MC-202 Aplicações de Pilhas

Rafael C. S. Schouery rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

 2° semestre/2019

Temos uma expressão aritmética e queremos saber se os parênteses estão balanceados

Temos uma expressão aritmética e queremos saber se os parênteses estão balanceados

• Exemplos corretos:

Temos uma expressão aritmética e queremos saber se os parênteses estão balanceados

- Exemplos corretos:
 - -(a+b)

Temos uma expressão aritmética e queremos saber se os parênteses estão balanceados

- Exemplos corretos:
 - $\begin{array}{l} \ (a+b) \\ \ (a\cdot b) + (c/(d-e)) \end{array}$

Temos uma expressão aritmética e queremos saber se os parênteses estão balanceados

• Exemplos corretos:

$$-(a+b)$$

 $-(a \cdot b) + (c/(d-e))$

• Exemplos incorretos:

Temos uma expressão aritmética e queremos saber se os parênteses estão balanceados

• Exemplos corretos:

$$-(a+b)$$

 $-(a \cdot b) + (c/(d-e))$

• Exemplos incorretos:

$$-(a+b)$$

Temos uma expressão aritmética e queremos saber se os parênteses estão balanceados

Exemplos corretos:

$$-(a+b)$$

 $-(a \cdot b) + (c/(d-e))$

• Exemplos incorretos:

$$-(a+b - (a \cdot b) + (c/d - e))$$

Temos uma expressão aritmética e queremos saber se os parênteses estão balanceados

Exemplos corretos:

$$-(a+b)$$

 $-(a \cdot b) + (c/(d-e))$

Exemplos incorretos:

$$\begin{array}{l} -\ (a+b \\ -\ (a\cdot b) + (c/d-e)) \\ -\)a+b(\end{array}$$

Temos uma expressão aritmética e queremos saber se os parênteses estão balanceados

Exemplos corretos:

$$-(a+b)$$

 $-(a \cdot b) + (c/(d-e))$

Exemplos incorretos:

$$- (a+b) - (a \cdot b) + (c/d - e)
-)a + b($$

Escreva uma função que, dada uma sequência de parênteses, diz se ela é balanceada ou não

Temos uma expressão aritmética e queremos saber se os parênteses estão balanceados

Exemplos corretos:

$$-(a+b)$$

 $-(a \cdot b) + (c/(d-e))$

Exemplos incorretos:

$$- (a+b) - (a \cdot b) + (c/d - e)
-)a + b($$

Escreva uma função que, dada uma sequência de parênteses, diz se ela é balanceada ou não

Vamos ignorar operandos e operadores

Temos uma expressão aritmética e queremos saber se os parênteses estão balanceados

Exemplos corretos:

$$-(a+b)$$

 $-(a \cdot b) + (c/(d-e))$

Exemplos incorretos:

$$- (a+b - (a \cdot b) + (c/d - e)) -)a + b($$

Escreva uma função que, dada uma sequência de parênteses, diz se ela é balanceada ou não

- Vamos ignorar operandos e operadores
- ()(())

Uma sequência de delimitadores é balanceada se for

vazia

- vazia
- ou [sequência balanceada]

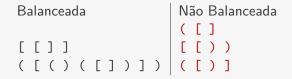
- vazia
- ou [sequência balanceada]
- ou (sequência balanceada)

- vazia
- ou [sequência balanceada]
- ou (sequência balanceada)
- ou a concatenação de duas sequências balanceadas

Uma sequência de delimitadores é balanceada se for

- vazia
- ou [sequência balanceada]
- ou (sequência balanceada)
- ou a concatenação de duas sequências balanceadas

Exemplos:



Uma sequência de delimitadores é balanceada se for

- vazia
- ou [sequência balanceada]
- ou (sequência balanceada)
- ou a concatenação de duas sequências balanceadas

Exemplos:



Para testar, leia cada símbolo e se:

Uma sequência de delimitadores é balanceada se for

- vazia
- ou [sequência balanceada]
- ou (sequência balanceada)
- ou a concatenação de duas sequências balanceadas

Exemplos:



Para testar, leia cada símbolo e se:

1. leu (ou [: empilha o símbolo lido

Uma sequência de delimitadores é balanceada se for

- vazia
- ou [sequência balanceada]
- ou (sequência balanceada)
- ou a concatenação de duas sequências balanceadas

Exemplos:



Para testar, leia cada símbolo e se:

- 1. leu (ou [: empilha o símbolo lido
- 2. leu]: desempilha [

Uma sequência de delimitadores é balanceada se for

- vazia
- ou [sequência balanceada]
- ou (sequência balanceada)
- ou a concatenação de duas sequências balanceadas

Exemplos:

Para testar, leia cada símbolo e se:

- 1. leu (ou [: empilha o símbolo lido
- 2. leu]: desempilha [
- 3. leu): desempilha (

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
2   p_pilha pilha;
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
2    p_pilha pilha;
3    int i, ok = 1;
4    char par;
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
2    p_pilha pilha;
3    int i, ok = 1;
4    char par;
5    pilha = criar_pilha();
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
2    p_pilha pilha;
3    int i, ok = 1;
4    char par;
5    pilha = criar_pilha();
6    for (i = 0; ok && str[i] != '\0'; i++)
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
2    p_pilha pilha;
3    int i, ok = 1;
4    char par;
5    pilha = criar_pilha();
6    for (i = 0; ok && str[i] != '\0'; i++)
7        if (str[i] == '[' || str[i] == '(') {
8             empilhar(pilha, str[i]);
9        }
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
   p_pilha pilha;
2
3
  int i, ok = 1;
4
   char par;
5
  pilha = criar_pilha();
   for (i = 0; ok && str[i] != '\0'; i++)
6
7
      if (str[i] == '[' || str[i] == '(') {
        empilhar(pilha, str[i]);
8
      } else if (eh_vazia(pilha)) {
9
        ok = 0:
10
11
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
    p_pilha pilha;
2
3
  int i, ok = 1;
   char par;
4
5
  pilha = criar_pilha();
   for (i = 0; ok && str[i] != '\0'; i++)
6
      if (str[i] == '[' || str[i] == '(') {
7
        empilhar(pilha, str[i]);
8
      } else if (eh_vazia(pilha)) {
9
        ok = 0:
10
      } else {
11
        par = desempilhar(pilha);
12
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
    p_pilha pilha;
2
3
  int i, ok = 1;
4
   char par;
5
    pilha = criar_pilha();
    for (i = 0; ok && str[i] != '\0'; i++)
6
7
      if (str[i] == '[' || str[i] == '(') {
         empilhar(pilha, str[i]);
8
      } else if (eh_vazia(pilha)) {
9
         ok = 0:
10
      } else {
11
        par = desempilhar(pilha);
12
        if (str[i] == ']' && par != '[')
13
          ok = 0;
14
```

```
1 int eh balanceada(char *str) {
    p_pilha pilha;
2
3
    int i, ok = 1;
   char par;
4
5
    pilha = criar_pilha();
    for (i = 0; ok && str[i] != '\0'; i++)
6
7
      if (str[i] == '[' || str[i] == '(') {
         empilhar(pilha, str[i]);
8
      } else if (eh_vazia(pilha)) {
9
         ok = 0:
10
      } else {
11
        par = desempilhar(pilha);
12
        if (str[i] == ']' && par != '[')
13
           ok = 0;
14
        if (str[i] == ')' && par != '(')
15
           ok = 0:
16
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
    p_pilha pilha;
2
3
    int i, ok = 1;
4
    char par;
5
    pilha = criar_pilha();
    for (i = 0; ok && str[i] != '\0'; i++)
6
7
       if (str[i] == '[' || str[i] == '(') {
         empilhar(pilha, str[i]);
8
      } else if (eh_vazia(pilha)) {
9
         ok = 0:
10
      } else {
11
         par = desempilhar(pilha);
12
         if (str[i] == ']' && par != '[')
13
           ok = 0;
14
         if (str[i] == ')' && par != '(')
15
           ok = 0:
16
       }
17
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
    p_pilha pilha;
2
3
    int i, ok = 1;
4
    char par;
5
    pilha = criar_pilha();
    for (i = 0; ok && str[i] != '\0'; i++)
6
7
       if (str[i] == '[' || str[i] == '(') {
         empilhar(pilha, str[i]);
8
      } else if (eh_vazia(pilha)) {
9
         ok = 0:
10
      } else {
11
         par = desempilhar(pilha);
12
         if (str[i] == ']' && par != '[')
13
           ok = 0;
14
         if (str[i] == ')' && par != '(')
15
           ok = 0:
16
17
     if (!eh_vazia(pilha))
18
       ok = 0:
19
```

```
1 int eh balanceada(char *str) {
    p_pilha pilha;
2
3
    int i, ok = 1;
4
    char par;
5
    pilha = criar_pilha();
    for (i = 0; ok \&\& str[i] != '\0'; i++)
6
7
       if (str[i] == '[' || str[i] == '(') {
         empilhar(pilha, str[i]);
8
      } else if (eh_vazia(pilha)) {
9
         ok = 0:
10
      } else {
11
         par = desempilhar(pilha);
12
         if (str[i] == ']' && par != '[')
13
           ok = 0;
14
         if (str[i] == ')' && par != '(')
15
           ok = 0:
16
17
     if (!eh_vazia(pilha))
18
       ok = 0:
19
20
    destruir_pilha(pilha);
```

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
    p_pilha pilha;
2
3
    int i, ok = 1;
4
    char par;
5
    pilha = criar_pilha();
    for (i = 0; ok \&\& str[i] != '\0'; i++)
6
7
       if (str[i] == '[' || str[i] == '(') {
         empilhar(pilha, str[i]);
8
      } else if (eh_vazia(pilha)) {
9
         ok = 0:
10
      } else {
11
         par = desempilhar(pilha);
12
         if (str[i] == ']' && par != '[')
13
           ok = 0;
14
         if (str[i] == ')' && par != '(')
15
           ok = 0:
16
17
     if (!eh_vazia(pilha))
18
       ok = 0:
19
20
    destruir_pilha(pilha);
21
    return ok;
22 }
```

Implementação em C

```
1 int eh balanceada(char *str) {
2
    p_pilha pilha;
3
    int i, ok = 1;
    char par;
4
5
    pilha = criar_pilha();
    for (i = 0; ok && str[i] != '\0'; i++)
6
7
       if (str[i] == '[' || str[i] == '(') {
         empilhar(pilha, str[i]);
8
      } else if (eh_vazia(pilha)) {
9
         ok = 0:
10
      } else {
11
         par = desempilhar(pilha);
12
         if (str[i] == ']' && par != '[')
13
           ok = 0;
14
         if (str[i] == ')' && par != '(')
15
           ok = 0:
16
17
18
     if (!eh_vazia(pilha))
19
       ok = 0:
20
    destruir_pilha(pilha);
    return ok;
21
22 }
```

• E se usássemos return 0 dentro do for?

Exemplo 1:

• Infixa: a + b

- Infixa: a + b
- Pré-fixa: + a b

- Infixa: a + b
- Pré-fixa: + a b
- Pós-fixa: a b +

- Infixa: a + b
- Pré-fixa: + a b
- Pós-fixa: a b +

Exemplo 1: Exemplo 2:

- Infixa: a + b
- Pré-fixa: + a b
- Pós-fixa: a b +

Exemplo 1:

- Infixa: a + b
- Pré-fixa: + a b
- Pós-fixa: a b +

Exemplo 2:

• Infixa: 5 * ((9 + 8) * 4 * 6 + 7)

Exemplo 1:

- Infixa: a + b
- Pré-fixa: + a b
- Pós-fixa: a b +

Exemplo 2:

- Infixa: 5 * ((9 + 8) * 4 * 6 + 7)
- Pré-fixa: * 5 + * + 9 8 * 4 6 7

Exemplo 1:

- Infixa: a + b
- Pré-fixa: + a b
- Pós-fixa: a b +

Exemplo 2:

- Infixa: 5 * ((9 + 8) * 4 * 6 + 7)
- Pré-fixa: * 5 + * + 9 8 * 4 6 7
- Pós-fixa: 5 9 8 + 4 6 * * 7 + *

Exemplo 1:

- Infixa: a + b
- Pré-fixa: + a b
- Pós-fixa: a b +

Exemplo 2:

- Infixa: 5 * ((9 + 8) * 4 * 6 + 7)
- Pré-fixa: * 5 + * + 9 8 * 4 6 7
- Pós-fixa: 5 9 8 + 4 6 * * 7 + *

Exemplo 1:

- Infixa: a + b
- Pré-fixa: + a b
- Pós-fixa: a b +

Exemplo 2:

- Infixa: 5 * ((9 + 8) * 4 * 6 + 7)
- Pré-fixa: * 5 + * + 9 8 * 4 6 7
- Pós-fixa: 5 9 8 + 4 6 * * 7 + *

Notação de expressões aritméticas:

1. Infixa: é a notação cotidiana

Exemplo 1:

- Exemplo 2: • Infixa: a + b
- Pré-fixa: + a b
- Pós-fixa: a b +

- Infixa: 5 * ((9 + 8) * 4 * 6 + 7)
- Pré-fixa: * 5 + * + 9 8 * 4 6 7
- Pós-fixa: 5 9 8 + 4 6 * * 7 + *

- 1. Infixa: é a notação cotidiana
 - Ordem normal de leitura, com parênteses para evitar ambiguidade

Exemplo 1:

- Exemplo 2: • Infixa: a + b
- Pré-fixa: + a b
- Pós-fixa: a b +

- Infixa: 5 * ((9 + 8) * 4 * 6 + 7)
- Pré-fixa: * 5 + * + 9 8 * 4 6 7
- Pós-fixa: 5 9 8 + 4 6 * * 7 + *

- 1. Infixa: é a notação cotidiana
 - Ordem normal de leitura, com parênteses para evitar ambiguidade

Exemplo 1:

Exemplo 2:

- Infixa: a + b

- Infixa: 5 * ((9 + 8) * 4 * 6 + 7)
- Pré-fixa: + a b
- Pré-fixa: * 5 + * + 9 8 * 4 6 7
- Pós-fixa: a b +
- Pós-fixa: 5 9 8 + 4 6 * * 7 + *

- 1. Infixa: é a notação cotidiana
 - Ordem normal de leitura, com parênteses para evitar ambiguidade
- 2. Pré-fixa: é a notação polonesa do lógico Jan Lukasiewicz

Exemplo 1:

- Infixa: a + b
- Pré-fixa: + a b
- Pós-fixa: a b +

Exemplo 2:

- Infixa: 5 * ((9 + 8) * 4 * 6 + 7)
- Pré-fixa: * 5 + * + 9 8 * 4 6 7
- Pós-fixa: 5 9 8 + 4 6 * * 7 + *

- 1. Infixa: é a notação cotidiana
 - Ordem normal de leitura, com parênteses para evitar ambiguidade
- 2. Pré-fixa: é a notação polonesa do lógico Jan Lukasiewicz
 - Operador precede operandos

Exemplo 1:

- Infixa: a + b
- Pré-fixa: + a b
- Pós-fixa: a b +

Exemplo 2:

- Infixa: 5 * ((9 + 8) * 4 * 6 + 7)
- Pré-fixa: * 5 + * + 9 8 * 4 6 7
- Pós-fixa: 5 9 8 + 4 6 * * 7 + *

- 1. Infixa: é a notação cotidiana
 - Ordem normal de leitura, com parênteses para evitar ambiguidade
- 2. Pré-fixa: é a notação polonesa do lógico Jan Lukasiewicz
 - Operador precede operandos

Exemplo 1:

Exemplo 2:

• Infixa: a + b

• Infixa: 5 * ((9 + 8) * 4 * 6 + 7)

• Pré-fixa: + a b

• Pré-fixa: * 5 + * + 9 8 * 4 6 7

• Pós-fixa: a b +

• Pós-fixa: 5 9 8 + 4 6 * * 7 + *

- 1. Infixa: é a notação cotidiana
 - Ordem normal de leitura, com parênteses para evitar ambiguidade
- 2. Pré-fixa: é a notação polonesa do lógico Jan Lukasiewicz
 - Operador precede operandos
- 3. Pós-fixa: é notação polonesa reversa (RPN), das calculadoras HP, ...

Exemplo 1: Exemplo 2:

- Infixa: a + b Infixa: 5 * ((9 + 8) * 4 * 6 + 7)
- Pré-fixa: + a b
 Pré-fixa: * 5 + * + 9 8 * 4 6 7
- Pós-fixa: a b +
 Pós-fixa: 5 9 8 + 4 6 * * 7 + *

- 1. Infixa: é a notação cotidiana
 - Ordem normal de leitura, com parênteses para evitar ambiguidade
- 2. Pré-fixa: é a notação polonesa do lógico Jan Lukasiewicz
 - Operador precede operandos
- 3. Pós-fixa: é notação polonesa reversa (RPN), das calculadoras HP, ...
 - Operador sucede operandos

- Infixa: 2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 * 1 + *

- Infixa: 2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 * 1 + *

- Infixa: 2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 * 1 + *

- Infixa: 2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 * 1 + *

- Infixa: 2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 * 1 + *

- Infixa: 2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 * 1 + *

- Infixa: 2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 * 1 + *

Resolvendo com notação infixa:

26

- Infixa: 2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 * 1 + *

Resolvendo com notação infixa:

26

• Infixa:
$$2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 26$$

Resolvendo com notação infixa:

26

Resolvendo com notação pós-fixa:

2

• Infixa:
$$2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 26$$

Resolvendo com notação infixa:

26

Resolvendo com notação pós-fixa:

2 2

- Infixa: 2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 * 1 + *

Resolvendo com notação infixa:

26

Resolvendo com notação pós-fixa:

2 2 1

- Infixa: 2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 26
- Pós-fixa: 2 2 1 + 4 * 1 + *

Resolvendo com notação infixa:

26

• Infixa:
$$2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 26$$

• Pós-fixa: 2 2 1 + 4 * 1 + *

Resolvendo com notação infixa:

26

Resolvendo com notação pós-fixa:

2 3

• Infixa:
$$2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 26$$

Resolvendo com notação infixa:

26

Resolvendo com notação pós-fixa:

2 3 4

• Infixa:
$$2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 26$$

• Pós-fixa: 2 2 1 + 4 * 1 + *

Resolvendo com notação infixa:

26

• Infixa:
$$2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 26$$

• Pós-fixa: 2 2 1 + 4 * 1 + *

Resolvendo com notação infixa:

26

Resolvendo com notação pós-fixa:

2 12

• Infixa:
$$2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 26$$

• Pós-fixa: 2 2 1 + 4 * 1 + *

Resolvendo com notação infixa:

26

Resolvendo com notação pós-fixa:

2 12 1

• Infixa:
$$2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 26$$

• Pós-fixa: 2 2 1 + 4 * 1 + *

Resolvendo com notação infixa:

26

Resolvendo com notação pós-fixa:

• Infixa:
$$2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 26$$

• Pós-fixa: 2 2 1 + 4 * 1 + *

Resolvendo com notação infixa:

26

Resolvendo com notação pós-fixa:

2 13

• Infixa:
$$2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 26$$

• Pós-fixa: 2 2 1 + 4 * 1 + *

Resolvendo com notação infixa:

26

Resolvendo com notação pós-fixa:

• Infixa:
$$2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 26$$

Resolvendo com notação infixa:

26

Resolvendo com notação pós-fixa:

26

Algoritmo:

1. Para cada elemento lido:

- 1. Para cada elemento lido:
 - Se for número n:

- 1. Para cada elemento lido:
 - Se for número n:
 - empilha n

- 1. Para cada elemento lido:
 - Se for número n:
 - empilha n
 - Se for operador \oplus :

- 1. Para cada elemento lido:
 - Se for número n:
 - empilha n
 - Se for operador ⊕:
 - desempilha operando₁

- 1. Para cada elemento lido:
 - Se for número n:
 - empilha n
 - Se for operador ⊕:
 - desempilha operando₁
 - desempilha operando₂

- 1. Para cada elemento lido:
 - Se for número n:
 - empilha n
 - Se for operador ⊕:
 - desempilha operando₁
 - desempilha operando2
 - empilha $\mathit{operando}_2 \oplus \mathit{operando}_1$

- 1. Para cada elemento lido:
 - Se for número n:
 - empilha n
 - Se for operador ⊕:
 - desempilha operando₁
 - desempilha operando
 - empilha $operando_2 \oplus operando_1$
- 2. Desempilha (único) valor da pilha e retorna

Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

Ideia:

• Copiamos os números diretamente na saída

Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

- Copiamos os números diretamente na saída
- Quando aparece um operador na entrada

Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

- Copiamos os números diretamente na saída
- Quando aparece um operador na entrada
 - enquanto o operador no topo tem precedência maior ou igual ao operador na entrada

Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

- Copiamos os números diretamente na saída
- Quando aparece um operador na entrada
 - enquanto o operador no topo tem precedência maior ou igual ao operador na entrada
 - desempilhamos e copiamos na saída

Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

- Copiamos os números diretamente na saída
- Quando aparece um operador na entrada
 - enquanto o operador no topo tem precedência maior ou igual ao operador na entrada
 - desempilhamos e copiamos na saída
 - empilhamos o operador novo

Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

- Copiamos os números diretamente na saída
- Quando aparece um operador na entrada
 - enquanto o operador no topo tem precedência maior ou igual ao operador na entrada
 - desempilhamos e copiamos na saída
 - empilhamos o operador novo
- No final, desempilhamos todos os elementos da pilha, copiando para a saída

Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

Ideia:

- Copiamos os números diretamente na saída
- Quando aparece um operador na entrada
 - enquanto o operador no topo tem precedência maior ou igual ao operador na entrada
 - desempilhamos e copiamos na saída
 - empilhamos o operador novo
- No final, desempilhamos todos os elementos da pilha, copiando para a saída

Observações:

Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

Ideia:

- Copiamos os números diretamente na saída
- Quando aparece um operador na entrada
 - enquanto o operador no topo tem precedência maior ou igual ao operador na entrada
 - desempilhamos e copiamos na saída
 - empilhamos o operador novo
- No final, desempilhamos todos os elementos da pilha, copiando para a saída

Observações:

Usamos uma nova operação: "olhar topo da pilha".

Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

Ideia:

- Copiamos os números diretamente na saída
- Quando aparece um operador na entrada
 - enquanto o operador no topo tem precedência maior ou igual ao operador na entrada
 - desempilhamos e copiamos na saída
 - empilhamos o operador novo
- No final, desempilhamos todos os elementos da pilha, copiando para a saída

Observações:

- Usamos uma nova operação: "olhar topo da pilha".
 - É possível fazer sem?

Objetivo:

$$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$$

Ideia:

- Copiamos os números diretamente na saída
- Quando aparece um operador na entrada
 - enquanto o operador no topo tem precedência maior ou igual ao operador na entrada
 - desempilhamos e copiamos na saída
 - empilhamos o operador novo
- No final, desempilhamos todos os elementos da pilha, copiando para a saída

Observações:

- Usamos uma nova operação: "olhar topo da pilha".
 - É possível fazer sem?
- Como generalizar para o caso em que a expressão tem parênteses?

Pilhas e recursão

Pergunta: Qual a relação entre pilhas e recursão?

Pilhas e recursão

Pergunta: Qual a relação entre pilhas e recursão?

```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6        ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```

Pilhas e recursão

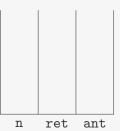
Pergunta: Qual a relação entre pilhas e recursão?

```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6        ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```

Vamos tentar descobrir simulando uma chamada: fat(4)

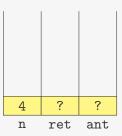
Estado da "pilha" de chamadas para fat(4):

```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6        ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



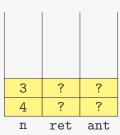
Estado da "pilha" de chamadas para fat (4):

```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



Estado da "pilha" de chamadas para fat(4):

```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



Estado da "pilha" de chamadas para fat (4):

```
1 int fat(int n) {
    int ret, ant;
  if (n == 0)
    ret = 1;
5 else {
    ant = fat(n-1);
   ret = n * ant;
    }
9
    return ret;
10 }
```



Estado da "pilha" de chamadas para fat(4):

```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



Estado da "pilha" de chamadas para fat(4):

```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```

0	?	?
1	?	?
2	?	?
3	?	?
4	?	?
n	ret	ant

```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6        ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```

1	?
?	?
?	?
?	?
?	?
	?

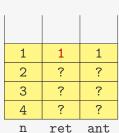
```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6        ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```

0	1	?
1	?	?
2	?	?
3	?	?
4	?	?
n	ret	ant

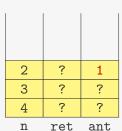
```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



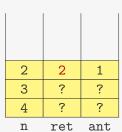
```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6        ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



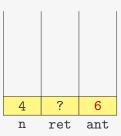
```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



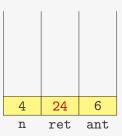
```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



```
1 int fat(int n) {
2    int ret, ant;
3    if (n == 0)
4     ret = 1;
5    else {
6      ant = fat(n-1);
7     ret = n * ant;
8    }
9    return ret;
10 }
```



Quando empilhamos:

Quando empilhamos:

• Alocamos espaço para as variáveis locais (n, ret, ant)

Quando empilhamos:

• Alocamos espaço para as variáveis locais (n, ret, ant)

Quando desempilhamos:

Quando empilhamos:

Alocamos espaço para as variáveis locais (n, ret, ant)

Quando desempilhamos:

 Quando a chamada de fat(n) retorna, apagamos o espaço para as variáveis locais

Quando empilhamos:

Alocamos espaço para as variáveis locais (n, ret, ant)

Quando desempilhamos:

- Quando a chamada de fat(n) retorna, apagamos o espaço para as variáveis locais
- Restabelecemos os valores das variáveis locais para o valor que tinham antes da chamada

Quando empilhamos:

• Alocamos espaço para as variáveis locais (n, ret, ant)

Quando desempilhamos:

- Quando a chamada de fat(n) retorna, apagamos o espaço para as variáveis locais
- Restabelecemos os valores das variáveis locais para o valor que tinham antes da chamada

O conjunto de variáveis locais formam um elemento da pilha

Quando empilhamos:

Alocamos espaço para as variáveis locais (n, ret, ant)

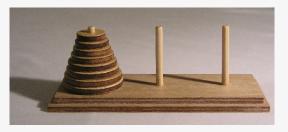
Quando desempilhamos:

- Quando a chamada de fat(n) retorna, apagamos o espaço para as variáveis locais
- Restabelecemos os valores das variáveis locais para o valor que tinham antes da chamada

O conjunto de variáveis locais formam um elemento da pilha

Isto é, a recursão pode ser simulada usando uma pilha de suas variáveis locais

Um exemplo mais complexo: Torres de Hanói



```
1 void hanoi(int n, char orig, char dest, char aux) {
2    if (n > 0) {
3        hanoi(n-1, orig, aux, dest);
4        printf("move de %c para %c\n", orig, dest);
5        hanoi(n-1, aux, dest, orig);
6    }
7 }
```

Um exemplo mais complexo: Torres de Hanói



```
1 void hanoi(int n, char orig, char dest, char aux) {
2    if (n > 0) {
3        hanoi(n-1, orig, aux, dest);
4        printf("move de %c para %c\n", orig, dest);
5        hanoi(n-1, aux, dest, orig);
6    }
7 }
```

Precisamos além de empilhar a variáveis locais, armazenar em qual linha devemos voltar a execução do código

O registro de ativação de uma função é o conjunto formado por:

O registro de ativação de uma função é o conjunto formado por:

1. Variáveis locais

O registro de ativação de uma função é o conjunto formado por:

- 1. Variáveis locais
- 2. Endereço de retorno após a chamada

O registro de ativação de uma função é o conjunto formado por:

- 1. Variáveis locais
- 2. Endereço de retorno após a chamada

A pilha de execução (ou pilha de chamadas) é a pilha dos registros de ativação das várias chamadas em execução em um programa

Versão recursiva:

```
1 p_no busca_rec(p_no lista, int x) {
2   if (lista == NULL || lista->dado == x)
3    return lista;
4   else
5    return busca_rec(lista->prox, x);
6 }
```

Versão recursiva:

```
1 p_no busca_rec(p_no lista, int x) {
2   if (lista == NULL || lista->dado == x)
3    return lista;
4   else
5    return busca_rec(lista->prox, x);
6 }
```

Versão recursiva:

```
1 p_no busca_rec(p_no lista, int x) {
2   if (lista == NULL || lista->dado == x)
3    return lista;
4   else
5    return busca_rec(lista->prox, x);
6 }
```

Note que:

• a recursão é a última coisa antes do retorno da função

Versão recursiva:

```
1 p_no busca_rec(p_no lista, int x) {
2   if (lista == NULL || lista->dado == x)
3    return lista;
4   else
5    return busca_rec(lista->prox, x);
6 }
```

- a recursão é a última coisa antes do retorno da função
- i.e., devolvemos o valor de retorno da chamada
 busca_rec(lista->prox, x), mas não o manipulamos

Versão recursiva:

```
1 p_no busca_rec(p_no lista, int x) {
2   if (lista == NULL || lista->dado == x)
3    return lista;
4   else
5    return busca_rec(lista->prox, x);
6 }
```

- a recursão é a última coisa antes do retorno da função
- i.e., devolvemos o valor de retorno da chamada
 busca_rec(lista->prox, x), mas não o manipulamos
- exceto na base, o retorno n\u00e3o depende do valor das vari\u00e1veis locais

Versão recursiva:

```
1 p_no busca_rec(p_no lista, int x) {
2   if (lista == NULL || lista->dado == x)
3    return lista;
4   else
5    return busca_rec(lista->prox, x);
6 }
```

- a recursão é a última coisa antes do retorno da função
- i.e., devolvemos o valor de retorno da chamada
 busca_rec(lista->prox, x), mas não o manipulamos
- exceto na base, o retorno n\u00e3o depende do valor das vari\u00e1veis locais
 - Depende apenas do valor de retorno da chamada recursiva

Eliminação de Recursão

Podemos eliminar o uso de recursão na nossa função

Eliminação de Recursão

Podemos eliminar o uso de recursão na nossa função

Versão recursiva:

```
1 p_no busca_rec(p_no lista, int x) {
2   if (lista == NULL || lista->dado == x)
3    return lista;
4   else
5    return busca_rec(lista->prox, x);
6 }
```

Eliminação de Recursão

Podemos eliminar o uso de recursão na nossa função

Versão recursiva:

```
1 p_no busca_rec(p_no lista, int x) {
2   if (lista == NULL || lista->dado == x)
3    return lista;
4   else
5    return busca_rec(lista->prox, x);
6 }
```

Eliminando a recursão:

```
1 p_no busca_iterativa(p_no lista, int x) {
2  while(lista != NULL && lista->dado != x)
3    lista = lista->prox;
4  return lista;
5 }
```

Se o último passo de uma função f(x) é o retorno de f(y) então

Se o último passo de uma função f(x) é o retorno de f(y) então

• podemos reiterar a função f(x) usando x = y

Se o último passo de uma função f(x) é o retorno de f(y) então

- podemos reiterar a função f(x) usando x = y
- usando um while

Se o último passo de uma função f(x) é o retorno de f(y) então

- podemos reiterar a função f(x) usando x = y
- usando um while
- até chegar em uma das bases da recursão

Recursão de Cauda

Se o último passo de uma função f(x) é o retorno de f(y) então

- podemos reiterar a função f(x) usando x = y
- usando um while
- até chegar em uma das bases da recursão

Chamamos esse tipo de recursão de recursão de cauda

```
1 int fat(int n) {
1 void hanoi(int n, char orig, char dest,
                                                    int ret, ant;
      char aux) {
                                                   if (n == 0)
    if (n > 0) {
                                                      ret = 1:
      hanoi(n-1, orig, aux, dest);
                                                   else {
      printf("move de %c para %c\n", orig,
                                                      ant = fat(n-1);
      dest);
                                                      ret = n * ant;
5
      hanoi(n-1, aux, dest, orig);
                                                9
                                                    return ret;
                                                10 }
```

Note que hanoi e fat não têm recursão de cauda

```
1 int fat(int n) {
1 void hanoi(int n, char orig, char dest,
                                                    int ret, ant;
      char aux) {
                                                   if (n == 0)
   if (n > 0) {
                                                      ret = 1:
     hanoi(n-1, orig, aux, dest);
                                                   else {
      printf("move de %c para %c\n", orig,
                                                      ant = fat(n-1);
      dest);
                                                      ret = n * ant:
     hanoi(n-1, aux, dest, orig);
                                                9
                                                    return ret;
7
                                               10 }
```

Recursões que não são de cauda também podem ser eliminadas

Note que hanoi e fat não têm recursão de cauda

```
1 int fat(int n) {
1 void hanoi(int n, char orig, char dest,
                                                    int ret, ant;
      char aux) {
                                                   if (n == 0)
   if (n > 0) {
                                                      ret = 1:
      hanoi(n-1, orig, aux, dest);
                                                   else {
      printf("move de %c para %c\n", orig,
                                                      ant = fat(n-1):
      dest);
                                                      ret = n * ant:
     hanoi(n-1, aux, dest, orig);
                                                9
                                                    return ret:
7
                                                10 }
```

Recursões que não são de cauda também podem ser eliminadas

• Porém é necessário utilizar uma pilha

Note que hanoi e fat não têm recursão de cauda

```
1 int fat(int n) {
1 void hanoi(int n, char orig, char dest,
                                                    int ret. ant:
      char aux) {
                                                   if (n == 0)
   if (n > 0) {
                                                       ret = 1:
      hanoi(n-1, orig, aux, dest);
                                                   else {
      printf("move de %c para %c\n", orig,
                                                       ant = fat(n-1):
      dest);
                                                       ret = n * ant:
     hanoi(n-1, aux, dest, orig);
                                                 9
                                                     return ret:
7
 }
                                                10 }
```

Recursões que não são de cauda também podem ser eliminadas

- Porém é necessário utilizar uma pilha
- E o processo é mais trabalhoso

Algoritmos recursivos:

Algoritmos recursivos:

• mais fáceis de entender e de criar

Algoritmos recursivos:

- mais fáceis de entender e de criar
- mais elegantes

Algoritmos recursivos:

- mais fáceis de entender e de criar
- mais elegantes

Algoritmos iterativos:

Algoritmos recursivos:

- mais fáceis de entender e de criar
- mais elegantes

Algoritmos iterativos:

Normalmente mais rápidos do que os recursivos

Algoritmos recursivos:

- mais fáceis de entender e de criar
- mais elegantes

Algoritmos iterativos:

- Normalmente mais rápidos do que os recursivos
- Não precisamos empilhar registros a cada iteração

Algoritmos recursivos:

- mais fáceis de entender e de criar
- mais elegantes

Algoritmos iterativos:

- Normalmente mais rápidos do que os recursivos
- Não precisamos empilhar registros a cada iteração

Eliminação de recursão de cauda é uma ótima forma de otimização

Algoritmos recursivos:

- mais fáceis de entender e de criar
- mais elegantes

Algoritmos iterativos:

- Normalmente mais rápidos do que os recursivos
- Não precisamos empilhar registros a cada iteração

Eliminação de recursão de cauda é uma ótima forma de otimização

• E é feita automaticamente por alguns compiladores

Algoritmos recursivos:

- mais fáceis de entender e de criar
- mais elegantes

Algoritmos iterativos:

- Normalmente mais rápidos do que os recursivos
- Não precisamos empilhar registros a cada iteração

Eliminação de recursão de cauda é uma ótima forma de otimização

• E é feita automaticamente por alguns compiladores

"We should forget about small efficiencies, say about 97% of the time: premature optimization is the root of all evil. Yet we should not pass up our opportunities in that critical 3%"

Donald E. Knuth

Exercício

Elimine a recursão da busca binária:

```
1 int busca_binaria(int *dados, int 1, int r, int x) {
2   int m = (l+r)/2;
3   if (l > r)
4    return -1;
5   if (dados[m] == x)
6    return m;
7   else if (dados[m] < x)
8    return busca_binaria(dados, m + 1, r, x);
9   else
10   return busca_binaria(dados, l, m - 1, x);
11 }</pre>
```