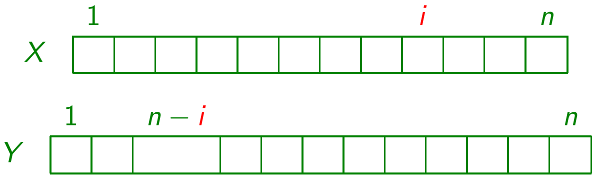
Exercício 1

Exercício (CLRS 9.3-8). Sejam $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ vetores **ordenados**. Projete um algoritmo de complexidade $O(\lg n)$ para encontrar a mediana (inferior) dos $2n$ elementos de X e Y.

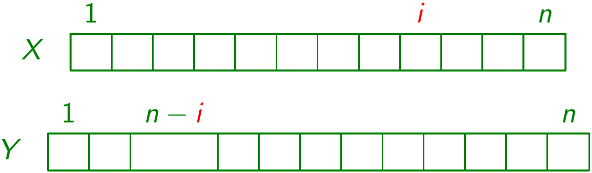
Note que para atingir a complexidade de $O(\lg n)$, o algoritmo deveria ser capaz de descartar partes "grandes" dos vetores X e Y em tempo constante em cada "passo".

Basta descrever a ideia em alto nível, mas de modo preciso. Depois, em casa você deveria escrever o pseudocódigo.

Exercício 1 – Ideia/Dica

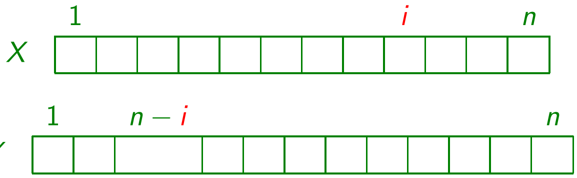


Exercício 1 – Ideia/Dica



Suponha que a mediana de X e Y seja $X[i]$. Então

$X[1\,..\,i-1] \leq X[i]$ e $Y[1\,..\,n-i] \leq X[i]$.



Suponha que a mediana de X e Y seja $X[i]$. Então

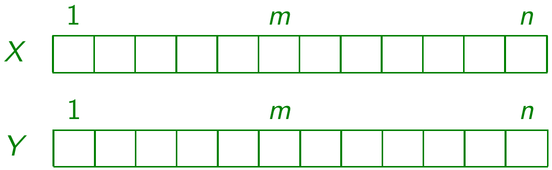
$X[1\,..\,i-1] \leq X[i]$ e $Y[1\,..\,n-i] \leq X[i]$.

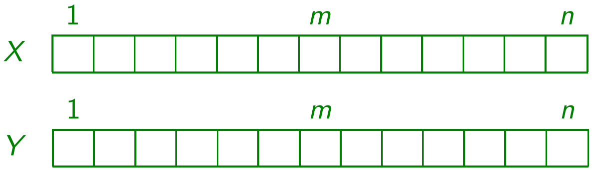
$X[i]$ **também** é a mediana de dois subvetores de X e Y de mesmo tamanho. Quais? Como descobrir isto com uma única comparação?

Observação. Há uma pequena diferença quando n é par ou ímpar (pelo menos na solução proposta aqui).

Índice da mediana de X (e de Y):

$$m = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ é par} \\ (n+1)/2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$





Exercício 1 – Solução

n é par

	1					m						n
X						30	?	?	?	?	?	?

	1					m						n
Y	?	?	?	?	?	60						

Exercício 1 – Solução

n é par

	1					m						n
X						30	?	?	?	?	?	?

	1					m						n
Y	?	?	?	?	?	60						

Se $X[m] \leq Y[m]$ então a mediana de X e Y é a mediana de $X[m+1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,m]$.

n é ímpar

	1						m						n
X							30	?	?	?	?	?	?

	1						m						n
Y	?	?	?	?	?	?	60						

Se $X[m] \leq Y[m]$ então a mediana de X e Y é a mediana de $X[m \mathinner{..} n]$ e $Y[1 \mathinner{..} m]$.

Exercício 1 – Solução

O caso em que $X[m] > Y[m]$ é análogo.

Exercício 1 – Solução

O caso em que $X[m] > Y[m]$ é análogo.

- O caso base é $n = 1$. A mediana é $\min\{X[1], Y[1]\}$.

Exercício 1 – Solução

O caso em que $X[m] > Y[m]$ é análogo.

- O caso base é $n = 1$. A mediana é $\min\{X[1], Y[1]\}$.
- Em cada passo, o valor de n diminui pela metade. Assim, em $O(\lg n)$ passos encontramos a mediana de X, Y.

Exercício 2

Um palíndromo é uma cadeia (string) que é idêntica ao seu **reverso**.
Por exemplo, ABA e $ABBA$ são palíndromos.

Exercício 2

Um palíndromo é uma cadeia (string) que é idêntica ao seu **reverso**. Por exemplo, ABA e $ABBA$ são palíndromos.

Problema: Dada uma cadeia $X = x_1 \ldots x_n$, determine um palíndromo (de comprimento) máximo que é uma subsequência de X.

Exercício 2

Um palíndromo é uma cadeia (string) que é idêntica ao seu **reverso**.
Por exemplo, ABA e $ABBA$ são palíndromos.

Problema: Dada uma cadeia $X = x_1 \ldots x_n$, determine um palíndromo (de comprimento) máximo que é uma subsequência de X.

Por exemplo, se $X = ABBDCABDCB$, então uma subsequência palindrômica máxima de X é $BCACB$ (há outras).

Exercício 2

Um palíndromo é uma cadeia (string) que é idêntica ao seu **reverso**.
Por exemplo, ABA e $ABBA$ são palíndromos.

Problema: Dada uma cadeia $X = x_1 \ldots x_n$, determine um palíndromo (de comprimento) máximo que é uma subsequência de X.

Por exemplo, se $X = ABBDCABDCB$, então uma subsequência palindrômica máxima de X é $BCACB$ (há outras).

Exercício. Mostre como resolver o problema em tempo $O(n^2)$. Basta achar o tamanho.

Exercício 2 – Solução

Para uma cadeia $X = x_1 \ldots x_n$, seja $X_{i,j} = x_i \ldots x_j$.

Seja $\mathrm{PAL}(i,j)$ a maior subsequência palindrômica de $X_{i,j}$.

Exercício 2 – Solução

Para uma cadeia $X = x_1 \ldots x_n$, seja $X_{i,j} = x_i \ldots x_j$.

Seja $\mathrm{PAL}(i, j)$ a maior subsequência palindrômica de $X_{i,j}$.

Teorema. Seja $Z = z_1 \ldots z_k$ uma subsequência palindrômica máxima de $X_{i,j}$.

1. Se $x_i = x_j$, então $z_k = x_i$ e $Z_{2,k-1} = \mathrm{PAL}(i+1, j-1)$.
2. Se $x_i \neq x_j$, então $z_1 \neq x_i$ implica que $Z = \mathrm{PAL}(i+1, j)$.
3. Se $x_i \neq x_j$, então $z_k \neq x_j$ implica que $Z = \mathrm{PAL}(i, j-1)$.

Exercício 2 – Solução

Para uma cadeia $X = x_1 \ldots x_n$, seja $X_{i,j} = x_i \ldots x_j$.

Seja $\mathrm{PAL}(i, j)$ a maior subsequência palindrômica de $X_{i,j}$.

Teorema. Seja $Z = z_1 \ldots z_k$ uma subsequência palindrômica máxima de $X_{i,j}$.

1. Se $x_i = x_j$, então $z_k = x_i$ e $Z_{2,k-1} = \mathrm{PAL}(i+1, j-1)$.
2. Se $x_i \neq x_j$, então $z_1 \neq x_i$ implica que $Z = \mathrm{PAL}(i+1, j)$.
3. Se $x_i \neq x_j$, então $z_k \neq x_j$ implica que $Z = \mathrm{PAL}(i, j-1)$.

Ilustração do Caso 1:

$$x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} \ldots x_{j-3} x_{j-2} x_{j-1} x_j$$

$$z_1 z_2 z_3 \ldots z_{k-2} z_{k-1} z_k$$

Para uma cadeia $X = x_1 \dots x_n$, seja $X_{i,j} = x_i \dots x_j$.

Seja $\mathrm{PAL}(i, j)$ uma subsequência palindrômica máxima de $X_{i,j}$.

Teorema. Seja $Z = z_1 \dots z_k$ uma subsequência palindrômica máxima de $X_{i,j}$.

1. Se $x_i = x_j$, então $z_k = x_i$ e $Z_{2,k-1} = \mathrm{PAL}(i+1, j-1)$.
2. Se $x_i \neq x_j$, então $z_1 \neq x_i$ implica que $Z = \mathrm{PAL}(i+1, j)$.
3. Se $x_i \neq x_j$, então $z_k \neq x_j$ implica que $Z = \mathrm{PAL}(i, j-1)$.

Ilustração do Caso 2:

$$x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} \dots x_{j-3} x_{j-2} x_{j-1} x_j$$

$$z_1 z_2 z_3 \dots z_{k-2} z_{k-1} z_k$$

Exercício 2 – Solução

Para uma cadeia $X = x_1 \ldots x_n$, seja $X_{i,j} = x_i \ldots x_j$.

Seja $\mathrm{PAL}(i,j)$ uma subsequência palindrômica máxima de $X_{i,j}$.

Teorema. Seja $Z = z_1 \ldots z_k$ uma subsequência palindrômica máxima de $X_{i,j}$.

1. Se $x_i = x_j$, então $z_k = x_i$ e $Z_{2,k-1} = \mathrm{PAL}(i+1, j-1)$.
2. Se $x_i \neq x_j$, então $z_1 \neq x_i$ implica que $Z = \mathrm{PAL}(i+1, j)$.
3. Se $x_i \neq x_j$, então $z_k \neq x_j$ implica que $Z = \mathrm{PAL}(i, j-1)$.

Ilustração do Caso 3:

$$x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} \ldots x_{j-3} x_{j-2} x_{j-1} x_j$$

$$z_1 z_2 z_3 \ldots z_{k-2} z_{k-1} z_k$$

Exercício 2 – Solução

Seja $c[i,j]$ o comprimento de $\mathrm{PAL}(i,j)$.

Teorema. Seja $Z = z_1 \dots z_k$ uma subsequência palindrômica máxima de $X_{i,j}$.

1. Se $x_i = x_j$, então $z_k = x_i$ e $Z_{2,k-1} = \mathrm{PAL}(i+1, j-1)$.
2. Se $x_i \neq x_j$, então $z_1 \neq x_i$ implica que $Z = \mathrm{PAL}(i+1, j)$.
3. Se $x_i \neq x_j$, então $z_k \neq x_j$ implica que $Z = \mathrm{PAL}(i, j-1)$.

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & i > j, \\ 1 & i = j, \\ c[i+1, j-1] + 2 & i < j \text{ e } x_i = x_j, \\ \max\{c[i+1, j], c[i, j-1]\} & i < j \text{ e } x_i \neq x_j. \end{cases}$$

Exercício 2 – Solução

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & i > j, \\ 1 & i = j, \\ c[i+1, j-1] + 2 & i < j \text{ e } x_i = x_j, \\ \max\{c[i+1,j], c[i,j-1]\} & i < j \text{ e } x_i \neq x_j. \end{cases}$$

Como preencher a matriz c?

Exercício 2 – Solução

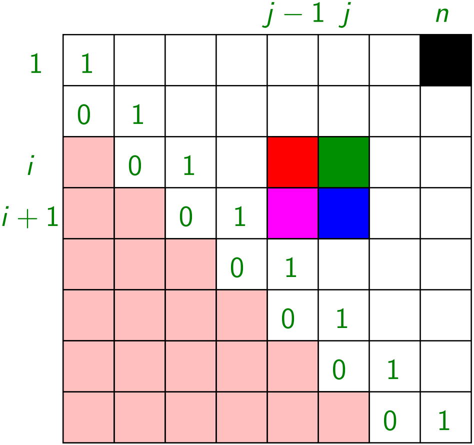
$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & i > j, \\ 1 & i = j, \\ c[i+1, j-1] + 2 & i < j \text{ e } x_i = x_j, \\ \max\{c[i+1,j], c[i,j-1]\} & i < j \text{ e } x_i \neq x_j. \end{cases}$$

Como preencher a matriz c?

O cálculo de $c[i,j]$ depende dos valores $c[i+1,j-1]$, $c[i+1,j]$ e $c[i,j-1]$ que estão em diagonais anteriores.

A diagonal principal corresponde ao caso $n = 1$ ($c[i,i]$) e usaremos a diagonal abaixo dela para o caso $n = 0$ ($c[i,i-1]$).

Exercício 2 – Solução



$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & i > j, \\ 1 & i = j, \\ c[i+1, j-1] + 2 & i < j \text{ e } x_i = x_j, \\ \max\{c[i+1, j], c[i, j-1]\} & i < j \text{ e } x_i \neq x_j. \end{cases}$$

Exercício 2 – Solução

PALÍNDROMO(X, n)

```
para i ← 1 até n faça c[i, i] ← 1
para i ← 2 até n faça c[i, i − 1] ← 0
para ℓ ← 2 até n faça
    para i ← 1 até n − ℓ + 1 faça
        j ← i + ℓ − 1
        se x[i] = x[j] então
            c[i, j] ← c[i + 1, j − 1] + 2
        senão
            se c[i + 1, j] > c[i, j − 1] então
                c[i, j] ← c[i + 1, j]
            senão
                c[i, j] ← c[i, j − 1]
devolva c[1, n]
```

Complexidade: $O(n^2)$