Wärme- und Stoffübertragung I

Advektiver Stofftransport und Herleitung der Erhaltungsgleichungen

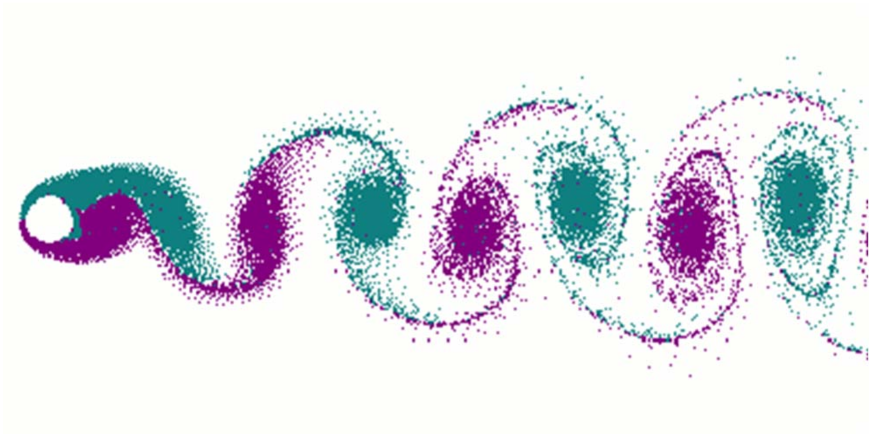
Prof. Dr.-Ing. Reinhold Kneer
Dr.-Ing. Dr. rer. pol. Wilko Rohlfs

Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Lernziele

Massentransport im bewegten System

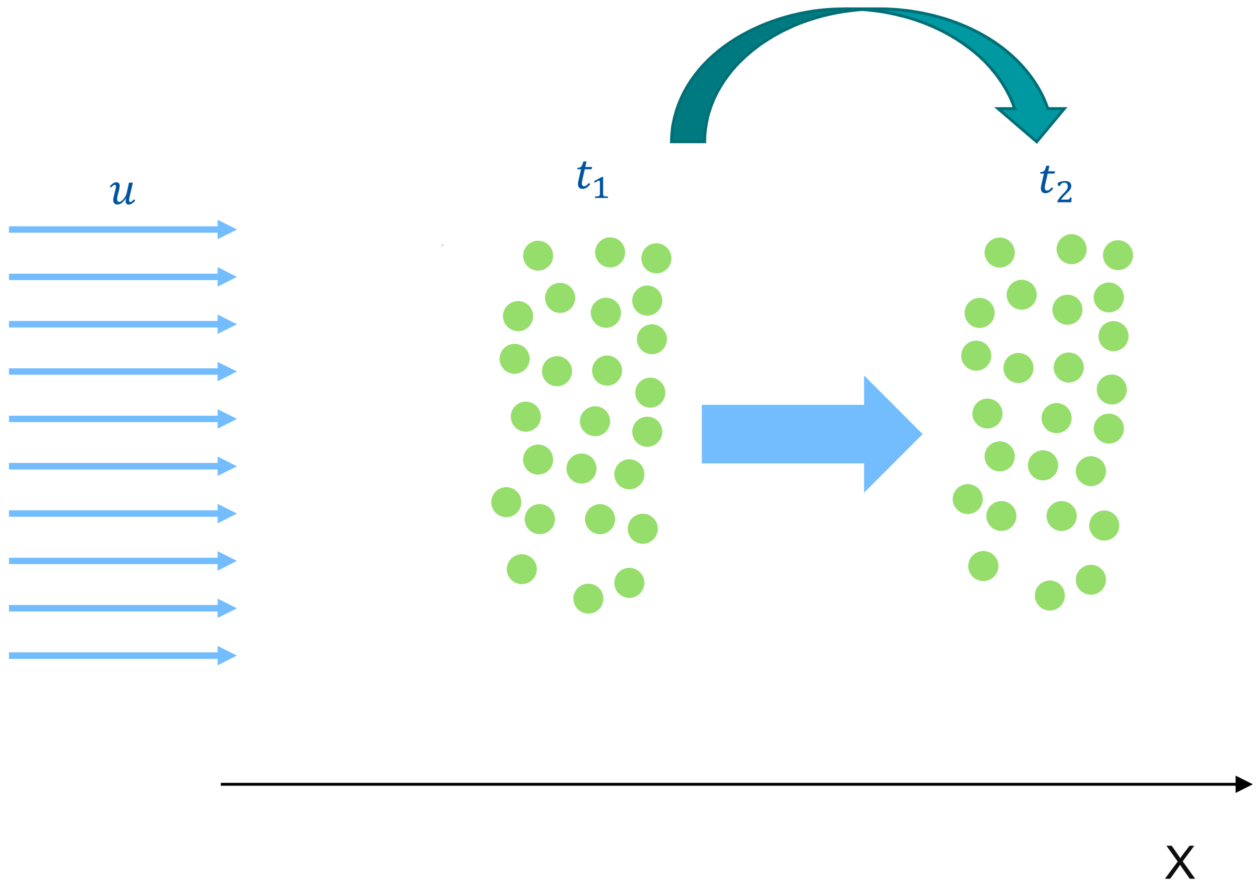
- Unterscheidung von diffusivem und advektivem Stofftransport



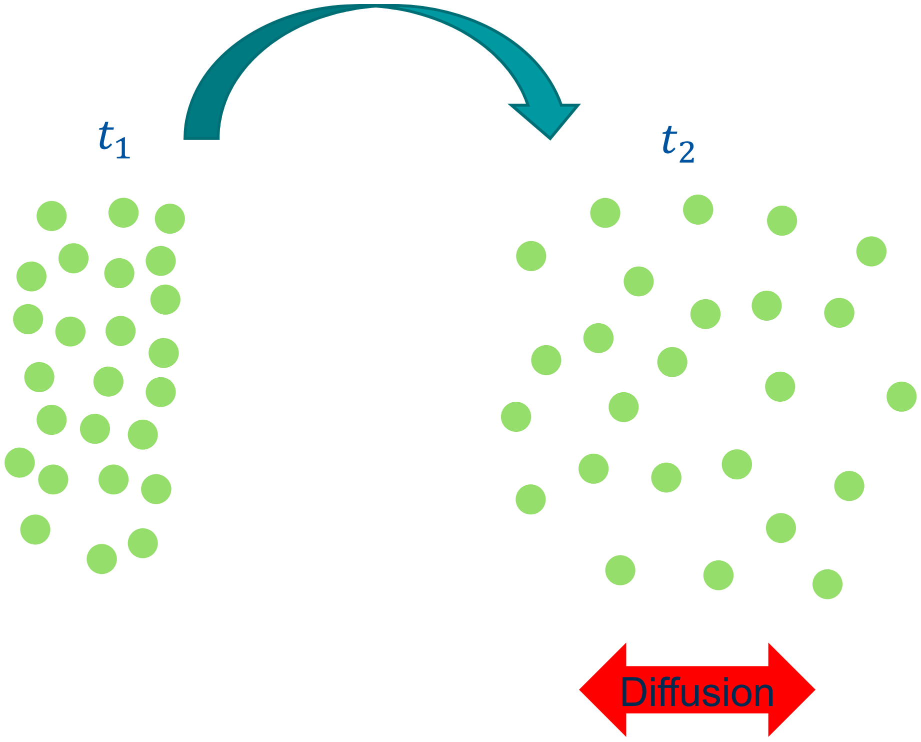
https://deacademic.com/dic.nsf/dewiki/751301

Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

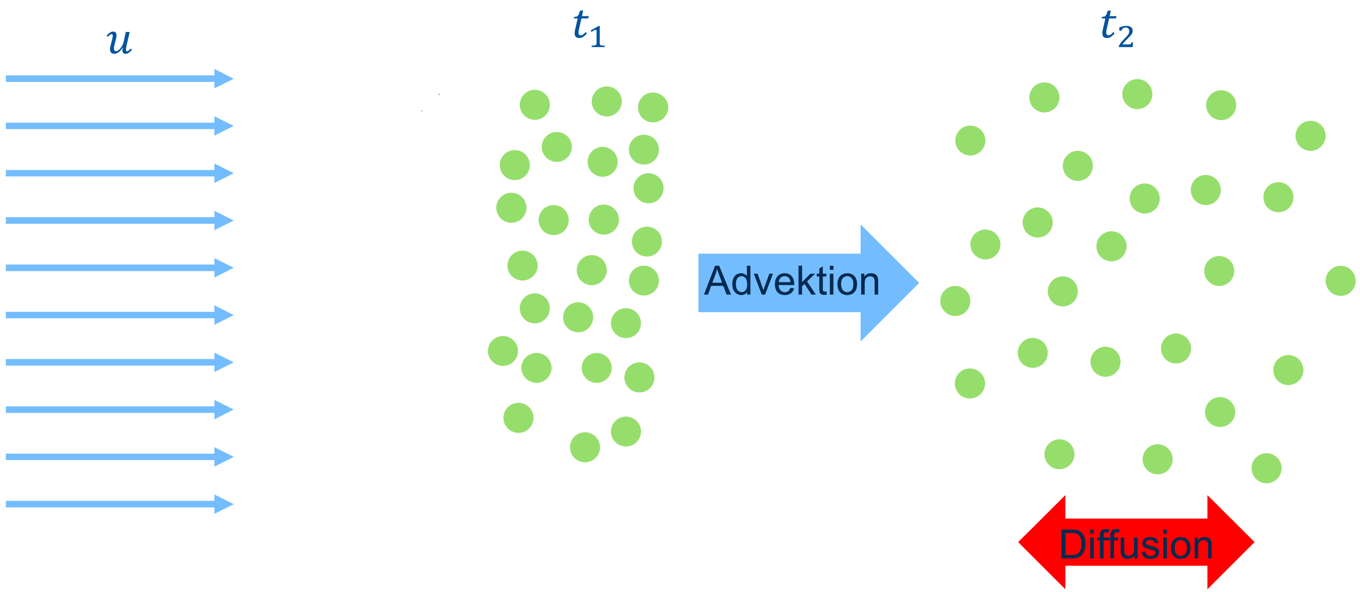
Massentransport durch Advektion



Massentransport durch Diffusion

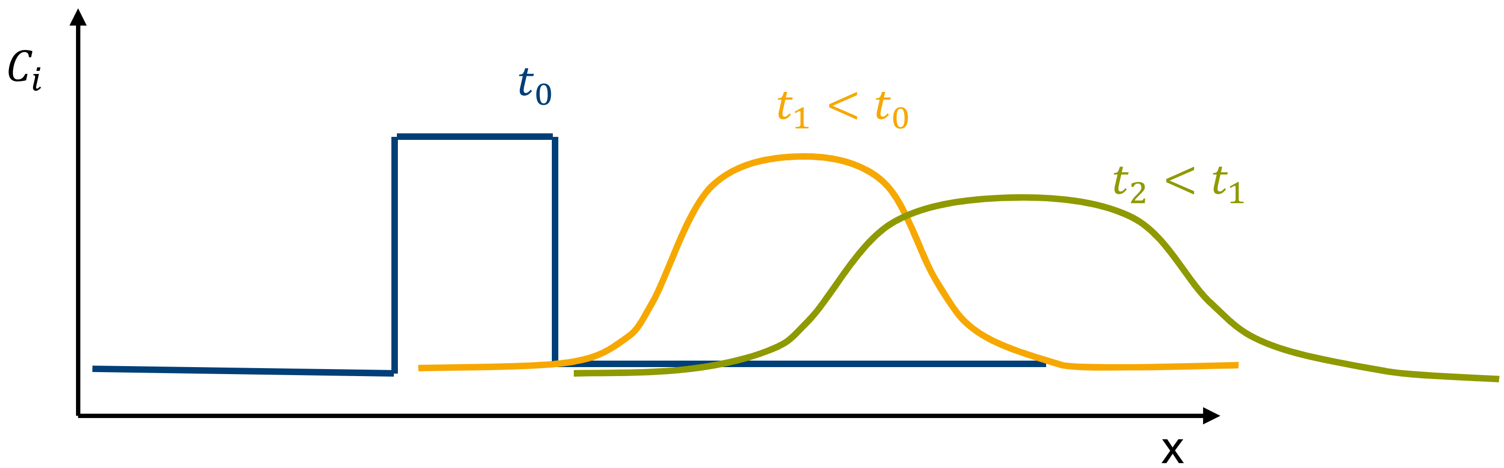


Massentransport durch Advektion und Diffusion



getrieben durch die makroskopische Geschwindigkeit

getrieben durch lokale Konzentrationsgradienten und die mikroskopischen Molekülbewegungen

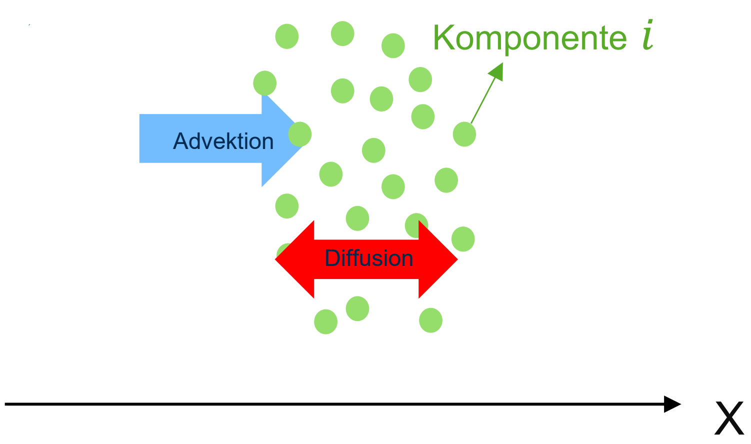


Massentransport im bewegten System

Transportmechanismen

Massentransport von Komponente i = Massentransport von Komponente i durch Advektion + Massentransport von Komponente i durch Diffusion

$$\dot{m}_i'' = \dot{m}''_{i,\mathrm{Adv}} + j''_{i,\mathrm{Diff}}$$

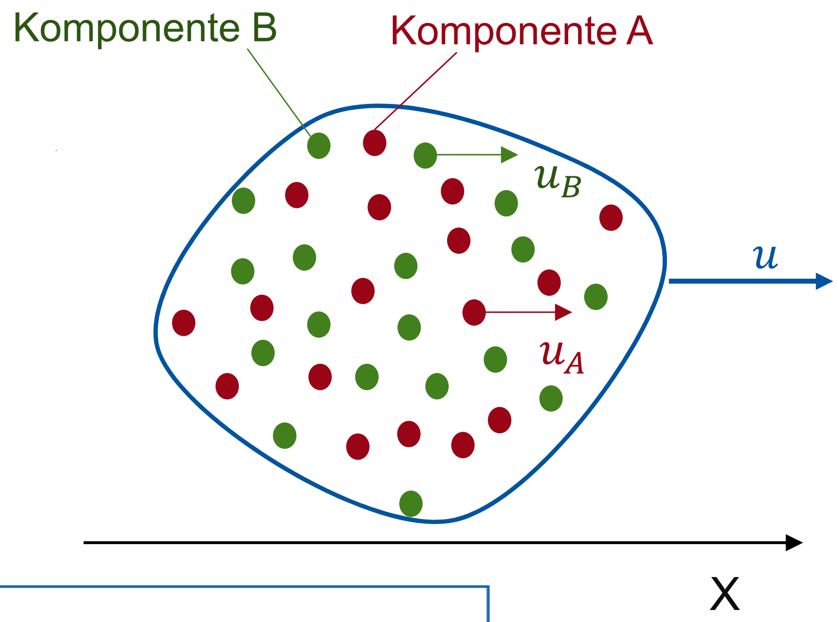


- Advektion: Massentransport in Strömungsrichtung als Folge der Fluidströmung
- Diffusion: Massentransport in alle Richtungen als Folge von Konzentrationsgradienten und mikroskopischen Molekülbewegungen

Massentransport im bewegten System

Annahme:

- **Massenströme komponentenweise betrachten**
- **Unterscheidung zwischen dem diffusiven und advektiven Transport**



- u_A: Mittlere Geschwindigkeit der Komponente A
- u_B: Mittlere Geschwindigkeit der Komponente B
- u: Mittlere Strömungsgeschwindigkeit (Geschwindigkeit vom Gesamtmassenstrom)

Massentransport im bewegten System

Bestimmung von mittlere Gesamtgeschwindigkeit:

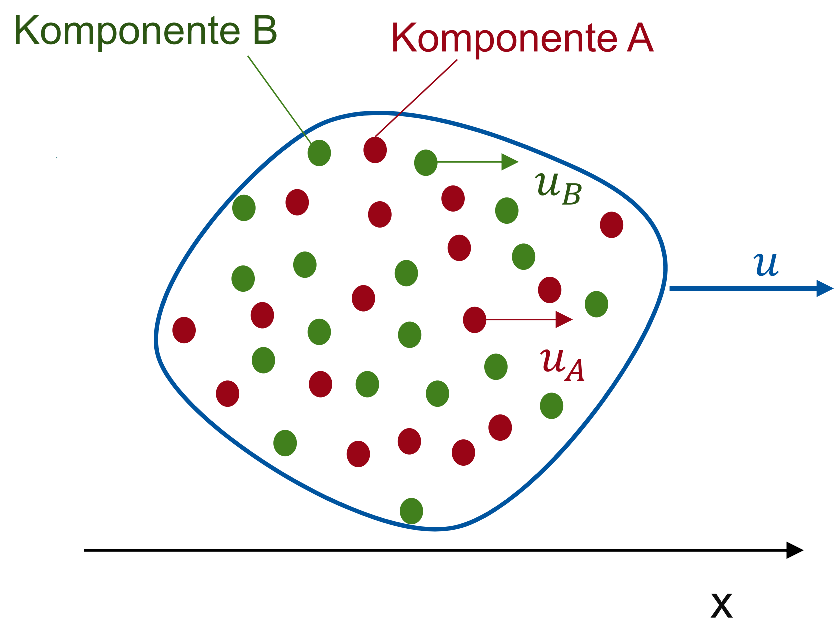
$$\dot{m}_{\text{ges}} = \dot{m}_A + \dot{m}_B$$

$$\bar{\rho}\, u = \rho_A u_A + \rho_B u_B$$

$$u = \underbrace{\frac{\rho_A}{\bar{\rho}}}_{\xi_A} u_A + \underbrace{\frac{\rho_B}{\bar{\rho}}}_{\xi_B} u_B$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u = \sum_i \xi_i u_i}$$

u ist eine massengemittelte Geschwindigkeit



Der Gesamtmassenstrom ist die Summe aus advektivem und diffusivem Massenstrom:

$$\dot{m}_i'' = \dot{m}''_{i,\text{Adv}} + j''_{i,\text{Diff}}$$

Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Massentransport im bewegten System

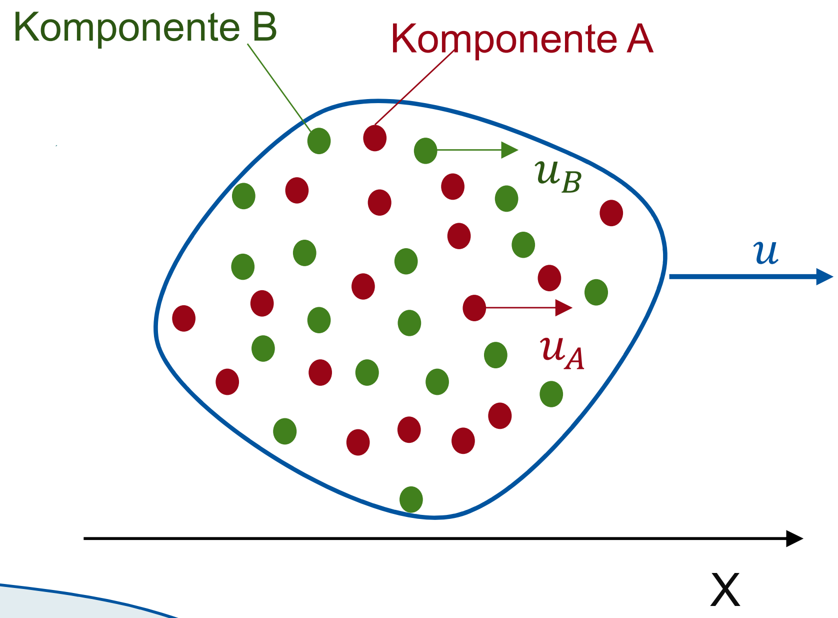
Bestimmung des Diffusionsstroms:

$$\dot{m}''_i = \dot{m}''_{i,\mathrm{Adv}} + \dot{j}''_{i,\mathrm{Diff}}$$

$$\rho_i u_i = \rho_i u + j''_i$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{j''_i = \rho_i (u_i - u)}$$

Die Diffusionsgeschwindigkeit ist die Abweichung der Komponentgeschwindigkeit zur gemittelten Gesamtgeschwindigkeit



Massentransport im bewegten System

Bestimmung von Diffusionsstrom:

$$\dot{m}''_i = \dot{m}''_{i,\mathrm{Adv}} + \dot{j}''_{i,\mathrm{Diff}}$$

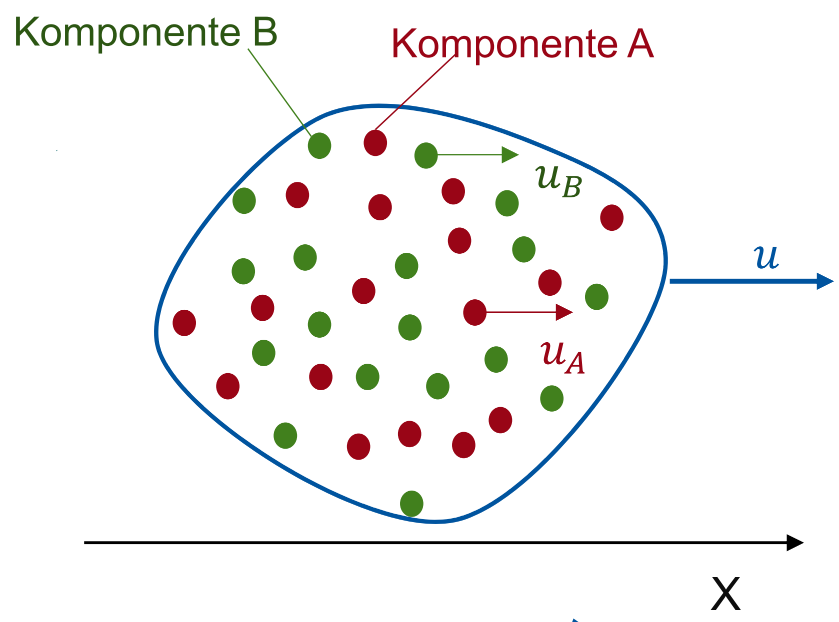
$$\rho_i u_i = \rho_i u + j_i''$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{j_i'' = \rho_i (u_i - u)}$$

Gesamt-Diffusionsstrom als Summe aller Komponenten:

$$\sum_{i=1}^{n} j_i'' = \sum_{i=1}^{n} \rho_i u_i - \sum_{i=1}^{n} \rho_i u$$

$$= \bar{\rho}\, u = \sum_i \rho_i u_i$$



Alle Diffusionsströme addieren sich zu Null

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sum j_i'' = 0!}$$

Beispiel: 1D-Stationäre Strömung ohne Quelle

Bilanz um Kontrollvolumen:

$$0 = \dot{m}_{i,x} - \dot{m}_{i,x+dx}$$

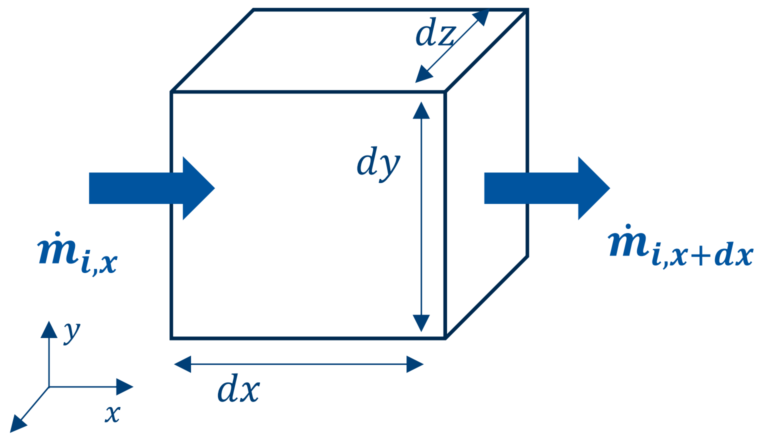
$$0 = \dot{m}''_{i,x} \cdot dy \cdot\ dz - \dot{m}''_{i,x+dx} \cdot dy\ \cdot dz$$

Taylorreihenentwicklung:

$$\dot{m}_{i,x+dx} = \left[\dot{m}''_{i,x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{m}''_{i,x}\right) \cdot dx\right] \cdot dy \cdot dz$$

$$\cancel{\dot{m}}''_{i,x} \cdot d\cancel{y} \cdot\ d\cancel{z} - \left[\cancel{\dot{m}}''_{i,x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{m}''_{i,x}\right) \cdot d\cancel{x}\right] \cdot d\cancel{y} \cdot d\cancel{z} = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{m}''_{i,x}\right) = 0$$



Beispiel: 1D-Stationäre Strömung ohne Quelle

Bilanz um Kontrollvolumen:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{m}''_{i,x}\right) = 0$$

$$\boldsymbol{\dot{m}''_i = \xi_i \cdot \rho \cdot u + j_i''}$$

$\boldsymbol{\dot{m}''_i}$ im Bilanz einsetzen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\xi_i \cdot \rho \cdot u + j''_{i,x}\right) = 0$$

Summenregel und Kettenregel einsetzen:

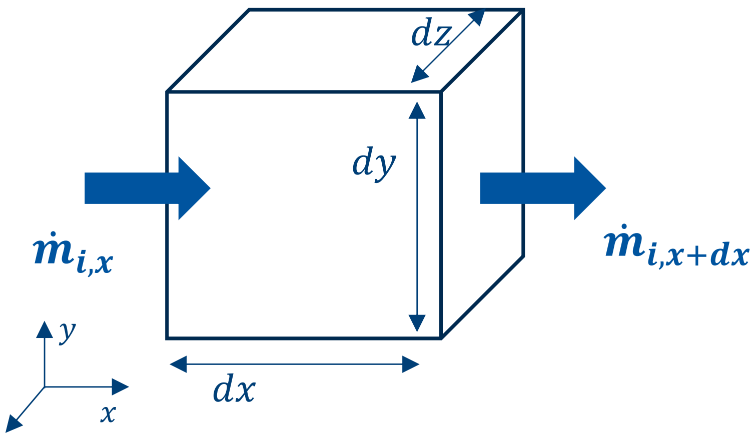
$$\rho\, u\, \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \xi_i \frac{\partial(\rho\, u)}{\partial x} + \frac{\partial j''_{i,x}}{\partial x} = 0$$

Ficksches Gesetz:

$$j''_{i,x} = -\rho\, D\, \frac{\partial \xi_i}{\partial x}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\rho\, u\, \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \xi_i \cancel{\frac{\partial(\rho\, u)}{\partial x}} + \rho\, D\, \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x^2} = 0}}$$

$=$ 0: 1-D Kontinuitätsgleichung



Beispiel: 3D-Stationäre Strömung ohne Quelle

Bilanz um Kontrollvolumen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{m}''_{i,x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\dot{m}''_{i,y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\dot{m}''_{i,z}\right) = 0$$

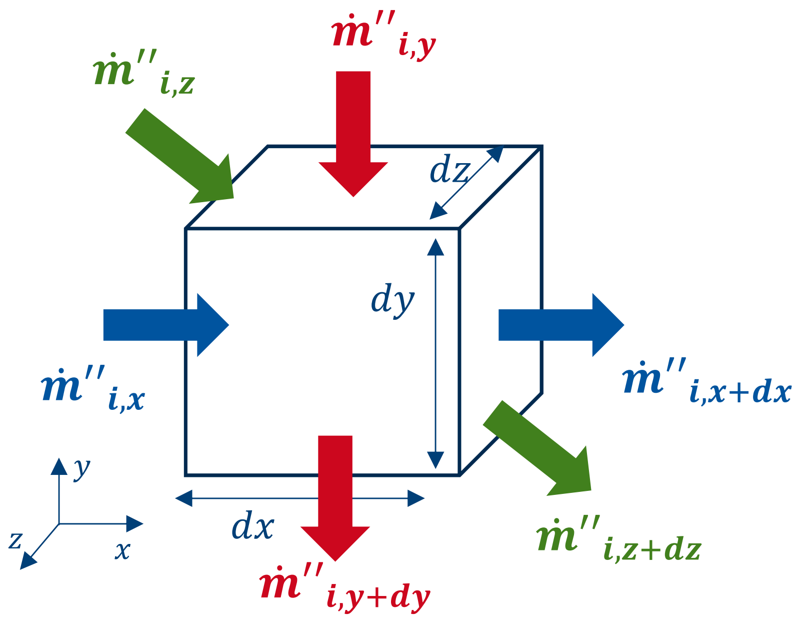
$$\dot{m}''_i = \xi_i \cdot \rho \cdot u + j_i''$$

$\dot{m}''_i$ in Bilanz einsetzen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\xi_i \cdot \rho \cdot u + j''_{i,x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\xi_i \cdot \rho \cdot v + j''_{i,y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\xi_i \cdot \rho \cdot w + j''_{i,z}\right) = 0$$

Auftrennung der Terme mit Hilfe von Summenregel und Kettenregel:

$$\rho\, u\, \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \xi_i \frac{\partial(\rho\, u)}{dx} + \frac{\partial j''_{i,x}}{\partial x} + \rho\, v\, \frac{\partial \xi_i}{\partial y} + \xi_i \frac{\partial(\rho\, v)}{\partial y} + \frac{\partial j''_{i,y}}{\partial y}$$
$$+ \rho\, w\, \frac{\partial \xi_i}{\partial z} + \xi_i \frac{\partial(\rho\, w)}{\partial z} + \frac{\partial j''_{i,z}}{\partial z} = 0$$



Beispiel: 3D-Stationäre Strömung ohne Quelle

Bilanz um Kontrollvolumen:

DGL umordnen:

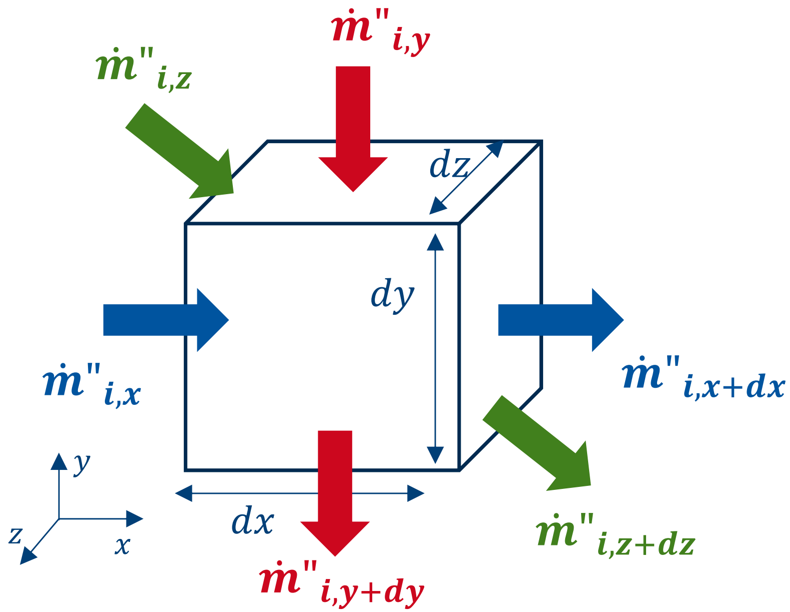
$$\overbrace{\rho\, u\, \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \rho\, v\, \frac{\partial \xi_{i,y}}{\partial y} + \rho\, w\, \frac{\partial \xi_i}{\partial z} + \xi_i \left[\underbrace{\frac{\partial(\rho\, u)}{dx} + \frac{\partial(\rho\, v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\, w)}{\partial z}}_{=\,0\ \text{(Kontinuitätsgleichung!)}}\right]}^{\text{Advektive Ströme}}$$

$$= \underbrace{-\left(\frac{\partial j''_{i,x}}{\partial x} + \frac{\partial j''_{i,y}}{\partial y} + \frac{\partial j''_{i,z}}{\partial z}\right)}_{\text{Diffusive Ströme}}$$

Ficksches Gesetz:

$$j_{i,x} = -\rho\, D\, \frac{\partial \xi_i}{\partial x}$$

$$\boxed{\rho\, u\, \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \rho\, v\, \frac{\partial \xi_{i,y}}{\partial y} + \rho\, w\, \frac{\partial \xi_i}{\partial z} = \rho\, D \left(\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_{i,y}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial z^2}\right)}$$



Analogie zwischen Energie- und Stofftransport

Energietransport:

$$\cancel{\rho} u \cancel{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} + \cancel{\rho} v \cancel{c_p} \frac{\partial T}{\partial y} + \cancel{\rho} w \cancel{c_p} \frac{\partial T}{\partial z} = \cancel{\lambda} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

Entdimensionierung:

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} = \frac{\nu}{Pr}$$

Prandtl-Zahl

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a} = \frac{\text{Diffusiver Impulstransport}}{\text{Diffusiver Wärmetransport}}$$

Stofftransport:

$$\cancel{\rho}\, u \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \cancel{\rho}\, v \frac{\partial \xi_{i,y}}{\partial y} + \cancel{\rho}\, w \frac{\partial \xi_i}{\partial z} = \cancel{\rho}\, D \left(\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_{i,y}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial z^2} \right)$$

Entdimensionierung:

$$\mathrm{D} = \frac{\nu}{Sc}$$

Schmidt-Zahl

$$\mathrm{Sc} = \frac{\nu}{D} = \frac{\eta}{\rho D} = \frac{\text{Diffusiver Impulstransport}}{\text{Diffusiver Massentransport}}$$

Nusselt-Zahl

$$Nu = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}$$

$$Nu(Re, Pr, Geometrie) \Longrightarrow \alpha$$

Sherwood-Zahl

$$Sh = \frac{g \cdot L}{\rho \cdot D}$$

$$Sh(Re, Sc, Geometrie) \Longrightarrow g$$

Massentransport = Stoffübergangskoeffizient • Fläche • Treibende Potential

Verständnisfragen

Bennen Sie das treibende Potential der Diffusion und der advektiven Stoffübertragung?

Welche Kennzahl der Stoffübertragung kann als Analogon zur Prandtl-Zahl in der Wärmeübertragung betrachtet werden?

Warum ist die Summe aller Diffusionsströme gleich Null?