Homografia

Anderson Rocha

1 Quando usar homografia

Use a homografia H quando:

- A cena é **plana** (ex.: fachada, página, chão), ou
- A câmera faz **pura rotação** (sem translação/paralaxe significativa).

2 Notação básica

Um ponto na imagem 1: (x, y) em coordenadas homogêneas

$$\mathbf{p} = [x,\ y,\ 1]^T.$$

Correspondente na imagem 2: (x', y') com

$$\mathbf{p}' = [x',\ y',\ 1]^T.$$

A homografia H satisfaz:

$$\mathbf{p}' \sim H\,\mathbf{p}.$$

Escrito em coordenadas:

$$x' = \frac{h_{11}x + h_{12}y + h_{13}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}}, \qquad y' = \frac{h_{21}x + h_{22}y + h_{23}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}}.$$

3 Montando o sistema (DLT puro)

Para cada correspondência $(x, y) \to (x', y')$, geramos duas equações lineares na forma $A\mathbf{h} = 0$, onde $\mathbf{h}$ é o vetor com os 9 elementos de H. Podemos fixar $h_{33} = 1$ ao final para remover a ambiguidade de escala.

As duas linhas em A são:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 & -xx' & -yx' & -x' \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x & y & 1 & -xy' & -yy' & -y' \end{bmatrix}.$$

Com n pares, A terá dimensão $2n \times 9$. Mínimo: 4 pares (8 equações) para resolver H.

4 Normalização antes do DLT (recomendado)

Motivação

Sem normalização, pontos com coordenadas grandes (ex.: milhares de pixels) deixam A mal-condicionada, tornando a SVD instável.

Passos para normalizar os pontos

Para cada conjunto de pontos (imagem 1 e imagem 2), construa T como:

1. **Centralização:** leve o centróide para a origem.

$$\bar{x} = \tfrac{1}{n}\sum x_i, \quad \bar{y} = \tfrac{1}{n}\sum y_i$$

   Substitua $x \leftarrow x - \bar{x},\ y \leftarrow y - \bar{y}$.

2. **Escala:** faça a distância média ao centro ser $\sqrt{2}$.

$$d = \tfrac{1}{n}\sum_i \sqrt{x_i^2 + y_i^2}, \qquad s = \tfrac{\sqrt{2}}{d}$$

   Aplique: $x \leftarrow sx,\ y \leftarrow sy$.

3. **Matriz de normalização:**

$$T = \begin{bmatrix} s & 0 & -s\bar{x} \\ 0 & s & -s\bar{y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uso

- Aplique T aos pontos da imagem 1 e T' aos da imagem 2.
- Monte o DLT com pontos normalizados e estime H_n.
- Desnormalize:

$$H = T'^{-1} H_n T.$$

5 Resolvendo o sistema

Computacionalmente:

- Pegue o autovetor (ou vetor singular) associado ao menor valor singular de A (SVD de A).
- Reforme H (3×3) a partir de $\mathbf{h}$ e normalize para $h_{33} = 1$.

6 Robustez com RANSAC

1. Amostre 4 pares aleatórios.
2. Compute H pelos 4 pares (passos 3–5).
3. Reprojete todos os pontos:
$$\hat{\mathbf{p}}' = H\mathbf{p}, \quad \hat{x}' = u/w, \quad \hat{y}' = v/w.$$
4. Calcule o erro:
$$e_i = \sqrt{(\hat{x}' - x_i')^2 + (\hat{y}' - y_i')^2}.$$
5. Classifique como inlier se $e_i \leq \tau$ (ex.: $\tau = 2$–3 px).
6. Guarde o H com maior número de inliers.
7. Reestime H final com todos os inliers.

Número de iterações (regra de bolso):

$$N \approx \frac{\log(1-p)}{\log\left(1-(1-\varepsilon)^s\right)},$$

onde p é a confiança (ex.: 0,99), $s = 4$ (amostra mínima), e ε é a fração de outliers. Exemplo: $p = 0.99$, $\varepsilon = 0.5 \Rightarrow N \approx 72$.

7 Aplicando H

- **Checagem:** projete os cantos da imagem 1 e verifique alinhamento na imagem 2.
- **Warp:** alinhe imagens com `warpPerspective` usando H (ou H^{-1}, dependendo da direção).
- **Composição:** após o warp, faça blending/stitching simples.

8 Mini-exemplos

(A) Construção de A

Exemplo: $(x, y) = (100, 50) \to (x', y') = (220, 80)$. As duas linhas em A ficam:

$$[100,\ 50,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ -22000,\ -11000,\ -220],$$

$$[0,\ 0,\ 0,\ 100,\ 50,\ 1,\ -8000,\ -4000,\ -80].$$

(B) Uso de H (exemplo afim simples)

Se

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

então $(x, y) = (5, 4)$ mapeia para:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + 10 \\ 0 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 20 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 32 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (x', y') = (20, 32).$$

9 Dicas rápidas para aula

- SIFT/ORB: a homografia usa apenas as **posições** (x, y) (escala/orientação do descritor não entram no DLT).
- Evite 4 pontos quase colineares $\Rightarrow$ homografia instável.
- Normalização melhora bastante a precisão.
- Direção: se matches são "imagem1$\to$imagem2", então H leva 1$\to$2; para warp inverso, use H^{-1}.
- Validação: meça erro médio (ex.: < 2 px) e mostre visualmente os resultados.

10 DLT com 4 pontos: matriz A e SVD (exemplo numérico)

Correspondências (imagem 1 → imagem 2).

$$(0,0) \to (0,0), \quad (1,0) \to (2,0), \quad (1,1) \to (2,1), \quad (0,1) \to (0.2,1).$$

Matriz A (8×9). Para cada par $(x,y) \to (x',y')$ adicionamos duas linhas:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 & -xx' & -yx' & -x' \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x & y & 1 & -xy' & -yy' & -y' \end{bmatrix}.$$

Com os 4 pares acima, resulta:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

SVD de A. Computamos $A = U\,\Sigma\,V^T$. Valores singulares (decrescentes, aproximados):

$$\Sigma \approx \mathrm{diag}(5.2245,\ 2.6179,\ 1.6602,\ 1.4373,\ 1.0554,\ 0.7960,\ 0.5060,\ 0.3255).$$

O vetor da homografia $\mathbf{h}$ é a **última coluna de** V (ou última linha de V^T). O vetor encontrado (antes de normalizar) é proporcional a:

$$\mathbf{h} \propto \begin{bmatrix} 0.797053397 \\ 0.0885614886 \\ 0 \\ 0 \\ 0.442807443 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0442807443 \\ 0.398526698 \end{bmatrix}.$$

Homografia H (normalizada). Reformando $\mathbf{h}$ em $H \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e normalizando para $h_{33} = 1$:

$$H = \begin{bmatrix} 2.0000 & 0.2222 & 0 \\ 0 & 1.1111 & 0 \\ 0 & 0.1111 & 1 \end{bmatrix}.$$

Checagem rápida (projeção). Para cada ponto (x,y), compute $[u,v,w]^T = H[x,y,1]^T$ e normalize: $(x',y') = (u/w,\ v/w)$.

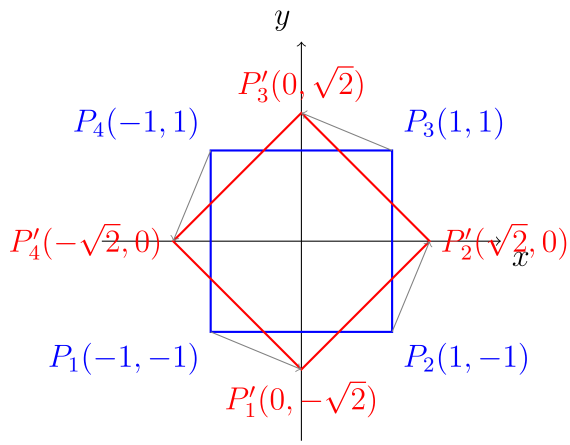
$$(0,0) \mapsto (0,0), \quad (1,0) \mapsto (2,0), \quad (1,1) \mapsto (2,1), \quad (0,1) \mapsto (0.2,1).$$

Tudo bate (diferenças apenas numéricas de ordem 10^{-16}).

11 Homografia: Exemplo Visual (Quadrado $\to$ Quadrado Rotacionado $45°$)

a) Desenho das correspondências (visual)

Escolhemos o quadrado fonte com cantos em $(-1,-1),(1,-1),(1,1),(-1,1)$. O quadrado alvo é o mesmo quadrado rotacionado de $45°$ em torno da origem: $(0,-\sqrt{2}),(\sqrt{2},0),(0,\sqrt{2}),(-\sqrt{2},0)$.



b) Pares de pontos (imagem 1 $\to$ imagem 2)

$$
\begin{aligned}
P_1(-1,-1) &\to P_1'(0,-\sqrt{2}),\\
P_2(1,-1) &\to P_2'(\sqrt{2},0),\\
P_3(1,1) &\to P_3'(0,\sqrt{2}),\\
P_4(-1,1) &\to P_4'(-\sqrt{2},0).
\end{aligned}
$$

c) Montagem da matriz A (DLT)

Para cada par $(x,y)\to(x',y')$, adicionamos duas linhas a $A\mathbf{h}=0$ (com $\mathbf{h}=[h_{11},h_{12},h_{13},h_{21},h_{22},h_{23},h_{31},h_{32},h_{33}]^T$):

$$
\begin{bmatrix} x\ y\ 1\ 0\ 0\ 0\ -xx'\ -yx'\ -x' \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0\ 0\ 0\ x\ y\ 1\ -xy'\ -yy'\ -y' \end{bmatrix}.
$$

Com os 4 pares acima, que contem $\sqrt{2}$, obtemos:

$$
A=\begin{bmatrix}
-1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & +\sqrt{2}\\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & +\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\
-1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & +\sqrt{2} & +\sqrt{2}\\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.
$$

d) SVD e vetor da homografia

Compute a SVD: $A = U\Sigma V^T$. Valores singulares (aprox., decrescentes):

$$\Sigma \approx \mathrm{diag}(3.4641,\ 3.2361,\ 3.2361,\ 2.0000,\ 2.0000,\ 2.0000,\ 1.2361,\ 1.2361).$$

O vetor da homografia $\mathbf{h}$ é a **última coluna de** V (associada ao menor singular). O resultado (antes de normalizar) foi proporcional a:

$$\mathbf{h} \propto \begin{bmatrix} 0.40824829 \\ -0.40824829 \\ 0 \\ 0.40824829 \\ 0.40824829 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.57735027 \end{bmatrix}.$$

e) Homografia H (normalizada com $h_{33} = 1$)

Reformando $\mathbf{h}$ em $H \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e dividindo por h_{33}:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

f) Checagem (projeção)

Para cada ponto (x, y), compute $[u, v, w]^T = H[x, y, 1]^T$ e normalize: $(x', y') = (u/w,\ v/w)$.

$$(-1,-1) \mapsto (0, -\sqrt{2}), \qquad (1,-1) \mapsto (\sqrt{2}, 0),$$
$$(1,1) \mapsto (0, \sqrt{2}), \qquad (-1,1) \mapsto (-\sqrt{2}, 0).$$

Tudo confere (diferenças apenas de arredondamento numérico).

g) Observações

- Este exemplo é uma **semelhança** (rotação pura) — um caso particular de homografia (linha inferior $[0, 0, 1]$).
- Em cenas não-planas com translação, uma homografia global não explica todos os pontos (paralaxe).
- Normalização (centrar & escalar) melhora a estabilidade do DLT; ao final, desnormalize com $H = T'^{-1} H_n T$.