



# HEATQUIZ

# Wärmeübertragung

## Wärmeleitung

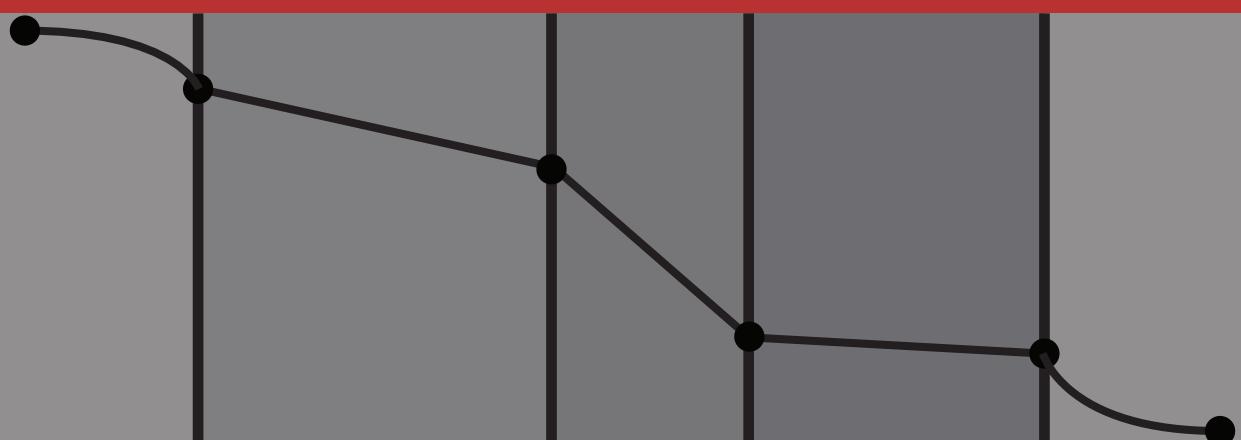
W. Rohlfs<sup>1</sup>

R. Kneer<sup>1</sup>

D.J.G. Kuiphus<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung RWTH Aachen University

<sup>2</sup>Department of Thermal and Fluid Engineering, University Twente, the Netherlands



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>I Einführung in die Wärmeübertragung</b>	<b>1</b>
<b>1 Thermodynamik und Wärmeübertragung</b>	<b>2</b>
1.1 Wärmeübertragungsmechanismen	3
1.2 Wärmeübertragungsmechanismen	5
<b>2 Systeme und Kontrollvolumina</b>	<b>6</b>
<b>3 Bilanzen</b>	<b>7</b>
3.1 Systematisches Vorgehen zur Lösung ingenieurwissenschaftlicher Probleme	8
<b>4 Wichtige Definitionen und Notationen</b>	<b>12</b>
<b>II Wärmeleitung</b>	<b>17</b>
<b>5 Grundlagen</b>	<b>18</b>
5.1 Fouriersches Gesetz	20
5.2 Erhaltungsgleichungen	22
<b>6 Mehrschichtige Wände</b>	<b>27</b>
6.1 Mehrschichtige Wand	30
6.2 Zylindrische Koordinaten, mehrschichtige Rohrwand	34
6.3 Konvektiver Transport	38
6.4 Mehrschichtige Wand mit Konvektion	40
6.4.1 Globaler Wärmedurchgangskoeffizient $k$	42
6.5 Mehrschichtige Rohrwand mit Konvektion	45
6.5.1 Globaler Wärmeübergangskoeffizient	46
<b>7 Wärmequellen und -senken</b>	<b>48</b>
7.1 Einführung in Wärmequellen und -senken	49
<b>8 Rippen</b>	<b>53</b>
8.1 Einführung in Rippen	55
8.2 Biot-Zahl	58
8.3 Lösung der Rippengleichung	60
8.4 Rippenwirkungsgrad	66
<b>9 Instationäre Wärmeleitung</b>	<b>67</b>
9.1 Einführung in die instationäre Wärmeleitung	69
9.2 Blockkapazitätsmodell	70
9.3 Halbunendlicher Körper	75
9.3.1 Fourierzahl	80
9.4 Dimensionslose Kennzahlen und Heisler-Diagramme	83
<b>VII Übungsaufgaben</b>	<b>91</b>
<b>II Übungen zur Wärmeleitung</b>	<b>92</b>

---

## Check list

---

### Part I - Einführung on die Wärmeübertragung

---

- Abschnitt 1
  - Abschnitt 2
  - Abschnitt 3
  - Abschnitt 4
- 

### Part II - Wärmeleitung

---

- |                                          |                                              |                                       |                                          |
|------------------------------------------|----------------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> Abschnitt 5     | <input type="checkbox"/> Lerneinheit L01     | <input type="checkbox"/> Quiz L01     | <input type="checkbox"/> Übung II.1      |
|                                          | <input type="checkbox"/> Lerneinheit L02     | <input type="checkbox"/> Quiz L02     | <input type="checkbox"/> Übung II.2      |
|                                          | <input type="checkbox"/> Lerneinheit L03     | <input type="checkbox"/> Quiz L03     | <input type="checkbox"/> Übung II.3      |
| <br><input type="checkbox"/> Abschnitt 6 | <br><input type="checkbox"/> Lerneinheit L04 | <br><input type="checkbox"/> Quiz L04 | <br><input type="checkbox"/> Übung II.4  |
|                                          | <input type="checkbox"/> Lerneinheit L05     | <input type="checkbox"/> Quiz L05     | <input type="checkbox"/> Übung II.5      |
|                                          | <input type="checkbox"/> Lerneinheit L06     | <input type="checkbox"/> Quiz L06     | <input type="checkbox"/> Übung II.6      |
|                                          | <input type="checkbox"/> Lerneinheit L07     | <input type="checkbox"/> Quiz L07     |                                          |
|                                          | <input type="checkbox"/> Lerneinheit L08     | <input type="checkbox"/> Quiz L08     |                                          |
| <br><input type="checkbox"/> Abschnitt 8 | <br><input type="checkbox"/> Lerneinheit L09 | <br><input type="checkbox"/> Quiz L09 | <br><input type="checkbox"/> Übung II.7  |
|                                          | <input type="checkbox"/> Lerneinheit L10     | <input type="checkbox"/> Quiz L10     | <input type="checkbox"/> Übung II.8      |
|                                          | <input type="checkbox"/> Lerneinheit L11     | <input type="checkbox"/> Quiz L11     | <input type="checkbox"/> Übung II.9      |
|                                          | <input type="checkbox"/> Lerneinheit L12     | <input type="checkbox"/> Quiz L12     |                                          |
| <br><input type="checkbox"/> Abschnitt 7 | <br><input type="checkbox"/> Lerneinheit L13 | <br><input type="checkbox"/> Quiz L13 | <br><input type="checkbox"/> Übung II.10 |
|                                          |                                              |                                       | <input type="checkbox"/> Übung II.11     |
|                                          |                                              |                                       | <input type="checkbox"/> Übung II.12     |
| <br><input type="checkbox"/> Abschnitt 9 | <br><input type="checkbox"/> Lerneinheit L14 | <br><input type="checkbox"/> Quiz L14 | <br><input type="checkbox"/> Übung II.13 |
|                                          | <input type="checkbox"/> Lerneinheit L15     | <input type="checkbox"/> Quiz L15     | <input type="checkbox"/> Übung II.14     |
|                                          | <input type="checkbox"/> Lerneinheit L16     | <input type="checkbox"/> Quiz L16     | <input type="checkbox"/> Übung II.15     |
|                                          | <input type="checkbox"/> Lerneinheit L17     | <input type="checkbox"/> Quiz L17     | <input type="checkbox"/> Übung II.16     |
-

---

## Nomenclature

Symbol	Physikalische Konstante	Wert	Einheit:
$N_A$	Avogadro-Konstante	$6,022 \cdot 10^{23}$	(1/mol)
$R_m$	Universelle Gaskonstante	8,314	(J/K mol)
$c$	Lichtgeschwindigkeit (Vakuum)	299.792.458	(m/s)
$g$	Gravitationsbeschleunigung	9,81	(m/s <sup>2</sup> )
$h$	Planck-Konstante	$6,6261 \cdot 10^{-34}$	(J s)
$\sigma$	Stefan–Boltzmann Konstante	$5,6703 \cdot 10^8$	(W/m <sup>2</sup> K <sup>4</sup> )

Symbol	Beschreibung	Einheit
$A$	Fläche	(m <sup>2</sup> )
$C$	Konstante oder molare Konzentration	(-) oder (mol/m <sup>3</sup> )
$D$	Diffusionskoeffizient	(m <sup>2</sup> /s)
$E$	Energie eines Photons	(J)
$F$	Kraft oder Strahlungsanteil	(N) oder (-)
$H$	Absolute Enthalpie	(J)
$H^{cc}$	Molarbasierter Henry-Koeffizient	(-)
$H^*$	Massebasierter Henry-Koeffizient	(-)
$I$	Impuls	(Ns)
$K_N$	Massebasierter Nernstscher Verteilungskoeffizient	(-)
$L$	(Charakteristische) Länge oder Strahldichte	(m) or (W/m <sup>2</sup> )
$L_h$	Hydrodynamische Einlauflänge	(m)
$L_{th}$	Thermische Einlauflänge	(m)
$M$	Molarmasse	(kg/mol)
$N$	Partikelanzahl	(-)
$Q$	Wärme	(J)
$R$	Thermischer Widerstand	(K/W)
$T$	Temperatur	(K)
$U$	Innere Energie oder Umfang	(J) oder (m)
$V$	Volumen	(m <sup>3</sup> )
$W$	Arbeit	(J)
$a$	Temperaturleitfähigkeit	(m <sup>2</sup> /s)
$c$	Spezifische Wärmekapazität oder Konstante	(J/kg K) oder (-)
$d$	Durchmesser	(m)
$dx$	Infinitesimaler Abstand in $x$ -Richtung	(m)
$dy$	Infinitesimaler Abstand in $y$ -Richtung	(m)
$dz$	Infinitesimaler Abstand in $z$ -Richtung	(m)
$dr$	Infinitesimaler Abstand in r-Richtung	(m)
$f_e$	Anordnungsfaktor	(-)
$g$	Konvektiver Stoffübergangskoeffizient	(kg/m <sup>2</sup> s)
$h$	Massenspezifische Enthalpie	(J/kg)
$j''$	Diffusive Massenstromdichte	(W/m <sup>2</sup> )
$k$	Wärmedurchgangskoeffizient	(W/m <sup>2</sup> K)
$m$	Masse oder Rippenparameter	(kg) oder (1/m)
$\dot{m}''$	Massenstromdichte	(W/m <sup>2</sup> )
$n$	Anzahl an Schichten oder Molen	(-)
$\dot{n}''$	Molenstromdichte	(mol/m <sup>2</sup> s)
$p$	Druck	(N/m <sup>2</sup> )
$\dot{q}''$	Wärmestromdichte	(W/m <sup>2</sup> )
$r$	Radius	(m)
$t$	Zeit	(s)
$u$	Geschwindigkeitskomponente (in $x$ -direction)	(m/s)
$v$	Geschwindigkeitskomponente (in $y$ -direction)	(m/s)
$w$	Geschwindigkeitskomponente (in $z$ -direction)	(m/s)
$x$	Raumkoordinate	(m)
$y$	Raumkoordinate	(m)
$z$	Raumkoordinate	(m)
$\Delta$	Differenz	(-)
$\Phi$	Dichtfaktor	(-)
$\dot{\Phi}$	Wärmequelle	(W)
$\Omega$	Raumwinkel	(Str)
$\alpha$	Konvektiver Wärmeübergangskoeffizient oder Absorptionskoeffizient	(W/m <sup>2</sup> K) oder (-)
$\beta$	Volumetrischer Ausdehnungskoeffizient	(1/K)
$\delta$	Wanddicke oder Eindringtiefe	(m)
$\epsilon$	Emissionskoeffizient	(-)
$\delta_T$	Dicke der thermischen Grenzschicht	(m)
$\delta_u$	Dicke der Geschwindigkeitsgrenzschicht	(m)
$\eta$	Effizienz oder Wellenzahl(-) oder (1/m)	(-)
$\theta$	Übertemperatur (-)	(-)
$\theta^*$	Dimensionslose zeitliche Temperatur (-)	(W/m K) oder (m)
$\lambda$	Thermische Leitfähigkeit oder Wellenlänge	(kg/m s)
$\mu$	Dynamische Viskosität	(m <sup>2</sup> /s) oder (1/s)
$\nu$	Kinematische Viskosität oder Strahlungsfrequenz	(-)
$\xi$	Massenanteil	(rad)
$\phi$	Betrachtungswinkel	(rad)
$\rho$	Dichte oder Reflexionsgrad	(kg/m <sup>3</sup> ) oder (-)
$\tau$	Scherspannung oder Transmissionsgrad	(N/m <sup>2</sup> ) oder (-)
$\psi$	Molarer Anteil	(-)

---

<b>Superscript</b>	<b>Description</b>
$x^*$	Dimensionslos
$x'$	Längenbezogen oder Ableitung
$x''$	Flächenbezogen
$x'''$	Volumenbezogen
$\dot{x}$	Rate bzw. pro Zeiteinheit
$\bar{x}$	Mittel
$\vec{x}$	Vektor
<b>Subscript</b>	<b>Description</b>
$x_A$	Umgebung A
$x_{adv}$	Advektion
$x_{aus}$	Auslass / ausströmend
$x_B$	Umgebung B
$x_d$	Hydraulic diameter as characteristic length
$x_{diff}$	Diffusion
$x_{ein}$	Eingang/Einlauf
$x_{eff}$	Effektiv
$x_{evap}$	Evaporation
$x_F$	Fin
$x_f$	Fluid
$x_{fl}$	Fluid
$x_h$	Hydraulisch
$x_{kin}$	Kinetisch
$x_{konv}$	Konvektion
$x_{krit}$	kritisch
$x_L$	Länge als charakteristische Länge
$x_{Leit}$	Leitung
$x_{ij}$	von $i$ bis $j$
$x_{i \rightarrow j}$	Von $i$ bis $j$
$x_{i \neq j}$	Netto zwischen $i$ und $j$
$x_m$	gemittelt
$x_{max}$	Maximum
$x_{min}$	Minimum
$x_p$	bei konstantem Druck
$x_Q$	Querschnitt
$x_{rad}$	Radiation
$x_s$	Abstand als charakteristische Länge
$x_{Stoff}$	Stoffeigenschaft
$x_t$	Turbulent
$x_{th}$	Thermisch
$x_U$	Umgebung
$x_v$	bei konstantem Volumen
$x_w$	Wand
$x_x$	Lokal
$x_0$	Einfallend oder Anfangswert
$x_1$	Referenz 1
$x_2$	Referenz 2
$x_3$	Referenz 3
$x_4$	Referenz 4
$x_\alpha$	absorbiert
$x_\epsilon$	emittiert
$x_\eta$	Wellenzahlspezifisch
$x_\lambda$	Wellenlängenspezifisch
$x_\rho$	Reflektiert
$x_S$	Schwarzkörper
$x_\tau$	Transmittiert
$x_\infty$	im Vorlauf, weit entfernt, oder zeitlich: Gleichgewichtswert

---

Symbol	Dimensionslose Kennzahl	Definition
Ar	Archimedes-Zahl	$\equiv \frac{\text{Auftriebskräfte}}{\text{Trägheitskräfte}}$
Bi	Biot-Zahl	$\equiv \frac{\text{Thermischer Widerstand im Körper}}{\text{Konvektiver thermischer Widerstand an der Oberfläche}}$
Fo	Fourier-Zahl	$\equiv \frac{\text{Diffusionsrate}}{\text{Einspeicherungsrate}}$
Gr	Grashof-Zahl	$\equiv \frac{\text{Auftriebskräfte}}{\text{Viskose Kräfte}}$
Le	Lewis-Zahl	$\equiv \frac{\text{Molekulare Diffusivität der Wärme}}{\text{Molekulare Diffusivität der Masse}}$
Nu	Nusselt-Zahl	$\equiv$ Dimensionsloser Wärmetransportkoeffizient
Pe	Peclét-Zahl	$\equiv \frac{\text{Advektionsrate}}{\text{Diffusionsrate}}$
Pr	Prandtl-Zahl	$\equiv \frac{\text{Molekulare Impulsdiffusion}}{\text{Molekulare Wärmendiffusion}}$
Re	Reynolds-Zahl	$\equiv \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Viskose Kräfte}}$
Sc	Schmidt-Zahl	$\equiv \frac{\text{Molekulare Impulsdiffusion}}{\text{Molekulare Massendiffusion}}$
Sh	Sherwood-Zahl	$\equiv$ Dimensionsloser Massetransportkoeffizient
$c_f$	Reibungskoeffizient	$\equiv \frac{\text{Reibungsverlust}}{\text{Dynamischer Druck}}$

# Skriptbausteine

Im folgenden ist ein Überblick, zur Erklärung der einzelnen Bausteine und den strukturellen Aufbau dieses Skripts dargestellt. Der Leser des Skriptes wird im Laufe der Lektüre mit den folgenden Bausteinen zu tun bekommen.

**Definition** Die **Definition** führt die Bedeutungen von Parametern ein, die in der Theorie der Wärmeübertragung verwendet werden. Übliche Definitionen in diesem Rahmen umfassen Begriffe wie Wärimestrom, innere Wärmequelle und dimensionslose Kennzahlen.

**Grundgleichung** Der Teil **Grundgleichungen** stellt abgeleitete oder experimentell ermittelte Gleichungen vor, die eine bequeme Möglichkeit bieten, bestimmte Parameter im Rahmen der Theorie der Wärmeübertragung zu berechnen. Dazu zählen bekannte Beispiele wie das Fouriersche Gesetz oder das Newtonsche Kühlgesetz.

**WÜK** **WÜK** steht für Wärmeübergangskorrelation, eine Nusselt-Korrelation für eine spezifische Anwendung. Diese Korrelationen, die numerisch oder experimentell bestimmt wurden, dienen dazu, den Wärmeübergangskoeffizienten in bestimmten Szenarien zu berechnen.

**Voraussetzung** Die **Voraussetzungen** bündeln alle Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit eine Theorie als anwendbar gilt.

**Ansatz** Der **Ansatz** stellt ein systematisches Vorgehen zur Bearbeitung eines bestimmten Problems vor und skizziert Schritte wie das Aufstellen und Lösen einer Energiebilanzgleichung.

**Phänomen** **Phänomene** veranschaulichen ein Prinzip der Wärmeübertragung anhand greifbarer, realer Beispiele, die leicht beobachtet werden können. Betrachte Szenarien wie das Abkühlen einer Tasse oder das Aufwärmen in der Sonne.

**HeatQuiz** Der Teil **HeatQuiz** bietet spielbasierte Lernaufgaben, die das Verständnis der zuvor besprochenen Theorie überprüfen und feststellen sollen, ob genügend Wissen über die Inhalte erworben wurde, um die Theorie auf praktische Beispiele anzuwenden.

**Derivation** Der Teil **Herleitung** widmet sich der Herleitung eines bestimmten Theorems oder der Definition eines Parameters. Häufig diskutierte Herleitungen umfassen solche zu Erhaltungsgleichungen in Festkörpern und Fluiden.

**Beispiel** Der Teil **Beispiel** liefert eine relativ einfache Veranschaulichung der praktischen Anwendung der soeben hergeleiteten Theorie. Betrachte beispielsweise die Herleitung des Temperaturprofils in einer ebenen Wand.

**Anwendung** Der Teil **Anwendung** stellt eine Aufgabe vor, die in früheren Kursklausuren bewertet wurde, und enthält einen QR-Code mit einer Videolösung. Es wird daher dringend empfohlen, die Aufgabe zunächst eigenständig zu bearbeiten, bevor die Videolösung konsultiert wird, um den bestmöglichen Lernerfolg zu erzielen.

### **Übung (★)**

Mit einem Sternchen ★ gekennzeichnete Übungen dienen als grundlegende Übungen zur Festigung des grundlegenden Verständnisses. Sie entsprechen zwar noch nicht dem Prüfungsniveau, sind jedoch wichtige Meilensteine, die dazu beitragen, Selbstvertrauen und Kompetenz aufzubauen, bevor man sich anspruchsvoller Herausforderungen stellt.

### **Übung (★★)**

Bei Übungen, die mit zwei Sternen ★★ gekennzeichnet sind, liegen die Aufgaben etwas unter dem erwarteten Schwierigkeitsgrad der Prüfung oder es handelt sich um kleinere Aufgaben, für die nur wenige Prüfungspunkte vergeben werden.

### **Übung (★★★)**

Die Übungen mit drei Sternen ★★★ sind diejenigen, die in früheren Prüfungen vorkamen. Diese Aufgaben, die oft mit einer hohen Punktzahl bewertet werden, spiegeln die Herausforderungen wider, die ein höheres Maß an Kompetenz erfordern und für die Prüfungsvorbereitung von entscheidender Bedeutung sind.

PART

I

# *Einführung in die Wärmeübertragung*

## **Lernziele:**

- Konzeptionelles Verständnis des Zusammenhangs zwischen Wärmeübertragung und Thermodynamik.
- Konzeptionelles Verständnis der Prinzipien der Energieübertragung.
- Konzeptionelles Verständnis von Bilanzen zur Lösung ingenieurwissenschaftlicher Probleme.

## **Verständnisfragen:**

- Wie ist der Zusammenhang zwischen Thermodynamik und Wärmeübertragung?
- Welche Mechanismen der Wärmeübertragung gibt es?
- Wie können Energiebilanzen zur Herleitung der Grundgleichungen der Wärmeübertragung verwendet werden?
- Welche praktischen Anwendungen der Wärmeübertragung gibt es im Ingenieurwesen?

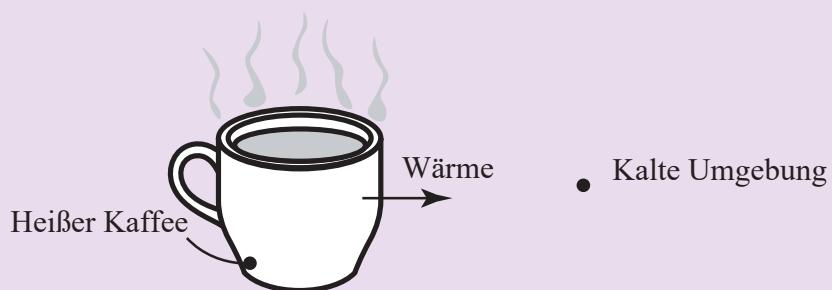
## ABSCHNITT 1

## Thermodynamik und Wärmeübertragung

Wärmeübertragung ist als Grundbegriff und Teildisziplin der Thermodynamik entscheidend für das Verständnis der Prozesse, die zum thermischen Gleichgewicht führen. Während die klassische Thermodynamik primär Gleichgewichtszustände beschreibt, untersucht die Wärmeübertragung jene Mechanismen und Pfade, die Systeme in diesen Zustand bringen. Im Gegensatz zu früher behandelten Konzepten der Thermodynamik, die die Zeit in den Gleichgewichtsbeschreibungen ausklammern, sind Vorgänge der Wärmeübertragung eng mit der Zeit verknüpft. Sie treten aufgrund räumlicher Variationen thermodynamischer Potentiale auf, insbesondere aufgrund von Temperaturdifferenzen, die Wärmeströme antreiben und folglich zeitliche Temperaturänderungen bewirken.

**Phänomene 1.1**

Betrachtet wird die Zubereitung einer Tasse Kaffee oder Tee. Nach den Prinzipien des thermodynamischen Gleichgewichts erreicht die Getränketerminatur schließlich den gleichen Wert wie die Raumtemperatur. Die Zeit bis zur gewünschten Trinktemperatur steht jedoch im Fokus dieser Veranstaltung.



Um dieses Prinzip zu verstehen, muss der Zweite Hauptsatz der Thermodynamik hinzugezogen werden. Dieser besagt, dass Wärme in einem spontanen Prozess von Bereichen höherer Temperatur zu Bereichen niedrigerer Temperatur fließt. Dieses Phänomen hängt mit dem Begriff der Entropie zusammen, die die Tendenz von Systemen zur Entwicklung in Richtung höherer Unordnung beschreibt. Kommt der heiße Kaffee mit der kälteren Umgebung in Kontakt, wird die kinetische Energie der hochenergetischen Moleküle der Flüssigkeit auf die energieärmere Umgebung übertragen; die Energie verteilt sich zufälliger und ein Gleichgewichtszustand wird erreicht.

Die Fähigkeit, Wärmeübertragungsprozesse zu beschreiben, ist für Ingenieurinnen und Ingenieure vieler Fachgebiete unverzichtbar. In der heutigen Welt wird die Miniaturisierung elektrischer Komponenten häufig durch die Herausforderung wirksamer Wärmeabfuhr begrenzt. Elektrische Maschinen, Leistungselektronik und Batterien als Kernkomponenten eines elektrischen Antriebsstrangs sind auf effiziente Wärmeabfuhr angewiesen, um Leistung und Lebensdauer sicherzustellen. Zudem beruhen Treibhauseffekt und Klimawandel auf der Transmissivität – also der Durchlässigkeit – der Atmosphäre für Wärmestrahlung, die von der CO<sub>2</sub>-Konzentration abhängt. Fortschritte in der Gebäudedämmung und die Implementierung moderner Heizsysteme, etwa Wärmepumpen, erfordern verbesserte Dämmstoffe oder optimierte Wege für effiziente Wärmeübertragung.

Im Kern stützt sich die Beschreibung von Wärmeübertragungsprozessen auf Bilanzen, d. h. Energiebilanzen in Verbindung mit Massen- und Impulsbilanzen. Zeitliche Änderungen der inneren Energie in einem Kontrollvolumen stehen mit den Energieströmen über die Systemgrenzen in Beziehung. Die Beschreibung der inneren Änderungen (instationärer Prozesse) sowie der Flüsse mittels geeigneter konstitutiver Gesetze ist ein wesentlicher Bestandteil des Vorlesungsabschnitts zur Wärmeübertragung. Die drei grundlegenden Wärmetransportprozesse für die Beschreibung der Wärmeströme sind Leitung, Konvektion und Strahlung.

## ABSCHNITT 1.1

**Wärmeübertragungsmechanismen**

**Wärmeleitung** ist ein grundlegender Wärmeübertragungsmechanismus, der durch direkten molekularen Kontakt zwischen Stoffen erfolgt und nicht nur in Festkörpern, sondern auch in Flüssigkeiten und Gasen auftritt. Dabei wird thermische Energie von Bereichen höherer Temperatur zu Bereichen niedrigerer Temperatur übertragen, angetrieben durch den Austausch kinetischer Energie zwischen Molekülen. Die Leitungsrate hängt u. a. vom Temperaturgradienten, der Wärmeleitfähigkeit des Materials und der für den Wärmestrom verfügbaren Querschnittsfläche ab. Metalle sind als gute Leiter durch hohe Wärmeleitfähigkeit gekennzeichnet, während Isolatoren wie Keramiken oder Nichtmetalle durch geringe Leitfähigkeit die Wärmeübertragung hemmen.



Abbildung 1.1. Leitungsgebundener Wärmetransport.

**Phenomena 1.2**

Betrachtet wird ein Metalllöffel in einer Tasse heißer Suppe. Beim Halten des Griffes ist spürbar, wie sich die Wärme entlang des Griffes ausbreitet.

Dieses Beispiel beruht auf der Wärmeleitung: Wärme wird durch direkten Kontakt zwischen Körpern unterschiedlicher Temperatur transportiert. Die Wärme der Suppe wird durch das Metall geleitet und gelangt so an die Hand.

Wärme kann dabei als kinetische Energie der Moleküle betrachtet werden: In heißen Körpern bewegen sie sich schneller und tragen mehr Energie. Trifft die heiße Suppe auf den Metalllöffel, stoßen die hochenergetischen Moleküle mit den kühleren im Griff zusammen und übertragen einen Teil ihrer kinetischen Energie.

**Konvektion** ist die Übertragung von Wärmeenergie durch die Bewegung eines Fluids oder Gases. Man unterscheidet natürliche Konvektion, getrieben durch Auftrieb infolge von temperaturbedingten Dichteunterschieden, und erzwungene Konvektion, die durch eine externe Kraft wie Lüfter oder Pumpen angetrieben wird. Konvektion ist in vielen technischen Systemen von zentraler Bedeutung – von der Kühlung von Motoren bis zur Auslegung von Wärmeübertragern.

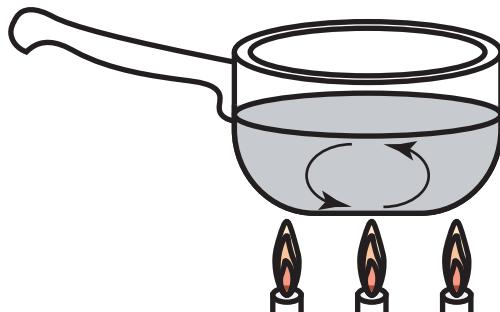


Abbildung 1.2. Konvektiver Wärmetransport.

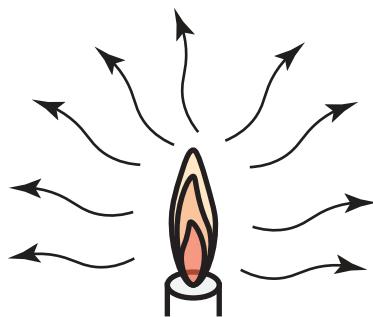
**Phenomena 1.3**

Bei der Fahrradfahrt an einem heißen Sommertag, fühlt sich die Luft im Stillstand an der roten Ampel besonders warm an. Sobald wieder Fahrt aufgenommen wird, kommt es fühlbar zur Abkühlung, trotz der Anstrengung.

Die Wärmeabgabe des Körpers an die Umgebung wird durch die Luftströmung beeinflusst, die beim Fahren entsteht. Strömt Luft an der Haut vorbei, nimmt sie Wärme auf und führt sie schnell ab. Diese durch Strömung bedingte Wärmeübertragung heißt Konvektion.

Konvektion ist direkt mit der Strömungsmechanik verknüpft. Das Verständnis der Bewegung von Luft und anderen Fluiden und ihres Einflusses auf Temperaturen hilft bei der Auslegung von Kühlsystemen, beim Verständnis von Wetterphänomenen und generell beim Verhalten der Wärmeübertragung.

**Strahlung** ist die Übertragung von Wärmeenergie durch elektromagnetische Wellen, ohne dass ein Medium erforderlich ist. Die Energieübertragung beruht auf der Emission elektromagnetischer Wellen eines heißen Körpers und deren Absorption durch einen kälteren. Die Strahlungsrate hängt von Temperatur und Emissionsgrad der beteiligten Flächen sowie von deren Abstand ab. Strahlung ist in vielen technischen Anwendungen bedeutsam, von der Auslegung von Solarsystemen bis zur Kühlung von Satelliten.



**Abbildung 1.3.** Strahlungswärmetransport.

**Phenomena 1.4**

An einem sonnigen Tag im Freien ist die Wärme auf der Haut spürbar. Erreichen die Strahlen die Erdoberfläche, transportieren sie Energie in Form elektromagnetischer Wellen: Strahlungswärmetransport.

Generell gilt, dass alle Körper oberhalb des absoluten Nullpunkts Photonen emittieren. Je heißer ein Körper, desto intensiver die Emission. Treffen Sonnenstrahlen auf die Haut, werden sie absorbiert; die Photonenergie geht auf die Moleküle über, deren kinetische Energie steigt, so entsteht das Wärmegefühl.

Im Unterschied zu Leitung und Konvektion kann Strahlung auch im Vakuum oder durch transparente Medien (Luft, Glas) erfolgen. Daher erreicht die Sonnenwärme, trotz des vorliegenden näherungsweise perfekten Vakuums im All die Erde.

Strahlung prägt natürliche und technische Prozesse: Die Erde erhält ihre Primärenergie radiativ; das treibt Wetter an und ermöglicht Leben. In der Raumfahrt, wo Leitung und Konvektion fehlen, ist Strahlungsübertragung für Wärmehaushalt und Kühlung entscheidend.

Das Verständnis radiativer Prozesse erlaubt die Nutzung solarer Energie für Stromerzeugung und die Entwicklung effizienterer Heiz- und Kühlsysteme.

**ABSCHNITT 1.2****Wärmeübertragungsmechanismen aus molekularer Sicht**

Wärmeübertragungsmechanismen wie Leitung und Strahlung lassen sich auf molekularer Ebene verstehen und erklären.

*Wärmeleitung aus molekularer Sicht:*

Auf molekularer Ebene beruht Wärmeleitung auf Wechselwirkungen zwischen benachbarten Teilchen. In Festkörpern (z. B. Metallen) sind Atome/Moleküle dicht gepackt und gebunden. Bei einem Temperaturgefälle besitzen die Teilchen in den heißen Bereichen höhere kinetische Energie. Energietragende Teilchen stoßen mit kühleren Nachbarn zusammen und übertragen einen Teil ihrer Energie. Diese Stöße setzen sich kettenartig im Material fort, sodass Wärme von warm nach kalt geleitet wird.

Die Wärmeleitfähigkeit eines Materials wird durch molekulare Struktur und Bindungsverhältnisse bestimmt. Dicht gepackte Strukturen mit starken intermolekularen Kräften (Metalle) leiten gut; loker aufgebaute Strukturen oder schwächere Kräfte (Isolatoren) behindern die Wärmeübertragung.

*Wärmestrahlung aus molekularer Sicht:*

Wärmestrahlung ist die Übertragung thermischer Energie durch elektromagnetische Wellen. Im Gegensatz zu Leitung oder Konvektion benötigt sie kein Medium; Strahlungstransport erfolgt im Vakuum oder in transparenten Stoffen.

Molekular betrachtet beruhen Emission und Absorption v. a. im Infrarotbereich auf Schwingungs- und Rotationsbewegungen, die aufgrund der thermischen Energie der Moleküle auftreten. Höhere Temperaturen führen zu intensiveren Bewegungen und damit zu stärkerer Emission; kühlere Körper absorbieren netto mehr, gewinnen Energie und steigern ihre kinetische Bewegung. Strahlungsübertragung umfasst auch Reflexion und Transmission: Manche Materialien reflektieren einen erheblichen Anteil der einfallenden Strahlung, wohingegen transparente Materialien diese mit geringer Absorption passieren lassen.

*Konvektion aus molekularer Sicht:*

In der Konvektion ist die Wärmeleitung überlagert durch eine Geschwindigkeit des Fluids, die den Wärmetransport erhöht. An einem Ort höherer Temperatur (z.B. einer Heizfläche) nehmen die Moleküle des Fluids (Gas- oder Flüssigkeitsmoleküle) durch Wärmeleitung die thermische Energie von der Oberfläche auf. Dies führt zu einer Erhöhung ihrer kinetischen Energie (schnellere Bewegung und stärkere Vibration). Die nun "warmen und energiereicheren" Moleküle werden durch eine makroskopische Strömung oder Bewegung des Fluids von diesem Ort wegtransportiert. Die transportierten Fluidteilchen bewegen sich zu einem Ort niedrigerer Temperatur (z.B. einer kühleren Oberfläche oder einem anderen Fluidbereich). Dort geben sie ihre erhöhte kinetische Energie entweder durch Kollisionen an kühлere Moleküle ab (Wärmeleitung im Fluid) oder durch Wärmeleitung an eine umgebende Oberfläche.

Kurzum: Wärmeleitung entsteht durch molekulare Stöße, Wärmestrahlung durch Emission, Absorption, Reflexion und Transmission elektromagnetischer Wellen (insbesondere IR). Beide Prozesse tragen – je nach Kontext und Material – zum gesamten Wärmetransport bei. In der Konvektion überlagert eine makroskopische Fluidströmung die Wärmeleitung und verstärkt damit den Wärmeübergang.

## ABSCHNITT 2

## Systeme und Kontrollvolumina

Ein System bezeichnet eine bestimmte Stoffmenge oder einen definierten Raumabschnitt, der zur Analyse ausgewählt wird. Der außerhalb des Systems befindliche Bereich wird als Umgebung bezeichnet. Eine Grenze — physisch oder imaginär — trennt System und Umgebung. Diese Grenze kann stationär oder beweglich sein und stellt stets die Fläche dar, über die System und Umgebung verbunden sind. Aus mathematischer Sicht wird die Grenze als masse- und volumenlose Fläche (ohne Dicke) betrachtet.

Je nach Wahl einer bestimmten Masse oder eines räumlichen Volumens unterscheidet man offene und geschlossene Systeme. Ein geschlossenes System enthält eine feste Menge; es findet kein Stoffaustausch über die Systemgrenze statt (vgl. Abbildung 2.1). Energie kann jedoch in Form von Arbeit oder Wärme die Systemgrenze passieren, und das Volumen eines geschlossenen Systems muss nicht konstant sein (z.B. ein Heliumballon, der aufsteigt und dessen Volumen zwar zunimmt, dessen Masse jedoch konstant bleibt).

Ein offenes System ist ein gezielt zur Analyse ausgewählter Raumbereich. Typischerweise umfasst er ein Bauteil mit Stoffdurchsatz, etwa Turbine, Verdichter oder Düse. Zur Untersuchung der Strömung wird der Bereich innerhalb des Bauteils als Kontrollvolumen gewählt. In einem offenen System können sowohl Masse als auch Energie die Grenze des Kontrollvolumens passieren; dadurch lässt sich das Systemverhalten umfassend analysieren.

Eine Wasserflasche veranschaulicht offene und geschlossene Systeme: Mit fest aufgeschraubtem Deckel ist sie geschlossen, ein Flüssigkeitsaustausch ist ausgeschlossen; die Flüssigkeitsmenge bleibt konstant, das Innere ist isoliert. Mit Entfernung des Deckels, wird das System offen und erlaubt den Austausch mit der Umgebung. So zeigt die Flasche den Wechsel zwischen offenem und geschlossenem Zustand und dessen Einfluss auf Stoff- und Energieaustausch über die Systemgrenzen.

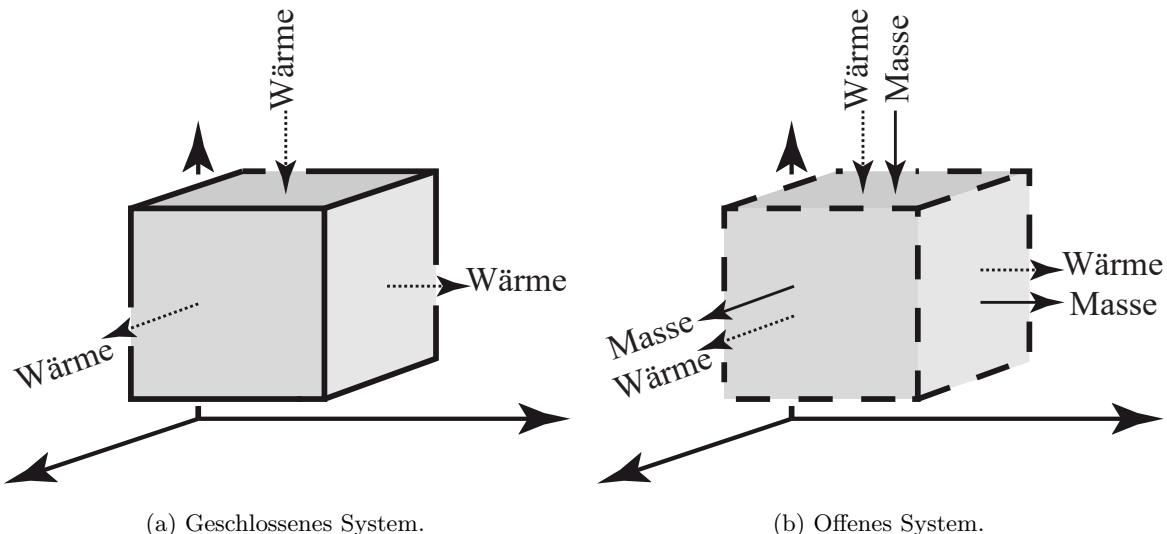


Abbildung 2.1. Unterschiedliche Kontrollvolumina und ihre Systemgrenzen.

## ABSCHNITT 3

## Bilanzen

Das Konzept der „Bilanz“ ist vermutlich bereits aus anderen Veranstaltungen bekannt, etwa in der Mechanik (Statik und Dynamik). Eine Bilanz ist ein vielseitiges Werkzeug und lässt sich auf viele Größen anwenden – z. B. Masse, Stoffanteile, Kräfte oder Energie. In der Dynamik führt eine Bilanzformulierung zur Bewegungsgleichung.

Zur Veranschaulichung einer Energiebilanz wird ein Schuhkarton betrachtet. Über die definierten Systemgrenzen kann Energie in die Box hinein- oder aus ihr herausfließen. In den folgenden Kapiteln wird erklärt, wie sich diese Energieströme beschreiben lassen. Zusätzlich kann innerhalb des Kartons Wärme erzeugt werden, z. B. durch ein elektrisches Gerät, das elektrische in thermische Energie umwandelt. Alle ein- und ausgehenden Ströme über die Systemgrenzen sowie interne Wärmequellen/-senken beeinflussen die innere Energie des Schuhkartons. Ist die Nettobilanz positiv, steigt die Temperatur im Inneren; ist sie negativ, sinkt die Temperatur.

Auch wenn wir eine spezifische Energieform (Wärme) betrachten, dürfen Quellen oder Senken dieser Energieform auftreten, ohne den thermodynamischen Grundsatz der allgemeinen Energieerhaltung (Energie kann weder erzeugt noch vernichtet werden) zu verletzen.

## Grundgleichung

**Allgemeine Energiebilanz:**

$$\text{Zeitliche Änderung der inneren Energie} = \text{Eintretende Ströme - austretende Ströme + Quellen - Senken.} \quad (3.1)$$

Die zeitliche Änderung der inneren Energie  $\frac{\partial U}{\partial t}$  kann über  $U = m c T$  mit einer Temperaturänderung verknüpft werden, wobei  $m$  die Masse des Systems und  $c$  die spezifische Wärmekapazität bezeichnet. Die Einheit dieses Terms ist  $(\frac{J}{s})$  bzw.  $(W)$ . Analog sind alle über die Systemgrenzen laufenden Wärmeströme sowie Wärmequellen/-senken in absoluten Größen  $(W)$  zu formulieren – nicht flächenbezogen  $(\frac{W}{m^2})$  oder volumenbezogen  $(\frac{W}{m^3})$ . Ein System, dessen innere Energie sich zeitlich nicht ändert, heißt stationäres System.

## Grundgleichung

**Allgemeine Energiebilanz eines stationären Systems:**

$$0 = \text{Eintretende Ströme} - \text{austretende Ströme} + \text{Quellen} - \text{Senken.} \quad (3.2)$$

Das Gegenteil eines stationären Systems ist ein instationäres System.

## ABSCHNITT 3.1

**Systematisches Vorgehen zur Lösung ingenieurwissenschaftlicher Probleme**

In diesem Abschnitt soll ein systematisches Vorgehen vermittelt werden, dessen allgemeine Struktur wie folgt beschrieben ist:

Approach 3.1

**Komplexe Probleme mithilfe von Bilanzen lösen:**

- Für ein gewähltes/definiertes Kontrollvolumen der Energiebilanz
  - d.h.: Wahl eines für den gesamten Abschnitt repräsentativen Elements. Zur Analyse einer Rohrströmung, z.B. in einem langen Rohr mit stationärem Durchfluss, liegt das infinitesimale Element im Fluid (nicht in der Rohrwand).

**1 Aufstellen der Bilanz:**

- Änderungen der inneren Energie definieren.
  - Zeitliche Änderung der Fluidtemperatur.
- Ströme über die Systemgrenzen definieren.
  - Diffusiver Wärmetransport infolge von Temperaturgradienten.
  - Advektiver Wärmetransport infolge von Fluidbewegung.
  - Externe Mechanismen, z. B. Strahlungswärmetransport durch die Sonne.
- Interne Wärmequellen und -senken definieren.
  - Beispielsweise chemischer Reaktor mit durchströmtem Reaktionsraum.

**2 Definition der in der Bilanz auftretenden Terme:**

- Definition der Ströme über konstitutive Gesetze für Leitung, Konvektion und Strahlung.
  - Fouriersches Gesetz der Wärmeleitung:  $\dot{q}'' = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ .
  - Newtonsches Abkühlgesetz:  $\dot{q}'' = \alpha (T_w - T_f)$ .
  - Stefan–Boltzmann-Gesetz:  $\dot{q}'' = \sigma \epsilon T^4$ .

**3 Einsetzen und Umformen:**

- Alle Definitionen einsetzen und die Differentialgleichung übersichtlich formulieren.

**4 Rand- und/oder Anfangsbedingungen festlegen:**

- Erforderliche Bedingungen zum Lösen der Differentialgleichung bestimmen.

**5 Gleichung lösen:**

- Mit Hilfe der Rand- und Anfangsbedingungen die gesuchte Funktion bestimmen.

Einige Aspekte dieses Vorgehens wurden noch nicht eingeführt und mögen unerwartet wirken; sie werden in den folgenden Abschnitten behandelt. Wichtig ist hier, dass sich ein Großteil der Aufgaben

durch eine geeignete Wahl der Bilanzgrenzen und das konsequente Befolgen der fünf vorgestellten Schritte lösen lässt.

Durch die Zerlegung in Teilschritte lässt sich das Systemverhalten leichter analysieren und verstehen. Dieses systematische Vorgehen ist nicht nur in der Wärmeübertragung nützlich, sondern in vielen Bereichen von Technik und Wissenschaft. Es ermöglicht, komplexe Probleme sicherer und effizienter zu bearbeiten und zu optimierten Entwürfen zu gelangen.

Ein wesentlicher Aspekt beim Lösen einer Differentialgleichung ist die Wahl geeigneter Rand- bzw. Anfangsbedingungen, welche das Verhalten des modellierten Systems festlegen. Obwohl dies einfach scheint, treten aufgrund der Komplexität vieler Gleichungen häufig Fehler auf. Zur Minimierung empfiehlt sich ein systematisches Vorgehen zur Bestimmung der notwendigen Bedingungen:

**Approach 3.2****Bestimmung der erforderlichen Randbedingungen:**

Zunächst die Anzahl der benötigten Rand- bzw. Anfangsbedingungen bestimmen. Bei partiellen Differentialgleichungen hängt diese von der Zahl der unabhängigen Variablen und der Ableitungsordnung hinsichtlich jeder Variablen ab.

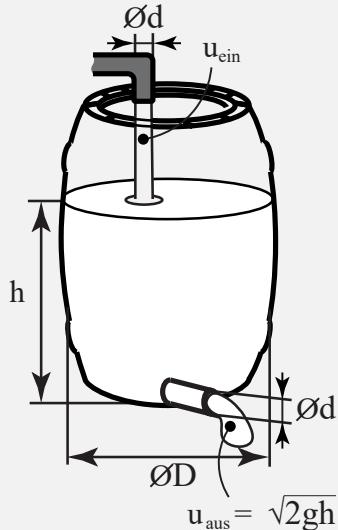
Für jede benötigte Bedingung:

1. Ist die Temperatur am betrachteten Ort/zu Beginn bekannt?
  - Falls ja: Anfangsbedingung angeben.
  - Falls nein: Schritt 2 prüfen.
2. Liegen am Ort/zu Beginn symmetrische oder adiabate Bedingungen vor?
  - Falls ja: Bedingung angeben.
  - Falls nein: Schritt 3 prüfen.
3. Ist eine Wärmestromdichte am Ort/zu Beginn bekannt?
  - Falls ja: Bedingung aus lokaler Energiebilanz herleiten.
  - Falls nein: Anderen Ort betrachten.

Zur Veranschaulichung des beschriebenen Vorgehens wird ein strömungsmechanisches Beispiel betrachtet, das mit wenig physikalischem Hintergrundwissen lösbar ist.

**Example 3.1**

Ein Fluid strömt oben mit konstanter mittlerer Geschwindigkeit  $u_{\text{ein}}$  in ein Fass ein. Gleichzeitig verlässt ein Teil des Fass über ein Rohr mit der Geschwindigkeit  $u_{\text{aus}}$ . Anfangs betrage die Füllhöhe  $h_0$ . Gesucht ist ein Ausdruck für die Höhe  $h(t)$  über der Zeit.

**Hinweis:**

- $u_{\text{in}} < u_{\text{out}}$ .

**1 Aufstellen der Bilanz:**

Es tritt ein eingehender Massenstrom (Zulauf) auf, gleichzeitig ein ausgehender Massenstrom über das Bodenrohr. Sind diese Raten ungleich, ändert sich die im Fass befindliche Masse zeitlich. Die Massenbilanz lautet:

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_{\text{ein}} - \dot{m}_{\text{aus}}.$$

Die Massenänderung im Fass entspricht also der Differenz aus ein- und ausgehendem Massenstrom. Hinweis: Der Punkt über  $m$  kennzeichnet die zeitliche Rate (Massenstrom), nicht die Masse selbst.

**2 Definition der Bilanzelemente:**

Masse im Fass:

$$m = \rho V = \rho h(t) \frac{\pi D^2}{4}.$$

Eingehender Massenstrom:

$$\dot{m}_{\text{ein}} = \rho u_{\text{ein}} A_c = \rho u_{\text{ein}} \frac{\pi d^2}{4}.$$

Ausgehender Massenstrom:

$$\dot{m}_{\text{aus}} = \rho u_{\text{aus}} \frac{\pi d^2}{4} = \rho \sqrt{2gh(t)} \frac{\pi d^2}{4}.$$

Die Form des ausgehenden Massenstroms berücksichtigt den durch die Füllhöhe verursachten Druck: In der Strömungsmechanik ergibt sich eine Wurzelabhängigkeit der Austrittsgeschwindigkeit  $u_{\text{aus}}$  von der Höhe  $h$ , die sich zeitlich ändert.

### 3 Einsetzen und Umstellen:

$$\frac{dh}{dt} = \left( \frac{d}{D} \right)^2 \left( u_{\text{ein}} - \sqrt{2gh(t)} \right).$$

### 4 Definition der Rand- und/oder Anfangsbedingung(en):

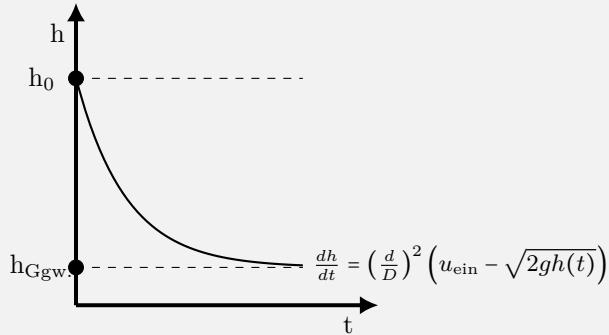
Die Höhe  $h$  wurde einmal nach  $t$  abgeleitet; zur Lösung ist daher ein Anfangswert erforderlich.

Anfangsbedingung:

$$h(t=0) = h_0.$$

### 5 Lösen der Gleichung:

Mit einem ODE-Löser ergibt sich folgende Beziehung:



Zu einem späten Zeitpunkt gilt  $u_{\text{ein}} = u_{\text{aus}}$ ; die Füllhöhe  $h(t)$  erreicht dann ein physikalisch plausibles Gleichgewichtsniveau.

## ABSCHNITT 4

## Wichtige Definitionen und Notationen

Energie – auch in Form von Wärme – wird je nach Kontext häufig in Joule (J) oder Kilowattstunden (kWh) gemessen. Zu beachten ist hierbei, dass Energie eine skalare Größe ohne Richtung ist.

Demgegenüber ist die Änderung der Energie pro Zeiteinheit eine vektorielle Größe mit Betrag und Richtung. Dieser Energiestrom, auch Leistung  $P$  genannt, bezeichnet die pro Zeiteinheit  $\Delta t$  übertragene Energie  $E$  in Joule pro Sekunde ( $\frac{J}{s}$ ), besser bekannt als Watt (W).

In der Wärmeübertragung ist die betrachtete Energie die Wärmemenge und damit ist der Wärmestrom  $\dot{Q}$  die pro Zeiteinheit  $\Delta t$  übertragene Wärmemenge  $Q$  und wird ebenfalls in Watt (W) gemessen.

**Definition** **Wärmestrom**

$$\dot{Q} = \frac{Q}{\Delta t} \text{ (W).} \quad (4.1)$$

Des Weiteren bezeichnet man den auf die Fläche  $A$  bezogenen Wärmestrom  $\dot{Q}$  als Wärmestromdichte  $\dot{q}''$  ( $\frac{W}{m^2}$ ). Flächenbezogene Größen werden durch zwei Striche  $''$  gekennzeichnet.

**Definition** **Wärmestromdichte:**

$$\dot{q}'' = \frac{\dot{Q}}{A} \left( \frac{W}{m^2} \right). \quad (4.2)$$

Die innere Energie  $U$  ist die Gesamtenergie eines Systems aufgrund der Bewegung und Wechselwirkung seiner Teilchen. Die innere Energie  $U$  eines Systems ist direkt proportional zu seiner Masse  $m$  und der spezifischen Enthalpie  $h$ . In geschlossenen Systemen ist die innere Energie erhalten. Wärmebilanzen erfordern, neben äußerem Wärmetransport und verrichteter Arbeit am System, die zeitliche Erfassung der Änderungen der inneren Energie, um Temperaturverteilung und Systemverhalten zu beschreiben.

**Definition** **Zeitliche Änderung der inneren Energie**

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = m \frac{\Delta h}{\Delta t} \approx mc \frac{\Delta T}{\Delta t} \text{ (W).} \quad (4.3)$$

**Beachte:**  $h \approx cT$  bei konstantem Druck  $p$ , konstanter spezifischer Wärmekapazität  $c$  und konstanter Dichte  $\rho$ . Eine typische Anwendung ist Wasser, das durch ein Rohr fließt.

Innere Wärmequellen  $\dot{\Phi}$  sind bei der Modellierung von Wärmeübertragungsproblemen ein wesentlicher Faktor. Sie können Temperaturverteilungen und das Gesamtverhalten eines Systems maßgeblich beeinflussen – etwa in der Kerntechnik (radioaktiver Zerfall) oder in der Werkstofftechnik (Reibungswärme in Fertigungsprozessen). Der damit verbundene freigesetzte volumenspezifische Wärmestrom  $\dot{\Phi}'''$  ( $\frac{W}{m^3}$ ) ergibt sich aus der gesamten Wärmeerzeugung  $\dot{\Phi}$  und dem Systemvolumen  $V$ . Volumenspezifische Größen werden durch drei Striche  $'''$  gekennzeichnet.

**Definition****Volumen spezifische Wärmequelle:**

$$\dot{\Phi}''' = \frac{\dot{\Phi}}{V} \left( \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right). \quad (4.4)$$

Der Enthalpiestrom (advektiver Transport) ist ein weiteres zentrales Konzept und beschreibt die zwischen System und Umgebung als Wärme übertragene Energie, ergänzt um die am System verrichtete oder vom System geleistete Arbeit. Er wird insbesondere bei offenen Systemen verwendet, in denen Energietransport durch Stofftransport bedeutsam ist. Die durch Bewegung von Masse transportierte Energie  $\dot{H}$  ist direkt proportional zum Massenstrom  $\dot{m}$  und zur spezifischen Enthalpie  $h$ .

**Definition****Enthalpiestrom:**

$$\dot{H} = \dot{m} h = \dot{m} c T \quad (\text{W}). \quad (4.5)$$

Zur Veranschaulichung des Unterschieds zwischen Energie und Leistung: Eine Glühlampe verbraucht über einen Zeitraum (z. B. eine Stunde) eine Energiemenge in Kilowattstunden. Ihre Leistung – also die Energieverbrauchsrate – wird in Watt oder Kilowatt angegeben. Energie ist hier die insgesamt verrichtete Arbeit über die Zeit, Leistung die Rate, mit der Arbeit erbracht wird.

Im Kontext der Wärmeübertragung sind Energiebilanzen besonders wichtig. Eine Energiebilanz erfasst die Zu- und Abflüsse thermischer Energie in einem System. Ziel ist, dass die in das System eintretende Energiemenge der austretenden entspricht und die im System befindliche Energie bilanziell erhalten bleibt.

Das Prinzip der Energieerhaltung besagt, dass Energie weder erzeugt noch vernichtet, sondern nur in andere Formen umgewandelt werden kann. Die zeitliche Zunahme der inneren Energie eines Kontrollvolumens ergibt sich aus der Differenz der ein- und ausströmenden Energieflüsse sowie der im Volumen erzeugten Wärme.

**Grundgleichung****Energierhaltung in offenen Systemen:**

$$\frac{dU}{dt} = \sum \dot{Q}_{\text{in}} - \sum \dot{Q}_{\text{out}} + \sum \dot{H}_{\text{in}} - \sum \dot{H}_{\text{out}} + \dot{\Phi}. \quad (4.6)$$

**Grundgleichung****Energieerhaltung in geschlossenen Systemen:**

$$\frac{dU}{dt} = \sum \dot{Q}_{\text{in}} - \sum \dot{Q}_{\text{out}} + \dot{\Phi}. \quad (4.7)$$

Unter Anwendung dieses Prinzips lassen sich die Grundgleichungen der Wärmeübertragung herleiten, die das Verhalten thermischer Energie in einem System beschreiben.

Eine der wichtigsten Anwendungen der Energiebilanz in der Wärmeübertragung ist die Herleitung der Leitungsgleichung. Sie beschreibt die Rate des leitungsgebundenen Wärmetransports durch ein Material und entsteht durch Anwendung der Energiebilanz auf ein kleines Materialvolumen. Mit ihr lassen sich Temperaturprofile im Material sowie der Wärmestrom berechnen.

**Example 4.1**

Eine Kugel mit Durchmesser  $d$ , Dichte  $\rho$  und spezifischer Wärmekapazität  $c_p$  befindet sich anfänglich bei  $T_0$  und werde einer konstanten Wärmestromdichte  $\dot{q}''$  ausgesetzt. Wärmeverluste seien vernachlässigbar, die Kugeltemperatur räumlich homogen. Gesucht ist die Temperatur der Kugel zum Zeitpunkt  $t_1$ .

**1 Aufstellen der Bilanz:**

$$\frac{dU}{dt} = \dot{Q}_{\text{in}} - \dot{Q}_{\text{out}}.$$

**2 Definition der Bilanzelemente:**

Innere Energie:

$$U = m c_p T(t) = \rho \frac{\pi d^3}{6} c_p T(t).$$

Zugeführte Wärmestromrate zur Kugel:

$$\dot{Q}_{\text{in}} = \dot{q}'' A_s = \dot{q}'' \pi d^2.$$

Wärmeabgaberate der Kugel:

$$\dot{Q}_{\text{out}} = 0.$$

**3 Einsetzen und Umstellen:**

$$\frac{dT}{dt} = \frac{6 \dot{q}''}{\rho c_p d}.$$

**4 Definition der Rand- und/oder Anfangsbedingung(en):**

Die Temperatur  $T$  wurde einmal nach  $t$  abgeleitet. Zur Lösung der Differentialgleichung wird eine Anfangsbedingung benötigt.

Anfangsbedingung bei  $t = 0$ :

$$T(t = 0) = T_0.$$

**5 Lösen der Gleichung:**

Integration ergibt:

$$T(t) = \frac{6\dot{q}''}{\rho c_p d} t + c_1.$$

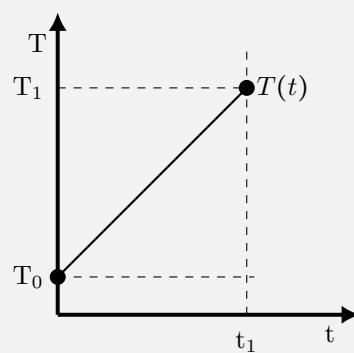
Aus der Anfangsbedingung folgt  $c_1 = T_0$ .

Damit ergibt sich der Temperaturverlauf:

$$T(t) = \frac{6\dot{q}''}{\rho c_p d} t + T_0.$$

Damit gilt für die Kugeltemperatur zum Zeitpunkt  $t_1$ :

$$T(t_1) = \frac{6\dot{q}''}{\rho c_p d} t_1 + T_0.$$



PART

II

# *Wärmeleitung*

## ABSCHNITT 5

## Grundlagen

### L01 - Einführung in das Fourier'sche Gesetz:

**Lernziele:**

- Aufbau eines fundierten Verständnisses sowohl der stationären als auch der instationären Wärmeleitung.
- Souveräne Anwendung der Wärmeleitungstheorie auf Systeme mit Wärmequellen und Wärmesenken.
- Fähigkeit, Wärmeströme in unterschiedlichen Körpern präzise und nachvollziehbar zu berechnen.
- Vertieftes Verständnis der Temperaturverteilung innerhalb von Objekten.

**Verständnisfragen:**

- Was ist das treibende Potential der Wärmeleitung?
- Welche drei Einflussgrößen bestimmen einen durch Wärmeleitung nach dem Fourier'schen Gesetz übertragenen Wärmestrom?
- Warum muss der Temperaturgradient in einem positiven Koordinatensystem ein negatives Vorzeichen haben?
- Welche Materialeigenschaft ist für die Wärmeleitung ausschlaggebend?



### L02 - Erhaltungsgleichung:

**Stationäre Erhaltungsgleichung:****Lernziele:**

- Kompetentes Aufstellen von Energiebilanzen für verschiedene Anwendungsfälle.
- Anwendung der Taylor-Reihenentwicklung zur Herleitung von Differentialgleichungen aus Energiebilanzen.
- Definition geeigneter Randbedingungen zur Lösung von Differentialgleichungen.

**Verständnisfragen:**

- Wie sieht das stationäre Temperaturprofil für eine homogene, eindimensionale, ebene Wand ohne Wärmequellen aus?
- Unter welchen Bedingungen wird die Poisson-Gleichung zur Laplace-Gleichung?

**Instationäre Erhaltungsgleichung:****Lernziele:**

- Grundlegendes Verständnis des Konzepts der inneren Energie sowie klare Abgrenzung zu kinetischer und potenzieller Energie
- Fähigkeit Energiebilanzen kompetent für verschiedene Szenarien zu formulieren
- Fähigkeit zur Definition geeigneter Randbedingungen zur Lösung der hergeleiteten Differentialgleichungen
- Fähigkeit zur kompetenten Lösung von Differentialgleichungen für einfache Fälle

**Verständnisfragen:**

- Unter welchen Bedingungen wird die Poisson-Gleichung zur Laplace-Gleichung?
- Wie sieht das instationäre Temperaturprofil für eine homogene, eindimensionale, ebene Wand ohne Wärmequellen aus?

**Zugehörige Übungsaufgaben:**

- Übung II.1 Temperaturprofile in ebenen Wänden
- Übung II.2 Das Schichtmodell
- Übung II.3 Wärmeleitungsgleichung

## ABSCHNITT 5.1

**Fouriersches Gesetz**

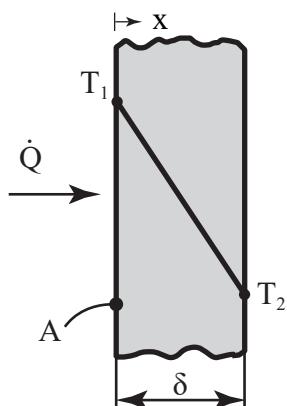
Im Jahr 1822 präsentierte Fourier seine Forschung zur Wärmeübertragung in seinem bahnbrechenden Werk mit dem Titel „Théorie analytique de la chaleur“ (Die analytische Theorie der Wärme), in dem er seine Argumentation aus dem newtonschen Abkühlungsgesetz ableitete. Nach Fourier ist der Wärmestrom zwischen zwei benachbarten Molekülen direkt proportional zum infinitesimal kleinen Temperaturunterschied zwischen ihnen.

Diese Erkenntnis führte ihn dazu, einen linearen Zusammenhang zwischen Wärmestrom und dem Temperaturgradienten aufzustellen.



**Abbildung 5.1.** Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) [1].

Die Proportionalitätskonstante in diesem Zusammenhang, bekannt als Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  ( $\frac{W}{mK}$ ), kennzeichnet die Fähigkeit eines Materials Wärme zu leiten, gibt also an, wie leicht Wärme übertragen wird. Die Einheit ergibt sich aus dem Zusammenhang des Wärmestroms  $\dot{Q}$  (W) mit dem Temperaturgradienten  $\frac{\partial T}{\partial x}$  ( $\frac{K}{m}$ ) und der wärmeübertragenden Fläche  $A$  ( $m^2$ ), also jener Fläche, die senkrecht zur Richtung des Wärmestroms steht.



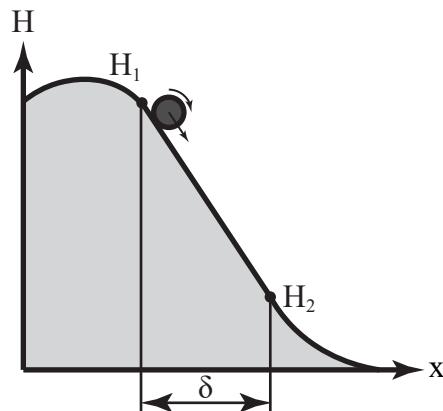
**Abbildung 5.2.** Wärmestrom durch eine ebene Wand.

Für eine ebene Wand, bei der also die wärmeübertragende Fläche konstant ist, gilt für die auf eine Flächeneinheit bezogene Wärmestromdichte die folgende Gleichung, wobei  $T_1$  die höhere Temperatur

darstellt:

$$\frac{\dot{Q}}{A} = \dot{q}'' = \lambda \frac{T_1 - T_2}{\delta}.$$

Obwohl diese Bestimmung des Wärmestroms korrekt ist, ist die Definition, dass  $T_1$  die höhere Temperatur ist, willkürlich und liefert keine allgemeingültige Berechnungsmethode. Entsprechend dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik fließt Wärme von Bereichen höherer Temperatur zu Bereichen niedrigerer Temperatur. In diesem Zusammenhang fungiert die Temperatur als treibendes Potential, ähnlich wie die Höhe in einem Gravitationsfeld.



**Abbildung 5.3.** Kugel, die einen Abhang hinunterrollt.

Um dieses Konzept besser zu verstehen, betrachte man die Analogie einer Kugel, die auf einem Hügel liegt. Die Kugel rollt aufgrund der Schwerkraft mühelos den Hügel hinunter. Ähnlich fließt in Fouriers Gesetz Wärme von Bereichen höherer Temperatur zu Bereichen niedrigerer Temperatur, angetrieben durch den Temperaturunterschied.

Wird nun der Temperaturgradient  $\frac{\partial T}{\partial x}$  als Steigung des Hügels betrachtet, so wird in Abbildung 5.2 deutlich, dass der Temperaturgradient  $\frac{\partial T}{\partial x} < 0$  ist. Aus physikalischer Sicht sollte daher in der allgemeinen Formulierung des Fourierschen Gesetzes ein negatives Vorzeichen eingebaut werden. Dieses negative Vorzeichen weist auf die Richtung des Wärmestroms hin und berücksichtigt die Tatsache, dass Wärme natürlicherweise von einem Ort höherer zu einem Ort niedrigerer Temperatur fließt.

Mathematisch lässt sich dies so ausdrücken:

$$\dot{Q} = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Kehrt man zu der Hügel-Analogie zurück, bedeutet eine größere Steigung (entsprechend einem größeren Temperaturgradienten), dass die Kugel schneller rollt und in einer gegebenen Zeit mehr Strecke zurücklegt. Im Kontext der Wärmestromdichte bedeutet diese Analogie, dass bei einem größeren Temperaturunterschied zwischen zwei Punkten ein höherer Wärmestrom auftritt.

Nach diesem Prinzip liefert das Fouriersche Gesetz eine eindeutige Definition der Wärmestromdichte.

#### Grundgleichung

#### Fouriersches Gesetz:

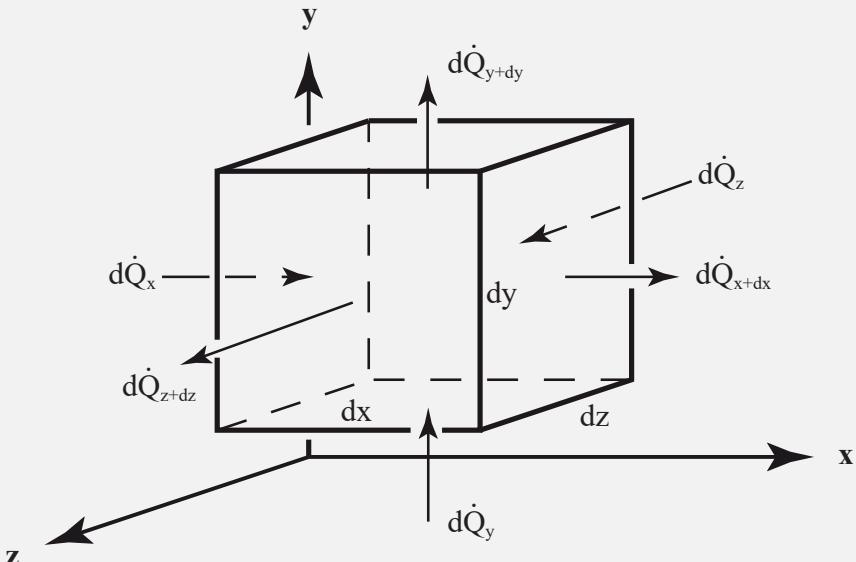
$$\dot{q}'' = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (5.1)$$

## ABSCHNITT 5.2

**Erhaltungsgleichungen**

Die Erhaltungsgleichungen für Wärme, Masse und Impuls bilden das grundlegende Gerüst für Berechnungen in der Strömungsmechanik und beim Wärmetransport. Diese Gleichungen sind das Rückgrat von CFD (engl. Computational-Fluid-Dynamics: numerische Strömungsmechanik)-Codes, welche Einblicke in Strömungseigenschaften und Wärmeübertragungsleistungen ermöglichen.

Jede Erhaltungsgleichung basiert auf dem Prinzip der Bilanzierung. In diesem Abschnitt liegt der Fokus darauf, die Erhaltungsgleichung speziell für Wärme in einem ruhenden (nicht strömenden) geschlossenen Kontrollvolumen in einem kartesischen Koordinatensystem aufzustellen. Das Kontrollvolumen wird als hinreichend klein angenommen, mit den Abmessungen  $dx$ ,  $dy$  und  $dz$ , und die Zustandsgrößen, etwa die Temperatur, bleiben innerhalb dieses Kontrollvolumens konstant. Zur Herleitung der Erhaltungsgleichung wird die Wirkung aller Wärmeströme, die die Grenzen des Kontrollvolumens überqueren, der zeitlichen Temperaturänderungen im Kontrollvolumen sowie das Vorhandensein einer Wärmequelle oder einer Wärmesenke berücksichtigt.



**Abbildung 5.4.** Energiebilanz eines ruhenden Kontrollvolumens.

## Derivation

## 1 Aufstellen der Bilanz:

$$\underbrace{\frac{\partial U}{\partial t}}_1 = \underbrace{d\dot{Q}_x - d\dot{Q}_{x+dx} + d\dot{Q}_y - d\dot{Q}_{y+dy} + d\dot{Q}_z - d\dot{Q}_{z+dz}}_2 + \underbrace{d\dot{\Phi}}_3,$$

wobei 1 die zeitliche Änderung der inneren Energie  $U$  und damit der Temperatur im Kontrollvolumen beschreibt, 2 die Wärmeströme über die Grenzen in allen drei Raumrichtungen berücksichtigt und 3 für eine Wärmequelle innerhalb des Kontrollvolumens steht.

Beachten Sie, dass die Richtung aller Wärmeströme als positiv in Richtung des Koordinatensystems angenommen wird.

Denken Sie daran, dass der Wärmestrom  $d\dot{Q}_x$  nur einen Teil des gesamten Wärmestroms  $\dot{Q}_x$  in  $x$ -Richtung repräsentiert. Dieser spezifische Wärmestrom bezieht sich auf den Anteil, der durch die Teilquerschnittsfläche  $dA = dy dz$  strömt, nicht durch den gesamten Querschnitt  $A_x$ . Ebenso beschreibt  $d\dot{\Phi}$  die Wärme, die im infinitesimalen Element erzeugt wird, also den kleinen Anteil der insgesamt erzeugten Wärme.

### 2 Definition der Bilanzelemente:

Der eintretende Energiezufluss an der Stelle  $x$  über die Fläche  $dy dz$  erfolgt durch Wärmeleitung. Mithilfe des Fourierschen Gesetzes, siehe Gl. (5.1), ergibt sich der eintretende Wärmestrom in  $x$ -Richtung  $d\dot{Q}_x$  zu:

$$d\dot{Q}_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \underbrace{dy dz}_{\text{Fläche}}.$$

Für den austretenden Wärmestrom wird das Prinzip der Taylor-Reihenentwicklung angewendet. Dabei wird eine kleine Änderung des Wärmestroms angenommen, die linear beschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} d\dot{Q}_{x+dx} &= d\dot{Q}_x + \frac{\partial}{\partial x} (d\dot{Q}_x) dx \\ &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dy dz + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass in lokalen Bilanzen nach Anwendung der Taylor-Reihenentwicklung der Term  $d\dot{Q}_x$  wegfällt, da dieser bereits in den ein- und ausgehenden Strömen enthalten ist. Es bleibt nur die lokale Änderung des Wärmestroms bestehen. Ähnliche Ausdrücke erhält man analog für die anderen beiden Koordinatenrichtungen.

Die Wärme, die beispielsweise durch einen elektrischen Heizer oder eine chemische Reaktion in dem Volumenelement freigesetzt oder aufgenommen wird, ist:

$$d\dot{\Phi} = \dot{\Phi}''' \underbrace{dx dy dz}_{\text{Volumen}},$$

wobei  $\dot{\Phi}'''$  die volumenspezifische Intensität des Quellterms in  $(\frac{W}{m^3})$  bezeichnet.

Unter Annahme konstanter Masse, ergibt sich für die zeitliche Änderung der inneren Energie des Volumenelements:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{d(m c_v T)}{dt} = \rho c_v dx dy dz \frac{\partial T}{\partial t},$$

wobei  $\rho (\frac{kg}{m^3})$  die Dichte und  $c_v (\frac{J}{kg \cdot K})$  die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen beschreibt (der Index v wird bei Festkörpern oft vernachlässigt).

### 3 Einsetzen und Umstellen:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{\Phi}'''.$$

Das Energieerhaltungsgesetz liefert somit in kartesischen Koordinaten die Differentialgleichung für das Temperaturfeld. Analog werden entsprechende Differentialgleichungen für in Zylinder- und Kugelkoordinaten beschriebene Systeme hergeleitet, wie in den Gleichungen (5.2) - (5.4) gezeigt.

**Grundgleichung**

**Energieerhaltungsgleichung für Festkörper in kartesischen Koordinaten ( $x,y,z,t$ ):**

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{\Phi}''' . \quad (5.2)$$

**Grundgleichung**

**Energieerhaltungsgleichung für Festkörper in Zylinderkoordinaten ( $r,\theta,z,t$ ):**

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{\Phi}''' . \quad (5.3)$$

**Grundgleichung**

**Energieerhaltungsgleichung für Festkörper in Kugelkoordinaten ( $r,\theta,\phi,t$ ):**

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \dot{\Phi}''' . \quad (5.4)$$

In den meisten Fällen wird die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  als konstant angenommen, was die Gleichungen (5.2) - (5.4) vereinfacht. So kann Gl. (5.2) wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda},$$

wobei  $a$  die Temperaturleitfähigkeit ist.

**Definition**

**Temperaturleitfähigkeit:**

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} \left( \frac{m^2}{s} \right). \quad (5.5)$$

Die Lösung der Gleichungen (5.2) - (5.4) unter Berücksichtigung der Randbedingungen liefert das Temperaturfeld eines Körpers. Die Fähigkeit eines Materials, „Wärme hindurchzulassen“, nimmt mit steigender Temperaturleitfähigkeit zu. Dies ist entweder auf eine hohe Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  oder eine geringe Wärmekapazität  $\rho c$  des Materials zurückzuführen.

Die folgenden Abschnitte präsentieren die Lösungen der Differentialgleichungen (5.2) - (5.4) für spezifische Fälle und Anwendungen. Das für eine konkrete Problemstellung unter Berücksichtigung ihrer Randbedingungen bestimmte Temperaturfeld wird in Gl. (5.1) genutzt, um den Wärmestrom durch eine Fläche zu ermitteln. In der Literatur findet man Gl. (5.2) auch als Laplace- oder Poissons-Gleichung. In beiden Fällen wird die stationäre Form betrachtet, wobei die Poissons-Gleichung, anders als die Laplace-Gleichung, Wärmequellen mit berücksichtigt.

**Grundgleichung**

**Poissons-Gleichung:**

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda} = 0. \quad (5.6)$$

**Grundgleichung**

**Laplace-Gleichung:**

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (5.7)$$

## HEATQUIZ 5.1

Temperaturprofile:

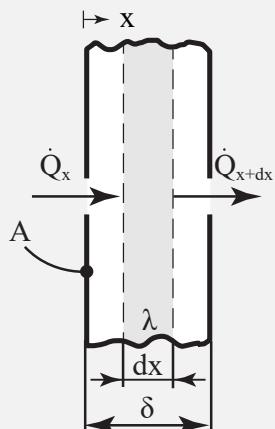


Energiebilanzen:

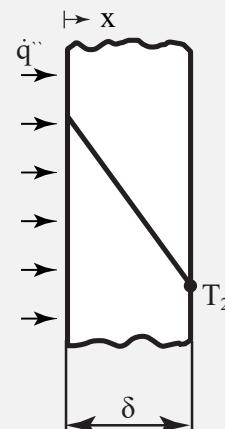


## Example 5.1

Bestimmen Sie das Temperaturprofil in einer ebenen Wand mit Dicke  $\delta$  und Querschnittsfläche  $A$ . An der linken Seite der Wand wird eine konstante Wärmestromdichte  $\dot{q}''$  vorgegeben, während an der rechten Seite eine konstante Temperatur  $T_2$  vorliegt. Es wird angenommen, dass stationäre, eindimensionale Bedingungen ohne Quellen und Senken vorliegen.



(a) Energiebilanz.



(b) Temperaturverteilung.

## 1 Aufstellen der Bilanz:

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial t} = 0, \text{ stationär}$$

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial t} = \dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx}.$$

Die Energiebilanz besagt, dass eintretender und austretender Wärmestrom identisch sind.

## 2 Definition der Bilanzelemente:

Der eintretende Wärmestrom wird mithilfe des Fourierschen Gesetzes beschrieben, siehe Gl. (5.1):

$$\dot{Q}_x = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Der austretende Wärmestrom kann mit Hilfe der Taylor-Reihenentwicklung näherungsweise beschrieben werden:

$$\dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} \cdot dx = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \right) \cdot dx.$$

### 3 Einsetzen und Umstellen:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0.$$

Die Gleichung besagt, dass die Krümmung (z.B. zweite Ableitung) des Temperaturprofils Null ist. Dementsprechend ist die Lösung der Differentialgleichung eine Gerade mit konstanter Steigung, was einen konstanten Wärmestrom sicherstellt.

### 4 Definition der Rand- und/oder Anfangsbedingung(en):

Die Temperatur  $T$  wurde zweimal nach  $x$  abgeleitet. Folglich sind zur Lösung der Differentialgleichung zwei Randbedingungen erforderlich.

An der linken Seite, bei  $x = 0$ , wird ein konstanter Wärmestrom vorgegeben. Eine lokale Energiebilanz  $(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0} = \dot{q}'')$  ergibt:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{\dot{q}''}{\lambda}.$$

An der rechten Seite, bei  $x = \delta$ , ist die Temperatur  $T_2$  vorgegeben:

$$T(x = \delta) = T_2.$$

### 5 Lösen der Gleichung:

Durch einfaches Integrieren der hergeleiteten Differentialgleichung folgt:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = C_1.$$

Durch erneutes Integrieren entsteht:

$$T(x) = C_1 x + C_2.$$

Aus den Randbedingungen folgt, dass  $C_1 = -\frac{\dot{q}''}{\lambda}$  und  $C_2 = T_2 + \frac{\dot{q}''}{\lambda} \delta$ .

Dies führt schließlich zu folgendem linearen Temperaturprofil:

$$T(x) = \frac{\dot{q}''}{\lambda} (\delta - x) + T_2.$$

## ABSCHNITT 6

## Mehrschichtige Wände

### L03 - Wärmeleitung in einer mehrschichtigen ebenen Wand:

**Lernziele:**

- Konzeptionelles Verständnis des Temperaturprofils in einer mehrschichtigen Wand unter stationären Bedingungen.
- Untersuchung der Kombination von in Reihe geschalteten thermischen Widerständen zur Bestimmung des Gesamtwiderstands.

**Verständnisfragen:**

- Wie verläuft das Temperaturprofil in einer ebenen Wand ohne Wärmequellen und -senken im stationären Fall?
- Unter welchen Bedingungen gilt die Annahme, dass der Wärmestrom durch alle Schichten konstant ist?
- Wie wird der thermische Widerstand einer ebenen Wand definiert? Wie lässt sich der thermische Widerstand für eine Wand mit  $n$  Schichten berechnen?



### L04 - Wärmeleitung in einem zylindrischen Koordinatensystem:

**Lernziele:**

- Konzeptionelles Verständnis schematischer Profile für Temperatur und Wärmestrom bei variierendem Querschnitt.
- Fähigkeit, die Differentialgleichung mithilfe von Energiebilanzen herzuleiten.
- Kompetente Lösung von Differentialgleichungen.
- Fähigkeit, die Gleichung zu erweitern, um mehrere Widerstände zu berücksichtigen.
- Fähigkeit, das Problem mithilfe eines ingenieurtechnischen Ansatzes zu lösen.

**Verständnisfragen:**

- Wie verläuft das Temperaturprofil in zylindrischen Körpern?
- Worin unterscheidet sich das Temperaturprofil innerhalb eines zylindrischen Körpers von jenem innerhalb einer ebenen Wand? Worin liegt die Ursache für den Unterschied?
- Unter welchen Bedingungen kann die Krümmung des Zylinders und damit die Änderung der Fläche innerhalb der Zylinderwand vernachlässigt werden?



## L05 & L06 - Wärmeleitung in einer mehrschichtigen ebenen Wand mit Konvektion:

### Lernziele:

- Konzeptionelles Verständnis der Temperaturprofile in mehrschichtigen ebenen Wänden unter Berücksichtigung konvektiver Widerstände an den Oberflächen.
- Fähigkeit, das Konzept des Gesamtwärmewiderstands auf mehrschichtige ebene Wände mit Konvektion anzuwenden.
- Fähigkeit, den Wärmestrom durch mehrschichtige ebene Wände mit Konvektion zu berechnen.



### Verständnisfragen:

- Wie ist die Krümmung des Temperaturprofils auf der Fluidseite durch Konvektion bedingt?
- Welche Auswirkung hat die zusätzliche Berücksichtigung der Konvektion auf den gesamten Wärmetransport?



## L07 - Wärmeleitung in einer mehrschichtigen Rohrwand mit konvektiven Widerständen:

### Lernziele:

- Entwicklung eines Verständnisses für den Einfluss der mit dem Radius zunehmenden Oberfläche einer mehrschichtigen Rohrwand auf den Wärmeübergang.
- Entwicklung der Fähigkeit den Temperaturverlauf in einer mehrschichtigen Rohrwand zu berechnen und zu zeichnen.
- Entwicklung der Fähigkeit, den Gesamtwärmewiderstand in einer mehrschichtigen Rohrwand zu berechnen.
- Entwicklung der Fähigkeit, den Wärmestrom in einer mehrschichtigen Rohrwand zu berechnen.



### Verständnisfragen:

- Wie wirkt sich die gekrümmte Oberfläche eines Rohrs auf den Temperaturgradienten bei konstantem Wärmestrom und konstanter Wärmeleitfähigkeit aus?
- Welche Bezugsfläche und welcher Bezugsradius sind bei der Berechnung des Gesamtwärmeübergangskoeffizienten  $k$  für ein Rohrwandproblem zu berücksichtigen?



## L08 - Beispiel: Rohr im Heizungssystem:

### Lernziele:

- Sichere Berechnung thermischer Widerstände und Wärmeströme in einer Rohrwand.



### Verständnisfragen:

- Welche vereinfachenden Annahmen sind bei der Berechnung des Wärmestroms durch eine Rohrwand gültig?
- Welcher Widerstand bestimmt den Wärmeübergang (Koeffizienten)?



### Zugehörige Übungsaufgaben:

- Übung II.4 Fensterdämmung
- Übung II.5 Eisschicht
- Übung II.6 Warmwasserrohr

## ABSCHNITT 6.1

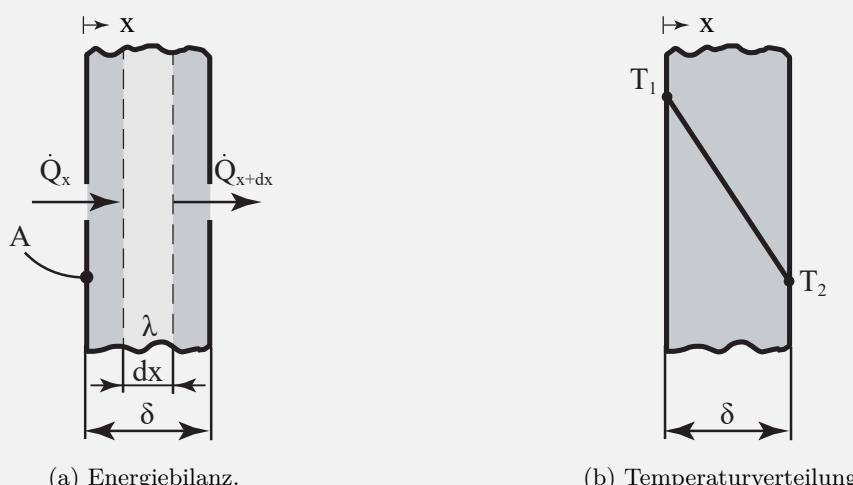
**Mehrschichtige Wand**

Der vorangegangene Abschnitt behandelte die Temperaturverteilung in einem einheitlichen Material mit konstanter Wärmeleitfähigkeit. In vielen praktischen und alltäglichen Anwendungen – wie beispielsweise bei einer wärmegedämmten Hauswand – sind jedoch mehrere Materialien mit unterschiedlichen thermischen Eigenschaften in Serie geschaltet.

In diesem Unterabschnitt steht die zentrale konzeptionelle Idee eines konstanten Wärmestroms im Fokus, der an einer Seite der Wand eintritt, das Material durchläuft und an der anderen Seite austritt. Um die Analyse zu vereinfachen, erleichtert das Theorem des thermischen Widerstands die Vorgehensweise, indem ein konstanter Wärmestrom, stationäre Bedingungen, eine homogene Wärmeleitfähigkeit innerhalb jeder Schicht sowie das Fehlen interner Wärmequellen oder -senken angenommen werden. Diese Rahmenbedingungen ermöglichen die Vorhersage des gesamten thermischen Widerstands und des Wärmestroms durch die Schichten und sind daher von unschätzbarem Wert für die Optimierung von Energieeffizienz und Dämmung in der Konstruktion.

**Derivation**

Um das Temperaturprofil in einer mehrschichtigen Wand abzuleiten, wird zunächst die Gleichung für eine einzelne Schicht hergeleitet, indem die Energieerhaltungsgleichung für diesen Bereich gelöst wird.



**Abbildung 6.1.** Wärmeleitung durch eine ebene Wand.

**1 Aufstellen der Bilanz:**

$$0 = \dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx}.$$

**2 Definition der Bilanzelemente:**

Eintreffender Wärmestrom:

$$\dot{Q}_x = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Austretender Wärmestrom (näherungsweise mittels Taylor-Reihenentwicklung bestimmt):

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{x+dx} &= \dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} \cdot dx \\ &= -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \right) \cdot dx.\end{aligned}$$

### 3 Einsetzen und Umstellen:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0.$$

### 4 Definition der Rand- und/oder Anfangsbedingung(en):

Die Temperatur  $T$  wurde zweimal nach  $x$  abgeleitet. Zur Lösung der Differentialgleichung sind daher zwei Randbedingungen erforderlich.

Bei  $x = 0$ :

$$T(x = 0) = T_1.$$

Bei  $x = \delta$ :

$$T(x = \delta) = T_2.$$

### 5 Lösen der Gleichung:

Durch zweifaches Integrieren ergibt sich:

$$T(x) = C_1 x + C_2.$$

Aus den Randbedingungen folgt  $C_2 = T_1$  und  $C_1 = \frac{T_2 - T_1}{\delta}$ .

Daraus resultiert folgende Temperaturfunktion:

$$T(x) = T_1 \left( 1 - \frac{x}{\delta} \right) + T_2 \frac{x}{\delta}.$$

Mithilfe des Fourierschen Gesetzes nach Gl. (5.1) wird der Wärmestrom ermittelt:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \\ &= -\lambda A \frac{T_1 - T_2}{x_1 - x_2} = -\lambda A \frac{T_1 - T_2}{-\delta} \\ &= \lambda A \frac{T_1 - T_2}{\delta}.\end{aligned}$$

**Grundgleichung**

**Temperaturprofil in einer ebenen Wand mit bekannten Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ :**

$$T(x) = T_1 \left( 1 - \frac{x}{\delta} \right) + T_2 \frac{x}{\delta}, \quad (6.1)$$

wobei  $T_1 > T_2$ .

**Grundgleichung**

**Wärmestrom innerhalb einer ebenen Wand mit bekannten Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ :**

$$\dot{Q} = \lambda A \frac{T_1 - T_2}{\delta}, \quad (6.2)$$

wobei  $T_1 > T_2$ .

**Derivation**

Im Fall einer mehrschichtigen Wand, d.h. bestehend aus mehreren Schichten aus unterschiedlichen Materialien unterschiedlicher Dicke, muss für jeden Abschnitt nacheinander eine Energiebilanz aufgestellt werden. Der in Abschnitt 1 einfließende Wärmestrom verlässt Abschnitt 3 unverändert, sofern stationäre, eindimensionale Zustände vorliegen.

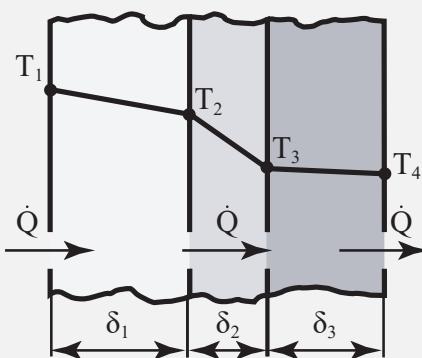


Abbildung 6.2. Wärmeleitung durch eine mehrschichtige Wand.

**1 Aufstellen der Bilanz:**

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 = \dot{Q}_3 = \dot{Q}.$$

**2 Definition der Bilanzelemente:**

Unter Verwendung von Gl. 6.2 wird der Wärmestrom durch jede Schicht wie folgt formuliert:

$$\dot{Q}_1 = \lambda_1 \frac{A}{\delta_1} (T_1 - T_2), \quad \dot{Q}_2 = \lambda_2 \frac{A}{\delta_2} (T_2 - T_3), \quad \text{und} \quad \dot{Q}_3 = \lambda_3 \frac{A}{\delta_3} (T_3 - T_4).$$

**3 Einsetzen und Umstellen:**

Daraus ergibt sich für den gesamten Wärmestrom:

$$\dot{Q} = \frac{A}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} (T_1 - T_4).$$

Die hergeleitete Gleichung, die den Wärmestrom beschreibt, weist eine Ähnlichkeit zum Ohmschen Gesetz für elektrische Leiter auf: Der elektrische Strom ist proportional zur Spannung und umgekehrt proportional zum Widerstand. Ebenso besagt die abgeleitete Formel, dass der Wärmestrom durch eine mehrschichtige Wand proportional zur Temperaturdifferenz und umgekehrt proportional zur Summe aller thermischen Widerstände der Schichten ist.

Diese Formel lässt sich verallgemeinern auf ein System mit  $n$  Schichten und wird im Allgemeinen

als Theorem des thermischen Widerstands bezeichnet.

**Grundgleichung**

**Wärmestrom durch eine mehrschichtige Wand ohne Konvektion:**

$$\dot{Q} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n W_{\text{Leit},i}} (T_1 - T_{n+1}). \quad (6.3)$$

**Definition**

**Wärmeleitwiderstand einer festen ebenen Schicht  $i$ :**

$$W_{\text{Leit},i} = \frac{\delta_i}{A\lambda_i} \left( \frac{\text{K}}{\text{W}} \right). \quad (6.4)$$

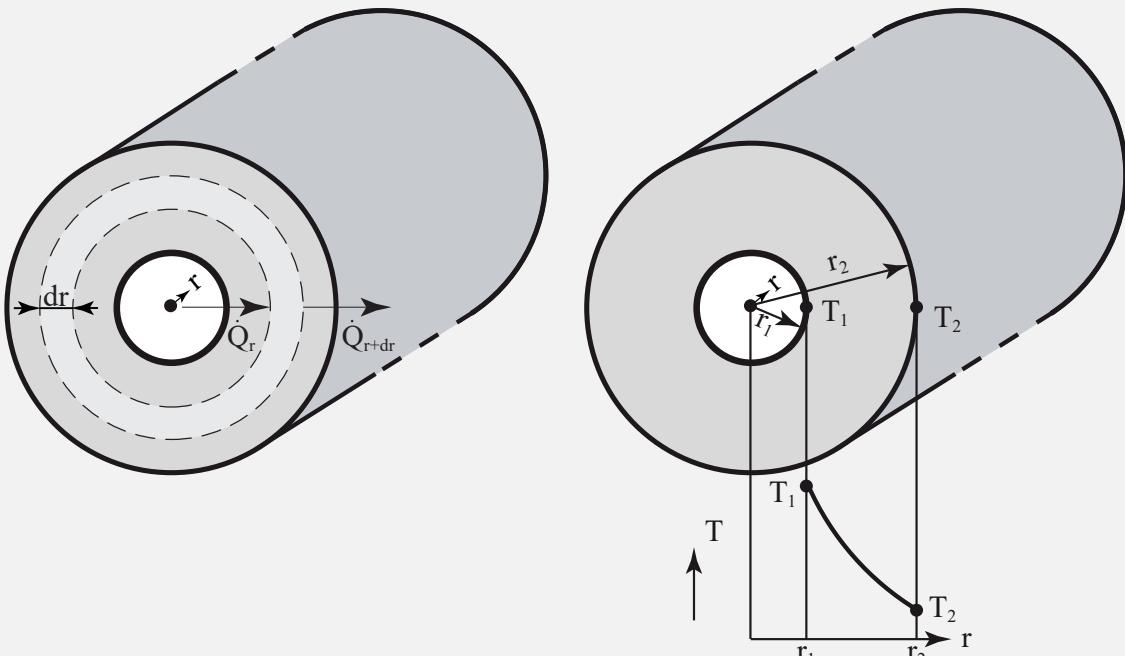
## ABSCHNITT 6.2

**Zylindrische Koordinaten, mehrschichtige Rohrwand**

Analog zu ebenen Wandsystemen gilt das Theorem des thermischen Widerstands auch für zylindrische Systeme wie zum Beispiel Rohrwände. Ein wesentlicher Unterschied im zylindrischen Koordinatensystem liegt allerdings in der radial zunehmenden Mantelfläche eines Zylinders und damit ist die wärmeübertragende Fläche für den Wärmestrom bei  $r + dr$  größer als bei  $r$ . Bleibt der Wärmestrom über die Rohrwand hinweg konstant, so muss in radialer Richtung – also mit steigendem Radius – der Betrag des Temperaturgradienten abnehmen.

**Derivation**

Zur Herleitung des Temperaturprofils in einer mehrschichtigen Rohrwand, wird zunächst das Profil für eine einzelne zylindrische Schicht hergeleitet, wie zuvor durch Lösung der Energieerhaltungsgleichung.



(a) Energiebilanz.

(b) Radiale Temperaturverteilung.

**Abbildung 6.3.** Wärmeleitung durch eine Rohrwand.**1 Aufstellen der Bilanz:**

$$0 = \dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+dr}.$$

**2 Definition der Bilanzelemente:**

Eintreffender Wärmestrom bei  $r$  über die veränderliche Fläche  $2\pi r L$ :

$$\dot{Q}_r = -\lambda 2\pi r L \frac{\partial T}{\partial r}.$$

Austretender Wärmestrom über die Fläche  $2\pi(r + dr)L$  an der Stelle  $r + dr$ :

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{r+dr} &= \dot{Q}_r + \frac{\partial \dot{Q}_r}{\partial r} dr \\ &= -\lambda 2\pi r L \frac{\partial T}{\partial r} - \lambda 2\pi L \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr.\end{aligned}$$

### 3 Einsetzen und Umstellen:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0.$$

### 4 Definition der Rand- und/oder Anfangsbedingung(en):

Die Differentialgleichung ist von zweiter Ordnung in Bezug auf  $r$ . Für die Lösung der Differentialgleichung sind daher zwei Randbedingungen erforderlich.

Die Temperatur bei  $r = r_1$ :

$$T(r = r_1) = T_1,$$

und die Temperatur bei  $r = r_2$ :

$$T(r = r_2) = T_2.$$

### 5 Lösen der Gleichung:

Durch zweifache Integration folgt:

$$T = A \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + B,$$

wobei  $r_0$  der Referenzradius ist.

Unter Verwendung der Randbedingungen ergibt sich

$$A = \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad \text{und} \quad B = T_1 - \frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)(T_2 - T_1)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}.$$

Die Temperatur in der Rohrwand weist damit einen logarithmischen Verlauf auf und kann wie folgt angegeben werden:

$$T = T_1 + \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)},$$

oder alternativ:

$$T = T_2 + \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}.$$

Durch Anwendung des Fourierschen Gesetzes, Gleichung (5.1), wird der Wärmestrom durch die

Wand bestimmt:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= -\lambda A \frac{\partial T}{\partial r} = -\lambda 2\pi r L \frac{\partial T}{\partial r} \\ &= 2\pi L \lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}.\end{aligned}$$

#### Grundgleichung

**Temperaturprofil in einer Zylinderwand mit bekannten Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ :**

$$T(r) = T_1 + \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}. \quad (6.5)$$

#### Grundgleichung

**Wärmestrom durch eine Zylinderwand mit bekannten Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ :**

$$\dot{Q} = 2\pi L \lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}, \quad (6.6)$$

wobei  $\dot{Q} > 0$  für  $T_1 > T_2$ .

#### Derivation

Für ein mehrschichtiges Rohr, bestehend aus Schichten unterschiedlicher Dicke und verschiedener Materialien, muss die Energiebilanz schrittweise für jede Schicht aufgestellt werden. Bei stationären, eindimensionalen Verhältnissen verlässt der in Abschnitt 1 eintretende Wärmestrom Abschnitt 3 unverändert.

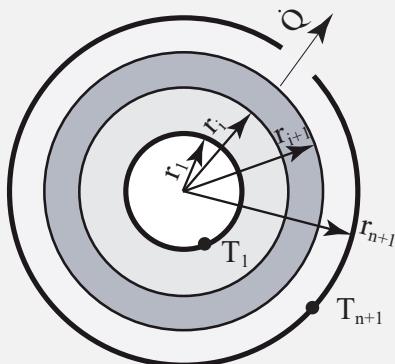


Abbildung 6.4. Wärmeleitung durch ein mehrschichtiges Rohr.

#### 1 Aufstellen der Bilanz:

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 = \dot{Q}_3 = \dot{Q}.$$

#### 2 Definition der Bilanzelemente:

Unter Verwendung von Gl. (6.6) wird der Wärmestrom durch jede Schicht wie folgt ausgedrückt:

$$\dot{Q}_1 = 2\pi L \lambda_1 \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}, \quad \dot{Q}_2 = 2\pi L \lambda_2 \frac{T_2 - T_3}{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}, \quad \text{und} \quad \dot{Q}_3 = 2\pi L \lambda_3 \frac{T_3 - T_4}{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}.$$

### 3 Einsetzen und Umstellen:

Daraus folgt für den gesamten Wärmestrom:

$$\dot{Q} = \frac{2\pi L}{\frac{1}{\lambda_1} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{\lambda_2} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{\lambda_3} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)} (T_1 - T_4).$$

Unter Ausnutzung der Definition der thermischen Widerstände, vgl. Gl. (6.3), wird daraus:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_4}{W_{\text{Leit},1} + W_{\text{Leit},2} + W_{\text{Leit},3}},$$

wobei gilt:

$$W_{\text{Leit},i} = \frac{1}{2\pi L \lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}.$$

#### Definition

**Wärmeleitwiderstand einer festen zylindrischen Schicht  $i$ :**

$$W_{\text{Leit},i} = \frac{1}{2\pi L \lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \left( \frac{\text{K}}{\text{W}} \right). \quad (6.7)$$

#### HEATQUIZ 6.1

Temperaturprofile:



## ABSCHNITT 6.3

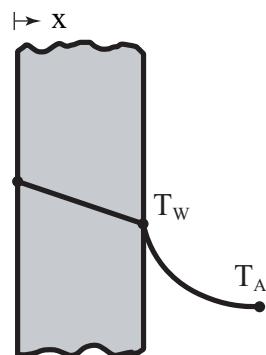
**Konvektiver Transport**

Obwohl sich dieser Teil der Vorlesung auf den Wärmetransport durch Wärmeleitung konzentriert, wird in diesem Abschnitt kurz der konvektive Wärmetransport eingeführt, da ein konvektiver Transport oft eine Randbedingung für Wärmeleitungsprobleme darstellt.

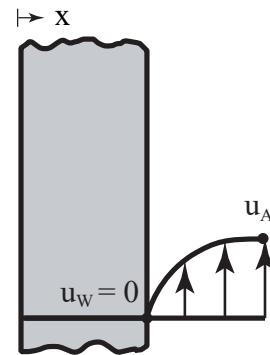
Wie eingangs beschrieben, wird der Transport thermischer Energie von einem Körper in ein strömendes Fluid nicht ausschließlich durch Wärmeleitung übernommen. Die Fluidbewegung selbst transportiert Wärme in Strömungsrichtung und verstärkt so den gesamten Wärmetransportprozess.

Zur Veranschaulichung des Konvektionsprozesses betrachten wir eine heiße Platte, die durch einen kalten Luftstrom gekühlt wird. Während die anfangs kalten Moleküle auf die Wand treffen, erwärmen sich diese und tragen so Energie von der heißen Platte weg. Der Mechanismus, bei dem Fluidteilchen Wärme aufnehmen und mit der Hauptströmung transportieren, wird als „Advektion“ bezeichnet. Ein wichtiger Aspekt dieses Verständnisses betrifft das Strömungsfeld direkt in Wandnähe. Hier besagt die sogenannte schlupffreie Randbedingung, bzw. engl. „No-Slip-Randbedingung“, dass die Fluidgeschwindigkeit nahe Null strebt, wie in Abbildung 6.5b dargestellt. Somit kann dort der Wärmetransport nur durch Wärmeleitung erfolgen. Mit zunehmendem Abstand von der Wand nimmt die Fluidgeschwindigkeit zu und steigert damit den Wärmetransport durch Advektion. Folglich nimmt die Bedeutung des advektiven Wärmetransports zu, während der leitungsbedingte Wärmetransport abnimmt. Dies wirkt sich auch auf die Temperaturverteilung aus. In Wandnähe ist der Temperaturgradient hoch, während er mit zunehmendem Abstand von der Wand abnimmt. Später, wenn thermische Grenzschichten behandelt werden, werden die Temperaturprofile im Fluid deutlicher werden.

An der Grenzfläche zwischen einer ebenen Platte und dem umgebenden Medium ergibt sich ein Knick im Temperaturprofil (Abbildung 6.5a). Dieser entsteht, weil die Wärmeleitfähigkeit von Flüssigkeiten im Allgemeinen deutlich geringer ist als die von Feststoffen. Mit zunehmender  $x$ -Richtung von der Wand, nähert sich die Temperatur allmählich der Umgebungstemperatur an. Der Temperaturunterschied zwischen dem wandnahen Fluid und dem weiter entfernten Fluid verringert sich mit zunehmender Entfernung. Infolgedessen nimmt der Temperaturgradient ab, bis die Umgebungstemperatur erreicht ist. An diesem Punkt wird das Temperaturprofil nahezu horizontal, was darauf hinweist, dass der Wärmetransport hier weitgehend advektiv geprägt ist und das Fluid ein thermisches Gleichgewicht mit der Umgebung erreicht hat.



(a) Temperaturverteilung.



(b) Geschwindigkeitsverteilung.

**Abbildung 6.5.** Wärmeübergang von einer heißen Platte an Luft durch Konvektion.

Um den Wärmetransport zu beschreiben, kann das Fourier'sche Gesetz nur in Bereichen eingesetzt

werden, in denen ausschließlich Wärmeleitung auftritt, zum Beispiel direkt an der Wand:

$$\dot{Q} = -A \left( \lambda_{\text{Fluid}} \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{\text{Fluid, Wand}} = -A \left( \lambda_{\text{Festkörper}} \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{\text{Festkörper, Wand}} . \quad (6.8)$$

Es besteht also ein direkter Zusammenhang zwischen dem Temperaturgradienten in der Wand und demjenigen im Fluid. Dieses Verhältnis ist umgekehrt proportional zum Verhältnis der jeweiligen Wärmeleitfähigkeiten. Da die Wärmeleitfähigkeit von Fluiden in den meisten Fällen geringer ist als die von Feststoffen, ist der Temperaturgradient im Fluid steiler als in der Wand.

Anstelle von Gleichung (6.8) wird in der Regel eine empirische Annahme für den konvektiven Wärmeübergang verwendet, bekannt als Newtonsches Abkühlungsgesetz.

#### Grundgleichung

#### Newton'sches Abkühlungsgesetz:

$$\dot{Q} = \alpha A (T_w - T_u) . \quad (6.9)$$

Der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  ist definiert als der Wärmestrom zwischen einer festen Oberfläche und einem Fluid pro Flächeneinheit pro Temperaturdifferenz ( $\frac{W}{m^2 K}$ ). Eine genauere Betrachtung dieser Definition folgt im nächsten Teil der Vorlesung. Wichtig ist bis dahin, dass dieser Parameter von vielen Faktoren beeinflusst wird, zum Beispiel von Fluideigenschaften, Strömungsgeschwindigkeit und Geometrie. Diese Komplexität erschwert die genaue Bestimmung der Wärmeübergangskoeffizienten.

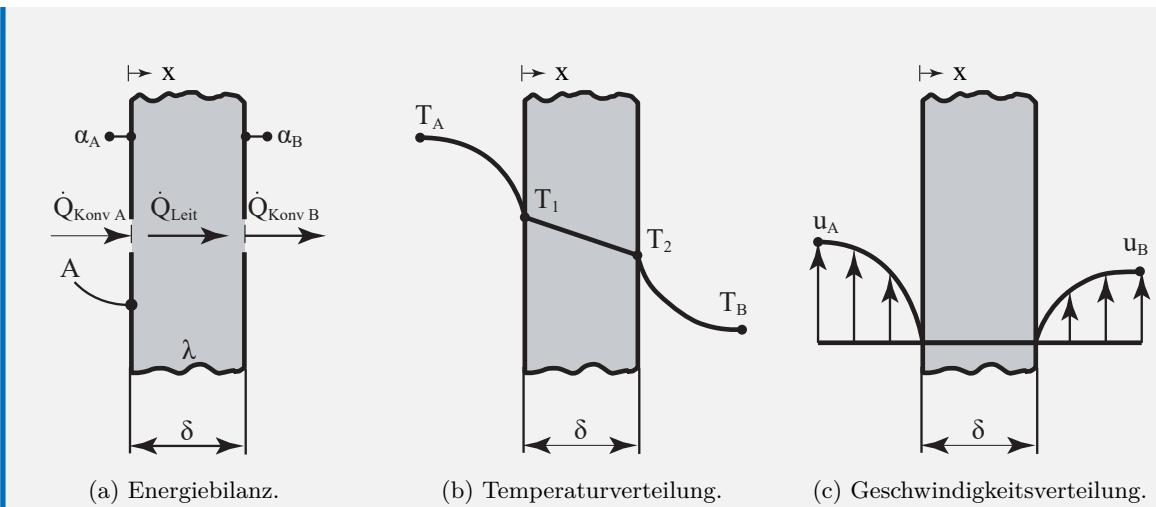
## ABSCHNITT 6.4

**Mehrschichtige Wand mit Konvektion**

In diesem Abschnitt wird der Wärmetransport durch eine Wand mit zusätzlichen Widerständen auf der Außenseite betrachtet, wobei die Temperatur fern der Wand als Randbedingung spezifiziert wird. Zur Vereinfachung der Berechnungen wird das Theorem vom Wärmewiderstand herangezogen. Dieses Theorem beruht auf einigen Annahmen:

- der Wärmestrom bleibt konstant
- das System ist stationär
- die Materialien in jeder Schicht verteilen die Wärme gleichmäßig
- der Wärmetransport ist eindimensional
- es existieren keine inneren Wärmequellen oder -senken.

Mithilfe dieser Methode wird der gesamte Wärmeübergangswiderstand bestimmt und damit der Wärmestrom durch die Schichten erhöht.



**Abbildung 6.6.** Wärmetransport durch eine Wand mit konvektiven Randbedingungen.

## Derivation

**1 Aufstellen der Bilanz:**

Unter stationären Bedingungen lauten die Energiebilanzen an den Grenzflächen zwischen Fluiden und Festkörpern:

$$\dot{Q}_{\text{konv},A} = \dot{Q}_{\text{Leit}} = \dot{Q}_{\text{konv},B} = \dot{Q}.$$

**2 Definition der Bilanzelemente:**

Mit dem Newtonsche Abkühlungsgesetz gemäß Gleichung (6.9) an, kann der Wärmestrom vom Fluid A zur Wand durch Konvektion bestimmt werden. Dabei ist zu beachten, dass Wärmeströme in positive Achsrichtung aufzustellen sind, um die Richtung des Wärmestroms konsequent korrekt abzubilden. Der konvektive Wärmestrom wird dabei geschrieben als:

$$\dot{Q}_{\text{konv},A} = A \alpha_A (T_A - T_1),$$

für die Wärmeleitung durch die Wand ergibt sich – ebenfalls in positive x-Richtung:

$$\dot{Q}_{\text{Leit}} = \lambda A \frac{T_1 - T_2}{\delta},$$

und der konvektive Wärmetransport von der Wand zum Fluid B:

$$\dot{Q}_{\text{konnv,B}} = A \alpha_B (T_2 - T_B).$$

### 3 Einsetzen und Umstellen:

$$\dot{Q} = \frac{A}{\frac{1}{\alpha_A} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_B}} (T_A - T_B).$$

In Analogie zum Wärmeleitwiderstand folgt mit den konvektiven Widerständen:

$$\dot{Q} = \frac{T_A - T_B}{W_{\text{konnv,A}} + W_{\text{Leit}} + W_{\text{konnv,B}}}.$$

Dabei wird der „Wärmeübergangswiderstand“ für Konvektion definiert als:

$$W_{\text{konnv,j}} = \frac{1}{A \alpha_j}.$$

Ähnlich wie bei der mehrschichtigen Wand ohne Konvektion lässt sich der Wärmestrom auch für die mehrschichtige Wand mit Konvektion, die aus  $n$  Schichten besteht, in einer allgemeinen Form beschreiben.

#### Grundgleichung

#### Wärmestrom durch eine mehrschichtige Wand mit Konvektion:

$$\dot{Q} = \frac{1}{W_{\text{konnv,A}} + \sum_{i=1}^n W_{\text{Leit},i} + W_{\text{konnv,B}}} (T_A - T_B). \quad (6.10)$$

#### Definition

#### Konvektiver Widerstand einer festen ebenen Schicht $j$ :

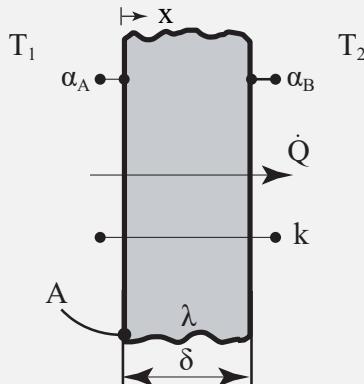
$$W_{\text{konnv,j}} = \frac{1}{A \alpha_j} \left( \frac{K}{W} \right). \quad (6.11)$$

### 6.4.1 Globaler Wärmedurchgangskoeffizient $k$

Die Einführung des globalen Wärmedurchgangskoeffizienten  $k$  bietet eine bequeme Möglichkeit, mit dem gesamten Wärmewiderstand zu arbeiten und eine Analogie zum konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$  herzustellen. Dieser Koeffizient fasst die kombinierten Auswirkungen von Wärmeleitung und Konvektion über verschiedene Medien und Grenzflächen zusammen.

#### Derivation

Um die Definition dieses Koeffizienten zu verstehen, wird die Energiebilanz für eine ebene Wand hergeleitet, die auf beiden Seiten konvektiven Randbedingungen unterliegt.



**Abbildung 6.7.** Wärmetransport durch eine Wand mit konvektiven Randbedingungen.

#### 1 Aufstellen der Bilanz:

Die Energiebilanz an einer Grenzfläche zwischen dem Feststoff und der Umgebung ergibt sich zu:

$$0 = \dot{Q}_{\text{ein}} - \dot{Q}_{\text{aus}}.$$

#### 2 Definition der Bilanzelemente:

Der eingehende Wärmestrom wird durch den globalen Wärmedurchgangskoeffizienten  $k$  beschrieben, der analog zum konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten definiert ist:

$$\dot{Q}_{\text{ein}} = k A (T_1 - T_2).$$

Der ausgehende Wärmestrom lässt sich über den Gesamtwärmewiderstand ausdrücken:

$$\dot{Q}_{\text{aus}} = \frac{T_1 - T_2}{W_{\text{konv,A}} + W_{\text{Leit}} + W_{\text{Konv,B}}},$$

wobei diese Widerstände folgendermaßen definiert sind:

$$W_{\text{konv,A}} = \frac{1}{A \alpha_A}, \quad W_{\text{Leit}} = \frac{\delta}{A \lambda}, \quad \text{und} \quad W_{\text{konv,B}} = \frac{1}{A \alpha_B}.$$

#### 3 Einsetzen und Umstellen:

Durch Einsetzen und Umformen folgt die Definition des globalen Wärmedurchgangskoeffizienten:

$$k = \left( \frac{1}{\alpha_A} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_B} \right)^{-1}.$$

Der Wärmestrom kann somit als Produkt aus dem globalen Wärmeübergangskoeffizienten, der Wärmeaustauschfläche und der entsprechenden Temperaturdifferenz dargestellt werden.

**Grundgleichung****Wärmestrom durch eine mehrschichtige Wand mit Konvektion:**

$$\dot{Q} = k A (T_A - T_B). \quad (6.12)$$

Der globale Wärmedurchgangskoeffizient ergibt sich aus Größen wie den konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten, der Dicke der Wände und den Wärmeleitfähigkeiten dieser Wände.

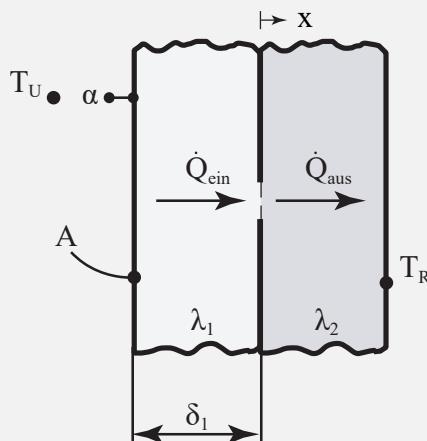
**Definition****Wärmedurchgangskoeffizient einer mehrschichtigen ebenen Wand:**

$$k = \left( \frac{1}{\alpha_A} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_B} \right)^{-1} \left( \frac{W}{m^2 K} \right). \quad (6.13)$$

Der globale Wärmedurchgangskoeffizient bietet einen komfortablen Ansatz im Vergleich zur Berechnung einzelner Wärmewiderstände innerhalb eines Systems. Indem er die kombinierten Effekte von Wärmeleitung und Konvektion in einem einzigen Parameter zusammenfasst, wird die Analyse vereinfacht und eine direkte Kenngröße für die Gesamteffizienz des Wärmetransports bereitgestellt. Diese Vorgehensweise erweist sich insbesondere bei komplexen Systemen mit vielen Schichten oder Schnittstellen als vorteilhaft, da dadurch aufwändige Einzelberechnungen entfallen.

**Example 6.1**

Eine Wand mit der Oberfläche  $A$  besitzt zwei feste Schichten. Die linke Seite der Wand steht in Kontakt mit einem heißen Fluid bei der Temperatur  $T_U$ , während die rechte Seite die Temperatur  $T_R$  aufweist. Die Dicke der linken Schicht ist  $\delta_1$  und ihre Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_1$ . Die Dicke der rechten Schicht ist unbekannt, während ihre Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_2$  beträgt. Bestimme einen Ausdruck für die Dicke  $\delta_2$  der ersten Schicht.

**1 Aufstellen der Bilanz:**

Aufstellen der Bilanz um die Oberfläche zwischen den Körpern 1 und 2.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \dot{Q}_{\text{ein}} - \dot{Q}_{\text{aus}}. \quad \text{0 - stationär}$$

**2 Definition der Bilanzelemente:**

Eingehender Wärmestrom:

$$\dot{Q}_{\text{ein}} = k A (T_U - T_M),$$

wobei  $T_M$  die Wandtemperatur in der Mitte bzw. an der Grenzfläche der beiden festen Schichten darstellt.

Der globale Wärmedurchgangskoeffizient wird definiert als:

$$k = \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} \right)^{-1},$$

und der ausgehende Wärmestrom lautet:

$$\dot{Q}_{\text{out}} = -\lambda_2 A \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda_2 A \frac{T_M - T_R}{\delta_2}.$$

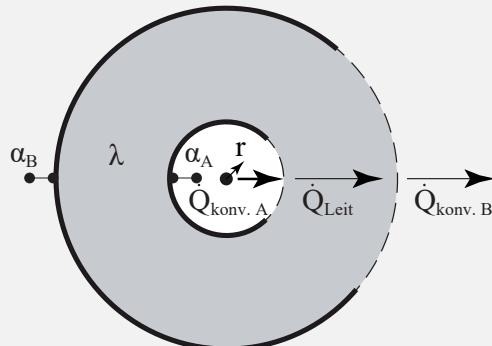
3 Einsetzen und Umstellen:

$$\delta_2 = \frac{\lambda_2}{k} \frac{T_M - T_R}{T_U - T_M}$$

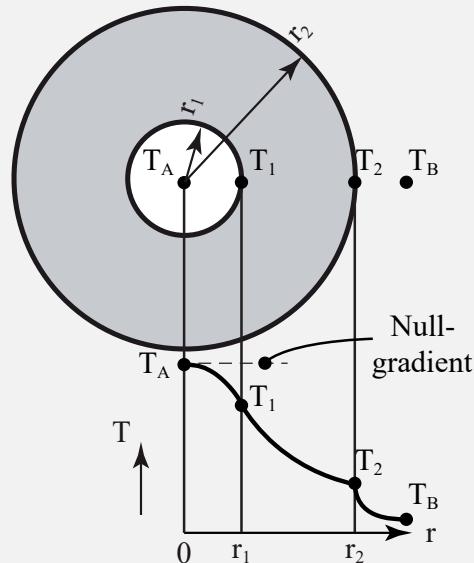
## ABSCHNITT 6.5

**Mehrschichtige Rohrwand mit Konvektion**

Die in den vorherigen Abschnitten dargestellten Zusammenhänge für eine mehrschichtige Wand mit Konvektion werden herangezogen, um Probleme zu lösen, bei denen eine ein- oder mehrschichtige Wand vorliegt. Dasselbe gilt für Rohrwände, die aus mehreren Schichten bestehen und von Fluiden umgeben sind. Als praktisches Beispiel kann die Berechnung des Wärmeverlusts einer isolierten Warmwasserleitung betrachtet werden.



(a) Energiebilanz.



(b) Radiale Temperaturverteilung.

**Abbildung 6.8.** Wärmetransport durch ein Rohr mit konvektiven Randbedingungen.

## Derivation

**1 Aufstellen der Bilanz:**

Unter stationären Bedingungen gilt an den beiden Fluid/Feststoff-Grenzflächen:

$$\dot{Q}_{\text{konv},A} = \dot{Q}_{\text{Leit}} = \dot{Q}_{\text{konv},B} = \dot{Q}.$$

**2 Definition der Bilanzelemente:**

Aus dem Newtonschen Abkühlungsgesetz, Gleichung (6.9), folgt der konvektive Wärmestrom von Fluid A zum Rohr:

$$\dot{Q}_{\text{konv},A} = A_A \alpha_A (T_A - T_1) = (2 \pi r_1 L) \alpha_A (T_A - T_1).$$

Das Fouriersche Gesetzes beschreibt den Wärmeleitstrom:

$$\dot{Q}_{\text{Leit}} = 2 \pi \lambda L \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)},$$

und über das Newtonsche Abkühlungsgesetz schließlich den Wärmestrom von der Rohrwand zum

Fluid B:

$$\dot{Q}_{\text{konn},B} = A_B \alpha_B (T_2 - T_B) = (2 \pi r_2 L) \alpha_B (T_2 - T_B).$$

### 3 Einsetzen und Umstellen:

$$\dot{Q} = \frac{2 \pi L}{\frac{1}{\alpha_A r_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\alpha_B r_2}} (T_A - T_B).$$

Schreibt man diesen Zusammenhang analog zur Darstellung über den Wärmewiderstand, so ergibt sich:

$$\dot{Q} = \frac{T_A - T_B}{W_{\text{konn},A} + W_{\text{Leit}} + W_{\text{konn},B}}.$$

#### Definition

**Konvektiver Widerstand am Übergang zu einer Zylinderschicht  $j$ :**

$$W_{\text{konn},j} = \frac{1}{A_j \alpha_j} \left( \frac{\text{K}}{\text{W}} \right), \quad (6.14)$$

mit  $A_A = 2 \pi r_1 L$  für Konvektion im Inneren und  $A_B = 2 \pi r_{n+1} L$  für Konvektion außen.

#### 6.5.1 Globaler Wärmeübergangskoeffizient

Auch für ein mehrschichtiges Rohrsystem lässt sich eine allgemeine Beziehung unter Einbeziehung des globalen Wärmedurchgangskoeffizienten  $k$  zur Angabe des Wärmestroms formulieren, wie bereits gezeigt:

$$\dot{Q} = k A (T_A - T_B),$$

wobei jede beliebige Oberfläche  $A$  verwendet werden kann. In der Praxis wird oft die Oberfläche am Außenradius  $r_{n+1}$  herangezogen. Der globale Wärmedurchgangskoeffizient für zylindrische Systeme ergibt sich aus den konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten, den Wärmeleitfähigkeiten der einzelnen Schichten und deren jeweiligen Radien.

#### Definition

**Gesamtwärmeübergangskoeffizient eines mehrschichtigen zylindrischen Systems:**

$$k = \left( \frac{1}{\alpha_A r_1} + r \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} + \frac{1}{\alpha_B r_{n+1}} \right)^{-1} \left( \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \right), \quad (6.15)$$

wobei als Referenzradius jeder Radius  $r$  verwendet werden kann.

Für dünnwandige Rohrleitungen kann auch Gleichung (6.13) für ebene Platten herangezogen werden, wobei dann  $A = 2 \pi r_m L$  verwendet wird, wobei  $r_m$  den arithmetischen Mittelradius beschreibt. Liegen die Wärmeübergangskoeffizienten in derselben Größenordnung auf beiden Seiten des Fluids, ist es eine gute Praxis, den Mittelwert aus Innen- und Außenradius zu berechnen. Weichen die Wärmeübergangskoeffizienten jedoch stark voneinander ab, sollte der Radius mit dem kleineren Wärmeübergangskoeffizienten gewählt werden.

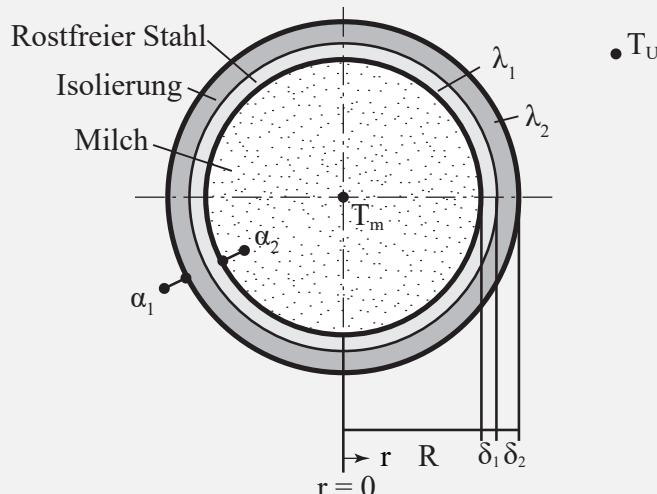
Temperaturprofile:



#### HEATQUIZ 6.2

**Demonstration 6.1**

Eine Molkerei lagert Milch in einem zylindrischen Tank. Der Tank ist mit vielen Litern Milch gefüllt bei einer Temperatur  $T_m$ . Die Umgebungstemperatur außerhalb des Tanks beträgt  $T_U$ . Die Tankwände bestehen aus einer Schicht Edelstahl, die mit einer Isolierung ummantelt ist. Die Temperatur der Milch an der Grenzfläche soll nicht unter  $23^\circ\text{C}$  liegen.

**Gegebene Größen:**

- Zylinderabmessungen:  $R = 1 \text{ m}$ ,  $\delta_1 = 5 \text{ cm}$ ,  $L = 4 \text{ m}$
- Wärmeleitfähigkeiten der Schichten:  $\lambda_1 = 16 \text{ W/mK}$ ,  $\lambda_2 = 0.02 \text{ W/mK}$
- Wärmeübergangskoeffizienten:  $\alpha_1 = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $\alpha_2 = 5 \text{ W/m}^2\text{K}$
- Temperaturen:  $T_m = 25^\circ\text{C}$ ,  $T_U = 10^\circ\text{C}$

**Hinweise:**

- Strahlung wird vernachlässigt.
- Das Problem ist stationär.

**Aufgaben:**

- a) Wie groß muss die minimale Dicke  $\delta_2$  der Isolierschicht sein?
- b) Bestimme eine Funktion für die Temperatur  $T(r)$  in der Edelstahlschicht.
- c) Skizziere qualitativ das Temperaturprofil  $T(r)$  für den Bereich  $0 < r < \infty$ .

**Videolösung auf englisch:**

## ABSCHNITT 7

## Wärmequellen und -senken

### L09 - Wärmequellen und -senken:

#### Lernziele:

- Fundiertes Verständnis des Einflusses von Wärmequellen/-senken auf das Temperaturprofil.
- Fähigkeit, Wärmequellen/-senken in die Energiebilanz einzubeziehen und die Differentialgleichung herzuleiten.
- Fähigkeit zur Ausformulierung und Lösung der Differentialgleichung
- Fähigkeit, die maximalen und minimalen Temperaturen in einem Körper sowie die zugehörigen Wärmeströme zu berechnen.



#### Verständnisfragen:

- Wie sieht das resultierende Temperaturprofil für zylindrische Körper mit einer Wärmequelle aus?
- Welche möglichen Randbedingungen können an der Zylinderoberfläche auftreten?
- Wie wird die freigesetzte Wärme über die Zylinderoberfläche verteilt?
- Wie können die minimalen und maximalen Temperaturen in einem Körper bestimmt werden?



#### Zugehörige Übungsaufgaben:

- Übung II.10 Widerstandsleitung
- Übung II.11 Mehrschichtige Wände mit Quelle
- Übung II.12 Kupferstab

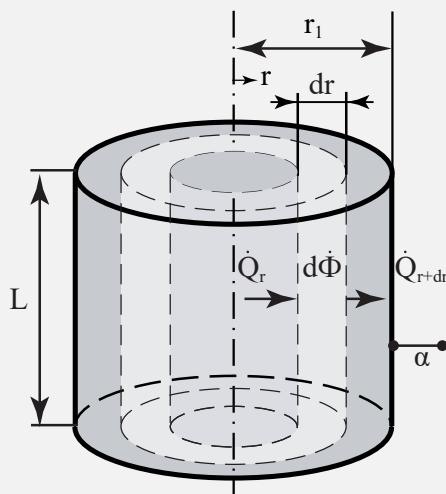
## ABSCHNITT 7.1

**Einführung in Wärmequellen und -senken**

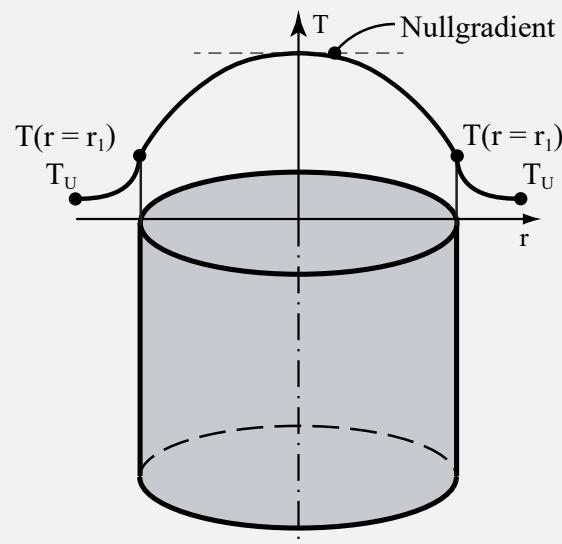
Zahlreiche Szenarien des Wärmetransports beinhalten intern erzeugte Wärme. Dieses Phänomen kann durch Faktoren wie chemische Reaktionen (z.B. bei Verbrennungen), elektrisches Joule-Heizen, viskose Dissipation oder die Absorption von Strahlung auftreten. Im folgenden Abschnitt liegt der Fokus auf einem zylindrischen Objekt, in dem ein konstanter Wärmestrom pro Volumen  $\dot{\Phi}'''$  in  $(\frac{W}{m^3})$  auftritt. Anschließend wird die Betrachtung auf Platten und Kugeln erweitert.

**Derivation**

Als Beispiel wird ein Zylinder betrachtet, in dem homogen Wärme freigesetzt wird. In den folgenden Schritten wird die Temperaturverteilung ermittelt.



(a) Energiebilanz.



(b) Radiales Temperaturprofil.

**Abbildung 7.1.** Wärmeleitung in einem Zylinder mit Wärmequellen.**1 Aufstellen der Bilanz:**

Eine Energiebilanz am infinitesimalen Element zwischen  $r$  und  $r + dr$  mit einem Volumen von  $dV = 2\pi r dr L$  führt zu:

$$0 = \dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+dr} + d\dot{\Phi},$$

wobei  $\dot{Q}_r$  und  $\dot{Q}_{r+dr}$  die ein- bzw. aus dem infinitesimalen Element fließenden Wärmeleitströme bezeichnen, während  $d\dot{\Phi}$  die in diesem infinitesimalen Volumen erzeugte Wärme repräsentiert.

**2 Definition der Bilanzelemente:**

Eingehender Strom:

$$\dot{Q}_r = -\lambda 2\pi r L \frac{\partial T}{\partial r},$$

und ausgehender Wärmeleitstrom:

$$\dot{Q}_{r+dr} = -\lambda 2\pi r L \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( -\lambda 2\pi r L \frac{\partial T}{\partial r} \right) \cdot dr.$$

Die in dem infinitesimalen Element erzeugte Wärme:

$$\begin{aligned} d\dot{\Phi} &= \dot{\Phi}''' dV \\ &= \dot{\Phi}''' 2\pi r dr L. \end{aligned}$$

### 3 Einsetzen und Umstellen:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda} = 0.$$

### 4 Definition der Rand- und/oder Anfangsbedingung(en):

Da die Differentialgleichung eine zweifache Ableitung nach  $r$  enthält, sind zwei Randbedingungen für deren Lösung erforderlich.

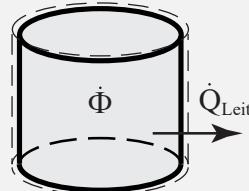
In der Mitte des Zylinders liefert die Symmetriebedingung eine horizontale Steigung des Temperaturprofils bei  $r = 0$ :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0.$$

An  $r = r_1$  gilt die lokale Energiebilanz  $\dot{Q}_{\text{Leit}} = \dot{Q}_{\text{konv}}$ :

$$\dot{Q}_{\text{konv}} = 2\pi r_1 L \alpha (T(r=r_1) - T_U),$$

wobei  $T(r=r_1)$  eine noch unbekannte Temperatur ist.



**Abbildung 7.2.** Globale Energiebilanz um den Zylinder.

Da der durch Wärmeleitung abgeföhrte Wärmestrom bei stationären Bedingungen von den Wärmequellen im Zylinder erzeugt wird, liefert eine globale Energiebilanz:

$$0 = \dot{\Phi} - \dot{Q}_{\text{Leit}}.$$

Durch Definition der Ströme und Umformung erhält man:

$$\dot{Q}_{\text{Leit}} = \pi r_1^2 L \dot{\Phi}'''.$$

Aus der lokalen Energiebilanz an  $r = r_1$  folgt dann:

$$T(r=r_1) = T_a + \frac{r_1 \dot{\Phi}'''}{2\alpha}.$$

### 5 Lösen der Gleichung:

Durch zweimaliges Integrieren nach  $r$  folgt:

$$T(r) = -\frac{\dot{\Phi}'''}{4\lambda}r^2 + A \ln(r) + B.$$

Unter Verwendung der Randbedingungen ergibt sich  $A = 0$  und  $B = T_a + \frac{\dot{\Phi}''' r_1}{2\alpha} + \frac{\dot{\Phi}''' r_1^2}{4\lambda}$ . Durch Einsetzen folgt:

$$T = T_a + \frac{\dot{\Phi}''' r_1^2}{4\lambda} \left( 1 + \frac{2\lambda}{\alpha r_1} - \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 \right).$$

Das Temperaturprofil für stationäre, eindimensionale Wärmeleitung in Körpern mit Wärmequelle kann in einer verallgemeinerten Form dargestellt werden, die auch für ebene und kugelförmige Geometrien gilt.

#### Grundgleichung

**Allgemeines Temperaturprofil für stationäre 1-D Wärmeleitung in Körpern mit Wärmequelle:**

$$T = T_U + \frac{\dot{\Phi}''' s^2}{2(n+1)\lambda} \left( 1 + \frac{2\lambda}{\alpha s} - \left( \frac{\xi}{s} \right)^2 \right), \quad (7.1)$$

wobei der Parameter  $\xi$ , die charakteristische Länge  $s$  und der Kontrollparameter  $n$  entsprechend der folgenden Tabelle verwendet werden:

	Platte*)	Zylinder	Kugel
$\xi$	$x$	$r$	$r$
$s$	$\delta$	$r_1$	$r_1$
$n$	0	1	2

\*) Für Platten sollte  $x$  bezüglich der Symmetrieebene gewählt werden und  $\delta$  stellt die halbe Plattenstärke dar.

#### Temperaturprofile:



#### Energiebilanzen:



#### HEATQUIZ 7.1

#### Example 7.1

Bestimmen Sie die maximale und die Oberflächentemperatur in einer zylindrischen Brennstabhülle.

Unter Verwendung des hergeleiteten Temperaturprofils:

$$T = T_U + \frac{\dot{\Phi}''' r_1^2}{4\lambda} \left( 1 + \frac{2\lambda}{\alpha r_1} - \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 \right).$$

Aus der Ableitung ergeben sich die Maxima und Minima aus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= -\frac{\dot{\Phi}''' r_1}{8\lambda} r = 0 \\ \rightarrow r &= 0. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die maximale Temperatur im Brennstab bei  $r = 0$ :

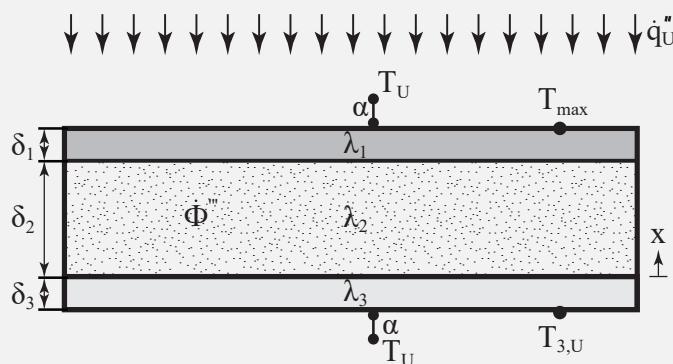
$$T_{\max} = T_U + \frac{\dot{\Phi}''' r_1^2}{4\lambda} \left( 1 + \frac{2\lambda}{\alpha r_1} \right).$$

Die Oberflächentemperatur an  $r = r_1$  ist:

$$T = T_U + \frac{\dot{\Phi}''' r_1}{2\alpha}.$$

### Demonstration 7.1

Eine feste unendlich ausgedehnte reaktive Schicht der homogenen, konstanten Quellstärke  $\dot{\Phi}''' > 0$  befindet sich zwischen zwei parallelen Platten. Die obere Platte wird aus der Umgebung mit konstantem Strahlungswärmestrom  $\dot{q}_U''$  bestrahlt. Die maximale Temperatur liegt an der Außenfläche der oberen Platte  $T_{\max}$  vor. Die Umgebungstemperatur ist  $T_U$ . Die Temperatur an der Außenfläche der unteren Platte erreicht  $T_L$ .



#### Gegebene Parameter:

- Dicke der Platten:  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$
- Wärmeleitfähigkeit der Platten:  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$
- Konvektiver Wärmeübergangskoeffizient:  $\alpha$
- Quellstärke in der reaktiven Schicht:  $\dot{\Phi}'''$
- Strahlungswärmestrom aus der Umgebung:  $\dot{q}_U''$
- Maximale Temperatur:  $T_{\max}$
- Umgebungstemperatur:  $T_U$
- Temperatur an der unteren Oberfläche:  $T_{3,U} > T_U$

#### Aufgaben:

- Leiten Sie einen analytischen Ausdruck für die Temperatur  $T(x)$  in der reaktiven Schicht her.
- Skizzieren Sie das qualitative Temperaturprofil  $T(x)$  in den Platten, in der Schicht sowie in der Umgebung.

Videolösung auf englisch:



## ABSCHNITT 8

## Rippen

### L10 - Einführung in das Thema Rippen:

#### Lernziele:

- Entwicklung eines konzeptionellen Verständnisses für Rippen und deren Anwendungen.
- Fähigkeit, die relevanten Wärmeübertragungsprozesse in Rippen zu beschreiben.
- Fähigkeit, die charakteristischen Temperaturprofile in Rippen zu beschreiben und zu zeichnen.
- Fähigkeit, Energiebilanzen für Rippen aufzustellen.
- Fähigkeit, die Differenzialgleichung abzuleiten und zu lösen, die den Wärmeübergang in Rippen beschreibt.



#### Verständnisfragen:

- Was sind Rippen und wozu werden sie verwendet?
- Welche Wärmeflüsse werden bei der Ableitung der Differenzialgleichung für Rippen berücksichtigt?
- Wie sieht das Temperaturprofil in einer Rippe aus (aus physikalischer Sicht)?

### L11 - Biot-Zahl:

#### Lernziele:

- Fähigkeit, den dominanten thermischen Widerstand mithilfe relevanter dimensionsloser Zahlen zu identifizieren und zu charakterisieren.
- Fähigkeit, die dimensionslose Biot-Zahl mit der relevanten charakteristischen Länge und den thermischen Eigenschaften zu bestimmen.



#### Verständnisfragen:

- Welche Informationen liefert die Biot-Zahl?
- Welche Annahmen können für  $Bi \ll 1$  getroffen werden?
- Ist die Biot-Zahl bei einem klassischen Rippenproblem hoch oder niedrig?



## L12 - Lösung der Rippen-Gleichung:

### Lernziele:

- Fähigkeit, die Differentialgleichung für Rippen zu homogenisieren.
- Fähigkeit, die allgemeine Lösung der Differentialgleichung herzuleiten.
- Interpretation des Rippenparameters  $m$  in Bezug auf verschiedene Rippengeometrien.
- Fähigkeit, unterschiedliche Randbedingungen im Kontext von Rippenproblemen zu erkennen und anzuwenden.



### Verständnisfragen:

- Welcher Ansatz kann zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung für Rippen verwendet werden?
- Welche Parameter beeinflussen den Rippenparameter  $m$ ?
- Welche gängigen Randbedingungen können zur Bestimmung des Temperaturprofils in der Rippe verwendet werden?



## L13 - Rippenwirkungsgrad:

### Lernziele:

- Konzeptionelles Verständnis des Rippenwirkungsgrads.
- Fähigkeit, die Gleichung für den Rippenwirkungsgrad bei der Auslegung von Rippen anzuwenden.
- Verständnis der Auswirkungen der Rippengeometrie auf die Leistung.



### Verständnisfragen:

- Welche Beziehung beschreibt den Koeffizienten des Rippenwirkungsgrads?
- Welche Annahme liegt der theoretisch maximal übertragbaren Wärme einer Rippe zugrunde?
- Wie kann der Rippenwirkungsgrad erhöht werden?



### Zugehörige Übungsaufgaben:

- Aufgabe II.7 Stift-Rippen-Kühlung an Gasturbinenschaufeln
- Aufgabe II.8 Neues Rippenmaterial
- Aufgabe II.9 Rohrbefestigung

## ABSCHNITT 8.1

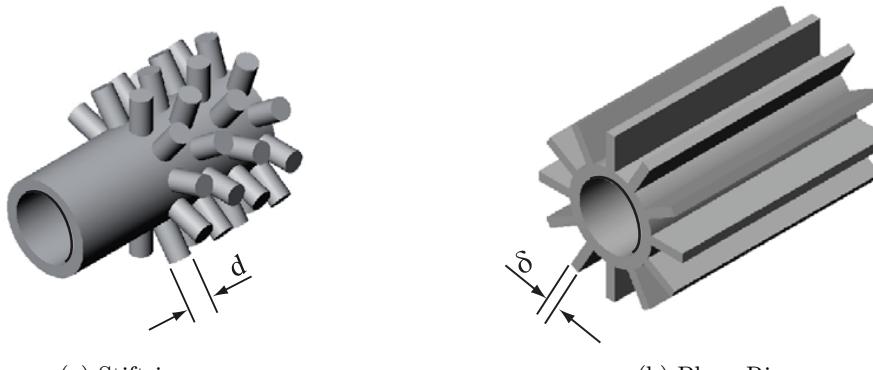
## Einführung in Rippen

Rippen sind ein weit verbreitetes Bauteil in verschiedenen Wärmeübertragungsanwendungen und spielen eine entscheidende Rolle bei der Verbesserung der Wärmeübertragung zwischen einer festen Oberfläche und einem Fluid. Im Wesentlichen handelt es sich bei Rippen um erweiterte Oberflächen, die an die feste Oberfläche angebracht werden und so die verfügbare Wärmeübertragungsfläche effektiv vergrößern. Sie finden Anwendung in einer Vielzahl von Systemen wie Wärmeübertragern, Kühlern, Klimaanlagen, elektronischen Kühleinrichtungen und mehr.

Wenn eine feste Oberfläche mit einem Fluid, wie etwa Luft oder Wasser, in Kontakt kommt, findet Wärmeübertragung an der Grenzfläche zwischen Feststoff und Fluid statt. Allerdings wird der Wärmestrom oft durch die geringe Wärmeleitfähigkeit des Fluids in Wandnähe, wo die Fluidgeschwindigkeit typischerweise gering ist, begrenzt. Durch das Anbringen von Rippen an der Oberfläche wird die effektive Wärmeübertragungsfläche vergrößert, was zu einer deutlichen Steigerung des Wärmestroms führt.

Für Wärmeübertragungsanwendungen existieren verschiedene Rippenarten, die jeweils ihre eigenen Vor- und Nachteile aufweisen. Gängige Formen sind rechteckige, dreieckige oder ringförmige Rippen sowie Stabrippen. Die Wahl der Rippenform hängt von den spezifischen Einsatzbedingungen und Konstruktionsanforderungen ab. Rippen werden typischerweise in Bereichen angebracht, in denen die höchsten Wärmewiderstände an der Wärme abgebenden oder aufnehmenden Oberfläche auftreten, und können z.B. in Form von zylindrischen Stabrippen, ebenen Rippen, kreisförmigen Rippen usw. ausgeführt sein.

Diese Diskussion konzentriert sich in erster Linie auf Rippengeometrien, die näherungsweise eindimensional sind, wodurch analytische Verfahren angewendet werden können. Für Rippen mit zwei- oder dreidimensionalen Ausführungen werden in der Regel numerische Methoden eingesetzt, um ihr Verhalten genau zu beschreiben.



(a) Stiftrippen.

(b) Plane Rippen.

**Abbildung 8.1.** Rohre mit berippten Oberflächen.

**Derivation**

Das Konzept von Rippen beruht auf der Idee, dass Wärme dem Rippenfuß (Index F) bis zur Spitze (dem Rippenkopf K) der Rippe geleitet wird, während quer dazu konvektiv Wärme abgeführt wird.

Um die stationäre Energieerhaltungsgleichung für Rippen herzuleiten und einen Ausdruck für die Temperaturverteilung in der Rippe sowie für den Wärmestrom aufzustellen, müssen bestimmte Annahmen getroffen werden. Diese Annahmen sind notwendig, um das Problem in eine eindimensionale Analyse zu überführen:

- Der Temperaturverlauf in einer Rippe ist eindimensional, d. h. die Temperatur innerhalb der Rippe ändert sich nur in Richtung der Rippenlänge (x-Richtung in Abbildung 8.2), jedoch nicht radial.
- Der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  ist bekannt und über die gesamte Rippenoberfläche konstant.

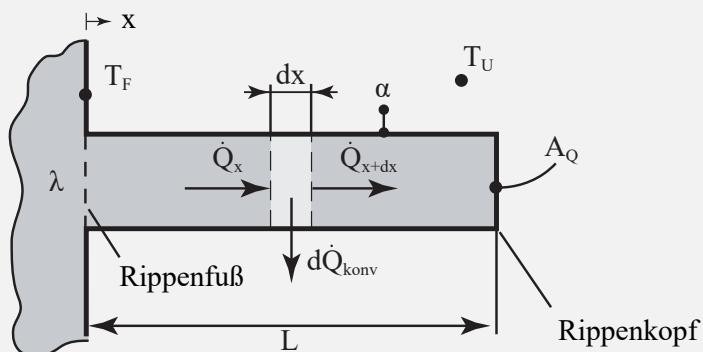


Abbildung 8.2. Energiebilanz einer Rippe.

### 1 Aufstellen der Bilanz:

Die auf das Rippenelement mit einer Querschnittsfläche  $A_Q$  angewandte Energiebilanz zeigt, dass die Differenz zwischen dem ein- und austretenden Wärmestrom durch Konvektion an die Umgebung ausgeglichen werden muss:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx} - d\dot{Q}_{\text{konv}}. \quad 0 - \text{stationär}$$

### 2 Definition der Bilanzelemente:

Mithilfe des Fourierschen Gesetzes, wie in Gleichung (5.1) angegeben, und unter Verwendung einer Taylor-Entwicklung können die leitenden Wärmeströme wie folgt formuliert werden:

$$\dot{Q}_x = -\lambda A_Q \frac{\partial T}{\partial x},$$

und:

$$\dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx = -\lambda A_Q \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \right).$$

Mithilfe des newtonschen Abkühlgesetzes (Gleichung (6.9)) ergibt sich der konvektive Wärmestrom eines Elements mit Umfang  $U$  und Länge  $dx$  an die Umgebung zu:

$$d\dot{Q}_{\text{konv}} = \alpha U (T - T_U) \cdot dx.$$

**3 Einsetzen und Umstellen:**

$$\lambda A_Q \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha U (T - T_U) = 0.$$

Die obige Differenzialgleichung ist aufgrund des konstanten Terms  $\alpha U T_U$  inhomogen. Die Lösung dieser Differenzialgleichung wird in Abschnitt 8.3 vorgestellt.

**Grundgleichung****Inhomogene Rippengleichung:**

$$\lambda A_Q \frac{d^2 T}{dx^2} - \alpha U (T - T_U) = 0. \quad (8.1)$$

## ABSCHNITT 8.2

**Biot-Zahl**

Die Biot-Zahl beschreibt das relative Verhältnis zwischen dem inneren thermischen Widerstand im Vergleich zum äußeren thermischen Widerstand. Diese dimensionslose Größe wird definiert als das Verhältnis zwischen dem inneren Wärmeleitwiderstand aufgrund der Wärmeleitung, bezeichnet als  $W_{\text{Leit}}$  oder  $W_\lambda$ , und dem äußeren Wärmeübergangswiderstand durch Konvektion, bezeichnet als  $W_{\text{Konv}}$  oder  $W_\alpha$ .

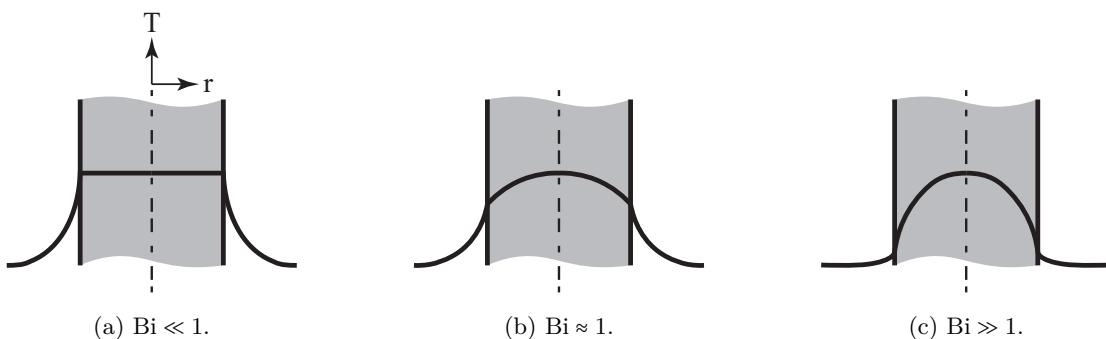
Der innere Widerstand  $W_\lambda$  ist umgekehrt proportional zur Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_s$  des Festkörpers und direkt proportional zur relevanten Längenskala in Richtung der Wärmeleitung. Diese charakteristische Länge  $L$  ist dabei geometrieabhängig. So entspricht bei einer Platte, die von beiden Seiten Wärme überträgt, die Länge der halben Dicke der Platte. Für einen Stab oder eine Kugel entspricht sie dem Radius. Eine alternative Definition der Längenskala geht auf das Verhältnis von Volumen zu Oberfläche ( $V/A$ ) zurück, das ebenfalls häufig in Lehrbüchern zu finden ist.

Der äußere Widerstand  $W_\alpha$  ändert sich umgekehrt proportional zum Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$ . Somit gilt  $W_\alpha \propto 1/\alpha$ .

**Definition****Biotzahl:**

$$\text{Bi} = \frac{\text{Wärmeleitwiderstand des Körpers}}{\text{Konvektiver Widerstand an der Oberfläche}} = \frac{\alpha L}{\lambda_F} \quad (-), \quad (8.2)$$

wobei  $\lambda_F$  die thermische Leitfähigkeit des Festkörpers ist sich die charakteristische Länge  $L$  aus dem Verhältnis von Volumen und Oberfläche ergibt,  $L = V/A$ .



**Abbildung 8.3.** Temperaturverlauf in einem Zylinder in radialer Richtung für verschiedene Biot-Zahlen.

Ist  $\text{Bi} \ll 1$ , so überwiegt der äußere Wärmeübergangswiderstand den Widerstand innerhalb des Festkörpers deutlich. Dieser Fall wird auch als „externe Widerstandskontrolle“ bezeichnet. Umgekehrt gilt, wenn  $\text{Bi} \gg 1$  ist, dominiert der Widerstand im Material und man befindet sich im Bereich der „internen Widerstandskontrolle“.

Die Biot-Zahl liefert also Einblicke in das Zusammenspiel zwischen dem inneren Widerstand eines Materials gegen den Wärmetransport und dem äußeren Widerstand an der Oberfläche. Dieses Maß hilft somit, abzuschätzen, ob der Wärmetransport insgesamt eher durch Wärmeleitung oder Konvektion bestimmt wird. Ist die Biot-Zahl deutlich kleiner als 1 ( $\text{Bi} \ll 1$ ), so erfolgt der Wärmetransport nahezu ungehindert durch das Material, sodass nur geringe Temperaturgradienten auftreten. In diesem Fall sind die Temperaturgradienten innerhalb des Materials im Vergleich zur Temperaturdifferenz nach außen vernachlässigbar, wie in Abbildung 8.3a dargestellt. Dies ermöglicht Vereinfachungen in der Wärmeübertragungsanalyse, sodass für manche Aufgabenstellungen, die sonst eine zwei- oder

dreidimensionale Betrachtung erfordern würden, eindimensionale Näherungen ausreichen.

In den meisten Rippenanwendungen wird typischerweise angenommen, dass sich der Wärmestrom ausschließlich entlang der Längenausdehnung der Rippe ausbreitet, was bei Stabrippen senkrecht zur radialen Richtung ist. Diese Vereinfachung beruht darauf, dass die Temperaturänderung in radialer Richtung im Vergleich zur Hauptwärmestromrichtung vernachlässigbar ist. Dadurch kann das Problem analytisch gelöst werden.

**Example 8.1** Zeigen Sie, dass die Vereinfachung des Temperaturprofils einer Stabrippe auf eine eindimensionale Betrachtung in Längsrichtung gerechtfertigt ist, wenn  $\alpha = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $\lambda = 385 \text{ W/mK}$ ,  $d = 3 \text{ cm}$  und  $H = 10 \text{ cm}$  gelten.

Die Biot-Zahl ergibt sich zu:

$$\text{Bi} = \frac{W_\lambda}{W_\alpha} = \frac{\alpha L}{\lambda}.$$

Die charakteristische Länge wird aus dem Verhältnis von Volumen zu Oberfläche bestimmt:

$$L = \frac{V}{A} = \frac{\frac{\pi d^2}{4} H}{\pi d H} = \frac{d}{4} = 0.0075 \text{ m.}$$

Einsetzen und Umformen:

$$\text{Bi} = \frac{\alpha L}{\lambda} = \frac{10}{385} \cdot 0.0075 = 1.95 \cdot 10^{-4}.$$

$\text{Bi} \ll 1$  bedeutet, dass die Temperaturänderung in radialer Richtung vernachlässigbar ist. Somit kann die Rippe als eindimensionales System betrachtet werden, bei dem sich die Temperatur nur in Längsrichtung ändert.

## ABSCHNITT 8.3

**Lösung der Rippengleichung**

Die Rippengleichung (8.1) ist eine inhomogene Differenzialgleichung zweiter Ordnung. Eine inhomogene Differenzialgleichung zeichnet sich dadurch aus, dass die rechte Seite nicht gleich null ist und somit eine antreibende oder quellbildende Komponente besitzt. Anders ausgedrückt beschreibt die Gleichung eine Beziehung zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen, bei der zusätzlich eine nicht verschwindende Funktion oder Konstante auf der rechten Seite steht, die das Verhalten der Lösung beeinflusst. Diese kann äußere Einflüsse, Rand- oder Anfangsbedingungen umfassen, die in die Lösung der Differenzialgleichung mit einfließen.

Eine Möglichkeit, die Gleichung zu lösen, besteht darin, die inhomogene Gleichung mithilfe einer Temperaturdifferenz  $\theta$  in eine homogene Gleichung zu überführen. Diese Temperaturdifferenz enthält den konstanten Term.

**Derivation**

Ausgangspunkt ist die inhomogene Rippengleichung:

$$\lambda A_Q \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha U (T - T_U) = 0.$$

Führt man die Temperaturdifferenz

$$\theta = T - T_U,$$

ein, so gilt für deren zweite Ableitung nach  $x$ :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Durch das Ableiten verschwindet der konstante Term  $T_U$ . Ersetzt man nun in der inhomogenen Rippengleichung  $T - T_U$  durch  $\theta$ , und entsprechend die zweite Ableitung resultiert die homogene Rippengleichung:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \underbrace{\frac{\alpha U}{\lambda A_Q}}_{m^2} \theta = 0,$$

wobei  $m$  als Rippenparameter

$$m = \left( \frac{\alpha U}{\lambda A_Q} \right)^{\frac{1}{2}}$$

mit der Einheit  $(\frac{1}{m})$  bezeichnet wird.

Mithilfe eines Ansatzes der Form  $\theta(x) = e^{sx}$  folgt als Standardlösung:

$$\theta = A e^{mx} + B e^{-mx} = A^* \sinh(mx) + B^* \cosh(mx).$$

**Übung:** Zeigen Sie, dass diese Standardlösung korrekt ist.

**Definition**

**Rippenparameter:**

$$m = \sqrt{\frac{\alpha U}{\lambda A_c}} \left( \frac{1}{m} \right), \quad (8.3)$$

wobei für eine Stabrippe  $m = \sqrt{\frac{4\alpha}{\lambda d}}$  und für eine ebene Rippe  $m = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda \delta}}$ .

**Grundgleichung****Homogene Rippengleichung:**

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2 \theta = 0, \quad (8.4)$$

mit  $\theta = T(x) - T_U$ .

**Grundgleichung****Allgemeine Lösung der Rippengleichung:**

$$\theta = A e^{mx} + B e^{-mx} = A^* \sinh(mx) + B^* \cosh(mx). \quad (8.5)$$

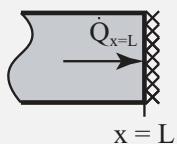
**Derivation**

Um eine Lösung für das Temperaturprofil der Rippe zu erhalten, müssen die Integrationskonstanten bestimmt werden. Dazu wird die Rippengleichung zweimal nach  $x$  abgeleitet und benötigt entsprechend zwei Randbedingungen. Üblicherweise werden diese Randbedingungen am Fuß und am Kopf der Rippe definiert. Allerdings würde auch eine Temperatur oder ein Wärmestrom an einer beliebigen Stelle der Rippe ausreichen, um die Konstanten zu bestimmen.

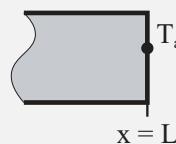
Randbedingungen am Rippenfuß:

In der Regel ist die Temperatur am Fuß der Rippe bekannt  $T(x = 0) = T_F$ , was in dimensionsloser Form geschrieben wird als:

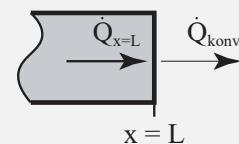
$$\theta = \theta_b.$$

Randbedingungen am Rippenkopf:

(a) Rippe mit adiabatem Kopf.



(b) Kopftemperatur entspricht der Umgebungstemperatur.



(c) Konvektiver Wärmeübergang am Kopf.

**Abbildung 8.4.** Typische Randbedingungen am Rippenkopf.

Mögliche Randbedingungen am Rippenkopf sind:

- a) **Adiaber Kopf:** Ist der Wärmeübergang am Rippenkopf vernachlässigbar, so wird der Kopf als adiabat beschrieben. Aus einer lokalen Energiebilanz am Rippenkopf  $-\lambda A_Q \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0$  folgt in dimensionsloser Form:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0.$$

- b) **Kopftemperatur entspricht der Umgebungstemperatur:** Eine Sonderfall ergibt sich, wenn die Rippe so lang ist, dass die Temperatur am Kopf näherungsweise der Umgebungstemperatur  $T_U$  entspricht. Dann gilt:

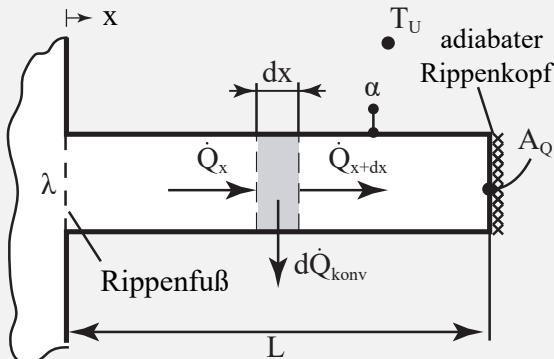
$$\theta(x = L) = 0.$$

- c) **Konvektiver Wärmeübergang am Kopf:** In einigen Fällen hat die Rippe eine endliche Höhe und auch am Kopf wird eine relevante Wärmemenge übertragen. Aus einer lokalen Energiebilanz:  $-\lambda A_Q \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = \alpha A_Q (T(x = L) - T_U)$  folgt:

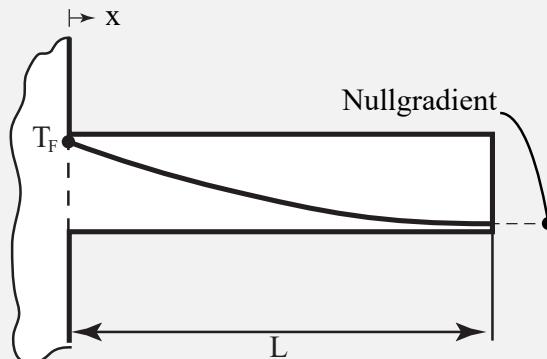
$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = -\frac{\alpha}{\lambda} \theta(x = L).$$

**HEATQUIZ 8.1****Temperaturprofile:****Energiebilanzen:**

**Example 8.2** Leiten Sie den Wärmestrom her, der von einer Rippe mit Fußtemperatur  $T_F$  und adiabatem Kopf abgeführt wird.



(a) Energiebilanz.



(b) Temperaturverteilung.

**1 Aufstellen der Bilanz:**

Die stationäre Energiebilanz für ein infinitesimales Element innerhalb der Rippe lautet:

$$0 = \dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx} - d\dot{Q}_{\text{konv}}.$$

**2 Definition der Bilanzelemente:**

Unter Verwendung des Fourierschen Gesetzes (Gleichung (5.1)) in Kombination mit der Taylor-Reihe lassen sich die leitenden Wärmeströme schreiben als:

$$\dot{Q}_x = -\lambda A_Q \frac{\partial T}{\partial x},$$

und:

$$\dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx = -\lambda A_Q \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \right).$$

Verwendet man das Newtonsche Abkühlungsgesetz aus Gleichung (6.9), so ergeben sich für den konvektiven Wärmestrom des Elements mit Umfang  $U$  und Länge  $dx$  an die Umgebung:

$$d\dot{Q}_{\text{konv}} = \alpha U (T - T_U) dx.$$

### 3 Einsetzen und Umstellen:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\alpha U}{\lambda A_Q} (T - T_U) = 0.$$

Wird zur Lösung der Rippengleichung die Temperaturdifferenz und der Rippenparameter definiert

$$\theta = T - T_U, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \text{und} \quad m = \sqrt{\frac{\alpha U}{\lambda A_Q}},$$

so folgt:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - m^2 \theta = 0,$$

deren Standardlösung lautet:

$$\theta = A^* \sinh(mx) + B^* \cosh(mx).$$

### 4 Definition der Rand- und/oder Anfangsbedingung(en):

Da die Differenzialgleichung eine zweifache Ableitung nach  $x$  enthält, sind zwei Randbedingungen erforderlich.

Bei  $x = 0$  ist die Temperatur bekannt  $T(x = 0) = T_F$ :

$$\theta(x = 0) = T_F - T_U = \theta_F.$$

Bei  $x = L$  findet kein Wärmeübergang mehr statt ( $\dot{Q} = -\lambda A_Q \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=L} = 0$ ), woraus folgt:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=L} = 0.$$

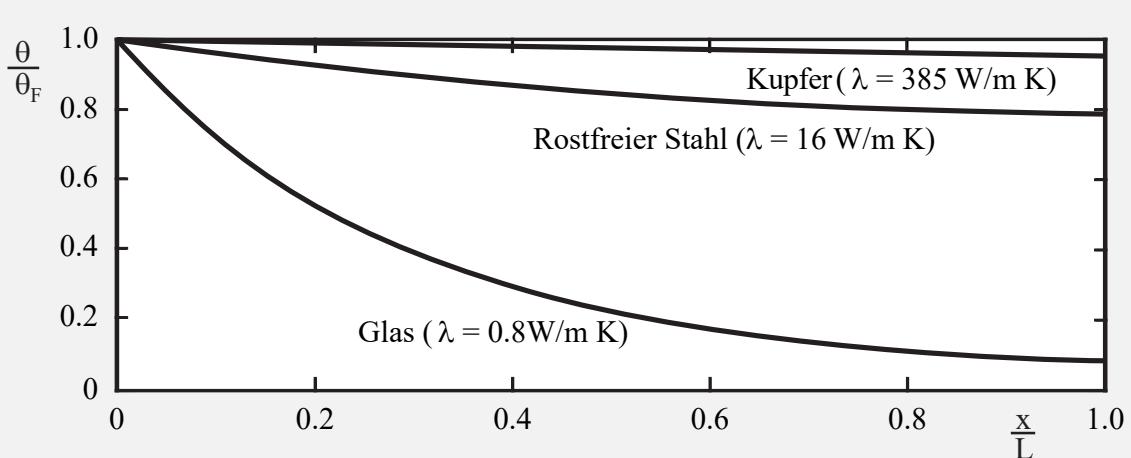
### 5 Lösen der Gleichung:

Unter Verwendung der Randbedingungen folgt für die Integrationskonstanten  $A^* = -\theta_F \frac{\sinh(mL)}{\cosh(mL)} = -\theta_F \tanh(mL)$  und  $B^* = \theta_F$ .

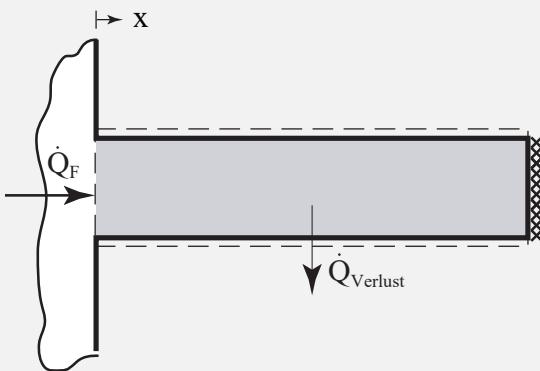
Dies führt zur folgenden dimensionslosen Temperaturfunktion:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_b [\cosh(mx) - \tanh(mL) \sinh(mx)] \\ &= \theta_b \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}. \end{aligned}$$

In Abbildung 8.6 ist der dimensionslose Temperaturverlauf einer Stab-Rippe mit kreisförmigem Querschnitt für verschiedene Rippenmaterialien dargestellt, wobei  $m = \left(\frac{4\alpha}{\lambda d}\right)^{\frac{1}{2}}$  gilt.



**Abbildung 8.6.** Temperaturverlauf über die Länge einer Stabrippe mit  $d = 8 \text{ mm}$ ,  $L = 40 \text{ mm}$  und  $\alpha = 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$ .



Aus dem Temperaturprofil kann die gesamte an die Umgebung übertragene Wärmeleistung der Rippe ermittelt werden. Eine globale Energiebilanz entlang der Rippe zeigt, dass im stationären Endzustand die durch Wärmeleitung an der Basis zufließende Wärme gleich der durch Konvektion an die Umgebung abgegebenen Wärme ist.

### 1 Aufstellen der Bilanz:

$$\stackrel{0 - \text{stationär}}{\cancel{\frac{\partial U}{\partial t}}} = \dot{Q}_F - Q_{\text{Verlust}}.$$

### 2 Definition der Bilanzelemente:

Definiert man den leitenden Wärmestrom mithilfe des Fourier'schen Gesetzes nach Gleichung (5.1) und formt um, so ergibt sich:

$$\dot{Q}_{\text{Verlust}} = \dot{Q}_F = -\lambda A_Q \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0}.$$

### 3 Einsetzen und Umstellen:

Die Ableitung des Temperaturprofils  $\theta$  nach  $x$  und das Einsetzen ergibt die von der Rippe abge-

für Wär mestrom:

$$\dot{Q}_{\text{Verlust}} = \lambda A_Q m \theta_F \tanh(m L).$$

Grundgleichung

Temperaturprofil einer Rippe mit Fußtemperatur  $T_b$  und adiabatem Kopf:

$$\theta = \theta_F \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}. \quad (8.6)$$

Grundgleichung

Wär mestrom einer Rippe mit Fußtemperatur  $T_F$  und adiabatem Kopf:

$$\dot{Q} = \lambda A_Q m \theta_F \tanh(m L). \quad (8.7)$$

## ABSCHNITT 8.4

**Rippenwirkungsgrad**

Der Rippenwirkungsgrad wird verwendet, um Wärmeübertragungssysteme mit Rippen zu analysieren. Der Wert ist definiert als das Verhältnis der tatsächlichen von der Rippe übertragenen Wärme zur maximal möglichen Wärmeübertragung, falls die gesamte Rippenoberfläche die Fußtemperatur hätte. Dieser Wirkungsgrad gibt Auskunft darüber, wie effizient das Material der Rippe genutzt wird.

**Definition**

**Rippenwirkungsgrad:**

$$\eta_F = \frac{\text{Übertrager Wärmestrom}}{\text{Maximal übertragbarer Wärmestrom}} = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{\max}} \quad (8.8)$$

**Example 8.3**

Bestimmen Sie den Rippenwirkungsgrad für eine Rippe mit der Fußtemperatur  $T_F$  und einem adiabaten Kopf.

Zur Bestimmung des Wirkungsgrads wird Gleichung (8.8) genutzt:

$$\eta_R = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{\max}}.$$

Die von der Rippe übertragene Wärmemenge wurde in Beispiel 8.2 ermittelt und ist in Gleichung (8.7) aufgeführt:

$$\dot{Q} = \lambda A_F m \theta_F \tanh(m L).$$

Die maximal übertragbare Wärmemenge ist diejenige, die übertragen würde, wenn die gesamte Rippenoberfläche die Fußtemperatur annehmen würde:

$$\dot{Q}_{\max} = \alpha U L (T_F - T_U) = \alpha U L \theta_F.$$

Einsetzen und Umformen führen zu:

$$\eta_R = \frac{\tanh(m L)}{m L}.$$

Die Funktion des Rippenwirkungsgrads ist in Abbildung 8.7 dargestellt. Offensichtlich lässt sich der Wirkungsgrad nicht allein über die Länge der Rippe optimieren, da Faktoren wie Masse und Volumen der Rippe ebenfalls zu berücksichtigen sind.

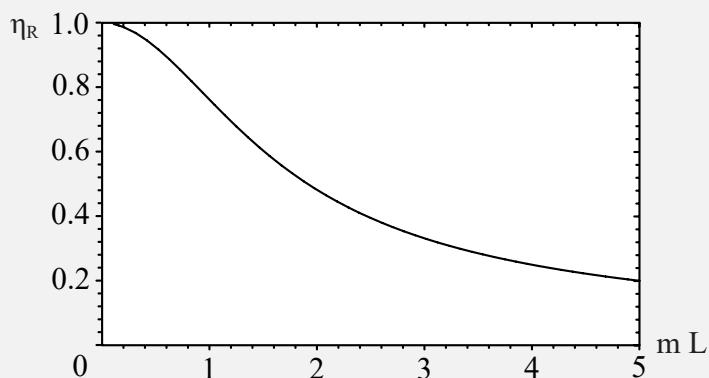


Abbildung 8.7. Wirkungsgrad einer Stabriipse.

ABSCHNITT 9

## Instationäre Wärmeleitung

### L14 - Einführung in die instationäre Wärmeleitung:

#### Lernziele:

- Konzeptionelles Verständnis der instationären Wärmeleitung.
- Fähigkeit, instationäre Wärmeübertragungsprobleme zu entdimensionalisieren.



#### Verständnisfragen:

- Unter welcher Bedingung kann die Temperatur in einem Körper als homogen angenommen werden? Welche dimensionslose Kennzahl wird dafür herangezogen?
- Was beschreibt die Fourierzahl?



### L15 - Beispiel Fieberthermometer:

#### Lernziele:

- Entwicklung eines praxisorientierten Lösungsansatzes.



#### Verständnisfragen:

- Aus Sicherheitsgründen sind Quecksilberthermometer nicht mehr im Handel erhältlich. Auch mit Alkohol gefüllte Thermometer werden kaum noch verwendet. Warum? Welche Nachteile haben diese Messinstrumente?
- Die derzeit üblichen Standardgeräte sind digitale Thermometer. Wie wird die Körpertemperatur damit ermittelt?



## L16 - Halbunendliche Platte:

### Lernziele:

- Konzeptionelles Verständnis der Randbedingungen in einem halbunendlichen Körper mit konstanter oder zeitabhängiger Wandtemperatur.
- Fähigkeit, Aufgaben mithilfe der Fehlerfunktionstabelle zu lösen.



### Verständnisfragen:

- Was ist das Konzept eines halbunendlichen Körpers und welche Einschränkungen gibt es?
- Welche zwei dimensionslosen Kennzahlen beschreiben den instationären Temperaturverlauf in einem (halbunendlichen) Körper mit relevantem konvektivem Widerstand?
- Was ist die thermische Eindringtiefe?



## L17 - Dimensionslose Kennzahlen und Heisler-Diagramme:

### Lernziele:

- Kenntnis der Bedeutung von dimensionslosen Kennzahlen, insbesondere der Fourier- und Biotzahl, für die Analyse instationärer Wärmevorgänge.
- Konzeptionelles Verständnis von Heisler-Diagrammen zur Beurteilung der Kerntemperatur eines Festkörpers, des örtlichen Temperaturprofils und des Wärmestroms.
- Fähigkeit, Heisler-Diagramme für reale Fälle anzuwenden.



### Verständnisfragen:

- Welche beiden dimensionslosen Kennzahlen beschreiben die instationäre Wärmeübertragung eines Körpers mit zusätzlichem äußerem Wärmeübergangswiderstand?
- Welches Hilfsmittel ermöglicht die Bestimmung des Temperaturprofils oder der übertragenen Wärmemenge für ausgedehnte Platten, lange Zylinder oder Kugeln?



## ABSCHNITT 9.1

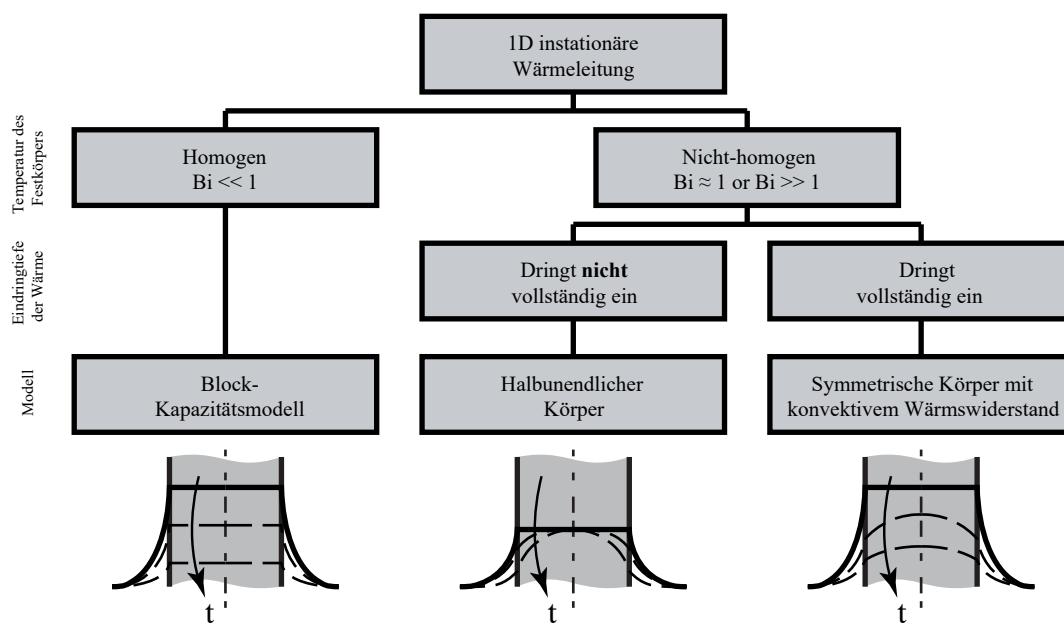
**Einführung in die instationäre Wärmeleitung**

In den vorangegangenen Kapiteln wurden Wärmeleitungsprozesse behandelt, für die sich ein stationärer Zustand eingestellt hat. Das dabei ermittelte Temperaturfeld war keine Funktion der Zeit.

In diesem Abschnitt werden die sich ändernden Zustände beim Aufheizen und Abkühlen betrachtet, bis das System seine Gleichgewichtstemperatur erreicht. Diese Vorgänge werden durch die allgemeine Wärmetransportgleichung in kartesischer Geometrie, Gleichung (5.2), Zylinderkoordinaten, Gleichung (5.3), oder Kugelkoordinaten, Gleichung (5.4), beschrieben und erfüllen die jeweiligen Anfangs- und Randbedingungen der betrachteten Problemstellung.

Da für diese Gleichungen keine allgemeine Lösung möglich ist, lassen sich nur einige typische Beispiele behandeln, die häufig in der Praxis auftreten. Dieser Abschnitt konzentriert sich auf drei Arten von Beispielen, mit denen sich die eindimensionale instationäre Wärmeleitung beschreiben lässt.

Abbildung 9.1 zeigt die Einteilung der eindimensionalen instationären Wärmeleitung. Die grundlegende Einteilung und das Lösungsverfahren hängen davon ab, ob die Temperatur in einem Körper homogen ist. Falls sie homogen ist, kann das in Abschnitt 9.2 vorgestellte Blockkapazitätsmodell zur Lösung herangezogen werden. Wenn nicht, hängt die Wahl des Lösungsweges davon ab, ob die Wärme über den gesamten Körper hinweg vollständig eindringt oder nicht. In diesen Fällen werden entweder die Heisler-Diagramme genutzt, oder der Ansatz des halbunendlichen Körpers gewählt, wie in den Abschnitten 9.4 bzw. 9.3 beschrieben.



**Abbildung 9.1.** Einteilung der eindimensionalen instationären Wärmeleitung.

## ABSCHNITT 9.2

**Blockkapazitätsmodell**

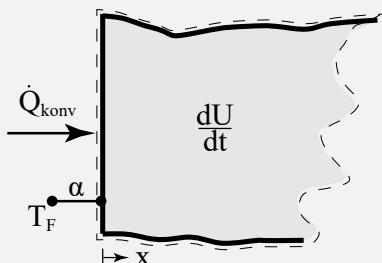
Hat ein Körper eine hohe Wärmeleitfähigkeit, sodass sein innerer Wärmeleitwiderstand gegenüber dem Wärmeübergangswiderstand zwischen Körper und umgebendem Fluid klein ist, stellt sich im Inneren des Körpers während des Aufheizens oder Abkühlens zu jedem Zeitpunkt eine nahezu homogene Temperatur ein. Mathematisch kann dies durch  $\text{Bi} \ll 1$  beschrieben werden.

Daher ist es nicht erforderlich, wie in den Gleichungen (5.2) - (5.4) die Wärmetransportgleichung aufzustellen. Ein einfacherer Ansatz besteht darin, eine Energiebilanz für den gesamten Körper zu formulieren. Diese Bilanz besagt, dass sich die zeitabhängige innere Energie des Körpers aufgrund von konvektivem Wärmeaustausch an seiner Oberfläche mit der Umgebung ändert.

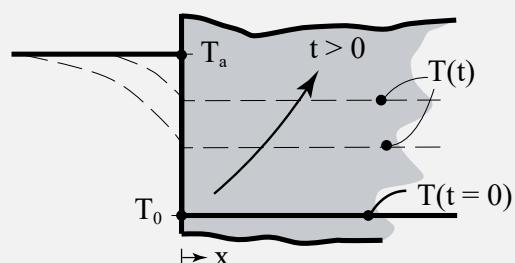
Die Betrachtung einer Blockkapazität (oder das Zusammenfassen aller Kapazitäten eines Körpers zu einem System) ist eine Vereinfachung in der Wärmeübertragung, bei der angenommen wird, dass die Temperaturverteilung innerhalb eines festen Objekts vernachlässigbar ist. Dieser Ansatz behandelt das gesamte Objekt als einen einzigen Punkt mit einheitlicher Temperatur. Dieser Ansatz ist besonders in Systemen mit schnellem Wärmeaustausch oder hoher Wärmeleitfähigkeit nützlich, weil die Temperaturdifferenzen im Inneren nur gering ausgeprägt sind. Durch die Konzentration auf die Gesamtenergiebilanz statt auf detaillierte Temperaturverteilungen erleichtert diese Methode die Analyse instationärer Prozesse wie Heizen oder Kühlen. Das Modell führt zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung, welche die Änderung der inneren Energie des Körpers mit der Wärmezufuhr bzw. -abfuhr verknüpft, und bietet somit eine Grundlage für praktische Ingenieursentscheidungen in Fällen, in denen detaillierte Temperaturgradienten von untergeordneter Bedeutung sind.

**Derivation**

In dieser Herleitung wird ein Körper mit homogener Temperatur betrachtet, der durch die umgebende Konvektion aufgeheizt wird – ein Szenario, das für Fälle mit Biot-Zahl kleiner als 1 gilt. Zu Beginn weist der Körper die Temperatur  $T_0$  auf.



(a) Energiebilanz.



(b) Temperaturverteilung.

**Abbildung 9.2.** Aufheizen einer Blockkapazität.**1 Aufstellen der Bilanz:**

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \dot{Q}_{\text{konv}}.$$

**2 Definition der Bilanzelemente:**

Zeitliche Änderung der inneren Energie:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \rho c V \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Wärmestrom durch Konvektion:

$$\dot{Q}_{\text{conv}} = \alpha A (T_U - T).$$

### 3 Einsetzen und Umstellen:

$$\rho c V \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha A (T - T_U) = 0.$$

### 4 Definition der Rand- und/oder Anfangsbedingung(en):

Für die Lösung der Differentialgleichung ist eine Anfangsbedingung erforderlich:

$$T(t=0) = T_0.$$

### 5 Lösen der Gleichung:

Durch Definition einer dimensionslosen Temperatur,  $\theta^* = \frac{(T-T_0)}{(T_U-T_0)}$ , wobei  $T$  die zeitabhängige Temperatur des Körpers darstellt, ergibt sich:

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t} + \frac{\alpha}{\rho c} \frac{A}{V} (\theta^* - 1) = 0.$$

Eine geeignete Umformung liefert:

$$\frac{\partial \theta^*}{(\theta^* - 1)} = - \frac{\alpha}{\rho c} \frac{A}{V} \partial t.$$

Durch Integration der Differentialgleichung und Verwendung der Anfangsbedingung  $T(t=0) = T_0$ , d.h.  $\theta^* = 0$ :

$$\frac{T - T_0}{T_U - T_0} = 1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{\rho c} \frac{A}{V} t\right).$$

Zwei wichtige dimensionslose Kennzahlen werden eingeführt, nämlich die Biotzahl:

$$\text{Bi} = \frac{\alpha L}{\lambda},$$

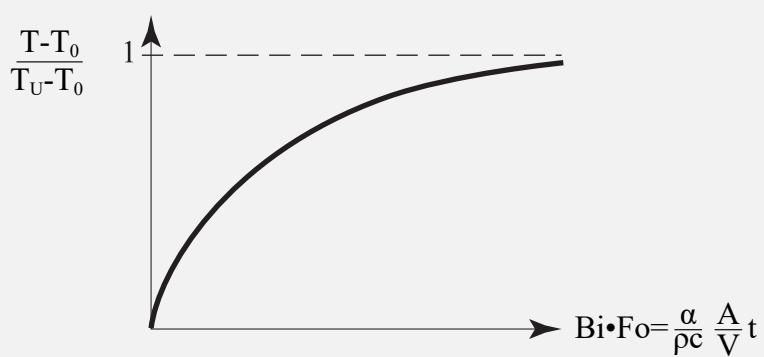
und die Fourierzahl,

$$\text{Fo} = \frac{\lambda t}{\rho c L^2} = \frac{a t}{L^2},$$

wobei  $L$  die charakteristische Länge darstellt, gewonnen aus dem Verhältnis  $\frac{V}{A}$ .

Der Ausdruck kann in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{T - T_0}{T_U - T_0} = 1 - \exp(-\text{Bi} \cdot \text{Fo}).$$



**Abbildung 9.3.** Die Temperatur des Körpers in Abhängigkeit von der Zeit.

#### Grundgleichung

#### Blockkapazitätsmodell:

$$\theta^* = 1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{\rho c} \frac{A}{V} t\right), \quad (9.1)$$

welches für  $\text{Bi} \ll 1$  gilt, wobei  $\theta^* = \frac{T - T_0}{T_U - T_0}$ .

Anders ausgedrückt ist der zeitliche Verlauf der dimensionslosen Körpertemperatur in Form von Gleichung (9.1) allgemein gültig und für alle Problemstellungen gleich, bei denen gleiche Biot-Zahlen die Randbedingungen bestimmen. Darüber hinaus gilt dies für alle Probleme, bei denen die Biot-Zahl klein ist, also  $\text{Bi} \ll 1$ .

Beispiel: Fieber

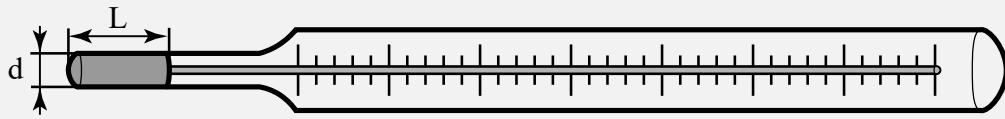
#### Phenomene 9.1

Stellen Sie sich vor, Sie fühlen sich unwohl und möchten Ihre Körpertemperatur überprüfen. In solchen Fällen bietet sich ein Fieberthermometer an. Traditionell wurden diese mit einer Quecksilbersäule gefertigt, die als Temperaturanzeiger dient. Bei Benutzung fällt Ihnen auf, dass der Quecksilberspiegel im Thermometer ansteigt.

Das beruht darauf, dass sich Flüssigkeiten – in diesem Fall Quecksilber – bei Temperaturerhöhung ausdehnen – in diesem Fall dadurch, dass Wärme von Ihrem Körper auf das Thermometer übertragen wird. Diese Volumenänderung ist proportional zur Temperaturerhöhung, was eine genaue Messung der Körperwärme ermöglicht.

**Example 9.1**

Ein Kind fühlt sich unwohl, sodass seine Eltern den Verdacht haben, es könnte Fieber haben. Um Klarheit zu erlangen, messen sie die Körpertemperatur zweimal mit einem Quecksilberthermometer.



Die eingesetzten Quecksilberthermometer weisen anfangs eine einheitliche Temperatur von  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  auf, haben eine Länge von  $L = 30 \text{ mm}$  und einen Durchmesser  $d = 4 \text{ mm}$ .

Das Quecksilber im Thermometer besitzt folgende Eigenschaften: spezifische Wärme  $c_{\text{Hg}} = 140 \text{ J/kg K}$ , Dichte  $\rho_{\text{Hg}} = 14 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  und Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{\text{Hg}} = 9 \text{ W/m K}$ .

Die Messungen erbrachten jeweils:

- $t_1 = 40 \text{ s} \rightarrow T_1 = 34^\circ\text{C}$ ,
- $t_2 = 100 \text{ s} \rightarrow T_2 = 39^\circ\text{C}$ .

a) Wie hoch ist das Fieber?

Wir gehen zunächst von einer kleinen Biot-Zahl aus,  $\text{Bi} \ll 1$ . Damit ist eine homogene Temperatur im Thermometer gerechtfertigt.

Folglich ist das Blockkapazitätsmodell anwendbar:

$$\frac{T - T_0}{T_U - T_0} = 1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{\rho_{\text{Hg}} c_{\text{Hg}}} \frac{A}{V} t\right),$$

die Herleitung dieses Temperaturverlaufs ist in Abschnitt 9.2 dargelegt.

Aus Vereinfachungsgründen wird der Parameter  $m = \frac{\alpha}{\rho_{\text{Hg}} c_{\text{Hg}}} \frac{A}{V}$  eingeführt, sodass gilt:

$$\frac{T - T_0}{T_U - T_0} = 1 - \exp(-m t).$$

Die Gleichung enthält zwei unbekannte Größen: Die Umgebungstemperatur des Körpers  $T_U$ , die zu bestimmen ist, sowie den Parameter  $m$ .

Um den Wert von  $m$  zu bestimmen, bedient man sich einer plausiblen Schätzung für die Körpertemperatur  $T_U$ . Ausgehend von den zwei Messungen ist es vernünftig anzunehmen, dass  $T_U \approx 40^\circ\text{C}$ . Da  $m$  bei beiden Messungen konstant bleiben muss, wird diese Schätzung durch annähernd gleiche Ergebnisse validiert.

Für Messung 1:

$$\begin{aligned} \frac{T_1 - T_0}{T_U - T_0} &= 1 - \exp(-m_1 t_1) \\ \Rightarrow m_1 &= -\frac{1}{t_1} \ln\left(1 - \frac{T_1 - T_0}{T_U - T_0}\right) = 0,0301, \end{aligned}$$

und für Messung 2:

$$\begin{aligned}\frac{T_2 - T_0}{T_U - T_0} &= 1 - \exp(-m_2 t_2) \\ \Rightarrow m_2 &= -\frac{1}{t_2} \ln\left(1 - \frac{T_2 - T_0}{T_U - T_0}\right) = 0,0300.\end{aligned}$$

Hierdurch wird die Richtigkeit der angenommenen Körpertemperatur  $T_U$  bestätigt. Wäre dies nicht der Fall, könnte man iterativ einen anderen  $T_U$ -Wert ausprobieren, bis sich bei beiden Messungen übereinstimmende Werte für  $m$  ergeben.

b) Wie groß ist der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$ ?

Um den Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$  zu bestimmen, ist zunächst die Oberfläche  $A$  zu berechnen:

$$A = \pi d L,$$

sowie das Volumen  $V$  der Quecksilberspitze:

$$V = \frac{\pi d^2}{4} L.$$

Durch Einsetzen in die Definition von  $m$  und entsprechendes Umstellen ergibt sich:

$$\begin{aligned}m &= \frac{\alpha A}{\rho_{\text{Hg}} c_{\text{Hg}} V} \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{m \rho_{\text{Hg}} c_{\text{Hg}} d}{4} = 58,8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}.\end{aligned}$$

c) Wie lange dauert die Messung, um eine Genauigkeit von 0,1 K zu erreichen?

Die Messzeit  $t_m$  ist dann erreicht, wenn  $T = 39,9^\circ\text{C}$  erreicht wird.

Setzt man ein und formt um:

$$\begin{aligned}\frac{T - T_0}{T_U - T_0} &= 1 - \exp(-m t_m) \\ \Rightarrow t_m &= -\frac{1}{m} \ln\left(1 - \frac{T - T_0}{T_U - T_0}\right) = 176,6 \text{ s}.\end{aligned}$$

d) Ist die Annahme des Blockkapazitätsmodells gültig?

Für die Gültigkeit des Blockkapazitätsmodells muss  $\text{Bi} \ll 1$  erfüllt sein. Die charakteristische Länge ergibt sich über  $L = \frac{V}{A}$ , sodass sich die Biot-Zahl folgendermaßen ausdrücken lässt:

$$\text{Bi} = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda_{\text{Hg}}} = \frac{\alpha \cdot d}{2 \lambda_{\text{Hg}}} = 0,013 \ll 1.$$

Somit ist das Blockkapazitätsmodell hier anwendbar.

## ABSCHNITT 9.3

**Halbunendlicher Körper**

Situationen, in denen der innere Wärmeleitwiderstand eines Körpers den Wärmetransportprozess dominiert, erfordern einen anderen Lösungsansatz als das Blockkapazitätsmodell. Räumliche Temperaturänderungen im Körper sind zu berücksichtigen, was bedeutet, dass die Differentialgleichung eine zeitliche Ableitung  $\frac{\partial T}{\partial t}$  und räumliche Ableitungen  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  beinhaltet – damit handelt es sich um eine partielle Differentialgleichung. Die Lösung hängt sowohl von der Anfangsbedingung für das Temperaturfeld als auch von den Randbedingungen ab. Obwohl eine unendliche Zahl unterschiedlicher Konfigurationen möglich ist, können bereits einige grundlegende Lösungen helfen, eine Vielzahl von Wärmeleitungsproblemen zu beurteilen.

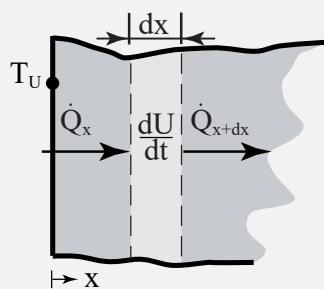
Eine solche Lösung ist das Modell der *halbunendlichen Platte*. Das zentrale Konzept der halbunendlichen Platte beruht auf der Idee, dass die durch die Randbedingung ausgelöste Temperaturänderung noch nicht tief in den Körper vorgedrungen ist. Die thermische Störung bleibt vielmehr auf einen oberflächennahen Bereich beschränkt, was eine vereinfachte eindimensionale Betrachtung erlaubt. Zur besseren Veranschaulichung wird hierbei die sogenannte *Eindringtiefe*  $\delta$  eingeführt.

Die Eindringtiefe  $\delta$  gibt den Abstand von der Körperoberfläche an, in dem die Temperaturänderung noch signifikant ist. Anders ausgedrückt beschreibt sie, wie weit die Wärme in das Material eingedrungen ist; jenseits dieser Tiefe bleibt die Temperatur durch äußere Einflüsse praktisch unberührt.

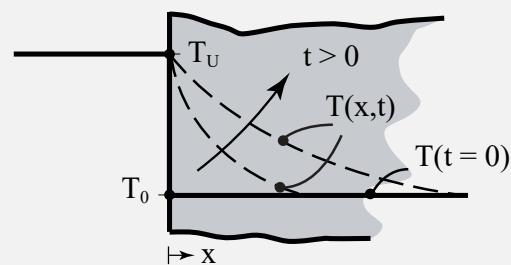
In Körpern mit großen Biot-Zahlen ist die Eindringtiefe in der Regel vergleichsweise gering. Dadurch breitet sich die von außen verursachte Erwärmung oder Abkühlung nur eingeschränkt ins Innere des Körpers aus, ehe ihr Einfluss vernachlässigbar wird.

Halbunendlicher Körper mit vorgegebener Oberflächentemperatur ( $Bi \gg 1$ )**Derivation**

Das erste Szenario behandelt eine halbunendliche Platte mit konstanter Oberflächentemperatur, was dann zutrifft, wenn  $Bi \gg 1$ . Ein reales Beispiel hierfür findet sich in der Lebensmittelverarbeitung. Man denke etwa an ein Stück Fleisch oder ein Backgut, das aus einem Ofen genommen oder nur einseitig erhitzt wurde. Die Außenseite ist der hohen Ofen- bzw. Kochtemperatur ausgesetzt, während das Innere noch eine niedrigere Temperatur aufweist.



(a) Energiebilanz.



(b) Temperaturverteilung.

**Abbildung 9.4.** Erwärmung einer halbunendlichen Platte mit konstanter Oberflächentemperatur.

### 1 Aufstellen der Bilanz:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx}.$$

### 2 Definition der Bilanzelemente:

Zeitliche Änderung der inneren Energie:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = m c \frac{\partial T}{\partial t} = \rho c A dx \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Eintreffender Wärmeleitstrom:

$$\dot{Q}_x = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x},$$

und austretender Wärmeleitstrom:

$$\dot{Q}_{x+dx} = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx.$$

### 3 Einsetzen und Umstellen:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

### 4 Definition der Rand- und/oder Anfangsbedingung(en):

Zur Lösung der Differentialgleichung sind eine Anfangs- und sind zwei Randbedingungen erforderlich, da die Temperatur  $T$  einmal nach der Zeit  $t$  und zweimal räumlich nach  $x$  abgeleitet wird.

Anfänglich liegt im Körper eine homogene Temperaturverteilung vor:

$$\begin{cases} t = 0 \\ 0 < x < \infty \end{cases} T = T_0.$$

Für  $t > 0$  bleibt die Temperatur bei  $x = 0$  konstant bei  $T_U$ :

$$\begin{cases} t > 0 \\ x = 0 \end{cases} T = T_U.$$

Da es sich um einen halbunendlichen Körper handelt, dringt die Wärme nie vollständig bis zum anderen Ende des Körpers vor, weshalb für  $x \rightarrow \infty$  die Temperatur stets bei  $T_0$  bleibt:

$$\begin{cases} t > 0 \\ x \rightarrow \infty \end{cases} T = T_0.$$

### 5 Lösen der Gleichung:

Durch die Einführung der dimensionslosen Übertemperatur  $\theta^* \equiv \frac{T-T_0}{T_u-T_0}$  und der Temperaturleitfähigkeit  $a \equiv \frac{\lambda}{\rho c}$  folgt alternativ

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^2} \right) \quad (9.2)$$

und damit für die anfängliche dimensionslose Temperaturverteilung:

$$\left. \begin{array}{l} t = 0 \\ 0 < x < \infty \end{array} \right\} \theta^* = 0$$

Die beiden Randbedingungen sehen in dimensionsloser Schreibweise wie folgt aus:

$$\left. \begin{array}{l} t > 0 \\ x = 0 \end{array} \right\} \theta^* = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} t > 0 \\ x \rightarrow \infty \end{array} \right\} \theta^* = 0$$

Diese Differentialgleichung kann grundsätzlich nach der Methode der Trennung der Variablen gelöst werden.

Im vorliegenden Fall ergibt sich jedoch ein einfacherer Lösungsweg. Dabei wird anstelle der beiden unabhängigen Variablen  $x$  und  $t$  eine einzige unabhängige Variable  $\eta(x,t)$  gesucht, durch die sich die partielle Differentialgleichung auf eine gewöhnliche reduzieren lässt, so dass gilt

$$\theta^*(x,t) = \theta^*(\eta(x,t))$$

Bei der Suche nach der Form dieser Variablen kann vom allgemeinen Ansatz  $\eta = b x^c t^d$  ausgegangen werden. Die Differentiale der Gl. (9.2) schreiben sich in den neuen Variablen

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t} = \left( \frac{d\theta^*}{d\eta} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)$$

und

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^2} = \left( \frac{d^2 \theta^*}{d\eta^2} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{d\theta^*}{d\eta} \right) \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)$$

und damit wird unter Berücksichtigung des Ansatzes  $\eta = b x^c t^d$  aus der Differentialgleichung, Gl. (9.2)

$$\left( \frac{d\theta^*}{d\eta} \right) b x^c dt^{d-1} = a \left( \frac{d^2 \theta^*}{d\eta^2} \right) (bc x^{c-1} t^d)^2 + a \left( \frac{d\theta^*}{d\eta} \right) (bc(c-1)x^{c-2}t^d)$$

und daraus durch Umstellung

$$\frac{d^2 \theta^*}{d\eta^2} + \frac{\left( \frac{ac(c-1)t}{dx^2} - 1 \right)}{\left( \frac{abc^2 t^{d+1}}{dx^{2-c}} \right)} \frac{d\theta^*}{d\eta} = 0$$

Wenn diese Gleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung sein soll mit Koeffizienten, die nur von  $\eta$  abhängen, dürfen die Klammerausdrücke nur von  $\eta$  abhängen.

Durch einen Vergleich der Exponenten der Variablen  $x$  und  $t$  ergibt sich

$$c = 1 \quad d = -\frac{1}{2} \quad \text{und } b = \frac{1}{\sqrt{4a}}$$

und damit die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \theta^*}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta^*}{d\eta} = 0 \tag{9.3}$$

wobei  $\eta \equiv \frac{x}{\sqrt{4at}}$  ist. Die neue Variable  $\eta$  kann durch die Fourier-Kennzahl  $Fo$ , in der als kennzeichnende Länge der Abstand von der Plattenoberfläche eingesetzt wird, beschrieben werden

$$\eta \equiv \frac{x}{\sqrt{4at}} = \frac{1}{\sqrt{4 Fo}}$$

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung erfordert zwei Randbedingungen in den neuen Koordinaten  $\eta$  und  $\theta^*$ . Durch Transformation der Anfangs- und Randbedingungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{A.B.: } \eta = \infty & : \theta^* = 0, \\ \text{R.B. 1: } \eta \rightarrow 0 & : \theta^* = 1, \text{ und} \\ \text{R.B. 2: } \eta \rightarrow \infty & : \theta^* = 0. \end{aligned}$$

Da die A.B. nach der Transformation R.B. 2 entspricht und sie sich nicht widersprechen, ist mit Hilfe der Variable  $\eta$  eine ähnliche Lösung möglich.

Die Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung erfolgt mit den üblichen Substitutionsmethoden zur Reduzierung der Ordnung. Die Substitution

$$z \equiv \frac{d\theta^*}{d\eta}, \quad \frac{dz}{d\eta} = \frac{d^2\theta^*}{d\eta^2}$$

führt auf

$$\frac{dz}{d\eta} + 2\eta z = 0$$

und durch Integration auf

$$\ln z = -\eta^2 + C_1 \quad \text{oder} \quad \frac{d\theta^*}{d\eta} = C_2 \exp(-\eta^2)$$

Die zweite Integration ergibt mit der Integrationsvariablen  $\xi$  und der Randbedingung RB 2

$$\theta^*(\eta) - 1 = C_2 \int_{\xi=0}^{\xi=\eta} \exp(-\xi^2) d\xi$$

Die Konstante  $C_2$  lässt sich aus der Randbedingung RB 1 bestimmen

$$C_2 = \frac{-1}{\int_0^\infty \exp(-\xi^2) d\xi} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

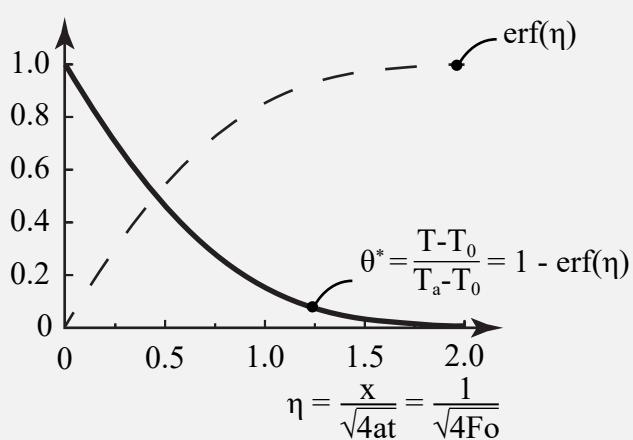
Damit ist das dimensionslose Temperaturfeld gegeben durch

$$\theta^* = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi=0}^{\xi=\eta} \exp(-\xi^2) d\xi \quad (9.4)$$

Der zweite Ausdruck der rechten Seite von Gl. (9.4) wird als Gaußsche Fehlerfunktion, bzw. Errorfunktion  $\text{erf}(\eta)$  bezeichnet und lässt sich zum Beispiel aus Tabellen ablesen. Damit wird

$$\begin{aligned} \theta^* &= 1 - \text{erf}[\eta] \quad \text{oder} \\ \theta^* &= 1 - \text{erf}\left[\frac{1}{\sqrt{4\text{Fo}}}\right] \end{aligned} \quad (9.5)$$

Die Auswertung dieser Gleichung liefert das dimensionslose Temperaturprofil und ist in Abbildung 9.5 dargestellt.



**Abbildung 9.5.** Temperaturverlauf in einem halbunendlichen Körper – konstante Oberflächentemperatur.

Der Darstellung kann entnommen werden, dass die anfängliche Temperaturdifferenz bei  $\eta = 1,8$  auf 1% ihres Ausgangswerts abfällt.

Dieser Wert wird häufig verwendet, um die Eindringtiefe oder Dicke der Temperaturgrenzschicht zu bestimmen:

$$\delta(t) = x(\eta = 1,8) = 3,6 \sqrt{at}.$$

Aus dem Temperaturprofil wird die Wärmestromdichte an der Oberfläche mithilfe des Fourierschen Gesetzes nach Gleichung (5.1) bestimmt:

$$\dot{q}'' \Big|_{x=0} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}.$$

Daraus ergibt sich:

$$\dot{q}'' \Big|_{x=0} = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi at}} (T_a - T_o).$$

Mit anderen Worten nimmt die Wärmestromdichte mit der Zeit stetig ab, sodass zum Zeitpunkt  $t$  die insgesamt übertragene Wärmemenge durch folgende Gleichung beschrieben wird:

$$\int_{t=0}^t \dot{q}'' \Big|_{x=0} dt = 2 \frac{\lambda}{\sqrt{\pi at}} (T_a - T_o).$$

#### Grundgleichung

**Dimensionsloses Temperaturprofil innerhalb eines halbunendlichen Körpers mit vernachlässigbarem Wärmeübergangswiderstand:**

$$\theta^* = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{4Fo}}\right), \quad (9.6)$$

für  $Bi \gg 1$ , wobei  $\theta^* = \frac{T - T_0}{T_a - T_0}$ , und  $Fo = \frac{at}{x^2}$ .

#### Grundgleichung

**Eindringtiefe einer halbunendlichen Platte bei vernachlässigbarem Wärmeübergangswiderstand:**

$$\delta(t) = 3,6 \sqrt{at}, \quad (9.7)$$

für  $Bi \gg 1$ .

**Grundgleichung**

**Wärmestromdichte in eine halbunendliche Platte bei vernachlässigbarem Wärmeübergangswiderstand:**

$$\dot{q}'' \Big|_{x=0} = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi a t}} (T_a - T_0), \quad (9.8)$$

für  $\text{Bi} \gg 1$ .

### 9.3.1 Fourierzahl

Die Fourierzahl spielt eine Rolle beim Verständnis von Wärmeübertragungsprozessen, insbesondere in transienten Wärmeleitungsszenarien. Diese dimensionslose Zahl ist nach dem renommierten Mathematiker und Physiker Joseph Fourier benannt, der bedeutende Beiträge zum Studium der Wärmeübertragung leistete. Die Fourierzahl wird definiert als das Verhältnis der thermischen Diffusivität, die die Fähigkeit eines Materials beschreibt, Wärme – relativ zu seiner Kapazität zur Wärmespeicherung – zu leiten, multipliziert mit der Zeit. Vereinfacht ausgedrückt quantifiziert die Fourierzahl das relative Verhältnis der Zeit, die für die Wärmeleitung innerhalb eines Festkörpers erforderlich ist, im Vergleich zur Zeit, die für die Speicherung thermischer Energie in diesem Material benötigt wird. Eine hohe Fourierzahl weist darauf hin, dass der Wärmeleitungsprozess im Vergleich zur Rate der thermischen Energiespeicherung schnell abläuft, was auf eine rasche Veränderung der Temperaturverteilung im Material hindeutet. Andererseits impliziert eine niedrige Fourierzahl, dass die Speicherung thermischer Energie im Material im Vergleich zur Geschwindigkeit der Wärmeleitung erheblich ist, was auf eine langsamere Veränderung der Temperaturverteilung im Laufe der Zeit hindeutet. Die Fourier-Zahl ist besonders nützlich in Szenarien, in denen sich die Temperatur in einem Festkörper dynamisch ändert, wie beispielsweise beim Erwärmen oder Abkühlen eines Materials. Im Ingenieurwesen und verwandten Disziplinen wird dieser dimensionslose Parameter häufig genutzt, um Wärmeübertragungsprozesse zu analysieren und vorherzusagen, was bei der Auslegung und Optimierung verschiedener thermischer Systeme hilfreich ist.

**Definition**

**Fourierzahl:**

$$Fo = \frac{\text{Diffusionsrate}}{\text{Einspeicherungsrate}} = \frac{a t}{L^2} (-), \quad (9.9)$$

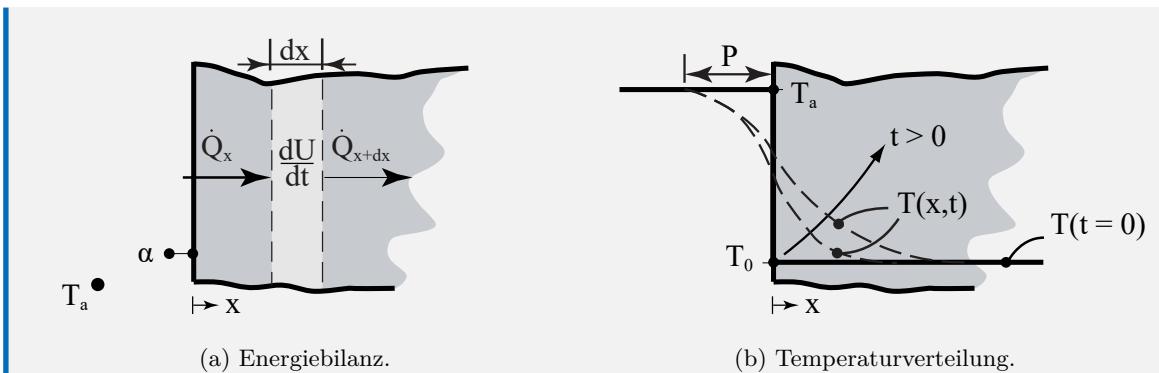
wobei  $L$  die charakteristische Länge ist.

### Halbunendliche Platte mit nicht vernachlässigbarem Wärmeübergangswiderstand

In der vorherigen Herleitung wird angenommen, dass die Temperatur an der Körperoberfläche für alle Zeiten  $t > 0$  der Umgebungstemperatur entspricht. Dies ist nur gültig, wenn der Wärmeübergangswiderstand klein im Vergleich zum Wärmeleitwiderstand im Körper ist, bzw. wenn  $\text{Bi} \gg 1$ .

**Derivation**

Dieses Szenario behandelt Situationen mit halbunendlichen Körpern, bei denen die Temperaturdifferenz zur Umgebung im Vergleich zur Temperaturdifferenz im Inneren des Körpers merklich höher ist. Um dies zu veranschaulichen, kann man an den Abkühlvorgang eines frisch gebackenen Gerichts wie einer Pastete oder eines Auflaufs denken. Sobald es aus einem heißen Ofen genommen wird, steht die Speise in einem Raum mit niedrigerer Temperatur. In der Umgebung der Speise wird sich eine Temperaturgrenzschicht ausbilden. Wie auch im Vorrangegangen Fall werden sich die äußeren Schichten aufgrund der kühleren Raumtemperatur schnell abkühlen, während das Innere noch eine höhere Temperatur aus dem ursprünglichen Garprozess aufweist. Wie schnell die Abkühlung vonstatten geht ist nun aber abhängig davon, wie schnell sich die Temperatur an der Oberfläche ändert und damit, wie gut der Wärmeübergang zur oder von der Umgebung stattfindet.



**Abbildung 9.6.** Erwärmung einer halbunendlichen Platte mit nicht vernachlässigbarem Wärmeübergangswiderstand.

### 1 Aufstellen der Bilanz:

Siehe Herleitung zur halbunendlichen Platte mit gegebener Oberflächentemperatur.

### 2 Definition der Bilanzelemente:

Siehe Herleitung zur halbunendlichen Platte mit gegebener Oberflächentemperatur.

### 3 Einsetzen und Umstellen:

Dennoch bleibt dieselbe Differentialgleichung gültig:

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial \eta^2} + 2\eta \frac{\partial \theta^*}{\partial \eta} = 0.$$

### 4 Definition der Rand- und/oder Anfangsbedingung(en):

Kann der Wärmeübergangswiderstand nicht vernachlässigt werden, so ergibt sich eine Oberflächentemperatur, die zwischen der Umgebungstemperatur und der Anfangstemperatur des Körpers liegt.

Zu Beginn herrscht im Körper eine homogene Temperaturverteilung:

$$\left. \begin{array}{l} t = 0 \\ 0 < x < \infty \end{array} \right\} T = T_0.$$

Für  $x = 0$  wird eine neue Randbedingung eingeführt, die sich aus einer Energiebilanz an der an der Oberfläche ergibt:

$$\left. \begin{array}{l} t > 0 \\ x = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{\alpha}{\lambda} (T(x=0) - T_U).$$

Diese Beziehung wird in Abbildung 9.6b anschaulich dargestellt. Die Extrapolationen aller Gradientenlinien schneiden sich im Punkt P, der durch die Koordinaten  $T_U$  und  $-\frac{\lambda}{\alpha}$  gegeben ist.

Da es sich um einen halbunendlichen Körper handelt, dringt die Wärme zu keinem Zeitpunkt durch den gesamten Körper, und die 2. Randbedingung bleibt erhalten, somit liegt die

Temperatur für  $x \rightarrow \infty$  immer bei  $T_0$ :

$$\left. \begin{array}{l} t > 0 \\ x \rightarrow \infty \end{array} \right\} T = T_0.$$

### 5 Lösen der Gleichung:

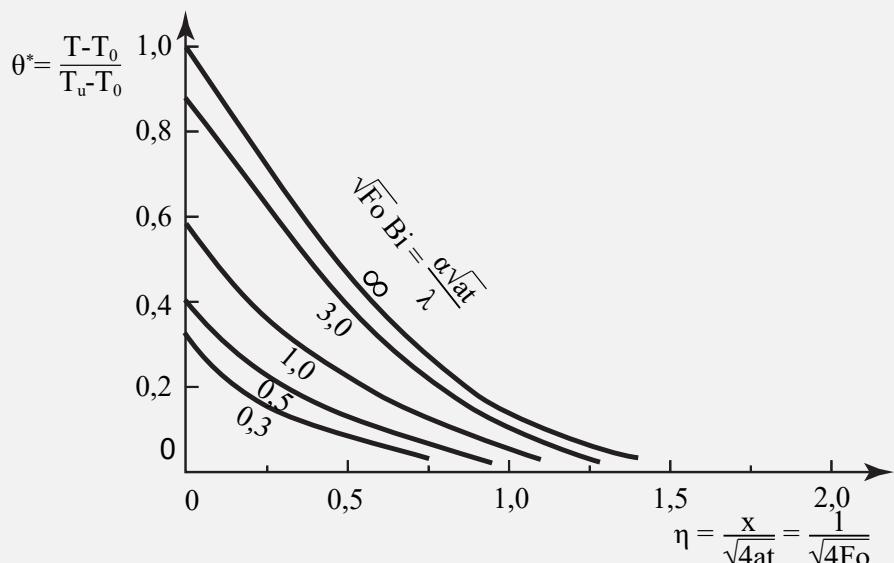
Mit diesen Anfangs- und Randbedingungen ist der Rechenaufwand zur Lösung der Differentialgleichung deutlich höher als zuvor. Eine detaillierte Erörterung findet sich bei Schneider [2].

Für das Temperaturprofil ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\theta^* = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{4Fo}}\right) - [\exp(Bi + Fo Bi^2)] \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{4Fo}} + \sqrt{Fo} \cdot Bi\right) \right],$$

wobei  $\theta^* = \frac{T-T_0}{T_u-T_0}$ ,  $Fo = \frac{at}{x^2}$  und  $Bi = \frac{\alpha x}{\lambda}$ .

Die Lösung dieser Gleichung wird in Abbildung 9.7 gezeigt. Der zuvor diskutierte Fall vernachlässigbarer Wärmeübergangswiderstände stellt damit den Grenzfall  $\sqrt{Fo} Bi \rightarrow \infty$  dar, wie im Diagramm zu sehen ist.



**Abbildung 9.7.** Die Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit bei einem halbunendlichen Körper mit endlichem Konvektions-Wärmeübergangswiderstand.

### Grundgleichung

**Temperaturprofile in einer halbunendlichen Platte mit nicht-vernachlässigbarem Wärmeübergangswiderstand:**

$$\theta^* = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{4Fo}}\right) - [\exp(Bi + Fo Bi^2)] \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{4Fo}} + \sqrt{Fo} \cdot Bi\right) \right] \quad (9.10)$$

wobei  $\theta^* = \frac{T-T_0}{T_u-T_0}$ ,  $Fo = \frac{at}{x^2}$  und  $Bi = \frac{\alpha x}{\lambda}$ .

## ABSCHNITT 9.4

**Dimensionslose Kennzahlen und Heisler-Diagramme**

In den vorangegangenen Abschnitten wurden mehrere Beispiele aufgeführt, die relativ einfache analytische Lösungen Wärmeleitungsgleichung (5.2) besitzen.

In Systemen mit komplizierter Geometrie oder Rand- und Anfangsbedingungen genügen analytische Lösungen jedoch nicht. Dazu stehen heutzutage numerische Lösungen auf Basis der Finite-Differenzen-Methode zur Verfügung. Einer der größten Nachteile solcher Verfahren ist jedoch die Tatsache, dass das Temperaturfeld im Allgemeinen von einer großen Anzahl Parameter abhängt:

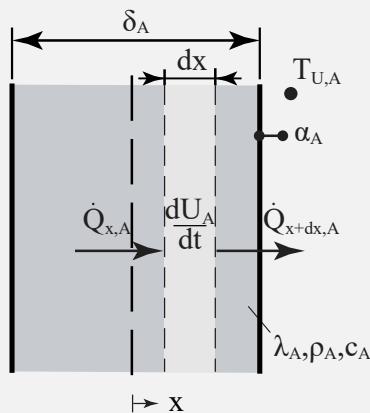
$$T = T(x, y, z, t, \rho, c, \lambda, \text{Anfangs- und Randbedingungen}),$$

und dass, wenn sich einer dieser Parameter ändert, die gesamte Berechnung neu durchgeführt werden muss.

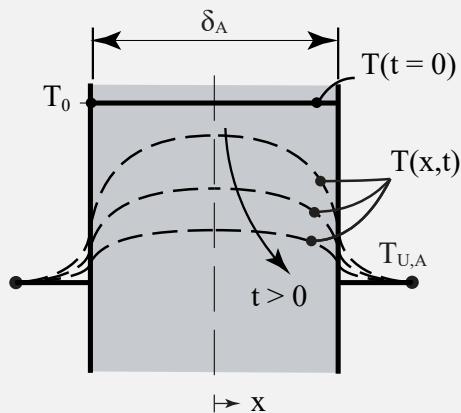
Im Folgenden wird an einem einfachen Beispiel der instationären Wärmeleitung in einer Platte gezeigt, dass sich die Anzahl der abhängigen Parameter durch Einführung dimensionsloser Kennzahlen deutlich reduziert, von denen einige bereits in vorherigen Beispielen erörtert wurden.

**Derivation**

Es werden zwei Platten betrachtet, deren Länge deutlich größer als deren Dicke ist, und die zu einem gegebenen Zeitpunkt in eine neue Umgebung mit anderen Temperaturen gebracht werden. Die Dicke der Platte, ihre Anfangstemperatur, die neue Umgebungstemperatur, die Materialeigenschaften und die Randbedingungen werden für die erste Platte mit A und für die zweite Platte mit B gekennzeichnet.

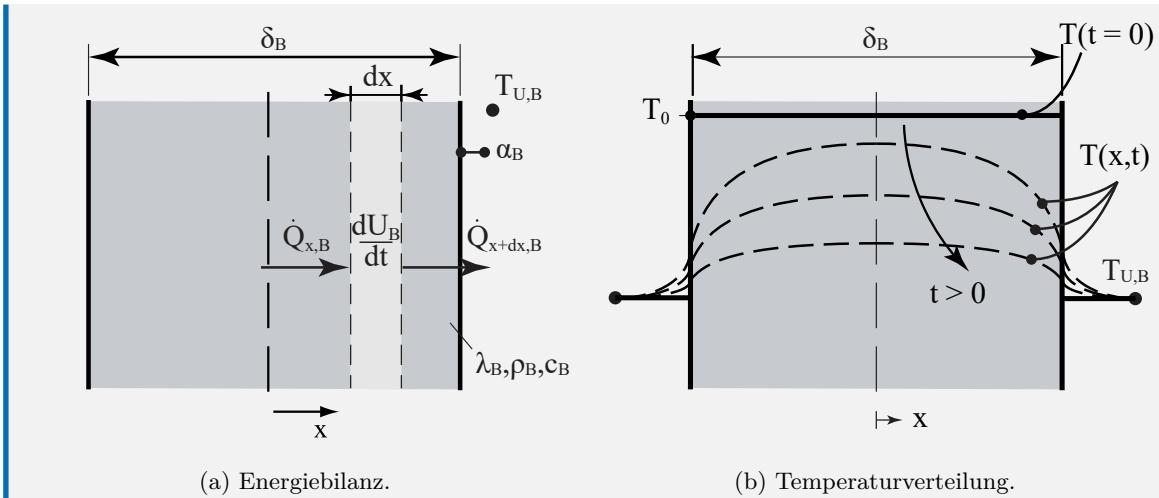


(a) Energiebilanz.



(b) Temperaturverteilung.

**Abbildung 9.8.** Instationärer Wärmeübergang für Plattenkonfiguration A.



**Abbildung 9.9.** Instationärer Wärmeübergang für Plattenkonfiguration B.

1 Aufstellen der Bilanz:

System A

$$\frac{\partial U_A}{\partial t} = \dot{Q}_{x,A} - \dot{Q}_{x+dx,A},$$

System B

$$\frac{\partial U_B}{\partial t} = \dot{Q}_{x,B} - \dot{Q}_{x+dx,B}.$$

2 Definition der Bilanzelemente:

System A

$$\frac{\partial U_A}{\partial t} = \rho_A c_A A dx \frac{\partial T_A}{\partial t},$$

System B

$$\frac{\partial U_B}{\partial t} = \rho_B c_B A dx \frac{\partial T_B}{\partial t}.$$

$$\dot{Q}_{x,A} - \dot{Q}_{x+dx,A} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_A A \frac{\partial T_A}{\partial x} \right) \cdot dx,$$

$$\dot{Q}_{x,B} - \dot{Q}_{x+dx,B} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_B A \frac{\partial T_B}{\partial x} \right) \cdot dx.$$

3 Einsetzen und Umstellen:

System A

$$\frac{\partial T_A}{\partial t} = \left( \frac{\lambda}{\rho c} \right)_A \frac{\partial^2 T_A}{\partial x^2},$$

System B

$$\frac{\partial T_B}{\partial t} = \left( \frac{\lambda}{\rho c} \right)_B \frac{\partial^2 T_B}{\partial x^2}.$$

4 Definition der Rand- und/oder Anfangsbedingung(en):

Mit der Anfangsbedingung:

$$T(t=0) = T_0.$$

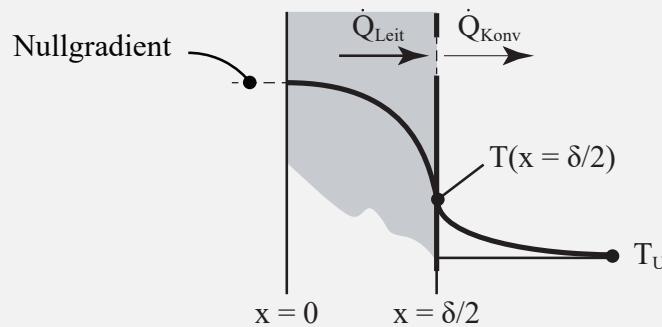


Abbildung 9.10. Randbedingungen an der Oberfläche.

In der Mitte herrscht Symmetrie, daher lautet die erste Randbedingung:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0.$$

An der Grenzfläche zwischen Feststoff und Fluid wird die Wärme von der Wärmeleitung im Feststoff an das Fluid durch Konvektion übertragen. Eine Energiebilanz an dieser Grenzfläche ergibt die zweite Randbedingung:

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=\frac{\delta}{2}} = \alpha \left( T \left( x = \frac{\delta}{2} \right) - T_U \right).$$

### 5 Lösen der Gleichung:

Die Differentialgleichungen können in einer dimensionslosen Form geschrieben werden. Zu diesem Zweck wurden Bezugsgrößen ausgewählt, die das System charakterisieren. Die Geometrie beider Platten wird durch die Plattendicke  $\delta$  beschrieben. Ist der Wärmeleitprozess in der Zeit periodisch, so ist der Prozess ähnlich, wenn sich lediglich die Periodendauer  $\tau$  für beide Platten unterscheidet. Die Temperatur bzw. die Temperaturdifferenz  $\theta = T - T_U$  wird auf die charakteristische Temperaturdifferenz  $\theta_0 = T_0 - T_U$  des Systems bezogen.

Daraus ergeben sich die dimensionslosen Variablen:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x_A}{\delta_A} = \frac{x_B}{\delta_B}, \\ t^* &= \frac{t_A}{\tau_A} = \frac{t_B}{\tau_B}, \text{ und} \\ \theta^* &= \frac{\theta_A}{\theta_{A_0}} = \frac{\theta_B}{\theta_{B_0}}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichungen für das Temperaturfeld ergeben sich:

System A

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} = \left( \frac{a_A \tau_A}{\delta_A^2} \right) \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}},$$

System B

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} = \left( \frac{a_B \tau_B}{\delta_B^2} \right) \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}}.$$

Somit sind die Differentialgleichungen identisch, wenn die Fourierzahlen:

$$Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\tau}{\delta^2},$$

beider Systeme gleich sind. Die Gleichheit der Parameter, die in die Fourierzahl eingehen, ist dazu nicht notwendig. Die dimensionslosen Temperaturfelder sind jedoch nur dann gleich, wenn auch die Randbedingungen beider Systeme identisch sind.

In dimensionsloser Form lauten die Anfangs- und Randbedingungen:

System A

$$\theta^* = 1,$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right|_{x=0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right|_{x=\frac{\delta_A}{2}} = - \frac{\alpha_A \delta_A}{\lambda_A} \left. \theta^* \right|_{x=\frac{\delta_A}{2}},$$

System B

$$\theta^* = 1,$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right|_{x=0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right|_{x=\frac{\delta_B}{2}} = - \frac{\alpha_B \delta_B}{\lambda_B} \left. \theta^* \right|_{x=\frac{\delta_B}{2}}.$$

Somit sind die Randbedingungen identisch, wenn die Biot-Zahlen:

$$Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda}$$

beider Systeme gleich sind.

Soll das System auf dreidimensionale Körper erweitert werden, so ist das dimensionslose Temperaturfeld durch die folgenden dimensionslosen Parameter darzustellen:

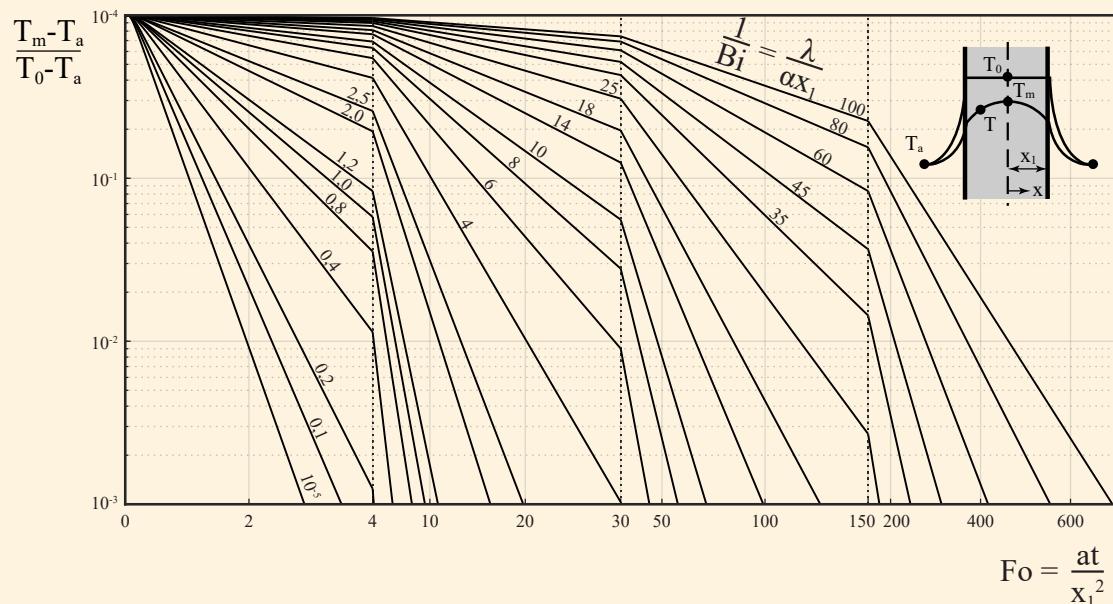
$$\begin{aligned} \frac{T - T_a}{T_0 - T_U} &= \frac{T - T_U}{T_0 - T_U} \left( \frac{x}{\delta_1}, \frac{y}{\delta_2}, \frac{z}{\delta_3}, \frac{t}{\tau}, \left( \frac{a\tau}{\delta^2} \right)_{1,2,3}, \left( \frac{\alpha\delta}{\lambda} \right)_{1,2,3} \right) \\ &= \frac{T - T_U}{T_0 - T_U} (x^*, y^*, z^*, t^*, Fo_{1,2,3}, Bi_{1,2,3}). \end{aligned}$$

Für einfache symmetrische Körper (Platte, Zylinder und Kugel) ist die Lösung in den sogenannten Heisler-Diagrammen dargestellt, welche auf den nachfolgenden Seiten gezeigt werden. Sie geben die Temperatur in Abhängigkeit von Zeit und Ort sowie die abgegebene Wärme in Abhängigkeit der Zeit wieder.

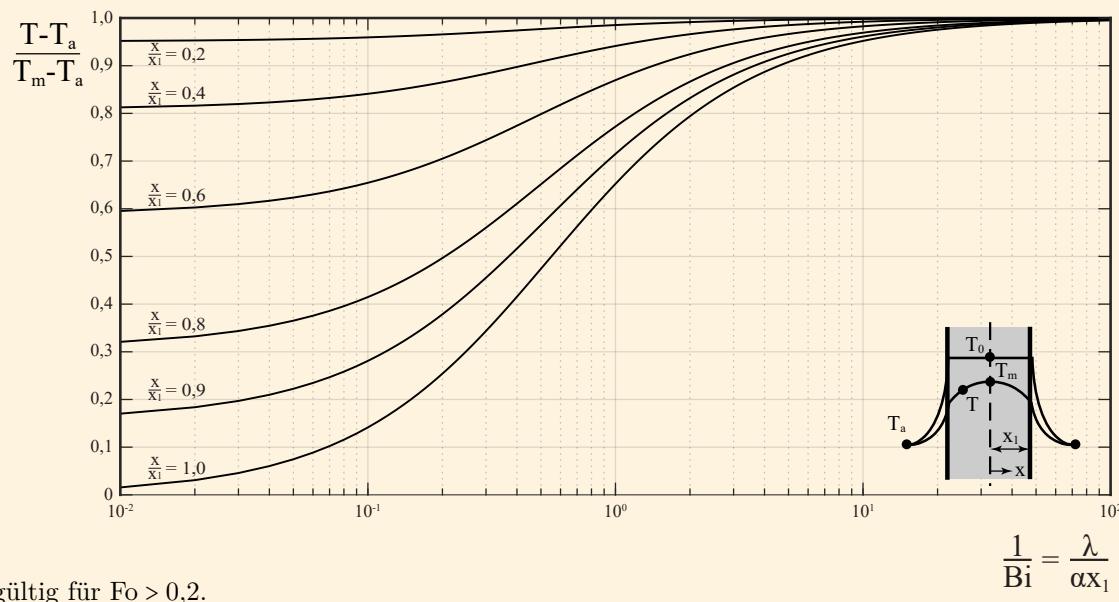
Die zuvor erwähnten Beispiele werden jeweils mit diesen Parametern hergeleitet. Die analytischen oder numerischen Lösungen der Differentialgleichungen werden oft in Diagrammen mit diesen dimensionslosen Kennzahlen dargestellt. Drei Beispiele werden betrachtet, die nützlich sind, um viele praktische Probleme abzuschätzen. Diese Beispiele zeigen das Temperaturprofil und die übertragene Wärme während des Abkühlens (oder Aufheizens) ausgedehnter Platten, langer Zylinder und Kugeln, deren Umgebungstemperaturen zu einem bestimmten Zeitpunkt sprunghaft geändert wurden. Obwohl sich diese eindimensionalen Probleme analytisch lösen lassen, empfiehlt es sich aufgrund der aufwendigen Rechnungen, die von [3] dargestellten Diagramme zu verwenden.

Ähnliche Diagramme, welche in der Formelsammlung aufgeführt sind, zeigen die Temperatur in der Plattenmitte in Abhängigkeit von der Zeit für Platte, Zylinder und Kugel sowie zusätzliche Diagramme zur Bestimmung der Temperaturen an anderen Stellen im Körper. Durch geeignete Interpolation kann hieraus der Wärmeverlust des Körpers in Abhängigkeit von der Zeit bestimmt werden.

## Grundgleichung

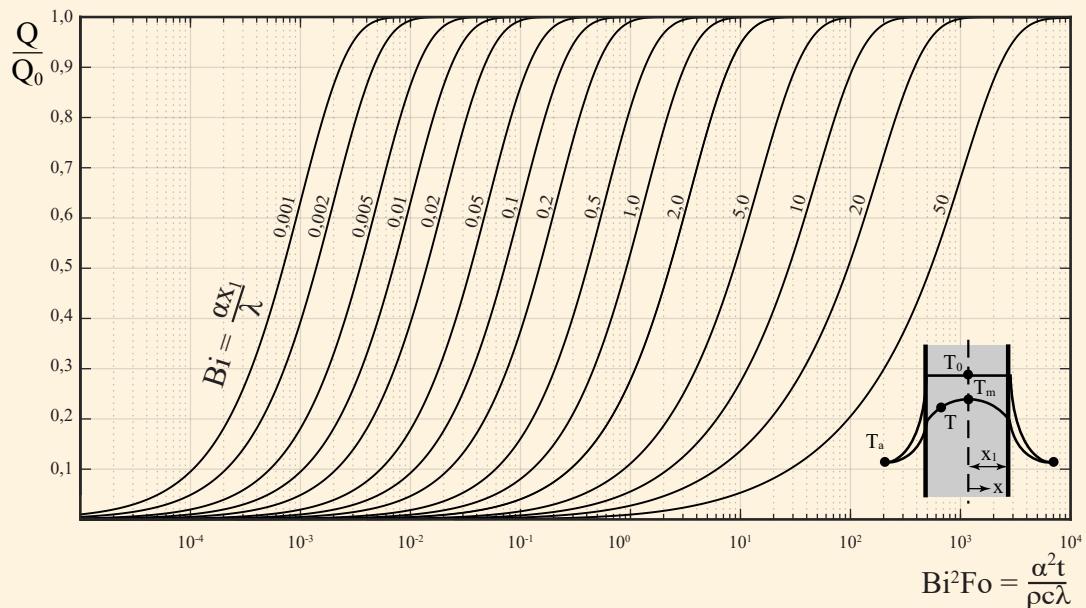
Temperatur in der Mitte einer Platte der Dicke  $2x_1$  [4]:

## Grundgleichung

Temperaturverteilung innerhalb einer Platte der Dicke  $2x_1$  [4]:gültig für  $Fo > 0,2$ .

## Grundgleichung

## Wärmeverlust einer Platte [4]:



wobei  $Q = mc(T(t) - T_a)$  und  $Q_0 = mc(T_0 - T_a)$ .

## HEATQUIZ 9.1

## Temperaturprofile:



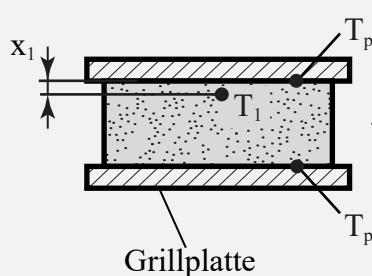
## Energiebilanzen:



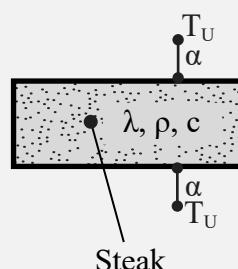
## Demonstration 9.1

Um das perfekte Steak zuzubereiten, wird ein Stück Fleisch in drei Schritten zubereitet: Zunächst wird das Steak kurzzeitig zwischen zwei heißen Grillplatten angebraten. Anschließend kühlt das Steak ab, bis es überall Raumtemperatur erreicht hat. Schließlich wird das Steak im Ofen bei niedriger Temperatur fertig gegart.

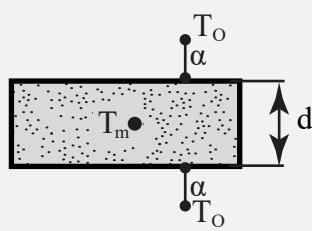
## 1. Anbraten



## 2. Abkühlen



## 3. Garen im Ofen



**Gegebene Parameter:**

- Umgebungstemperatur:  $T_U = 25 \text{ } ^\circ\text{C}$
- Temperatur der Grillplatten:  $T_P = 800 \text{ } ^\circ\text{C}$
- Endtemperatur an Ort 1:  $T_{1,E} = 250 \text{ } ^\circ\text{C}$
- Ofentemperatur:  $T_O = 110 \text{ } ^\circ\text{C}$
- Maximale Kerntemperatur:  $T_{C,\max} = 59 \text{ } ^\circ\text{C}$
- Dichte:  $\rho = 930 \text{ kg/m}^3$
- Spezifische Wärmeleitfähigkeit:  $\lambda = 0.6 \text{ W/mK}$
- Spezifische Wärmekapazität:  $c_p = 2900 \text{ J/kgK}$
- Fleischdicke:  $d = 3 \text{ cm}$
- Abstand von Punkt 1 zur Oberfläche:  $x_1 = 3 \text{ mm}$
- Wärmeübergangskoeffizient im Ofen:  $\alpha = 20 \text{ W/m}^2\text{K}$

**Hinweise:**

- In allen Teilaufgaben ist das Steak als flache Platte zu betrachten, bei der nur in vertikaler Richtung eindimensionale Wärmeleitung auftritt.
- Alle Stoffwerte sind konstant und isotrop.
- Grillplatten- und Ofentemperatur sind zeitlich und räumlich konstant.
- Vernachlässige den Wärmeübergangswiderstand zwischen Grillplatte und Fleischstück.
- Vernachlässige Wärmestrahlung in allen Teilaufgaben.

**Aufgaben:**

- a) Bestimme die Zeit  $t_1$  für das sehr kurze Anbraten. Das Anbraten soll unterbrochen werden, wenn an Position 1 in Oberflächennähe ( $x_1 = 3 \text{ mm}$ ) die Temperatur  $T_{1,E} = 250 \text{ } ^\circ\text{C}$  erreicht wird. Vor dem Anbraten hat das Fleisch eine homogene Temperatur von  $T_U$ . Während des Anbratens wird angenommen, dass eine thermische Eindringtiefe von  $\delta \ll d/2$  vorliegt.
- b) Bestimme die Zeit  $t_2$  für das Fertiggaren im Ofen. Das Fleisch ist gar, wenn im Kern (in der Mitte des Fleischstücks) eine Kerntemperatur  $T_{C,\max} = 59 \text{ } ^\circ\text{C}$  erreicht wird. Der Wärmeübergang vom Ofen zum Fleisch geschieht ausschließlich durch Konvektion mit dem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$ .
- c) Skizziere qualitativ den zeitlichen Verlauf der Kerntemperatur  $T_C(t)$  während des Anbratens, Abkühlens und Fertiggarens im Ofen.
- d) Skizziere qualitativ den zeitlichen Verlauf von  $T_1(t)$  an Ort 1 während des Anbratens, Abkühlens und Fertiggarens im Ofen, bis das Fleischstück fertig ist.

**Video-Lösung:**

## Literatur

- [1] S. M. et Franklin, "Portraits et Histoire des Hommes Utiles, Collection de Cinquante Portrait." <http://web.mit.edu/2.51/www/fourier.jpg>, 1839. Accessed: 2023-07-16.
- [2] P. Schneider, *Conduction Heat Transfer*. Addison-Wesley Publishing Comp., 1955.
- [3] M. Heisler, "Temperature charts for induction and constant temperature heating," *Trans. ASME*, pp. 227–236, 1947.
- [4] A. L. Maßmeyer, S. Pielsticker, H. Askarizadeh Ravizi, and R. Kneer, "Übernahmeungenauigkeiten von Heisler- und Gröber-Diagrammen in der Standardliteratur zur Wärme- und Stoffübertragung," Jahrestreffen der DECHEMA/VDI-Fachgruppen Wärme- und Stoffübertragung und Trocknungstechnik, Magdeburg (Germany), 11 Mar 2024 - 13 Mar 2024, Mar 2024. Veröffentlicht auf dem Publikationsserver der RWTH Aachen University.

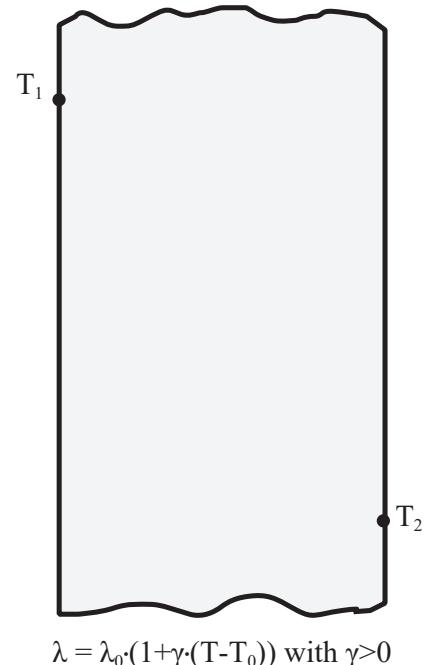
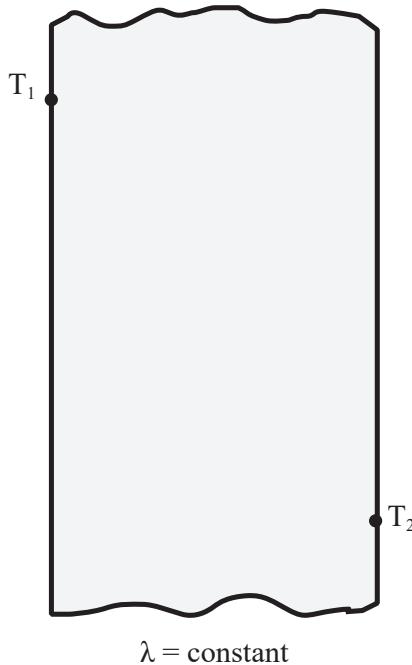
PART  
**VII**

## *Übungsaufgaben*

## ABSCHNITT II

**Übungen zur Wärmeleitung****Übung II.1:** (Temperaturprofile in ebenen Wänden ★)

Beide Seiten einer ebenen Wand werden auf konstante Temperaturen von  $T_1$  bzw.  $T_2$  erhitzt, wobei  $T_1 > T_2$  gilt.

**Aufgaben:**

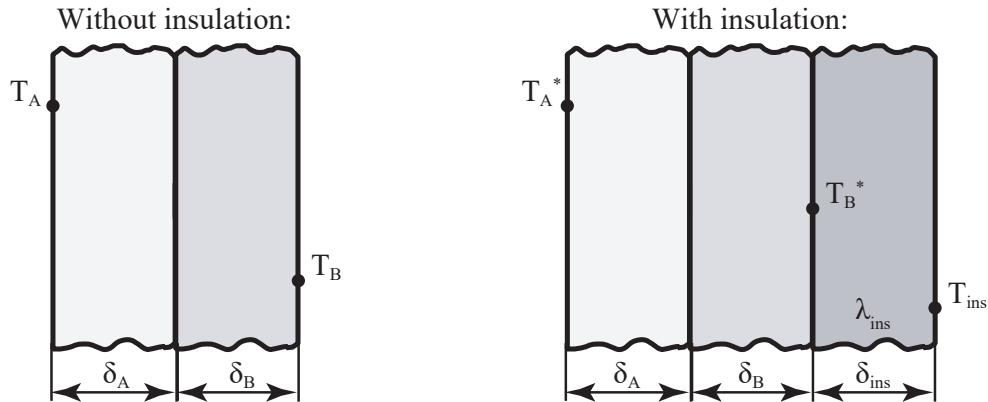
- Skizzieren Sie das stationäre Temperaturprofil bei konstanter Wärmeleitfähigkeit.
- Skizzieren Sie das stationäre Temperaturprofil, wenn die Wärmeleitfähigkeit temperaturabhängig ist:

$$\lambda = \lambda_0(1 + \gamma(T - T_0)) \quad \text{mit} \quad \gamma > 0,$$

wobei  $\lambda_0$  die Wärmeleitfähigkeit bei der Temperatur  $T_0$  ist.

**Übung II.2:** (Zwiebelschalenprinzip \*\*)

Ein Hersteller von Solarmodulen nutzt wärmetechnische Prozesse, darunter Vorwärmung, Aushärten, Wärmebehandlung und Endbearbeitung. Der Hersteller verfügt über einen alten und einen neuen Typ Industrieofen. Der neuere besitzt eine zusätzliche Dämmschicht.



**Gegebene Parameter:**

Alter Ofen:

- Oberflächentemperatur von Schicht A:  $T_A = 260 \text{ } ^\circ\text{C}$
- Oberflächentemperatur von Schicht B:  $T_B = 32 \text{ } ^\circ\text{C}$
- Dicke der Schicht A:  $\delta_A = 125 \text{ mm}$
- Dicke der Schicht B:  $\delta_B = 200 \text{ mm}$

Neuer Ofen:

- Oberflächentemperatur von Schicht A:  $T_A^* = 305 \text{ } ^\circ\text{C}$
- Oberflächentemperatur von Schicht B:  $T_B^* = 219 \text{ } ^\circ\text{C}$
- Oberflächentemperatur der Dämmschicht:  $T_{ins} = 27 \text{ } ^\circ\text{C}$
- Dicke der Schicht A:  $\delta_A = 125 \text{ mm}$
- Dicke der Schicht B:  $\delta_B = 200 \text{ mm}$
- Dicke der Dämmschicht:  $\delta_{ins} = 25 \text{ mm}$
- Wärmeleitfähigkeit der Dämmschicht:  $\lambda_{ins} = 0.075 \text{ W/mK}$

**Hinweis:**

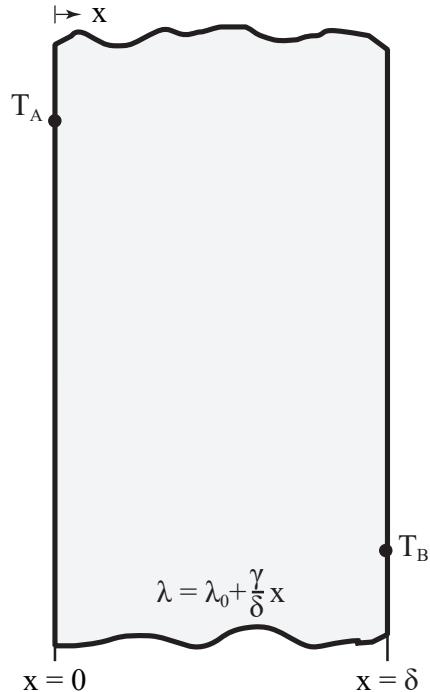
- Nehmen Sie stationäre Bedingungen an.

**Aufgaben:**

- a) Bestimmen Sie die Wärmestromdichte  $\dot{q}''$  für die Situationen ohne und mit Dämmschicht.

**Übung II.3:** (Wärmeleitungsgleichung ★★★)

Beide Seiten einer ebenen Wand werden auf konstante Temperaturen von  $T_A$  bzw.  $T_B$  gehalten; wobei  $T_A > T_B$ .



**Gegebene Parameter:**

- Wärmeleitfähigkeit als Funktion der Position in der Wand:

$$\lambda(x) = \lambda_0 + \frac{\gamma}{\delta} \cdot x.$$

**Hinweise:**

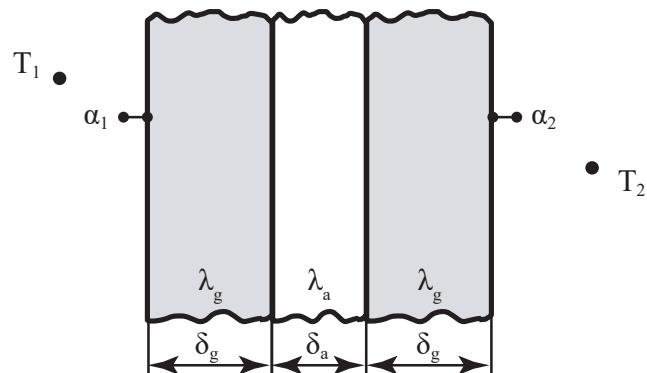
- Nehmen Sie eindimensionale stationäre Wärmeleitung in  $x$ -Richtung an.

**Aufgaben:**

- a) Leiten Sie die Funktion des Temperaturprofils in der ebenen Wand her.
- b) Skizzieren Sie das Temperaturprofil in der ebenen Wand in  $x$ -Richtung.

**Übung II.4:** (Fensterdämmung \*)

Betrachten Sie ein 1,2 m hohes und 2 m breites Doppelglasfenster, das aus zwei Glasscheiben besteht, die durch einen ruhenden Luftraum voneinander getrennt sind. An der Innen- und Außenseite des Fensters findet Konvektion statt. Wärmeübertragung durch Strahlung wird vernachlässigt.

**Gegebene Parameter:**

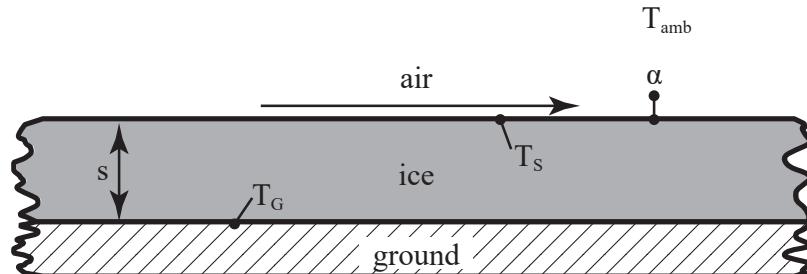
- Wärmeleitfähigkeit von Glas:  $\lambda_g = 0.78 \text{ W/mK}$
- Wärmeleitfähigkeit von Luft:  $\lambda_a = 0.026 \text{ W/mK}$
- Dicke der Glasschicht:  $\delta_g = 3 \text{ mm}$
- Dicke der Luftsicht:  $\delta_a = 15 \text{ mm}$
- Konvektionskoeffizient innen:  $\alpha_1 = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$
- Konvektionskoeffizient außen:  $\alpha_2 = 25 \text{ W/m}^2\text{K}$
- Innentemperatur:  $T_1 = 22 \text{ }^\circ\text{C}$
- Außentemperatur:  $T_2 = -7 \text{ }^\circ\text{C}$

**Aufgaben:**

- Bestimmen Sie die stationäre Wärmestromrate durch dieses Doppelglasfenster sowie die Temperatur seiner inneren Oberfläche.
- Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit einer Dreifachverglasung (Glasscheiben mit [3]mm Dicke) und zwei ruhenden, mit Krypton gefüllten Luftsichten ( $\delta_k = [8]\text{mm}$ ,  $\lambda_k = [0.00949]\text{WmK}$ ).
- Diskutieren Sie den Grund für die Wahl einer Dreifachverglasung und überprüfen Sie alle in den Teilaufgaben a) und b) getroffenen Annahmen.

**Übung II.5:** (Eisschicht \*\*)

An einem kalten Wintertag ist der Boden von einer Eisschicht der Dicke  $s$  bedeckt. Luft strömt über die Eisschicht. Das Problem ist eindimensional und stationär. Auf dem Eis bildet sich keine Wasserschicht.

**Gegebene Parameter:**

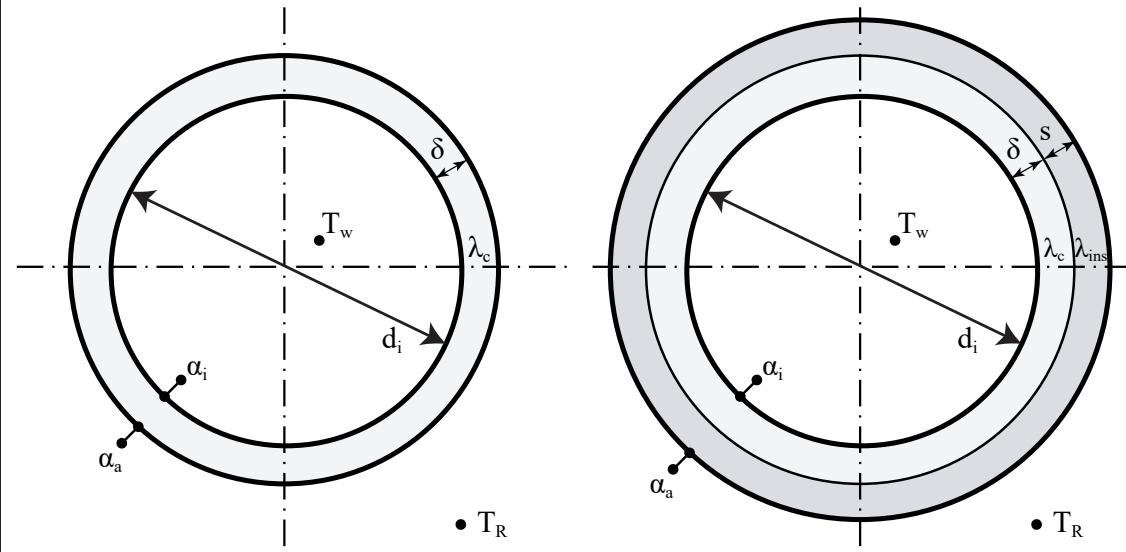
- Wärmeleitfähigkeit von Eis:  $\lambda = 2.2 \text{ W/mK}$
- Wärmeübergangskoeffizient an der Eisoberfläche:  $\alpha = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$
- Temperatur der Luft:  $T_{\text{amb}} = 5 \text{ }^{\circ}\text{C}$
- Temperatur des Eises an der Oberfläche:  $T_s = -3 \text{ }^{\circ}\text{C}$
- Temperatur des Eises am Boden:  $T_G = -10 \text{ }^{\circ}\text{C}$
- Temperatur der Luft:  $T_{\text{amb}} = 5 \text{ }^{\circ}\text{C}$

**Aufgaben:**

- Bestimmen Sie die Dicke  $s$  der Eisschicht.

**Übung II.6:** (Warmwasserrohr ★★★)

In einem Raum wird ein Kupferrohr zur Führung von Warmwasser eingesetzt. Dieses Kupferrohr besitzt einen Innendurchmesser  $d_i$  und eine Wandstärke  $\delta$ . An einem kalten Wintertag wird zusätzlich eine Dämmstoffschicht mit der Dicke  $s$  angebracht.

**Gegebene Parameter:**

- Wärmeübergangskoeffizient an der Rohrinnenseite:  $\alpha_i = 2300 \text{ W/m}^2\text{K}$
- Wärmeübergangskoeffizient an der Rohraußenseite:  $\alpha_a = 6 \text{ W/m}^2\text{K}$
- Raumtemperatur:  $T_R = 20 \text{ }^\circ\text{C}$
- Wassertemperatur:  $T_W = 80 \text{ }^\circ\text{C}$
- Wärmeleitfähigkeit von Kupfer:  $\lambda_c = 372 \text{ W/mK}$
- Wärmeleitfähigkeit des Dämmmaterials:  $\lambda_{ins} = 0.042 \text{ W/mK}$
- Innendurchmesser des Kupferrohrs:  $d_i = 6 \text{ mm}$
- Wandstärke des Kupferrohrs:  $\delta = 1 \text{ mm}$
- Dicke der Dämmstoffschicht:  $s = 4 \text{ mm}$

**Hinweis:**

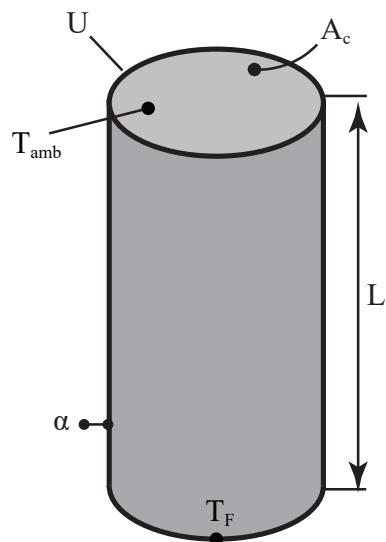
- Änderungen des Wärmeübergangskoeffizienten an der Rohraußenseite in Abhängigkeit vom Durchmesser werden vernachlässigt.

**Aufgaben:**

- a) Berechnen Sie die pro Längeneinheit des Rohrs abgegebene Wärmeleistung  $\dot{q}'$  sowohl für das ungedämmte als auch für das gedämmte Rohr. Welche bemerkenswerten Beobachtungen lassen sich aus Ihren Ergebnissen ableiten?
- b) Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf der Wärmeabgabe  $\dot{q}'$  in Abhängigkeit von der Dicke der Dämmung für unterschiedliche Wärmeleitfähigkeiten des Dämmmaterials. Erläutern Sie die zugrunde liegenden physikalischen Prinzipien.
- c) Berechnen Sie die erforderliche Wärmeleitfähigkeit des Dämmmaterials, um unabhängig von der Dämmstärke stets eine Verringerung des Wärmeverlustes zu erreichen.

**Übung II.7:** (Stiftrippenkühlung an Gasturbinenschaufeln ★★)

Eine Stiftrippe wird zur Kühlung an Gasturbinenschaufeln verwendet. Gegeben ist eine Stiftrippe der Länge  $L$ , deren Spitzentemperatur der Umgebung  $T_{\text{amb}}$  entspricht.



**Gegebene Parameter:**

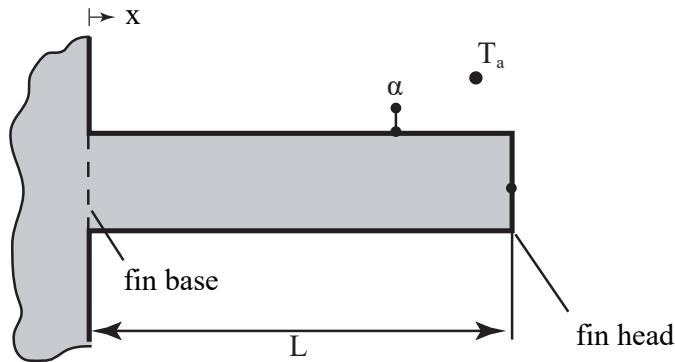
- Geometrie der Rippe:  $U, A_c, L$
- Materialeigenschaften der Rippe:  $\lambda$
- Wärmeübergangskoeffizient an der Oberfläche:  $\alpha$
- Temperatur an der Rippenbasis und Umgebungstemperatur:  $T_F, T_{\text{amb}}$

**Aufgaben:**

- a) Leiten Sie die Wärmeleitungsgleichung für das gegebene Problem her.
- b) Leiten Sie die Funktion des Temperaturprofils innerhalb der Rippe her.
- c) Geben Sie den Ausdruck für die Wärmeverlustleistung in Abhängigkeit der gegebenen Parameter an.

**Übung II.8:** (Neues Rippenmaterial ★★)

Ein Hersteller von Elektromotoren verwendet Rippen zu Kühlzwecken. Er erwägt, das Material der Rippen von Kupfer auf Aluminium zu ändern. Da die Länge  $L$  der Rippe ebenfalls modifiziert wird, bleibt die Temperatur an der Rippenspitze für beide Materialien identisch. Allerdings versteht er den Einfluss einer solchen Änderung auf die Kühlleistung nicht.



**Gegebene Parameter:**

- Wärmeleitfähigkeit von Kupfer:  $\lambda_C$
- Wärmeleitfähigkeit von Aluminium:  $\lambda_A$

**Hinweise:**

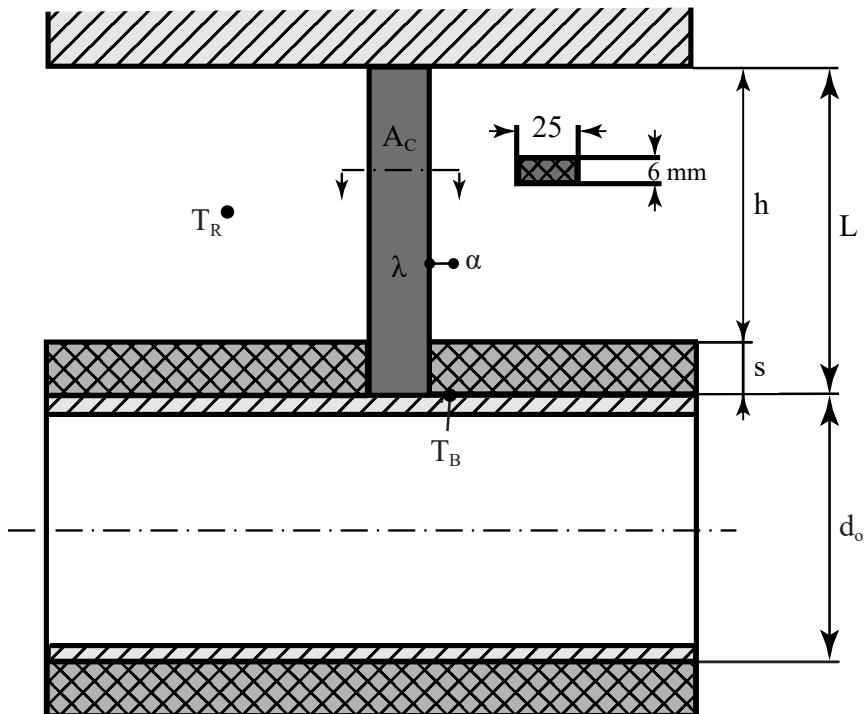
- Der Querschnitt und die Dicke bleiben unverändert.
- Es gibt keine Änderung des konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten.
- Die Temperatur an der Rippenbasis ändert sich nicht.
- Für beide Rippen ist der Wärmestrom durch die Spitze vernachlässigbar.

**Aufgaben:**

- a) Bestimmen Sie das Verhältnis zwischen dem Wärmestrom der Aluminium- und der Kupferrippe in Abhängigkeit der gegebenen Parameter.

**Übung II.9:** (Rohrbefestigung ★★★)

Ein Rohr mit Sole ist mit Kork isoliert und mit am Rohr angeschweißten Stahlbändern an der Decke befestigt.



**Gegebene Parameter:**

- Außendurchmesser des Rohrs:  $d_o = 50 \text{ mm}$
- Isolationsdicke:  $s = 40 \text{ mm}$
- Querschnitt des Stahlbands:  $A_c = 25 \times 6 \text{ mm}^2$
- Länge des Stahlbands:  $L = 290 \text{ mm}$
- Wärmeübergangskoeffizient an der Oberfläche des Stahlbands:  $\alpha = 6 \text{ W/m}^2\text{K}$
- Wärmeleitfähigkeit des Stahlbands:  $\lambda = 58 \text{ W/mK}$
- Temperatur der Außenwand des Solerohrs:  $T_B = -23,5 \text{ }^\circ\text{C}$
- Temperatur des Raums:  $T_R = 20 \text{ }^\circ\text{C}$

**Hinweise:**

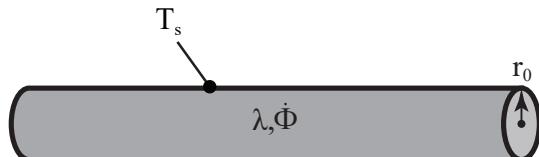
- Die Temperaturverteilung im Querschnitt des Stahlbands ist homogen.
- Die Wärmeflüsse von den Stahlbändern sowohl in die Decke als auch in die Isolierung sind vernachlässigbar.

**Aufgaben:**

- a) Berechnen Sie die Wärme  $\dot{Q}$  eines Stahlbands, die von der Sole aufgenommen wird.
- b) Bis zu welcher Höhe  $h_0$  bildet sich Reif am Stahlband ( $h_0$  ist der Abstand von der Oberfläche der Isolationsschicht des Rohrs), wenn der Dampfgehalt der Luft im umgebenden Raum über dem Sättigungsdampfdruck bei der maximalen Stahlbandtemperatur liegt?

**Übung II.10:** (Widerstandsdraht \*)

Ein langer homogener Widerstandsdräht wird verwendet, um die Luft in einem Raum durch das Anlegen eines elektrischen Stroms zu erwärmen. Dabei wird im Draht aufgrund der Widerstandserwärmung homogen mit einer konstanten Rate  $\dot{\Phi}'''$  Wärme erzeugt.

**Gegebene Parameter:**

- Außenradius des Drahtes:  $r_0 = 5 \text{ mm}$
- Wärmefreisetzung im Draht:  $\dot{\Phi}''' = 5 \cdot 10^7 \text{ W/m}^3$
- Temperatur der Drahtoberfläche:  $T_s = 180 \text{ }^\circ\text{C}$
- Wärmeleitfähigkeit des Drahtes:  $\lambda = 6 \text{ W/mK}$

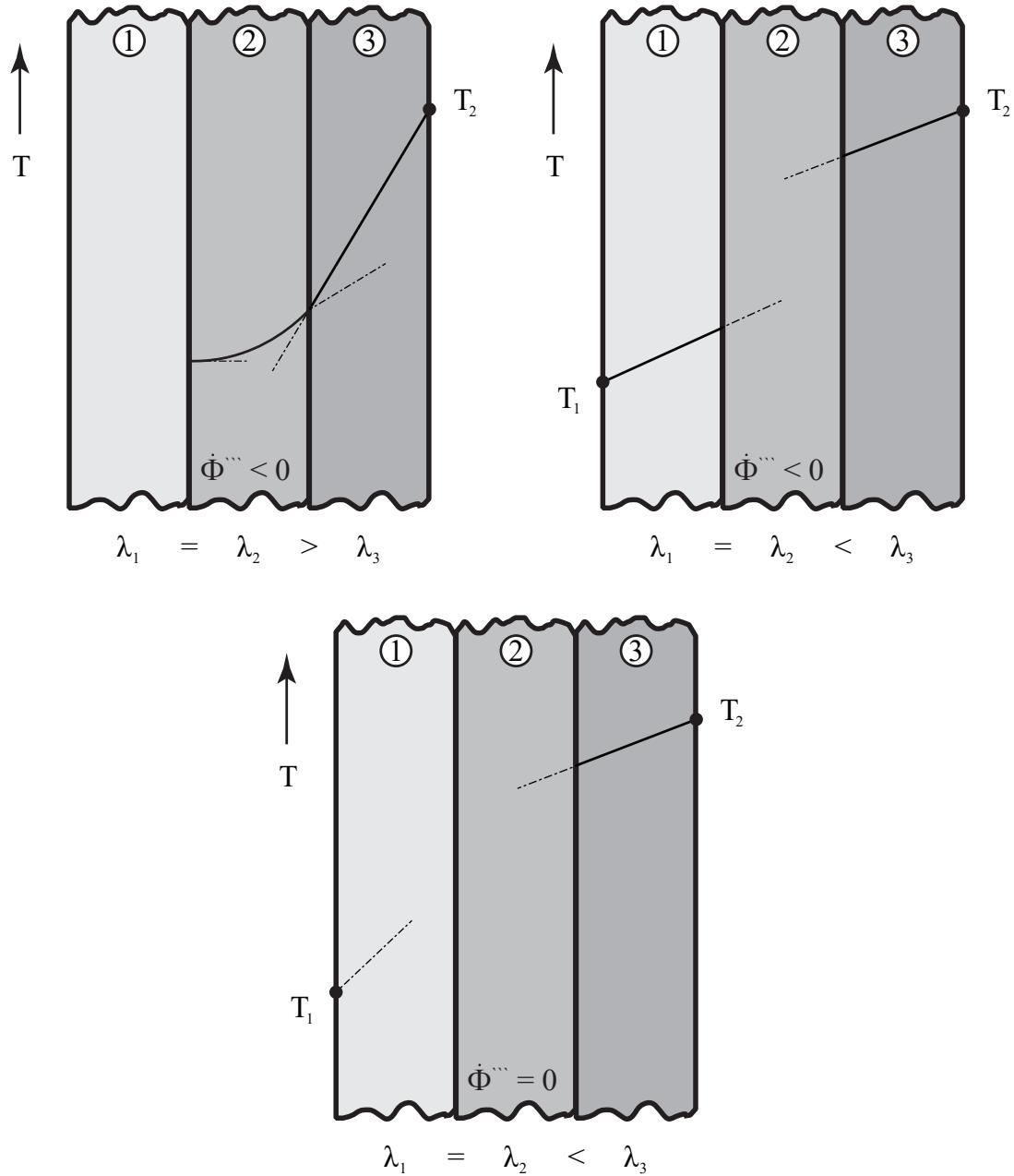
**Hinweise:**

- Das Problem ist eindimensional in radialer Richtung.
- Es wird ein stationärer Zustand angenommen.

**Aufgaben:**

- a) Leiten Sie die Wärmeleitungsgleichung auf Basis einer Energiebilanz her.
- b) Bestimmen Sie die Temperatur bei  $r_1 = 3,5 \text{ mm}$ .

**Übung II.11:** (Mehrschichtige Wände mit Quelle  $\star\star$ )

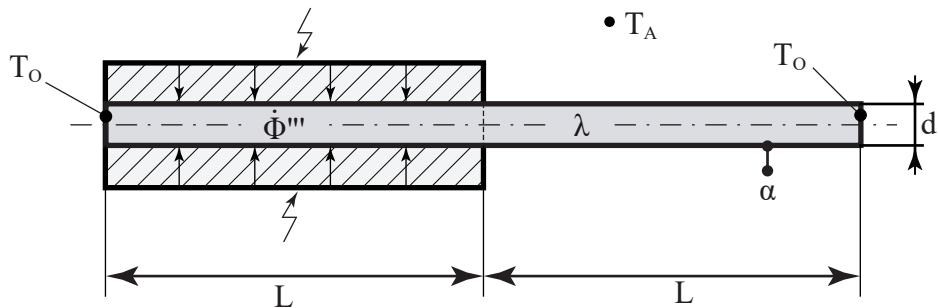


**Aufgaben:**

- a) Vervollständigen Sie die Temperaturprofile in den dreischichtigen Wänden.

**Übung II.12:** (Kupferstab ★★★)

Beide Enden eines Kupferstabs mit der Länge  $L$  und dem Durchmesser  $d$  werden auf derselben Temperatur  $T_O$  gehalten. Die linke Hälfte des Stabs ist gegen alle radialen Wärmeverluste isoliert. Ein elektrisches Heizelement erzeugt Joulesche Wärme mit einer Wärmestromdichte  $\dot{\Phi}'''$ . Die rechte Hälfte des Stabs wird von der Umgebungsluft mit der Lufttemperatur  $T_A$  umströmt, wobei sich ein Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  ergibt. Die Wärmeleitfähigkeit des Stabs ist mit  $\lambda$  gegeben.

**Gegebene Parameter:**

- Länge des Stabs:  $L = 1 \text{ m}$
- Durchmesser des Stabs:  $d = 5.2 \text{ mm}$
- Temperatur an beiden Stabenden:  $T_O = 120 \text{ }^\circ\text{C}$
- Temperatur der Umgebung:  $T_A = 100 \text{ }^\circ\text{C}$
- Wärmeübergangskoeffizient:  $\alpha = 6 \text{ W/m}^2\text{K}$
- Wärmeleitfähigkeit des Stabs:  $\lambda = 372 \text{ W/mK}$

**Hinweis:**

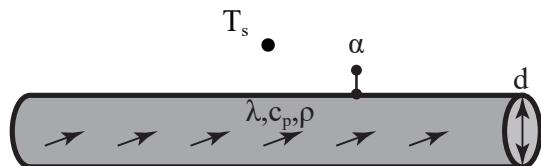
- Legen Sie den Ursprung des Koordinatensystems in die Mitte des Stabs.

**Aufgaben:**

- a) Leiten Sie die Gleichung für das Temperaturprofil im Stab her, indem Sie eine Energiebilanz aufstellen.
- b) Bestimmen Sie einen Ausdruck für  $\dot{\Phi}'''$ , sodass die Temperatur im Zentrum des Stabs ebenfalls  $T_O$  ist, ähnlich wie an den Enden.
- c) Berechnen Sie den Wert für  $\dot{\Phi}'''$  für die in b) postulierten Bedingungen.
- d) Bestimmen Sie die Extremstellen der Temperaturverteilung für die gegebenen Werte. Geben Sie deren Position und Werte an, und skizzieren Sie zusätzlich das Temperaturprofil.

**Übung II.13:** (Abkühlung eines Kupferstabs ★★)

Ein langer Kupferstab befindet sich anfänglich bei der homogenen Temperatur  $T_0$ . Er wird nun einem Luftstrom mit der Temperatur  $T_\infty$  und einem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$  ausgesetzt.



**Gegebene Parameter:**

- Durchmesser des Kupferstabs:  $d = 2 \text{ cm}$
- Anfangstemperatur:  $T_0 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$
- Temperatur des Luftstroms:  $T_\infty = 20 \text{ }^\circ\text{C}$
- Wärmeübergangskoeffizient:  $\alpha = 200 \text{ W/m}^2\text{K}$
- Wärmeleitfähigkeit von Kupfer:  $\lambda = 399 \text{ W/mK}$
- Spezifische Wärmekapazität von Kupfer:  $c_p = 382 \text{ J/kgK}$
- Dichte von Kupfer:  $\rho = 8930 \text{ kg/m}^3$

**Hinweise:**

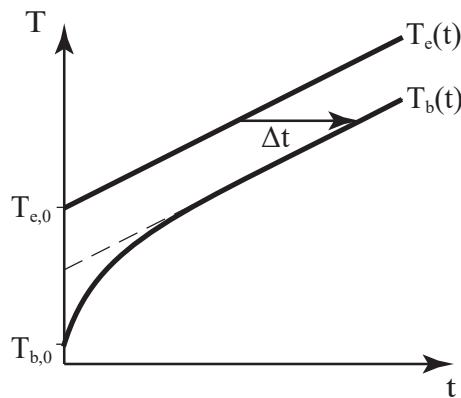
- Wärmestrahlung kann vernachlässigt werden.
- Stellen Sie eine Energiebilanz auf.

**Aufgaben:**

- a) Bestimmen Sie, wie lange es dauert, bis der Kupferstab auf eine Temperatur von  $T_1 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$  abgekühlt ist.
- b) Skizzieren Sie den Temperaturverlauf im Laufe der Zeit.

**Übung II.14:** (Die Temperaturverzögerung  $\star\star$ )

Ein Körper mit einer Temperatur von  $T_b$  befindet sich in einer Umgebung mit linear ansteigender Temperatur  $T_e$  und erwärmt sich entsprechend dem unten gezeigten Diagramm. Für  $t \rightarrow \infty$  folgt die Temperatur des Körpers derjenigen der Umgebung mit einer konstanten Zeitverzögerung  $\Delta t$ .



**Gegebene Parameter:**

Wärmeübergangskoeffizient des Körpers:	$\alpha$
Oberfläche des Körpers:	$A$
Masse des Körpers:	$m$
Wärmekapazität des Körpers:	$c_p$
Temperatur der Umgebung:	$T_e(t)$

**Hinweise:**

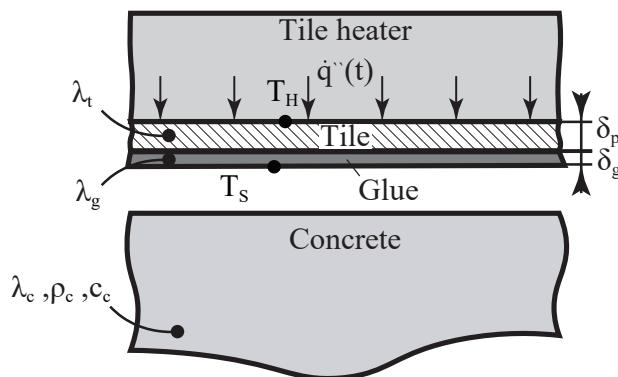
Die Temperatur ist innerhalb des Körpers räumlich gleichförmig. [-] Die Umgebung und ihre Temperatur werden durch den Körper nicht beeinflusst. [-] Wärmestrahlung kann vernachlässigt werden. [-] Stellen Sie eine Energiebilanz auf.

**Aufgaben:**

Bestimmen Sie diese Verzögerung  $\Delta t$ .

**Übung II.15:** (Fliesenverlegung★★)

Ein Fliesenleger verwendet eine moderne Technik zur Fliesenverlegung, bei der Fliese und Kleber vor dem Aufbringen auf den Beton vorgeheizt werden. Fliese und Kleber werden so lange erhitzt, bis sich ein stationärer Zustand einstellt, in dem eine einheitliche Heiztemperatur  $T_H$  und eine konstante Wärmestromdichte  $\dot{q}''(t)$  erreicht sind. Sobald diese Bedingungen erfüllt sind, bringt der Fliesenleger die erhitzte Fliese samt Kleber auf dem Beton an und hält dabei eine konstante Temperatur  $T_S$ . Erreicht die Temperatur in einer Tiefe  $\delta_{crit}$  im Beton den kritischen Wert  $T_{crit}$ , wird der Heizer entfernt. Zu Beginn befand sich der Beton in einer homogenen Temperatur  $T_0$ .


**Gegebene Parameter:**

- Stationäre Wärmestromdichte:  $\dot{q}'' = 7,5 \text{ kW/m}^2$
- Dicke der Fliese:  $\delta_p = 10 \text{ mm}$
- Dicke des Klebers:  $\delta_g = 2 \text{ mm}$
- Wärmeleitfähigkeit der Fliese:  $\lambda_p = 1,0 \text{ W/mK}$
- Wärmeleitfähigkeit des Klebers:  $\lambda_g = 0,35 \text{ W/mK}$
- Wärmeleitfähigkeit des Betons:  $\lambda_c = 2,3 \text{ W/mK}$
- Spezifische Wärmekapazität des Betons:  $c_c = 1\,000 \text{ J/kgK}$
- Dichte des Betons:  $\rho_c = 2\,400 \text{ kg/m}^3$
- Anfangstemperatur des Betons:  $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$
- Heiztemperatur des Fliesenheizers:  $T_H = 200 \text{ }^\circ\text{C}$
- Kritische Temperatur:  $T_{crit} = 35 \text{ }^\circ\text{C}$
- Kritische Tiefe:  $\delta_{crit} = 10 \text{ mm}$

**Hinweis:**

- Die Wärme wird niemals vollständig durch den Beton hindurchdringen.

**Aufgaben:**

- Leiten Sie die Differentialgleichung her und formulieren Sie die Rand- und/oder Anfangsbedingungen, um das Temperaturprofil des Betons zu bestimmen. Geben Sie auf Grundlage Ihrer Ergebnisse an, welches Verfahren eingesetzt werden kann, um die Temperatur an einer bestimmten Position und zu einem bestimmten Zeitpunkt zu ermitteln.

- | b) Bestimmen Sie die Zeit  $t_{\text{crit}}$ , zu der der Heizer entfernt werden kann.
- | c) Stellen Sie das Temperaturprofil des Betons dar, das sowohl die zeitliche als auch die räumliche Variation zeigt.

**Übung II.16:** (Erwärmen und Abschrecken einer Kugel ★★★)

Eine Kugel, die anfänglich eine homogene Temperatur von  $T_0$  hat, wird in einen Ofen gebracht. Die Ofentemperatur bleibt konstant bei einer homogenen Temperatur von  $T_o$ .

**Gegebene Parameter:**

- Anfangstemperatur der Kugel:  $T_0 = 25 \text{ } ^\circ\text{C}$
- Zwischentemperatur der Kugel:  $T_h = 150 \text{ } ^\circ\text{C}$
- Ofentemperatur:  $T_o = 200 \text{ } ^\circ\text{C}$
- Abschrecktemperatur:  $T_q = 30 \text{ } ^\circ\text{C}$
- Wärmeübergangskoeffizient:  $\alpha = 110 \text{ W/m}^2\text{K}$
- Radius der Kugel:  $r_1 = 1.5 \text{ cm}$
- Wärmeleitfähigkeit der Kugel:  $\lambda = 1.52 \text{ W/mK}$
- Dichte der Kugel:  $\rho = 1.45 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
- Spezifische Wärmekapazität der Kugel:  $c_p = 0.88 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$

**Hinweise:**

- Wärmestrahlung kann vernachlässigt werden.
- Es gilt stets, dass  $Fo > 0.2$ .

**Aufgaben:**

- a) Leiten Sie die Differentialgleichung her und stellen Sie die Rand- und/oder Anfangsbedingungen auf, um das Temperaturprofil der Kugel zu bestimmen. Geben Sie auf Grundlage Ihrer Ergebnisse die Methode an, mit der die Temperatur an einem bestimmten Ort und zu einem bestimmten Zeitpunkt bestimmt werden kann.
- b) Bestimmen Sie die Temperatur des Zentrums der Kugel nach 3 Minuten.

Nach einiger Zeit hat die Kugel eine heiße homogene Temperatur  $T_h$  und wird abgeschreckt. Während dieses Prozesses ist die Abschrecktemperatur konstant bei  $T_q$ . Weiterhin hat zu einem späteren Zeitpunkt das Zentrum der Kugel eine Temperatur von  $54 \text{ } ^\circ\text{C}$  und die Oberfläche eine Temperatur von  $44.4 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

- c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Zentrum der Kugel eine Temperatur von  $54 \text{ } ^\circ\text{C}$  und die Oberfläche eine Temperatur von  $44.4 \text{ } ^\circ\text{C}$  hat.
- d) Bestimmen Sie die zu diesem Zeitpunkt abgeführte Wärmemenge.