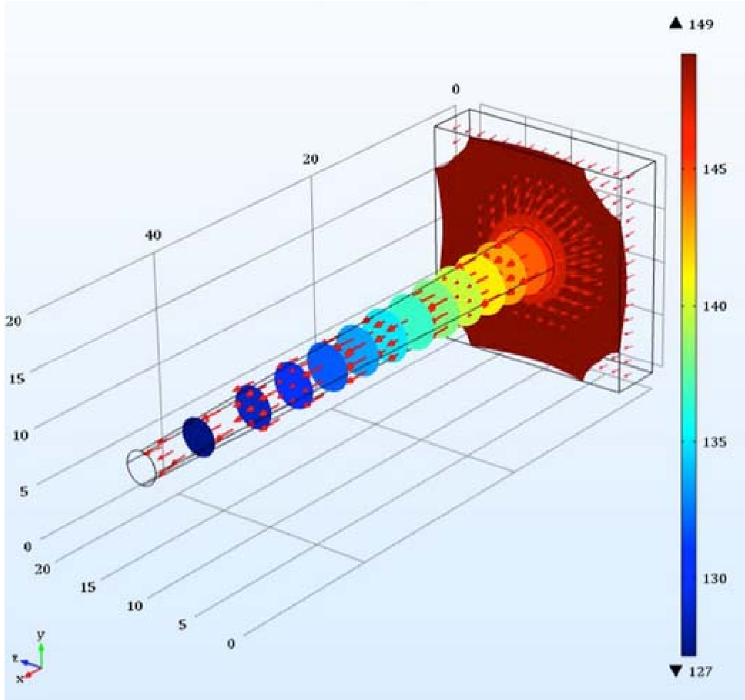
I. Ausreichend lange Rippe:

$$\dot{Q}_{\text{Kopf}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = 0$$

II. $A_{\text{Kopf}} \ll A_{\text{Oberfläche}}$:

identisch

$$\dot{Q}_{\text{Kopf}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = 0$$



https://cdn.comsol.com/wordpress/2016/02/Apps-user-interface.png

Randbedingungen

- Üblicherweise werden Randbedingungen am Fuß und am Kopf der Rippen definiert.
- Der Fuß der Rippe ist dort, wo die Rippe startet Wärme durch Konvektion an die Umgebung abzugeben.

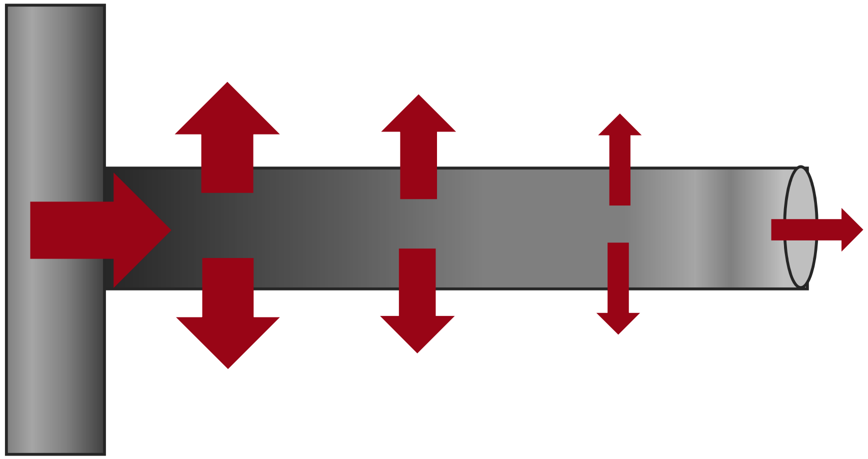
Randbedingung am Kopf von Rippen

III. Wenn Wärmestrom am Kopf nicht vernachlässigbar ist:

$$\dot{Q}_{\text{Kopf}} \neq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{Q}_{\text{Kopf}} = \dot{Q}_L = \alpha\, A_Q\, \theta_{\text{Kopf}}$$

$$\dot{Q}_{\text{Kopf}} = \dot{Q}_L = \alpha\, A_Q\, (T_{\text{K}} - T_{\text{U}})$$

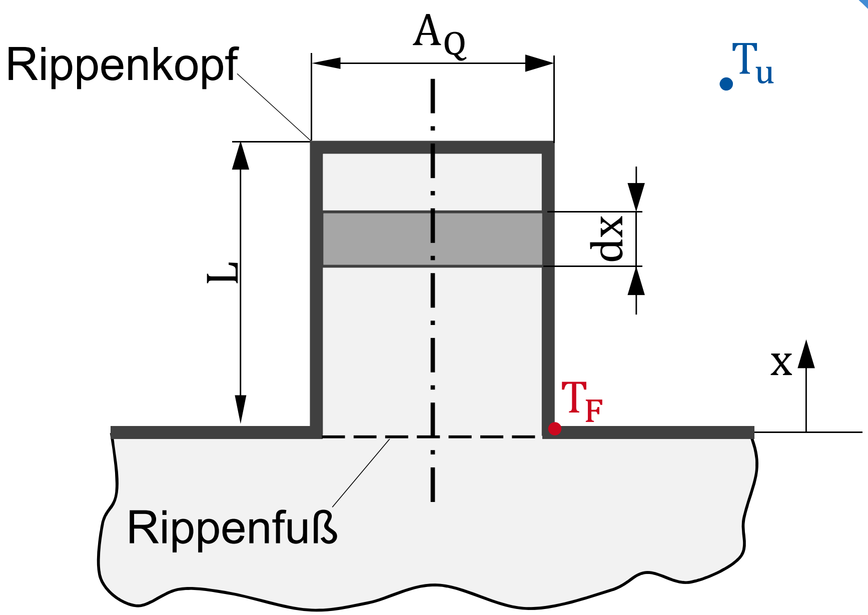


Ersetzen von Randbedingungen und Lösen von DGL

Allgemeine Lösung der DGL

$$\theta(x) = C \cdot e^{m\,x} + D \cdot e^{-m\,x}$$

$$\frac{\partial\theta(x)}{\partial x} = m \cdot C \cdot e^{m\,x} - m \cdot D \cdot e^{-m\,x}$$



Randbedingungen Ersetzen:

RB1: Gegebene Fußtemperatur bei $x = 0$:

$$\theta(x) = \theta_F$$

$$\Longrightarrow$$

$$\theta_F = C \cdot e^0 + De^0$$

$$\theta_F = C + D$$

$$C = \theta_F - D$$

RB2: Kein Wärmestrom bei $x = L$:

$$\dot{Q}_{Kopf} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = 0$$

$$m \cdot C \cdot e^{m\,L} - m \cdot D \cdot e^{-m\,L} = 0$$

$$(\theta_F - D) \cdot e^{m\,L} - D \cdot e^{-m\,L} = 0$$

$$\theta_F \cdot e^{m\,L} = D \cdot (e^{m\,L} + e^{-m\,L})$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} D &= \theta_F \cdot \frac{e^{m\,L}}{e^{m\,L} + e^{-m\,L}} \\ C &= \theta_F - \theta_F \cdot \frac{e^{m\,L}}{e^{m\,L} + e^{-m\,L}} \end{aligned}}$$

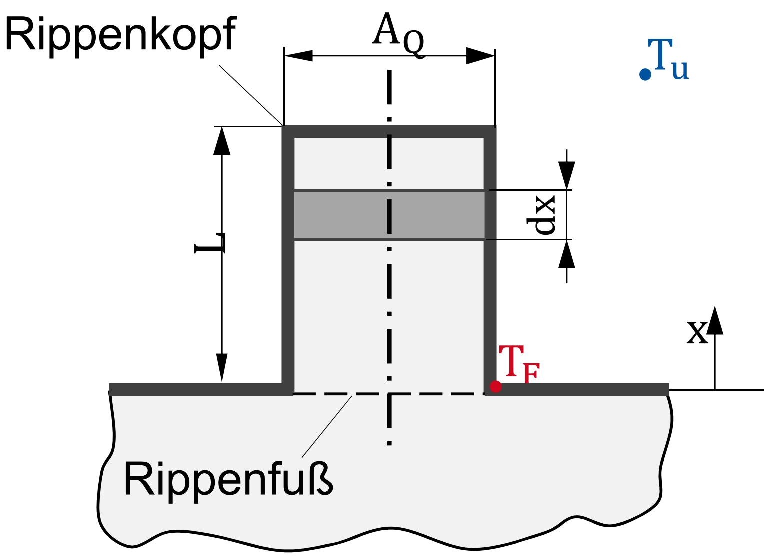
Ersetzen von Randbedingungen und Lösen von DGL

Allgemeine Lösung der DGL

$$\theta(x) = C \cdot e^{m\,x} + D \cdot e^{-m\,x}$$

$$\boxed{C = \ \theta_F - \theta_F \cdot \frac{e^{m\,L}}{e^{m\,L} + e^{-m\,L}}}$$

$$\boxed{D = \theta_F \cdot \frac{e^{m\,L}}{e^{m\,L} + e^{-m\,L}}}$$



C & D in DGL Ersetzen:

$$\theta(x) \quad = \left(\theta_F - \theta_F \cdot \frac{e^{m\,L}}{e^{m\,L} + e^{-m\,L}}\right) \cdot e^{m\,x} + \theta_F \cdot \frac{e^{m\,L}}{e^{m\,L} + e^{-m\,L}} \cdot e^{-m\,x}$$

Mathematisch umformulieren und vereinfachen:

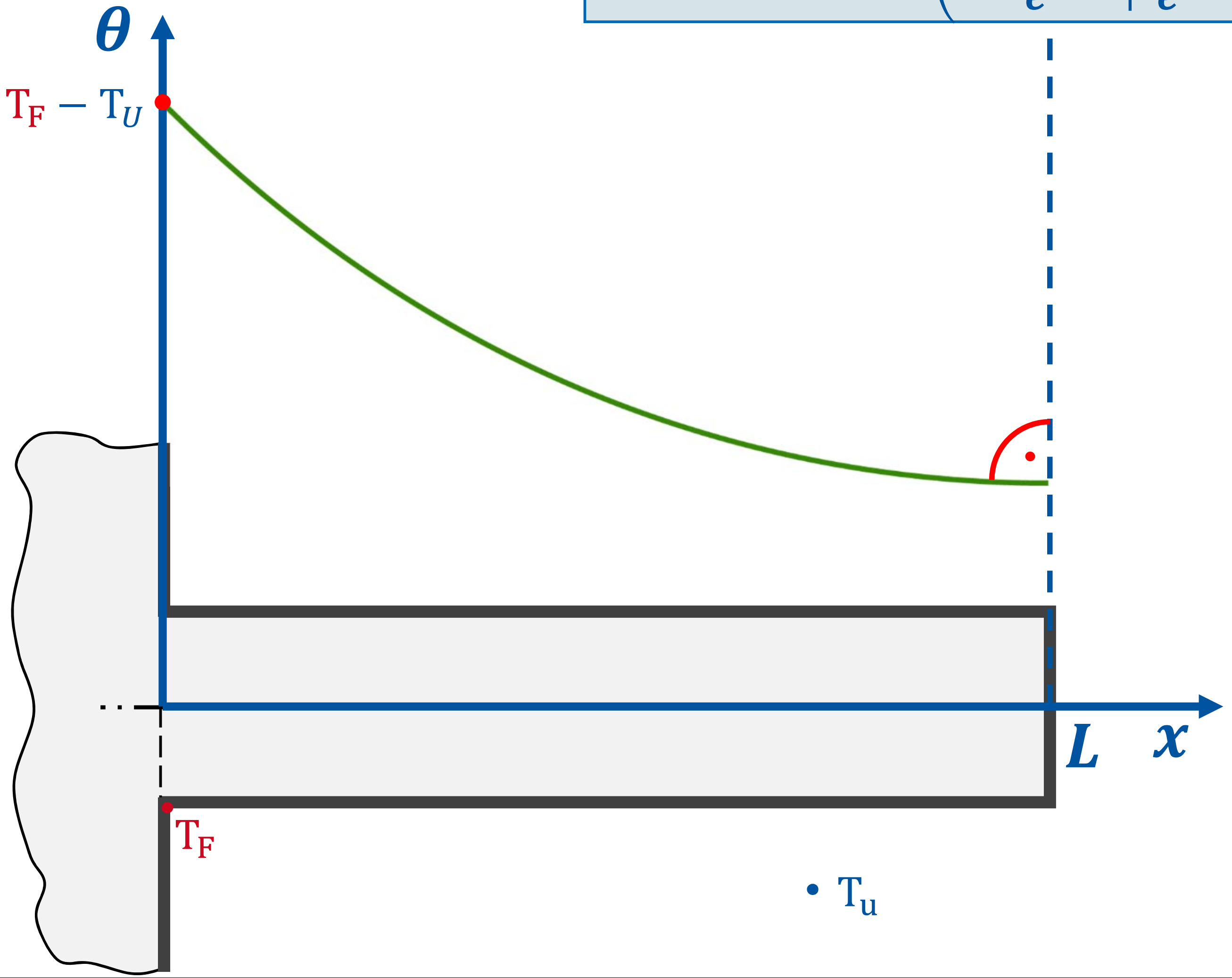
$$\boxed{\theta(x) \quad = \theta_F \cdot \left(\frac{e^{m\,(L-x)} + e^{-m\,(L-x)}}{e^{m\,L} + e^{-m\,L}}\right)}$$

Alternativ:

$$\boxed{\theta(x) \quad = \theta_F \cdot \left(\frac{\cosh(m(L-x))}{\cosh(mL)}\right)}$$

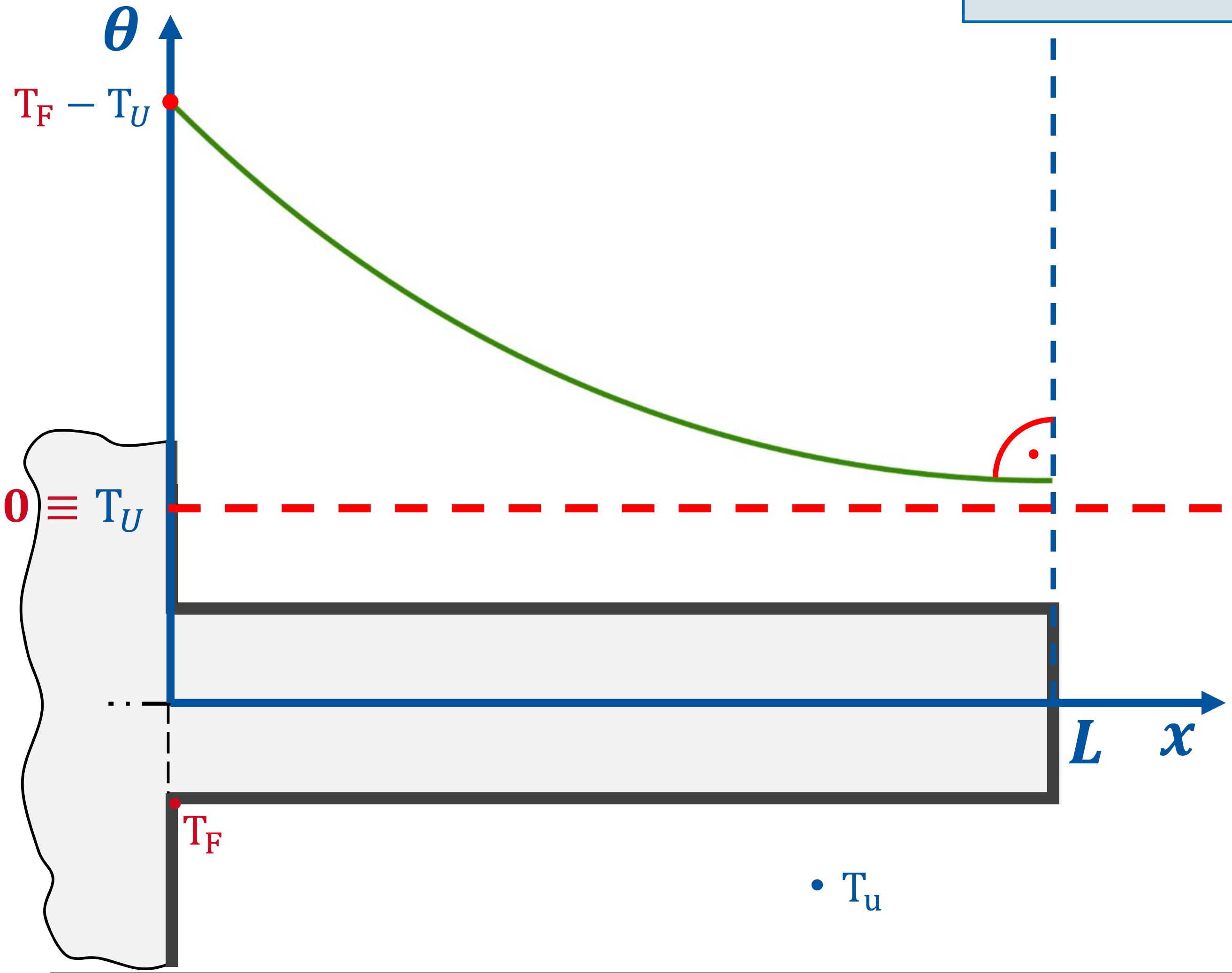
Temperaturverlauf beim Rippen

$$\theta(x) \quad = \theta_F \cdot \left(\frac{e^{m\,(L-x)} + e^{-m\,(L-x)}}{e^{m\,L} + e^{-m\,L}} \right)$$



Temperaturverlauf beim Rippen

$$\theta(x) = \theta_F \cdot \left(\frac{e^{m\,(L-x)} + e^{-m\,(L-x)}}{e^{m\,L} + e^{-m\,L}} \right)$$



Ist die Kopftemperatur T_K gleich der Umgebungstemperatur wenn $\dot{Q}_{\mathrm{Kopf}} = 0$?

Für x = L

$$\theta(L) = \theta_F \cdot \left(\frac{e^{0} + e^{-0}}{e^{m\,L} + e^{-m\,L}} \right)$$

$$= \theta_F \cdot \left(\frac{2}{e^{m\,L} + e^{-m\,L}} \right)$$

Fazit: Auch bei $\dot{Q}_{\mathrm{Kopf}} = \mathbf{0}$ ist die Kopftemperatur $\boldsymbol{T}_{\mathrm{K}}$ <u>immer</u> oberhalb der Umgebungstemperatur und nähert sich dieser nur an.

Verständnisfragen

Welcher Ansatz zur Lösung der inhomogenen Rippen-DGL kann verwendet werden?

Welche Parameter beeinflussen den Rippenparameter m?

Welche gängigen Randbedingungen lassen sich zur Lösung des Temperaturverlaufs in der Rippe verwenden?