
Wärme- und Stoffübertragung I

Anwendung der Ähnlichkeitstheorie

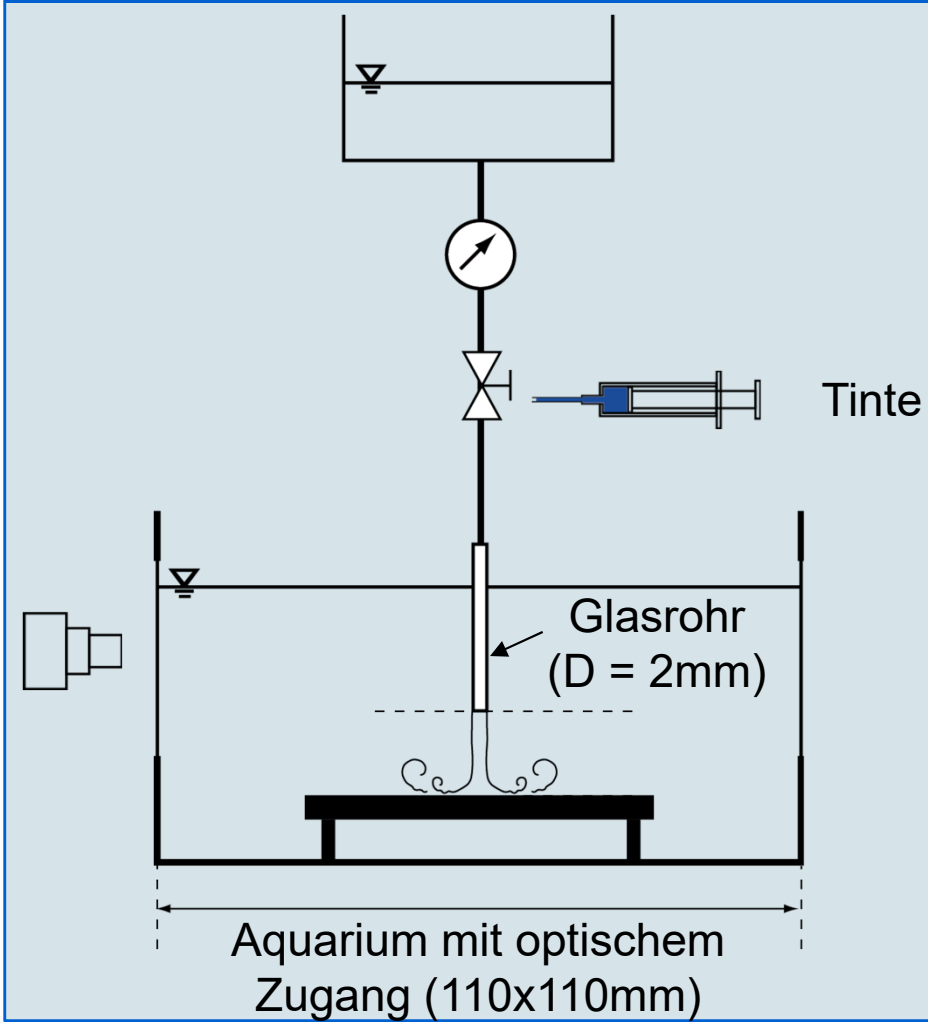
Prof. Dr.-Ing. Reinhold Kneer
Dr.-Ing. Dr. rer. pol. Wilko Rohlf

- Ähnlichkeitstheorie in der Wärme- und Stoffübertragung

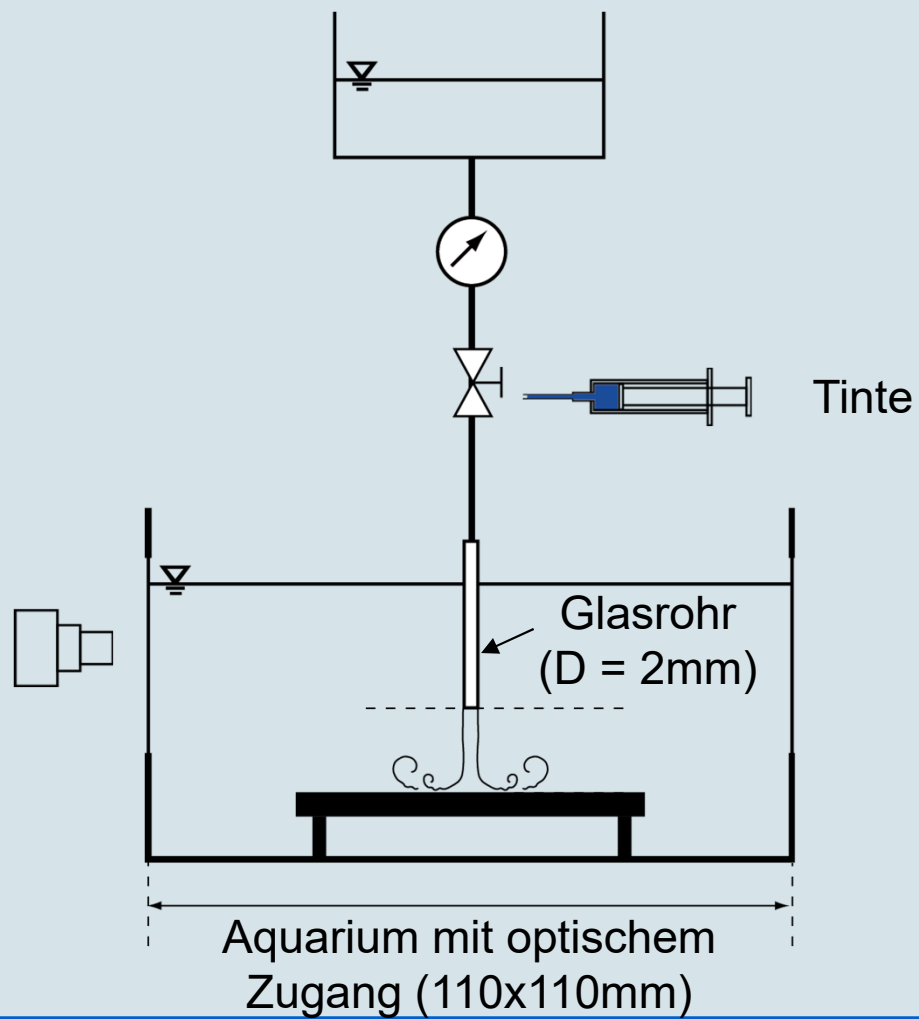
- Grundverständnis von der Ähnlichkeitstheorie.
- Verständnisse der physikalischen Bedeutungen relevanter dimensionsloser Kennzahlen, die ein Konvektionsproblem beschreiben können.
- Fähigkeit unterschiedliche konvektive Wärmeübergangsprobleme im Hinblick auf die Strömungs- und Randbedingungen zu unterscheiden.

$$Nu = Nu(Re, Gr, Pr)$$

Prallstrahl: Experiment



Prallstrahl: Experiment



Welche Größen sind entscheiden?

Stoffeigenschaften:

- Viskosität
- Dichte

Strömungsbedingungen:

- Geschwindigkeit

Geometrie:

- Düsendurchmesser
- Abstand Prallplatte

**Sind Experimente mit
Öl und Wasser
vergleichbar?**

**Entscheidend ist, dass alle
Kräfteverhältnis identisch sind**



Welche Kräfte spielen eine Rolle: Betrachtung der Erhaltungsgleichungen

Kontinuitäts-
gleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Impuls-
gleichung

Impulsströme

Druck

Scherspannungen

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Welche Kräfte spielen eine Rolle: Betrachtung der Erhaltungsgleichungen

Kontinuitäts-
gleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

Entdimensionierung

$$x^* = \frac{x}{L}, y^* = \frac{y}{L}, u^* = \frac{u}{u_\infty}, v^* = \frac{v}{u_\infty}, p^* = \frac{p}{\rho u_\infty^2}$$

Impuls-
gleichung

Impulsströme

Druck

Scherspannungen

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

Die Reynolds-Zahl ist **die** relevante Kennzahl

Entscheidend für dieses Problem ist das Kräfteverhältnis
zwischen viskosen Kräften und Trägheitskräften

Achtung: Oft kommen weitere Effekte durch die Randbedingungen zum Tragen

$Re = 2500$



$Re = 1600$

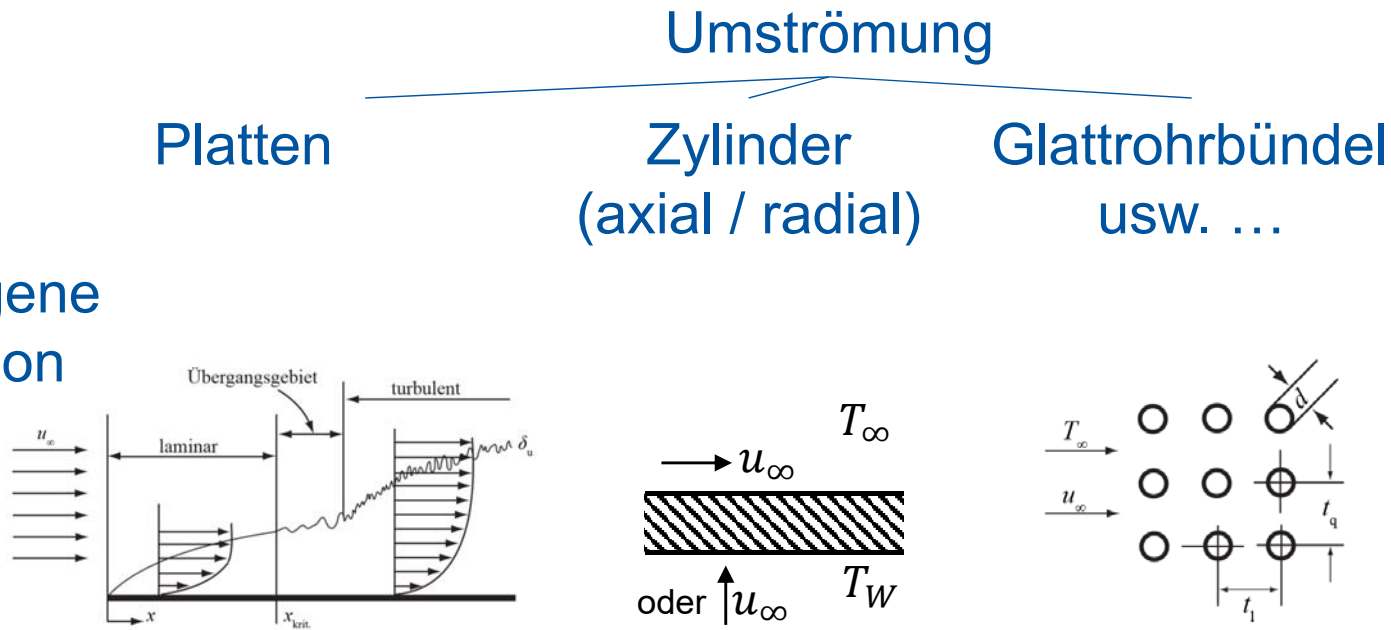


$Re = 800$



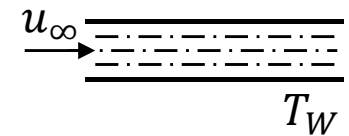
Beispielen für konvektive Wärmetransportkonfigurationen

Erzwungene Konvektion

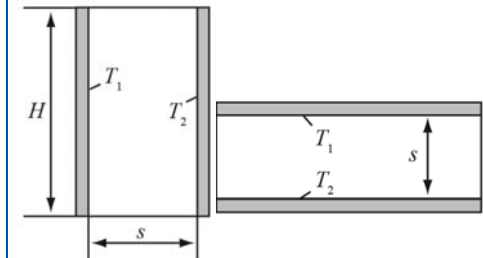
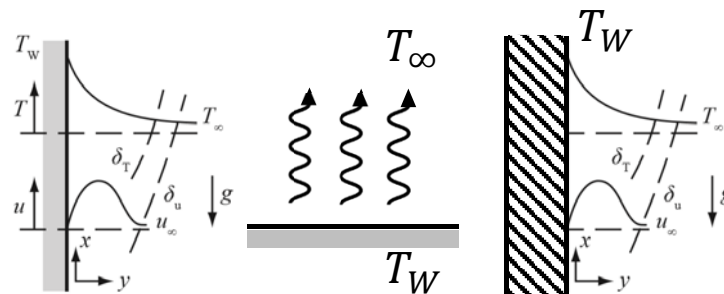


Durchströmung

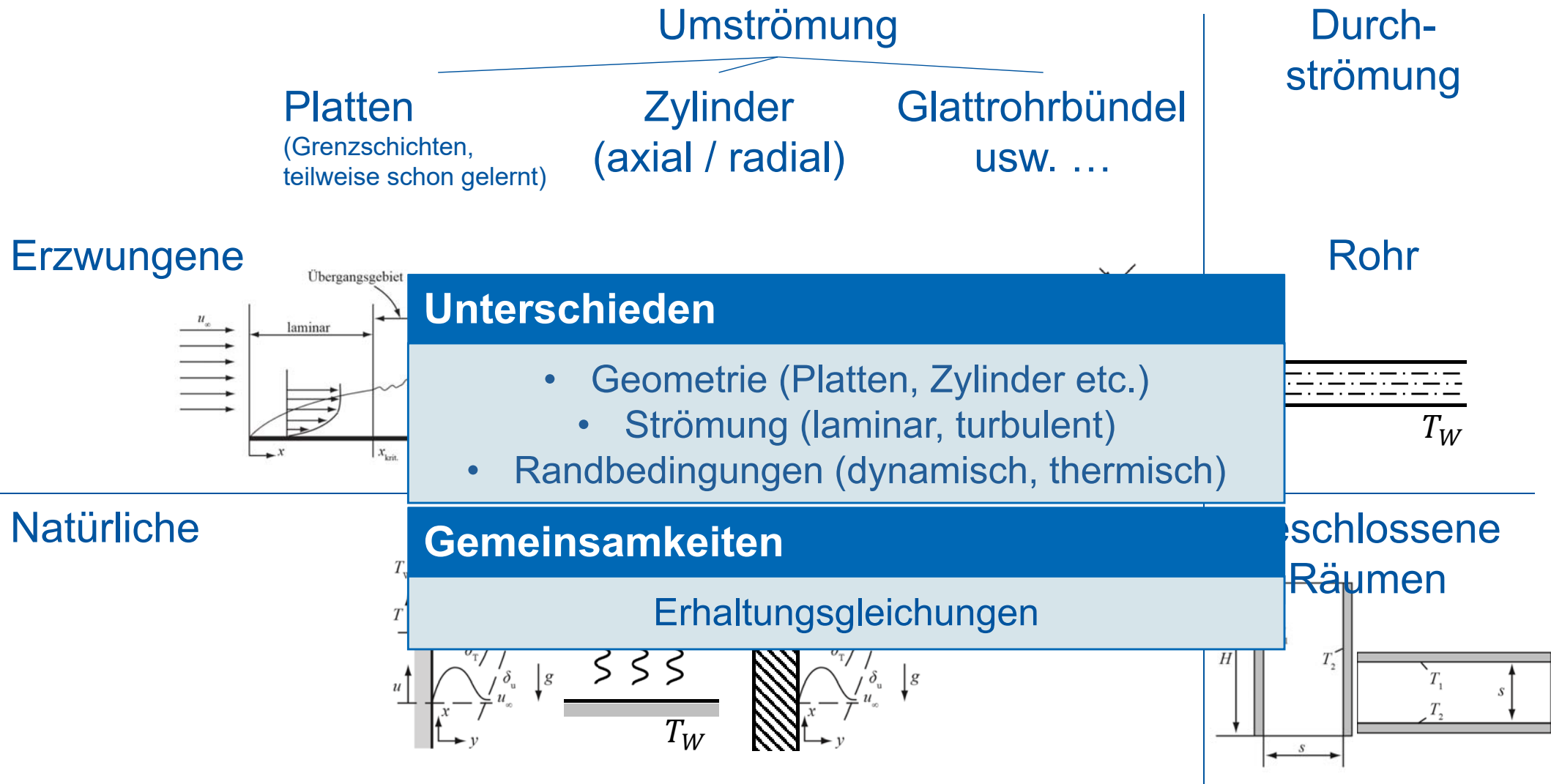
Rohr



Natürliche Konvektion



Beispielen für konvektive Wärmetransportkonfigurationen



Rückblick: Erzwungene Konvektion

Kontinuitäts-
gleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Impuls-
gleichung

Impulsströme

Druck

Scherspannungen

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Energie-
gleichung

Enthalpieströme

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} =$$

Wärmeleitung

$$\frac{\nu}{Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Rückblick: Erzwungene Konvektion

Kontinuitäts-
gleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

Entdimensionierung

$$x^* = \frac{x}{L}, y^* = \frac{y}{L}, u^* = \frac{u}{u_\infty}, v^* = \frac{v}{u_\infty}, p^* = \frac{p}{\rho u_\infty^2}, \Theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_W - T_\infty}$$

Impuls-
gleichung

Impulsströme

Druck

Scherspannungen

$$\begin{aligned} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} &= - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \\ u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \end{aligned}$$

Energie-
gleichung

Enthalpieströme

$$u^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial y^*} =$$

Wärmeleitung

$$\underbrace{\frac{1}{RePr}}_{Pe} \left(\frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$Nu = Nu(Re, Pr)$$

Rückblick: Natürliche Konvektion

Kontinuitäts-
gleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Impuls-
gleichung

Impulsströme

Druck

Scherspannungen

Schwerkraft

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \beta g (T - T_\infty)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Energie-
gleichung

Enthalpieströme

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} =$$

Wärmeleitung

$$\frac{\nu}{Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Rückblick: Natürliche Konvektion

Kontinuitäts-
gleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

Entdimensionierung

$$x^* = \frac{x}{L}, y^* = \frac{y}{L}, u^* = \frac{u}{u_\infty}, v^* = \frac{v}{u_\infty}, p^* = \frac{p}{\rho u_\infty^2}, \Theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_W - T_\infty}$$

Impuls-
gleichung

Impulsströme

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*}$$

Druck

$$= -\frac{\partial p^*}{\partial x^*}$$

Scherspannungen

$$+ \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

Schwerkraft

$$+ \underbrace{Gr \cdot \left(\frac{1}{Re} \right)^2}_{Ar} \Theta^*$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*}$$

$$= -\frac{\partial p^*}{\partial y^*}$$

$$+ \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

Energie-
gleichung

Enthalpieströme

$$u^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial y^*} =$$

Wärmeleitung

$$\underbrace{\frac{1}{RePr}}_{Pe} \left(\frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$Nu = Nu(Gr, Pr)$$

Zusammenfassung: Dimensionslose Zahlen

Allgemeiner Form der Wärmeübergangskoeffizient

$$Nu \equiv \frac{\alpha L}{\lambda} = \text{Dimensionsloser Wärmeübergangskoeffizient} \\ = C \cdot Re^m \cdot Pr^n \cdot Gr^p$$

mit

$$Re \equiv \frac{\rho u_{\infty} L}{\eta} = \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Zähigkeitskräfte}}$$

$$Pr \equiv \frac{\eta c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a} = \frac{\text{Diffusiver Impulstransport}}{\text{Diffusiver Wärmetransport}}$$

$$Gr \equiv \frac{\beta g \rho^2 (T_W - T_{\infty}) L^3}{\eta^2} = \frac{\text{Auftriebskräfte}}{\text{Zähigkeitskräfte}}$$

$$Pe \equiv Re \cdot Pr = \frac{\text{Advectiver Wärmefluss}}{\text{Diffusiver Wärmefluss}}$$

$$Ar \equiv \frac{Gr}{Re^2} = \frac{\text{Auftriebskräfte}}{\text{Reibungskräfte}}$$

Verständnisfragen

Was besagt die Ähnlichkeitstheorie und auf was muss geachtet werden, damit die Lösung zweier unterschiedlicher Probleme identisch ist?

Welche Kennzahlen sind für die empirisch begründeten Wärmeübergangsgesetze von essentieller Bedeutung?