# Wärme- und Stoffübertragung I

## Grenzschichtgleichungen
## – Natürliche Konvektion

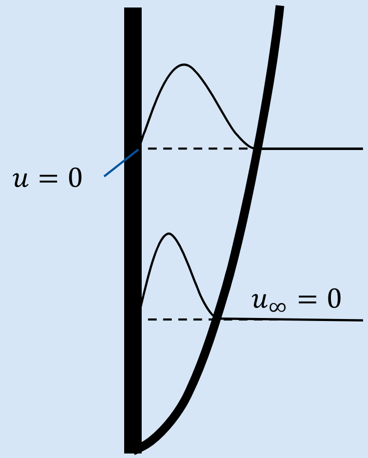
Prof. Dr.-Ing. Reinhold Kneer
Dr.-Ing. Dr. rer. pol. Wilko Rohlfs



Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

# Lernziele

- Grenzschicht bei der natürlichen Konvektion
  - Verständnis des Grenzschichtprofils (Temperatur und Geschwindigkeit) an einer ebenen Platte mit freier Konvektion
  - Herleitung und Bedeutung der Grashof-Zahl
  - Kenntnis der Unterschiede zwischen den Grenzschichtprofilen bei erzwungener und freier Konvektion




(Note: „natürliche“ oder „freie“ Konvektion, beiden Begriffe sind identisch und können äquivalent verwendet werden.)

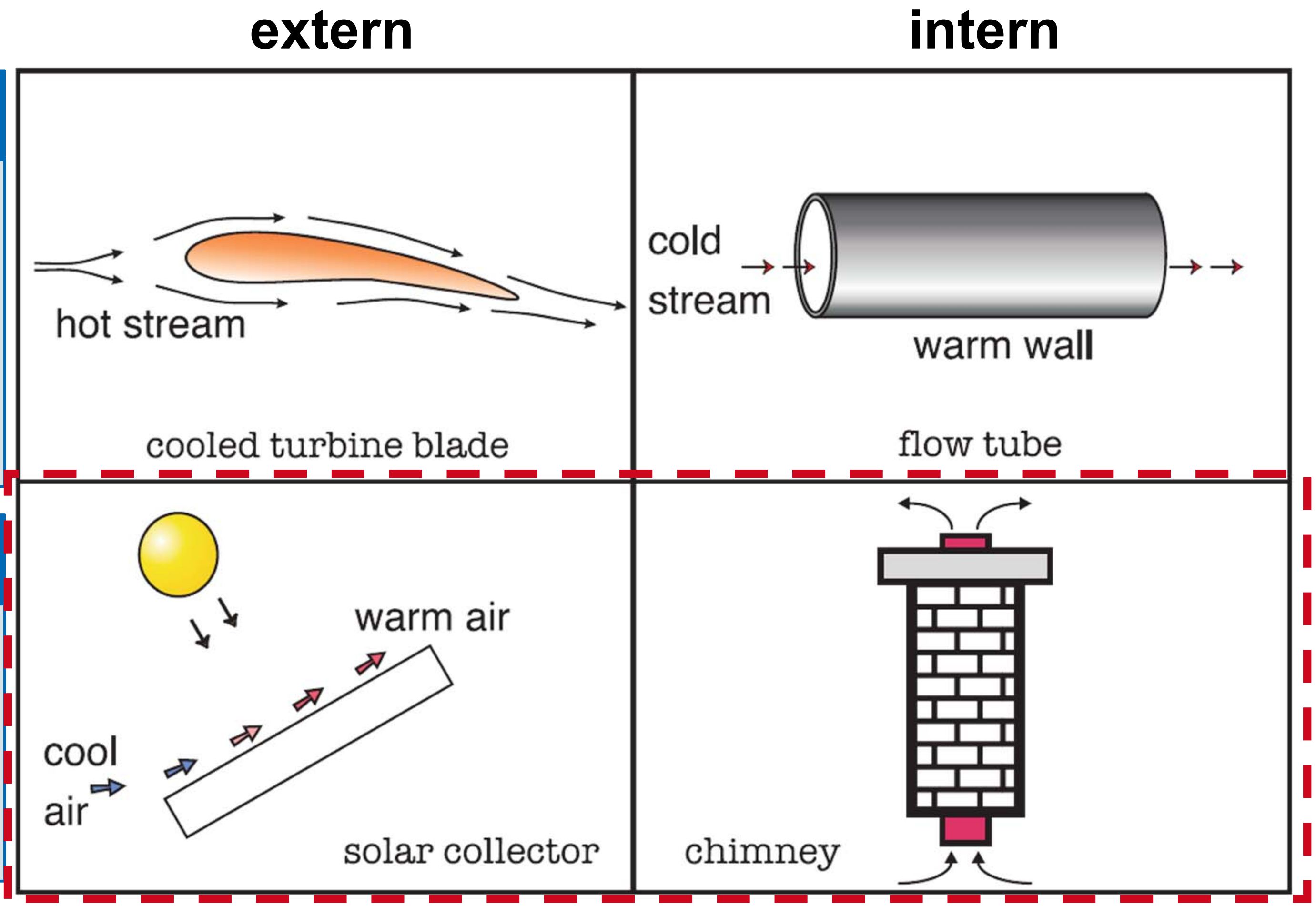
# Klassifikationen nach Strömungsbedingung

## Erzwungene Konvektion

- Antrieb durch von außen erzeugte Bewegung des Fluides/Objekts

## Freie Konvektion

- Inhärenter Antrieb aufgrund der Wärmeübertragung (Dichteunterschiede)

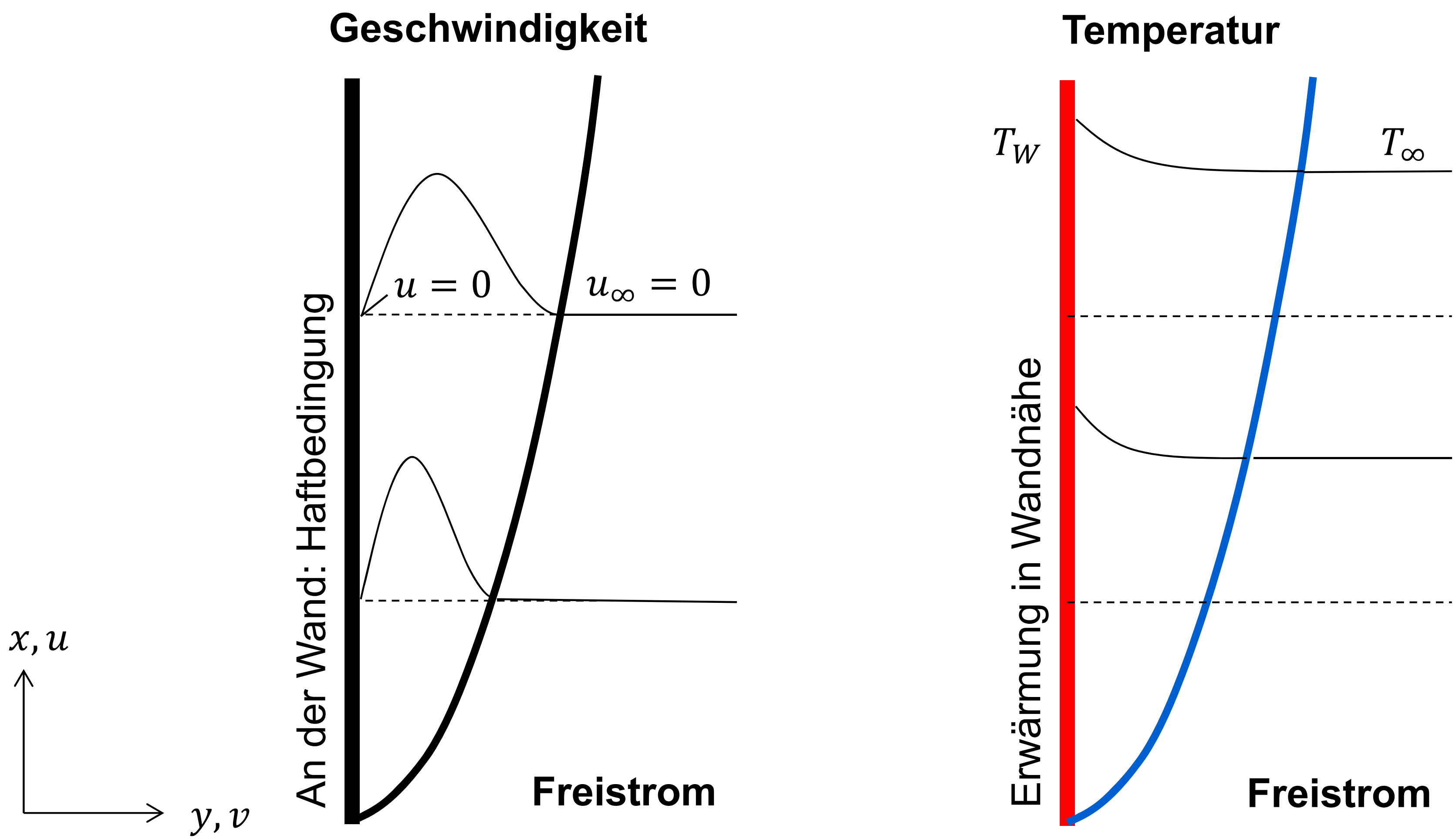





Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

# Freie Konvektion

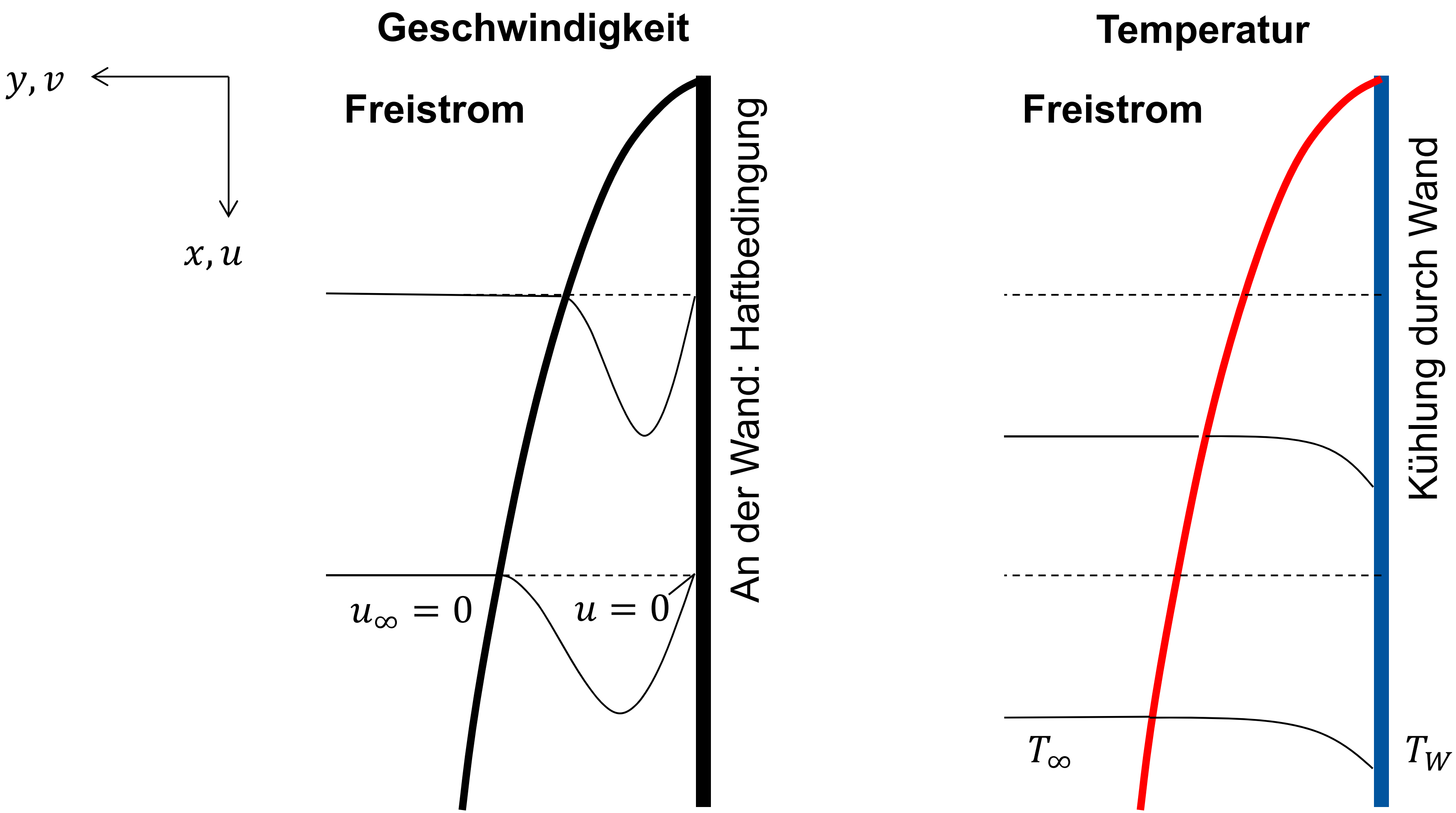
# Freie Konvektion: Grenzschichten




Erwärmung in Wandnähe führt zu Dichteabnahme

**Natürliche Konvektion = Auftriebsströmung**

# Freie Konvektion: Ausgangssituation




Abkühlung in Wandnähe führt zu Dichtezunahme

**Natürliche Konvektion = Absinkströmung**



Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

# Rückblick: Erhaltungsgleichungen (2D, stationär, inkompressibel)

**Kontinuitäts-gleichung**

Massenströme

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \gg v \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$$

**Impuls-gleichung**

Impulsströme | Druck | Scherspannungen | Schwerkraft

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = + \nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{g}{\rho}(\rho_\infty - \rho)$$

$$\cancel{u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)}$$

vernachlässigbar

**Energie-gleichung**

Enthalpieströme | Wärmeleitung

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr}\left(\cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

# Erhaltungsgleichungen (2D, stationär, inkompressibel)

**Volumetrischer Ausdehnungskoeffizient**

$$\beta \equiv \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho(T - T_\infty)}$$

**Kontinuitäts-gleichung**

Massenströme

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

**Impuls-gleichung**

Impulsströme | Druck | Scherspannungen | Schwerkraft

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \quad + \nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \beta g(T - T_\infty)$$

$$\cancel{u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)}$$

vernachlässigbar

**Energie-gleichung**

Enthalpieströme | Wärmeleitung

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr}\left(\cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

# Volumetrischer Ausdehnungskoeffizient eines idealen Gases

**Volumetrischer Ausdehnungskoeffizient**

$$\beta \equiv \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho(T - T_\infty)}$$

$$p \cdot V = nRT$$

- $n$ Stoffmenge
- $R = 8{,}314 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol \cdot K}}$ Universelle Gaskonstante

$$\frac{V}{T} = \frac{nR}{p} = konst. \rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{V}{T}$$

**Für ideale Gase**

$$\beta = \frac{1}{T} \approx \frac{1}{T_{\mathrm{mitte}}} = \frac{2}{T_W + T_\infty}$$

# Erhaltungsgleichungen (2D, stationär, inkompressibel, ebener Grenzschicht)

Kontinuitäts-gleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

## Entdimensionierung

$$x^* = \frac{x}{L}, y^* = \frac{y}{L}, u^* = \frac{u}{u_\infty}, v^* = \frac{v}{u_\infty}, \Theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_W - T_\infty}$$

Impuls-gleichung

Impulsströme | Scherspannungen | Schwerkraft

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \underbrace{\frac{\beta g L (T_W - T_\infty)}{u_\infty{}^2}}_{\frac{\beta g \rho^2 (T_W - T_\infty) L^3}{\eta^2} \cdot \left(\frac{\eta}{\rho u_\infty L}\right)^2} \Theta^*$$

$$\Rightarrow Gr \cdot \left(\frac{1}{Re}\right)^2$$

Energie-gleichung

Enthalpieströme | Wärmeleitung

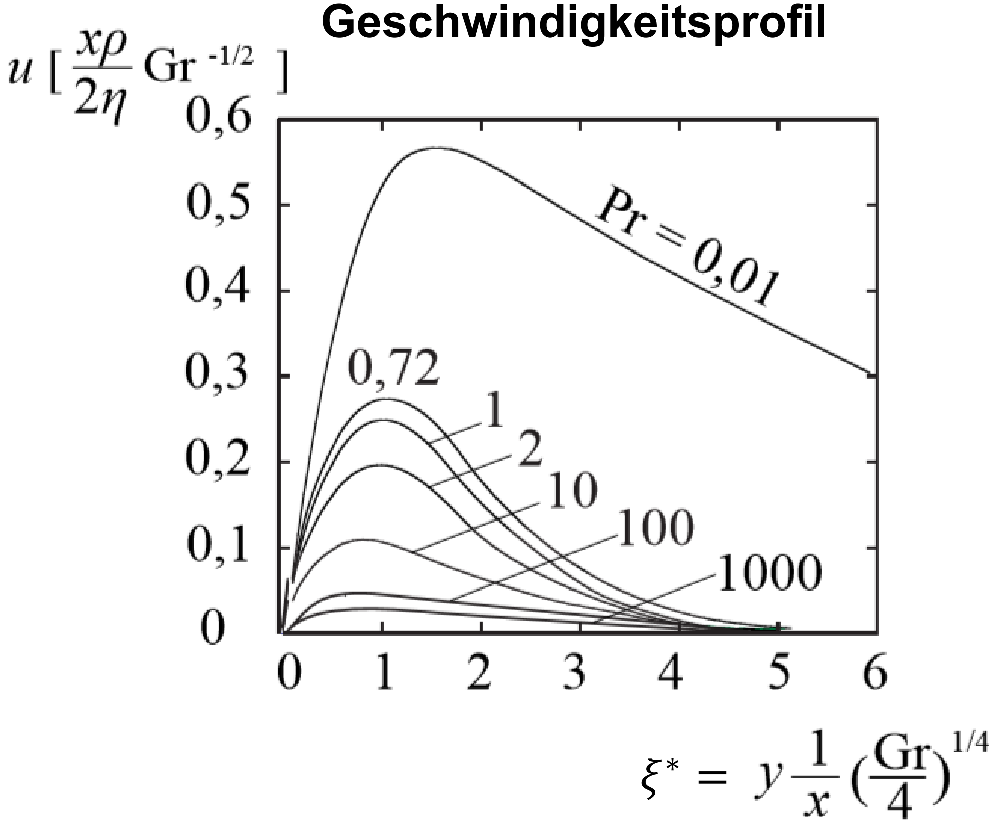
$$u^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\underbrace{RePr}_{Pe}} \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial y^{*2}}$$

## Grashof-Zahl

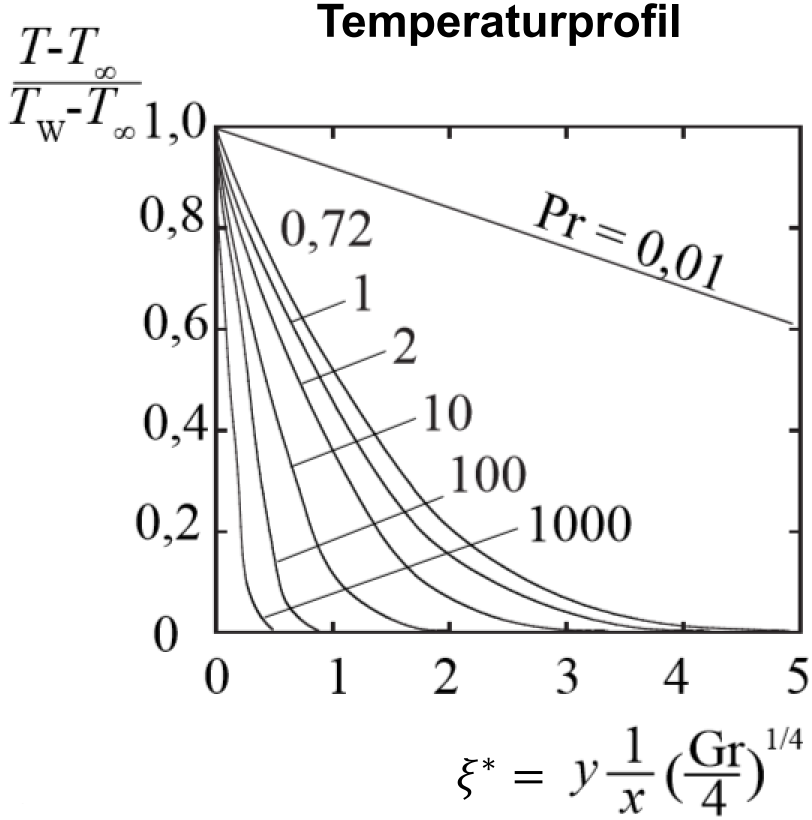
$$Gr \equiv \frac{\beta g \rho^2 (T_W - T_\infty) L^3}{\eta^2} = \frac{\text{Auftriebskräfte}}{\text{Zähigkeitskräfte}}$$

# Exakte Lösungen

Geschwindigkeitsprofil




Temperaturprofil




## Dimensionsloser Wärmeübergangskoeffizient

$$Nu = \frac{\alpha x}{\lambda} = \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=0}\right)\frac{x}{\lambda} = \left(\frac{Gr}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{\partial \Theta^*}{\partial \xi^*}\bigg|_{\xi^*=0} = Nu(Gr, Pr)$$

# Vergleich zwischen erzwungener und freier Konvektion

| **Konvektion** | **erzwungene (laminar $Re_x < 2 \cdot 10^5$ isotherm $0{,}6 < Pr < 10$)** | **freie (laminar, isotherm $GrPr < 4 \cdot 10^9$)** |
|---|---|---|
| Abhängigkeit | $Nu(Re, Pr)$ | $Nu(Gr, Pr)$ |
| lokal | $Nu = 0{,}332 Re_x^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}$ | $Nu = 0{,}508 \left(\frac{Pr}{0{,}952 + Pr}\right)^{\frac{1}{4}} (Gr_x Pr)^{\frac{1}{4}}$ |
| gemittelt | $\overline{Nu} = \frac{\bar{\alpha} L}{\lambda} = \int_0^L \frac{Nu}{x} dx$ <br> $= 0{,}664 Re_L^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}$ | $\overline{Nu} = \frac{\bar{\alpha} L}{\lambda} = \int_0^L \frac{Nu}{x} dx$ <br> $= \underbrace{0{,}677 \left(\frac{Pr}{0{,}952 + Pr}\right)^{\frac{1}{4}}}_{C} (Gr_L Pr)^{\frac{1}{4}}$ |

# Verständnisfragen

**Welches ist das treibende Potential der natürlichen Konvektion?**

**Warum sind Auftriebskräfte bei erzwungener Konvektion vernachlässigbar?**