

## MC458A - Laboratório 4 – Problema do troco

### 1 Introdução

Sempre que viaja para outros países, o Professor Sabin Ada prefere levar moedas e notas do país destino do que usar cartões de crédito. Não se sabe exatamente a razão para isso: alguns de seus amigos acham que ele é ligeiramente (ou muito) paranoico e não confia em bancos, outros acham é apenas uma mania atrelada a seu espírito aventureiro. De qualquer forma, o Professor Sabin Ada gosta de comprar lembrancinhas em suas viagens, para ele ou para amigos e parentes. É comum ele se ver na seguinte situação ao tentar comprar algum item.

Vendedor: São 14 dólares!

Professor Sabin Ada: Aqui está uma nota de 20.

Vendedor: Humm... Lamento, estou sem troco.

Professor Sabin Ada: Tudo bem! Aqui tem uma nota de 10 e uma de 5. Pode ficar com o troco!

Em outras palavras, o Professor Sabin Ada quer comprar um item de um certo valor. No entanto, os tipos de nota que ele tem podem não permitir a ele que pague o valor exato do item. Ele gostaria então de minimizar a quantia que ele pagaria (claro, cobrindo o preço do item). Além disso, ainda pagando a quantia mínima, Professor Sabin Ada quer também minimizar o número de notas usadas que ele usaria para pagar pelo item.

Você deve ajudar o Professor Sabin Ada projetando um algoritmo de programação dinâmica para resolver seu problema!

**Observação:** suponha que o Professor Sabin Ada tem um número suficientemente grande de notas de cada tipo. Ou seja, ele nunca fica sem notas de um determinado valor, para efeito da resolução do problema.

### Dica!?

Considere o seguinte problema ligeiramente diferente. Suponha que o item tem valor  $U$  e que o Professor Sabin Ada quer saber se é possível pagar o **valor exato**  $U$  com as moedas que tem e usando o **menor número possível de moedas**. Seja  $r(n, U)$  o menor número das  $n$  moedas que devem ser usadas para pagar exatamente o valor  $U$ . Definimos  $r(n, U) = +\infty$  se não

é possível pagar exatamente. Por exemplo, se  $U = 6$ ,  $n = 4$  e as notas são 1, 2, 3, 4, então há várias formas de pagar: por exemplo,  $6 = 1 + 2 + 3$  ou  $6 = 2 + 4$  ou  $6 = 1 + 1 + 1 + 3$ . Não há como pagar com uma única nota; assim, a segunda maneira usa o menor número de notas (duas). Logo,  $r(4, 6) = 2$  nesta instância. Se  $U = 17$ ,  $n = 4$  e as moedas são 6, 7, 8, 20, então  $r(4, 17) = +\infty$ .

Tente descobrir uma recorrência para  $r(n, U)$ : se o valor da  $n$ -ésima nota for maior que  $U$ , então ela não pode ser usada; caso contrário, a solução ótima ou usa a nota ou não (obviamente). Você então terá dois subproblemas do mesmo tipo. A recorrência que você deveria obter é semelhante à recorrência do Problema da Mochila (que vimos/veremos) em aula. Entretanto, note que aqui a mesma nota pode ser usada várias vezes.

Voltando ao problema do Professor Sabin Ada, suponha que o valor do item seja  $V$ . Para resolver o problema, basta descobrir o menor  $U$  tal que  $U \geq V$  e  $r(n, U) < +\infty$ . Por exemplo, se  $V = 17$  e  $n = 4$  e as moedas são 6, 7, 8, 20, então  $U = 18$  e  $r(n, 18) = 3$ . De fato, não é possível pagar exatamente 17 com essas notas; além disso,  $18 = 6 + 6 + 6$  e não é possível pagar 18 com menos notas.

### Observações:

- Você não precisa fazer exatamente desta maneira, mas não me parece que seja possível resolver o problema sem usar algum tipo de programação dinâmica.
- Suponha que o Professor Sabin Ada tem um número suficientemente grande de notas de cada tipo.
- **Não** serão aceitas soluções com recursão e memorização. Quem fizer assim, receberá nota ZERO no trabalho.
- Os valores das notas que o Professor Sabin Ada possui não são necessariamente valores de notas que pertencem ao sistema monetário brasileiro. As notas podem ter qualquer valor dentro do intervalo especificado na próxima seção.

## 2 Especificação de Entrada e Saída

### Entrada

A primeira linha contém um inteiro  $V$  ( $1 \leq V \leq 50.000$ ) especificando o valor do item. A segunda linha contém um inteiro  $n$  ( $1 \leq n \leq 100$ ) especificando o número de tipos de notas que ele tem. A terceira linha contém  $n$  inteiros positivos, cada um representando o valor  $v_i$  de cada nota ( $1 \leq v_i \leq 2000$ ).

### Saída

Imprima, em uma única linha, a quantia mínima que deve ser paga e o número mínimo de notas usadas. Os valores devem estar separados por um espaço.

### Exemplos

Entrada	Saída
13	13 3
3	
3 5 7	

Entrada	Saída
20	25 1
4	
50 30 25 15	

## 3 Implementação e Submissão

- A solução deverá ser implementada em C, C++, ou Python. Só é permitido o uso de bibliotecas padrão. Não é permitido o uso de nenhuma flag/diretiva de otimização.
- O programa deve ser submetido no SuSy, com o nome principal **t4** (por exemplo, t4.c).
- O número máximo de submissões é 20.
- A tarefa contém 10 testes abertos e 10 testes fechados. A nota será proporcional ao número de acertos nos testes fechados.

A solução pode ser submetida até o dia **21/11/22**.