MC458 — Projeto e Análise de Algoritmos I

C.C. de Souza C.N. da Silva O. Lee

Antes de mais nada...

- Uma versão anterior deste conjunto de slides foi preparada por Cid Carvalho de Souza e Cândida Nunes da Silva para uma instância anterior desta disciplina.
- O que vocês tem em mãos é uma versão modificada preparada para atender a meus gostos.
- Nunca é demais enfatizar que o material é apenas um guia e não deve ser usado como única fonte de estudo. Para isso consultem a bibliografia (em especial o CLR ou CLRS).

Orlando Lee

Agradecimentos (Cid e Cândida)

- Várias pessoas contribuíram direta ou indiretamente com a preparação deste material.
- Algumas destas pessoas cederam gentilmente seus arquivos digitais enquanto outras cederam gentilmente o seu tempo fazendo correções e dando sugestões.
- Uma lista destes "colaboradores" (em ordem alfabética) é dada abaixo:
  - Célia Picinin de Mello
  - José Coelho de Pina
  - Orlando Lee
  - Paulo Feofiloff
  - Pedro Rezende
  - Ricardo Dahab
  - Zanoni Dias

Complexidade assintótica de algoritmos

- Como dito anteriormente, na maior parte desta disciplina, iremos nos concentrar na **análise de pior caso** e no **comportamento assintótico** dos algoritmos (instâncias de tamanho grande).

Complexidade assintótica de algoritmos

- Como dito anteriormente, na maior parte desta disciplina, iremos nos concentrar na **análise de pior caso** e no **comportamento assintótico** dos algoritmos (instâncias de tamanho grande).
- Considere o algorimo Insertionsort. Veremos que ele tem complexidade (de pior caso) igual a uma função quadrática $an^2 + bn + c$, onde a, b, c são constantes absolutas.

Complexidade assintótica de algoritmos

- Como dito anteriormente, na maior parte desta disciplina, iremos nos concentrar na **análise de pior caso** e no **comportamento assintótico** dos algoritmos (instâncias de tamanho grande).
- Considere o algorimo Insertionsort. Veremos que ele tem complexidade (de pior caso) igual a uma função quadrática $an^2 + bn + c$, onde a, b, c são constantes absolutas.
- O estudo assintótico nos permite "jogar para debaixo do tapete" os valores destas constantes, i.e., aquilo que independe do tamanho da entrada (neste caso os valores de a, b e c).

Complexidade assintótica de algoritmos

- Como dito anteriormente, na maior parte desta disciplina, iremos nos concentrar na **análise de pior caso** e no **comportamento assintótico** dos algoritmos (instâncias de tamanho grande).
- Considere o algorimo Insertionsort. Veremos que ele tem complexidade (de pior caso) igual a uma função quadrática $an^2 + bn + c$, onde a, b, c são constantes absolutas.
- O estudo assintótico nos permite "jogar para debaixo do tapete" os valores destas constantes, i.e., aquilo que independe do tamanho da entrada (neste caso os valores de a, b e c).
- **Por que podemos fazer isso?**

Análise assintótica de funções quadráticas

Considere a função quadrática $3n^2 + 10n + 50$:

Análise assintótica de funções quadráticas

Considere a função quadrática $3n^2 + 10n + 50$:

n	$3n^2 + 10n + 50$	$3n^2$
64	12978	12288
128	50482	49152
512	791602	786432
1024	3156018	3145728
2048	12603442	12582912
4096	50372658	50331648
8192	201408562	201326592
16384	805470258	805306368
32768	3221553202	3221225472

Análise assintótica de funções quadráticas

Considere a função quadrática $3n^2 + 10n + 50$:

n	$3n^2 + 10n + 50$	$3n^2$
64	12978	12288
128	50482	49152
512	791602	786432
1024	3156018	3145728
2048	12603442	12582912
4096	50372658	50331648
8192	201408562	201326592
16384	805470258	805306368
32768	3221553202	3221225472

Como se vê, $3n^2$ é o termo dominante quando n é grande.

Análise assintótica de funções quadráticas

Considere a função quadrática $3n^2 + 10n + 50$:

n	$3n^2 + 10n + 50$	$3n^2$
64	12978	12288
128	50482	49152
512	791602	786432
1024	3156018	3145728
2048	12603442	12582912
4096	50372658	50331648
8192	201408562	201326592
16384	805470258	805306368
32768	3221553202	3221225472

Como se vê, $3n^2$ é o termo dominante quando n é grande.

De um modo geral, podemos nos concentrar nos termos dominantes e esquecer os demais.

Notação assintótica

Notação assintótica

- Usando notação assintótica, dizemos que o algoritmo Insertionsort tem complexidade de tempo de pior caso $\Theta(n^2)$.

Notação assintótica

- Usando notação assintótica, dizemos que o algoritmo Insertionsort tem complexidade de tempo de pior caso $\Theta(n^2)$.
- Isto quer dizer duas coisas:

Notação assintótica

- Usando notação assintótica, dizemos que o algoritmo Insertionsort tem complexidade de tempo de pior caso $\Theta(n^2)$.
- Isto quer dizer duas coisas:
  - para todo n suficientemente grande, a complexidade de tempo é limitada (superiormente) assintoticamente por an^2 para alguma constante $a > 0$ e

Notação assintótica

- Usando notação assintótica, dizemos que o algoritmo Insertionsort tem complexidade de tempo de pior caso $\Theta(n^2)$.
- Isto quer dizer duas coisas:
  - para todo n suficientemente grande, a complexidade de tempo é limitada (superiormente) assintoticamente por an^2 para alguma constante $a > 0$ e
  - para todo n suficientemente grande, existe alguma instância de tamanho n que consome tempo **pelo menos** dn^2, para alguma constante $d > 0$.

Notação assintótica

- Usando notação assintótica, dizemos que o algoritmo Insertionsort tem complexidade de tempo de pior caso $\Theta(n^2)$.
- Isto quer dizer duas coisas:
  - para todo n suficientemente grande, a complexidade de tempo é limitada (superiormente) assintoticamente por an^2 para alguma constante $a > 0$ e
  - para todo n suficientemente grande, existe alguma instância de tamanho n que consome tempo **pelo menos** dn^2, para alguma constante $d > 0$.
- Mais adiante discutiremos em detalhes o uso da notação assintótica em análise de algoritmos.

Recursão e o paradigma de divisão-e-conquista

"To understand recursion, we must first understand recursion."

(anônimo)

"Para fazer um algoritmo recursivo é preciso ter fé."

(Siang W. Song)

Recursão e o paradigma de divisão-e-conquista

"To understand recursion, we must first understand recursion."

(anônimo)

"Para fazer um algoritmo recursivo é preciso ter fé."

(Siang W. Song)

- O que é o paradigma de **divisão-e-conquista**?

Recursão e o paradigma de divisão-e-conquista

"To understand recursion, we must first understand recursion."

(anônimo)

"Para fazer um algoritmo recursivo é preciso ter fé."

(Siang W. Song)

- O que é o paradigma de **divisão-e-conquista**?
- Como mostrar a correção de um algoritmo recursivo?

Recursão e o paradigma de divisão-e-conquista

"To understand recursion, we must first understand recursion."

(anônimo)

"Para fazer um algoritmo recursivo é preciso ter fé."

(Siang W. Song)

- O que é o paradigma de **divisão-e-conquista**?
- Como mostrar a correção de um algoritmo recursivo?
- Como analisar o consumo de tempo de um algoritmo recursivo?

Recursão e o paradigma de divisão-e-conquista

"To understand recursion, we must first understand recursion."

(anônimo)

"Para fazer um algoritmo recursivo é preciso ter fé."

(Siang W. Song)

- O que é o paradigma de **divisão-e-conquista**?
- Como mostrar a correção de um algoritmo recursivo?
- Como analisar o consumo de tempo de um algoritmo recursivo?
- O que é uma **fórmula de recorrência**?

Recursão e o paradigma de divisão-e-conquista

"To understand recursion, we must first understand recursion."

(anônimo)

"Para fazer um algoritmo recursivo é preciso ter fé."

(Siang W. Song)

- O que é o paradigma de **divisão-e-conquista**?
- Como mostrar a correção de um algoritmo recursivo?
- Como analisar o consumo de tempo de um algoritmo recursivo?
- O que é uma **fórmula de recorrência**?
- O que significa *resolver* uma fórmula de recorrência?

Recursão e o paradigma de divisão-e-conquista

- Um algoritmo recursivo encontra a saída para uma instância de entrada de um problema chamando a si mesmo para resolver instâncias menores deste mesmo problema.

Recursão e o paradigma de divisão-e-conquista

- Um algoritmo recursivo encontra a saída para uma instância de entrada de um problema chamando a si mesmo para resolver instâncias menores deste mesmo problema.
- Algoritmos de divisão-e-conquista possuem três etapas em cada nível de recursão:

Recursão e o paradigma de divisão-e-conquista

- Um algoritmo recursivo encontra a saída para uma instância de entrada de um problema chamando a si mesmo para resolver instâncias menores deste mesmo problema.
- Algoritmos de divisão-e-conquista possuem três etapas em cada nível de recursão:
  1. **Divisão:** o problema é dividido em subproblemas semelhantes ao problema original, porém tendo com entrada instâncias de tamanho menor;

Recursão e o paradigma de divisão-e-conquista

- Um algoritmo recursivo encontra a saída para uma instância de entrada de um problema chamando a si mesmo para resolver instâncias menores deste mesmo problema.
- Algoritmos de divisão-e-conquista possuem três etapas em cada nível de recursão:
  1. **Divisão:** o problema é dividido em subproblemas semelhantes ao problema original, porém tendo com entrada instâncias de tamanho menor;
  2. **Conquista:** cada subproblema é resolvido recursivamente a menos que o tamanho de sua entrada seja suficientemente "pequeno", situação na qual ele é resolvido diretamente;

Recursão e o paradigma de divisão-e-conquista

- Um algoritmo recursivo encontra a saída para uma instância de entrada de um problema chamando a si mesmo para resolver instâncias menores deste mesmo problema.
- Algoritmos de divisão-e-conquista possuem três etapas em cada nível de recursão:
  1. **Divisão:** o problema é dividido em subproblemas semelhantes ao problema original, porém tendo com entrada instâncias de tamanho menor;
  2. **Conquista:** cada subproblema é resolvido recursivamente a menos que o tamanho de sua entrada seja suficientemente "pequeno", situação na qual ele é resolvido diretamente;
  3. **Combinação:** as soluções dos subproblemas são combinadas para obter uma solução do problema original.

Exemplo de divisão-e-conquista: *Mergesort*

Exemplo de divisão-e-conquista: *Mergesort*

- Mergesort é um algoritmo para resolver o problema de ordenação e um exemplo clássico do uso do paradigma de divisão-e-conquista. (*to merge* = intercalar)

Exemplo de divisão-e-conquista: *Mergesort*

- Mergesort é um algoritmo para resolver o problema de ordenação e um exemplo clássico do uso do paradigma de divisão-e-conquista. (*to merge* = intercalar)
- Descrição do Mergesort em alto nível;

Exemplo de divisão-e-conquista: *Mergesort*

- Mergesort é um algoritmo para resolver o problema de ordenação e um exemplo clássico do uso do paradigma de divisão-e-conquista. (*to merge* = intercalar)
- Descrição do Mergesort em alto nível;
  1. **Divisão**: divida o vetor com n elementos em dois subvetores de tamanho $\lfloor n/2 \rfloor$ e $\lceil n/2 \rceil$, respectivamente.

Exemplo de divisão-e-conquista: *Mergesort*

- Mergesort é um algoritmo para resolver o problema de ordenação e um exemplo clássico do uso do paradigma de divisão-e-conquista. (*to merge* = intercalar)
- Descrição do Mergesort em alto nível;
  1. **Divisão**: divida o vetor com n elementos em dois subvetores de tamanho $\lfloor n/2 \rfloor$ e $\lceil n/2 \rceil$, respectivamente.
  2. **Conquista**: ordene os dois vetores recursivamente usando o Mergesort;

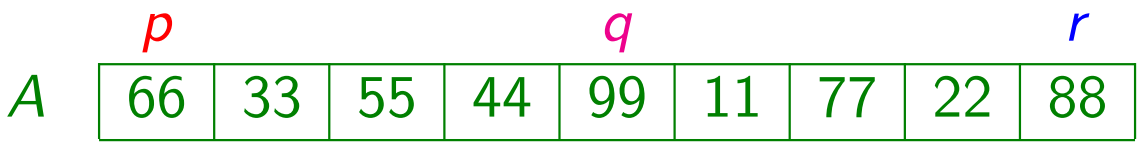
Exemplo de divisão-e-conquista: *Mergesort*

- Mergesort é um algoritmo para resolver o problema de ordenação e um exemplo clássico do uso do paradigma de divisão-e-conquista. (*to merge* = intercalar)
- Descrição do Mergesort em alto nível;
  1. **Divisão**: divida o vetor com n elementos em dois subvetores de tamanho $\lfloor n/2 \rfloor$ e $\lceil n/2 \rceil$, respectivamente.
  2. **Conquista**: ordene os dois vetores recursivamente usando o Mergesort;
  3. **Combinação**: intercale os dois subvetores para obter um vetor ordenado usando o algoritmo Intercala.

Mergesort

Relembrando: o objetivo é rearranjar $A[p\,..\,r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

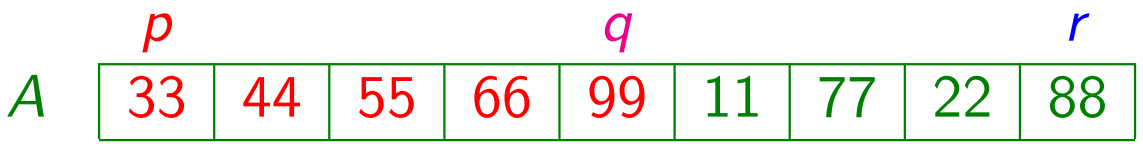
```
MergeSort(A, p, r)
1   se p < r
2      então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3            MergeSort(A, p, q)
4            MergeSort(A, q + 1, r)
5            Intercala(A, p, q, r)
```



Mergesort

Relembrando: o objetivo é rearranjar $A[p\,..\,r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

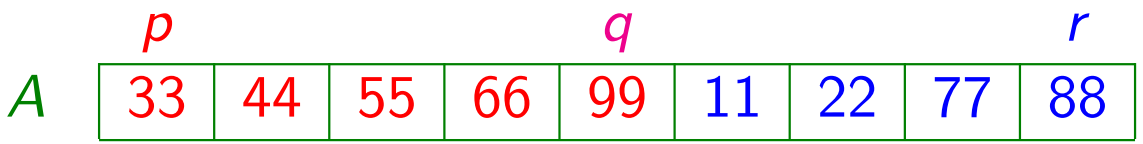
```
MergeSort(A, p, r)
1   se p < r
2      então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3            MergeSort(A, p, q)
4            MergeSort(A, q + 1, r)
5            Intercala(A, p, q, r)
```



Mergesort

Relembrando: o objetivo é rearranjar $A[p\,..\,r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

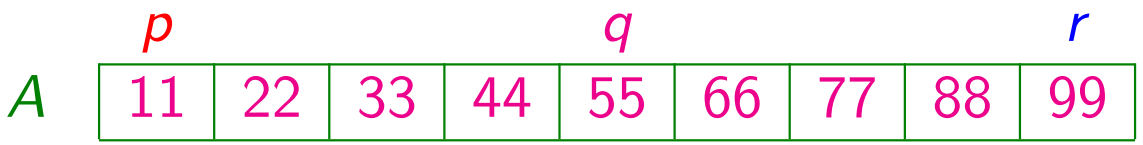
```
MergeSort(A, p, r)
1   se p < r
2      então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3            MergeSort(A, p, q)
4            MergeSort(A, q + 1, r)
5            Intercala(A, p, q, r)
```



Mergesort

Relembrando: o objetivo é rearranjar $A[p\,..\,r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

```
MergeSort(A, p, r)
1   se p < r
2      então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3            MergeSort(A, p, q)
4            MergeSort(A, q + 1, r)
5            Intercala(A, p, q, r)
```



Correção do Mergesort

```
MergeSort(A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MergeSort(A, p, q)
4             MergeSort(A, q + 1, r)
5             Intercala(A, p, q, r)
```

Correção do Mergesort

```
MergeSort(A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MergeSort(A, p, q)
4             MergeSort(A, q + 1, r)
5             Intercala(A, p, q, r)
```

O algoritmo está correto?

Correção do Mergesort

```
MergeSort(A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MergeSort(A, p, q)
4             MergeSort(A, q + 1, r)
5             Intercala(A, p, q, r)
```

O algoritmo está correto?

A correção do algoritmo MergeSort apoia-se na correção do algoritmo Intercala e pode ser demonstrada **por indução** em $n := r - p + 1$.

Correção do Mergesort

```
MergeSort(A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MergeSort(A, p, q)
4             MergeSort(A, q + 1, r)
5             Intercala(A, p, q, r)
```

O algoritmo está correto?

A correção do algoritmo MergeSort apoia-se na correção do algoritmo Intercala e pode ser demonstrada **por indução** em $n := r - p + 1$.

De modo geral, a prova de correção de um algoritmo recursivo segue o mesmo paradigma de prova por indução.

Correção do Mergesort

```
MergeSort(A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MergeSort(A, p, q)
4             MergeSort(A, q + 1, r)
5             Intercala(A, p, q, r)
```

Suponha que Intercala é correto. Veremos mais adiante no curso uma implementação e uma prova de correção desta rotina.

Correção do Mergesort

```
MergeSort(A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MergeSort(A, p, q)
4             MergeSort(A, q + 1, r)
5             Intercala(A, p, q, r)
```

Suponha que Intercala é correto. Veremos mais adiante no curso uma implementação e uma prova de correção desta rotina.

Base: $n = 1$. Neste caso $p = r$ e claramente MergeSort funciona.

Correção do Mergesort

```
MergeSort(A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MergeSort(A, p, q)
4             MergeSort(A, q + 1, r)
5             Intercala(A, p, q, r)
```

Suponha que Intercala é correto. Veremos mais adiante no curso uma implementação e uma prova de correção desta rotina.

Base: $n = 1$. Neste caso $p = r$ e claramente MergeSort funciona.

Hipótese de indução: suponha que $n \geq 2$ e que MergeSort funciona para qualquer vetor com menos que n elementos.

Correção do Mergesort

```
MergeSort(A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MergeSort(A, p, q)
4             MergeSort(A, q + 1, r)
5             Intercala(A, p, q, r)
```

Suponha que Intercala é correto. Veremos mais adiante no curso uma implementação e uma prova de correção desta rotina.

Base: $n = 1$. Neste caso $p = r$ e claramente MergeSort funciona.

Hipótese de indução: suponha que $n \geq 2$ e que MergeSort funciona para qualquer vetor com menos que n elementos.

Passo de indução: seja $A[p \,..\, r]$ com $n = r - p + 1$.

Correção do Mergesort

```
MergeSort(A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MergeSort(A, p, q)
4             MergeSort(A, q + 1, r)
5             Intercala(A, p, q, r)
```

Correção do Mergesort

```
MergeSort(A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MergeSort(A, p, q)
4             MergeSort(A, q + 1, r)
5             Intercala(A, p, q, r)
```

Como $p < r$, segue que $p \leq q < r$.
Assim, $A[p\,..\,q]$ e $A[q+1\,..\,r]$ são vetores com menos que n elementos.

Correção do Mergesort

```
MergeSort(A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MergeSort(A, p, q)
4             MergeSort(A, q + 1, r)
5             Intercala(A, p, q, r)
```

Como $p < r$, segue que $p \leq q < r$.
Assim, $A[p\,..\,q]$ e $A[q+1\,..\,r]$ são vetores com menos que n elementos.

Por HI, as linhas 3 e 4 ordenam corretamente estes vetores.

Correção do Mergesort

```
MergeSort(A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MergeSort(A, p, q)
4             MergeSort(A, q + 1, r)
5             Intercala(A, p, q, r)
```

Como $p < r$, segue que $p \leq q < r$.
Assim, $A[p\,..\,q]$ e $A[q+1\,..\,r]$ são vetores com menos que n elementos.

Por HI, as linhas 3 e 4 ordenam corretamente estes vetores.

Por hipótese, Intercala está correto. Logo, MergeSort ordena corretamente $A[p\,..\,r]$.

Complexidade do Mergesort

```
MergeSort(A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MergeSort(A, p, q)
4             MergeSort(A, q + 1, r)
5             Intercala(A, p, q, r)
```

Seja $T(n)$ a complexidade de tempo do MergeSort para ordenar um vetor de n elementos.

Complexidade do Mergesort

```
MergeSort(A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MergeSort(A, p, q)
4             MergeSort(A, q + 1, r)
5             Intercala(A, p, q, r)
```

Seja $T(n)$ a complexidade de tempo do MergeSort para ordenar um vetor de n elementos.

Para estimar a complexidade de tempo de um algoritmo, usualmente calculamos quantas operações ele faz em cada linha ou em um bloco. Como o MergeSort é um algoritmo recursivo, isto não pode ser feito apenas desta forma.

Complexidade do Mergesort

```
MergeSort(A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MergeSort(A, p, q)
4             MergeSort(A, q + 1, r)
5             Intercala(A, p, q, r)
```

Seja $T(n)$ a complexidade de tempo do MergeSort para ordenar um vetor de n elementos.

Para estimar a complexidade de tempo de um algoritmo, usualmente calculamos quantas operações ele faz em cada linha ou em um bloco. Como o MergeSort é um algoritmo recursivo, isto não pode ser feito apenas desta forma.

O que fazemos é obter uma fórmula recursiva para $T(n)$ que temos de "resolver".

Complexidade do Mergesort

```
MergeSort(A, p, r)
1   se p < r
2      então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3            MergeSort(A, p, q)
4            MergeSort(A, q + 1, r)
5            Intercala(A, p, q, r)
```

linha	consumo de tempo
1	?
2	?
3	?
4	?
5	?

Complexidade do Mergesort

```
MergeSort(A, p, r)
1   se p < r
2      então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3            MergeSort(A, p, q)
4            MergeSort(A, q + 1, r)
5            Intercala(A, p, q, r)
```

linha	consumo de tempo
1	$\Theta(1)$
2	$\Theta(1)$
3	$T(\lceil n/2 \rceil)$
4	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
5	$\Theta(n)$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) + \Theta(2)$$

Complexidade do Mergesort

- Obtemos o que chamamos de **fórmula de recorrência** (i.e., uma fórmula que define uma função em termos dela mesma).

$$T(1) = \Theta(1)$$
$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Complexidade do Mergesort

- Obtemos o que chamamos de **fórmula de recorrência** (i.e., uma fórmula que define uma função em termos dela mesma).

$$T(1) = \Theta(1)$$
$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

- Em geral, ao aplicar o paradigma de divisão-e-conquista, chega-se a um algoritmo recursivo cuja complexidade $T(n)$ é dada por uma **fórmula de recorrência**.

Complexidade do Mergesort

- Obtemos o que chamamos de **fórmula de recorrência** (i.e., uma fórmula que define uma função em termos dela mesma).

$$T(1) = \Theta(1)$$
$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

- Em geral, ao aplicar o paradigma de divisão-e-conquista, chega-se a um algoritmo recursivo cuja complexidade $T(n)$ é dada por uma **fórmula de recorrência**.
- É preciso então resolver a recorrência! Mas, o que significa resolver uma recorrência?

Complexidade do Mergesort

- Obtemos o que chamamos de **fórmula de recorrência** (i.e., uma fórmula que define uma função em termos dela mesma).

$$T(1) = \Theta(1)$$
$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

- Em geral, ao aplicar o paradigma de divisão-e-conquista, chega-se a um algoritmo recursivo cuja complexidade $T(n)$ é dada por uma **fórmula de recorrência**.
- É preciso então resolver a recorrência! Mas, o que significa resolver uma recorrência?
- Significa encontrar uma "fórmula fechada" para $T(n)$.

Complexidade do Mergesort

- Obtemos o que chamamos de **fórmula de recorrência** (i.e., uma fórmula que define uma função em termos dela mesma).

$$T(1) = \Theta(1)$$
$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

- Em geral, ao aplicar o paradigma de divisão-e-conquista, chega-se a um algoritmo recursivo cuja complexidade $T(n)$ é dada por uma **fórmula de recorrência**.
- É preciso então resolver a recorrência! Mas, o que significa resolver uma recorrência?
- Significa encontrar uma "fórmula fechada" para $T(n)$.
- No caso, $T(n) = \Theta(n \lg n)$. Ou seja, o consumo de tempo do MergeSort é $\Theta(n \lg n)$ no pior caso.

Complexidade do Mergesort

- Obtemos o que chamamos de **fórmula de recorrência** (i.e., uma fórmula que define uma função em termos dela mesma).

$$T(1) = \Theta(1)$$
$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

- Em geral, ao aplicar o paradigma de divisão-e-conquista, chega-se a um algoritmo recursivo cuja complexidade $T(n)$ é dada por uma **fórmula de recorrência**.
- É preciso então resolver a recorrência! Mas, o que significa resolver uma recorrência?
- Significa encontrar uma "fórmula fechada" para $T(n)$.
- No caso, $T(n) = \Theta(n \lg n)$. Ou seja, o consumo de tempo do MergeSort é $\Theta(n \lg n)$ no pior caso.
- Veremos depois como resolver recorrências.

Crescimento de funções

Notação Assintótica

Notação Assintótica

- Vamos expressar complexidade através de funções em variáveis que descrevam o tamanho de instâncias do problema. Exemplos:

Notação Assintótica

- Vamos expressar complexidade através de funções em variáveis que descrevam o tamanho de instâncias do problema. Exemplos:
  - Problemas de aritmética: número de bits (ou bytes) dos inteiros.

Notação Assintótica

- Vamos expressar complexidade através de funções em variáveis que descrevam o tamanho de instâncias do problema. Exemplos:
  - Problemas de aritmética: número de bits (ou bytes) dos inteiros.
  - Problemas em grafos: número de vértices e/ou arestas

Notação Assintótica

- Vamos expressar complexidade através de funções em variáveis que descrevam o tamanho de instâncias do problema. Exemplos:
  - Problemas de aritmética: número de bits (ou bytes) dos inteiros.
  - Problemas em grafos: número de vértices e/ou arestas
  - Problemas de ordenação de vetores: tamanho do vetor.

Notação Assintótica

- Vamos expressar complexidade através de funções em variáveis que descrevam o tamanho de instâncias do problema. Exemplos:
  - Problemas de aritmética: número de bits (ou bytes) dos inteiros.
  - Problemas em grafos: número de vértices e/ou arestas
  - Problemas de ordenação de vetores: tamanho do vetor.
  - Busca em textos: número de caracteres do texto ou padrão de busca.

Notação Assintótica

- Vamos expressar complexidade através de funções em variáveis que descrevam o tamanho de instâncias do problema. Exemplos:
  - Problemas de aritmética: número de bits (ou bytes) dos inteiros.
  - Problemas em grafos: número de vértices e/ou arestas
  - Problemas de ordenação de vetores: tamanho do vetor.
  - Busca em textos: número de caracteres do texto ou padrão de busca.
- Vamos supor que funções que expressam complexidade são sempre positivas, já que estamos contando o número de operações.

Comparação de Funções

Comparação de Funções

- Vamos comparar funções assintoticamente, ou seja, para valores grandes, desprezando constantes multiplicativas e termos de menor ordem.

Comparação de Funções

- Vamos comparar funções assintoticamente, ou seja, para valores grandes, desprezando constantes multiplicativas e termos de menor ordem.

Por que podemos fazer isto?

Comparação de Funções

- Vamos comparar funções assintoticamente, ou seja, para valores grandes, desprezando constantes multiplicativas e termos de menor ordem.

Por que podemos fazer isto?

Considere as funções

$$n^2, 2n^2, 30n^2, 100n^2, cn^2.$$

Comparação de Funções

- Vamos comparar funções assintoticamente, ou seja, para valores grandes, desprezando constantes multiplicativas e termos de menor ordem.

Por que podemos fazer isto?

Considere as funções

$$n^2, 2n^2, 30n^2, 100n^2, cn^2.$$

Obviamente, quanto maior a constante c associada, maior é o valor da função. Entretanto, todas elas têm a mesma velocidade de crescimento. Podemos ignorar o valor de c.

Comparação de Funções

Comparação de Funções

- Vamos comparar funções assintoticamente, ou seja, para valores grandes, desprezando constantes multiplicativas e termos de menor ordem.

Comparação de Funções

- Vamos comparar funções assintoticamente, ou seja, para valores grandes, desprezando constantes multiplicativas e termos de menor ordem.

	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10^4$	$n = 10^6$	$n = 10^9$
$\log n$	2	3	4	6	9
n	100	1000	10^4	10^6	10^9
$n \log n$	200	3000	$4 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^9$
n^2	10^4	10^6	10^8	10^{12}	10^{18}
$100n^2 + 15n$	$1,0015 \cdot 10^6$	$1,00015 \cdot 10^8$	$\approx 10^{10}$	$\approx 10^{14}$	$\approx 10^{20}$
2^n	$\approx 1,26 \cdot 10^{30}$	$\approx 1,07 \cdot 10^{301}$	?	?	?

Classe O

Definição:

$O(g(n)) = \{f(n) :$ existem constantes positivas c e n_0 tais que $0 \leq f(n) \leq cg(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

Classe O

Definição:

$O(g(n)) = \{f(n) :$ existem constantes positivas c e n_0 tais que $0 \leq f(n) \leq cg(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

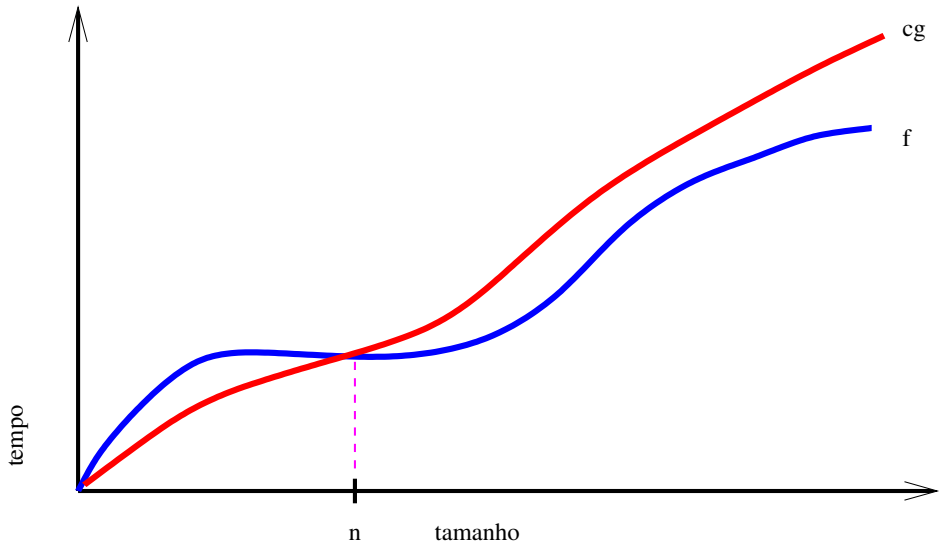
Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in O(g(n))$, então $f(n)$ cresce no máximo tão rapidamente quanto $g(n)$.

Classe O

Definição:

$O(g(n)) = \{f(n) :$ existem constantes positivas c e n_0 tais que $0 \leq f(n) \leq cg(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in O(g(n))$, então $f(n)$ cresce no máximo tão rapidamente quanto $g(n)$.



Classe O

Definição:

$O(g(n)) = \{f(n) :$ existem constantes positivas c e n_0 tais que $0 \leq f(n) \leq cg(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in O(g(n))$, então $f(n)$ cresce no máximo tão rapidamente quanto $g(n)$.

Exemplo:

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in O(n^2)$.

Classe O

Definição:

$O(g(n)) = \{f(n) :$ existem constantes positivas c e n_0 tais que $0 \leq f(n) \leq cg(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in O(g(n))$, então $f(n)$ cresce no máximo tão rapidamente quanto $g(n)$.

Exemplo:

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in O(n^2)$.
Valores de c e n_0 que satisfazem a definição são

$$c = \frac{1}{2} \text{ e } n_0 = 7.$$

Classe O

Definição:

$O(g(n)) = \{f(n) :$ existem constantes positivas c e n_0 tais que $0 \leq f(n) \leq cg(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in O(g(n))$, então $f(n)$ cresce no máximo tão rapidamente quanto $g(n)$.

Exemplo:

O que é a classe $O(1)$?

Classe O

Definição:

$O(g(n)) = \{f(n) :$ existem constantes positivas c e n_0 tais que $0 \leq f(n) \leq cg(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in O(g(n))$, então $f(n)$ cresce no máximo tão rapidamente quanto $g(n)$.

Exemplo:

O que é a classe $O(1)$?
É classe de funções que são limitadas por alguma constante.

Classe Ω

Definição:

$\Omega(g(n)) = \{f(n) :$ existem constantes positivas c e n_0 tais que $0 \leq cg(n) \leq f(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

Classe Ω

Definição:

$\Omega(g(n)) = \{f(n) :$ existem constantes positivas c e n_0 tais que $0 \leq cg(n) \leq f(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

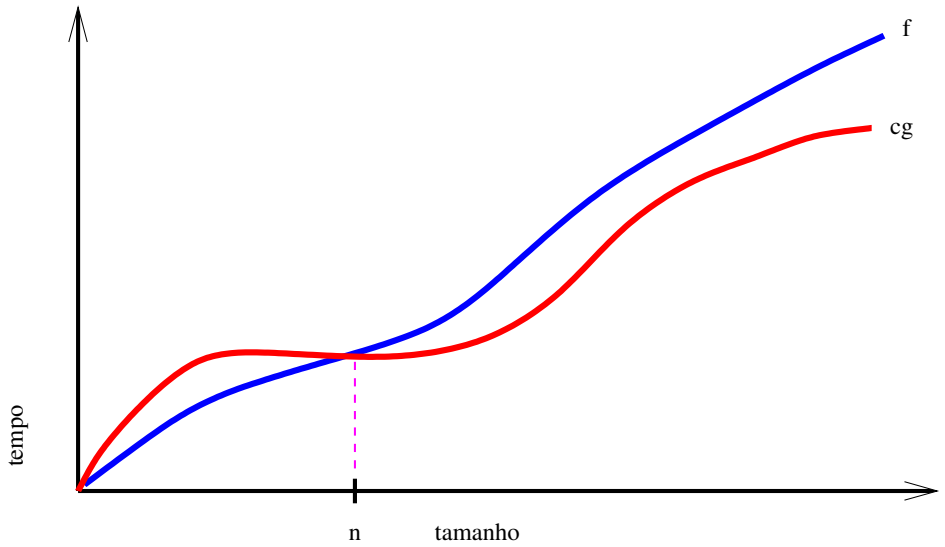
Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \Omega(g(n))$, então $f(n)$ cresce no mínimo tão lentamente quanto $g(n)$.

Classe Ω

Definição:

$\Omega(g(n)) = \{f(n) :$ existem constantes positivas c e n_0 tais que $0 \leq cg(n) \leq f(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \Omega(g(n))$, então $f(n)$ cresce no mínimo tão lentamente quanto $g(n)$.



Classe Ω

Definição:

$\Omega(g(n)) = \{f(n) :$ existem constantes positivas c e n_0 tais que $0 \leq cg(n) \leq f(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \Omega(g(n))$, então $f(n)$ cresce no mínimo tão lentamente quanto $g(n)$.

Exemplo:

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Omega(n^2)$.

Classe Ω

Definição:

$\Omega(g(n)) = \{f(n) :$ existem constantes positivas c e n_0 tais que $0 \leq cg(n) \leq f(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \Omega(g(n))$, então $f(n)$ cresce no mínimo tão lentamente quanto $g(n)$.

Exemplo:

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Omega(n^2)$.
Valores de c e n_0 que satisfazem a definição são

$$c = \frac{1}{14} \text{ e } n_0 = 7.$$

Classe Θ

Definição:

$\Theta(g(n)) = \{f(n)$: existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

Classe Θ

Definição:

$\Theta(g(n)) = \{f(n) :$ existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

Equivalentemente, $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $f(n) \in O(g(n))$ e $f(n) \in \Omega(g(n))$.

Classe Θ

Definição:

$\Theta(g(n)) = \{f(n) :$ existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

Classe Θ

Definição:

$\Theta(g(n)) = \{f(n) :$ existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

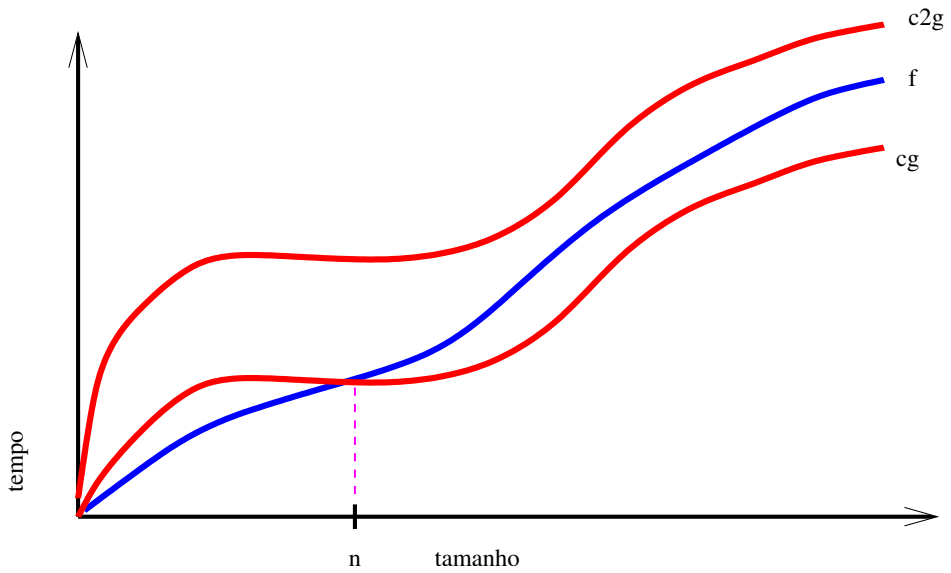
Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \Theta(g(n))$, então $f(n)$ cresce tão rapidamente quanto $g(n)$.

Classe Θ

Definição:

$\Theta(g(n)) = \{f(n) :$ existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \Theta(g(n))$, então $f(n)$ cresce tão rapidamente quanto $g(n)$.



Classe Θ

Definição:

$\Theta(g(n)) = \{f(n) :$ existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \Theta(g(n))$, então $f(n)$ cresce tão rapidamente quanto $g(n)$.

Exemplo:

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Theta(n^2)$.

Classe Θ

Definição:

$\Theta(g(n)) = \{f(n) :$ existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \Theta(g(n))$, então $f(n)$ cresce tão rapidamente quanto $g(n)$.

Exemplo:

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Theta(n^2)$.
Valores de c_1, c_2 e n_0 que satisfazem a definição são

$$c_1 = \frac{1}{14},\ c_2 = \frac{1}{2} \text{ e } n_0 = 7.$$

Classe o

Definição:

$o(g(n)) = \{f(n) :$ para toda constante positiva c, existe uma constante $n_0 > 0$ tal que $0 \leq f(n) < cg(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

Classe o

Definição:

$o(g(n)) = \{f(n) :$ para toda constante positiva c, existe uma constante $n_0 > 0$ tal que $0 \leq f(n) < cg(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in o(g(n))$, então $f(n)$ cresce mais lentamente que $g(n)$.

Classe o

Definição:

$o(g(n)) = \{f(n) :$ para toda constante positiva c, existe uma constante $n_0 > 0$ tal que $0 \leq f(n) < cg(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in o(g(n))$, então $f(n)$ cresce mais lentamente que $g(n)$.

Exemplo:

$1000n^2 \in o(n^3)$

Classe o

Definição:

$o(g(n)) = \{f(n) :$ para toda constante positiva c, existe uma constante $n_0 > 0$ tal que $0 \leq f(n) < cg(n)$, para todo $n \geq n_0\}$.

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in o(g(n))$, então $f(n)$ cresce mais lentamente que $g(n)$.

Exemplo:

$1000n^2 \in o(n^3)$

Para cada valor de c, um n_0 que satisfaz a definição é

$$n_0 = \left\lceil \frac{1000}{c} \right\rceil + 1.$$

Classe ω

Definição:

$\omega(g(n)) = \{f(n) :$ para toda constante positiva c, existe uma constante $n_0 > 0$ tal que $0 \leq cg(n) < f(n)$, para todo $n \geq n_0$.$\}$

Classe ω

Definição:

$\omega(g(n)) = \{f(n) :$ para toda constante positiva c, existe uma constante $n_0 > 0$ tal que $0 \leq cg(n) < f(n)$, para todo $n \geq n_0$.$\}$

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \omega(g(n))$, então $f(n)$ cresce mais rapidamente que $g(n)$.

Classe ω

Definição:

$\omega(g(n)) = \{f(n) :$ para toda constante positiva c, existe uma constante $n_0 > 0$ tal que $0 \leq cg(n) < f(n)$, para todo $n \geq n_0$.$\}$

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \omega(g(n))$, então $f(n)$ cresce mais rapidamente que $g(n)$.

Exemplo:

$\frac{1}{1000}n^2 \in \omega(n)$

Classe ω

Definição:

$\omega(g(n)) = \{f(n) :$ para toda constante positiva c, existe uma constante $n_0 > 0$ tal que $0 \leq cg(n) < f(n)$, para todo $n \geq n_0$.$\}$

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \omega(g(n))$, então $f(n)$ cresce mais rapidamente que $g(n)$.

Exemplo:

$\frac{1}{1000}n^2 \in \omega(n)$

Para cada valor de c, um n_0 que satisfaz a definição é

$$n_0 = \lceil 1000c \rceil + 1.$$

Definições equivalentes

$f(n) \in o(g(n))$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

$f(n) \in O(g(n))$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.

$f(n) \in \Theta(g(n))$ se $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.

$f(n) \in \Omega(g(n))$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$.

$f(n) \in \omega(g(n))$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

Propriedades das Classes

Transitividade:

Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então $f(n) \in O(h(n))$.
Se $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $g(n) \in \Omega(h(n))$, então $f(n) \in \Omega(h(n))$.
Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.
Se $f(n) \in o(g(n))$ e $g(n) \in o(h(n))$, então $f(n) \in o(h(n))$.
Se $f(n) \in \omega(g(n))$ e $g(n) \in \omega(h(n))$, então $f(n) \in \omega(h(n))$.

Propriedades das Classes

Reflexividade:
$f(n) \in O(f(n))$.
$f(n) \in \Omega(f(n))$.
$f(n) \in \Theta(f(n))$.
Simetria:
$f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Theta(f(n))$.
Simetria Transposta:
$f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Omega(f(n))$.
$f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \omega(f(n))$.

Convenção

Usaremos expressões como $f(n) = O(g(n))$. Ela significa a mesma coisa que $f(n) \in O(g(n))$, ou seja, a função $f(n)$ pertence à classe de funções $O(g(n))$. O mesmo se aplica para Ω e Θ.

Convenção

Usaremos expressões como $f(n) = O(g(n))$. Ela significa a mesma coisa que $f(n) \in O(g(n))$, ou seja, a função $f(n)$ pertence à classe de funções $O(g(n))$. O mesmo se aplica para Ω e Θ.

- MergeSort tem complexidade de tempo $O(n \lg n)$.

Convenção

Usaremos expressões como $f(n) = O(g(n))$. Ela significa a mesma coisa que $f(n) \in O(g(n))$, ou seja, a função $f(n)$ pertence à classe de funções $O(g(n))$. O mesmo se aplica para Ω e Θ.

- MergeSort tem complexidade de tempo $O(n \lg n)$. Isto significa que para todo n suficientemente grande, a função $T(n)$ que mede a complexidade de tempo (de pior caso) do MergeSort pertence à classe de funções $O(n \lg n)$.

Convenção

Usaremos expressões como $f(n) = O(g(n))$. Ela significa a mesma coisa que $f(n) \in O(g(n))$, ou seja, a função $f(n)$ pertence à classe de funções $O(g(n))$. O mesmo se aplica para Ω e Θ.

- MergeSort tem complexidade de tempo $O(n \lg n)$. Isto significa que para todo n suficientemente grande, a função $T(n)$ que mede a complexidade de tempo (de pior caso) do MergeSort pertence à classe de funções $O(n \lg n)$.
- MergeSort tem complexidade de tempo $\Omega(n \lg n)$.

Convenção

Usaremos expressões como $f(n) = O(g(n))$. Ela significa a mesma coisa que $f(n) \in O(g(n))$, ou seja, a função $f(n)$ pertence à classe de funções $O(g(n))$. O mesmo se aplica para Ω e Θ.

- MergeSort tem complexidade de tempo $O(n \lg n)$. Isto significa que para todo n suficientemente grande, a função $T(n)$ que mede a complexidade de tempo (de pior caso) do MergeSort pertence à classe de funções $O(n \lg n)$.
- MergeSort tem complexidade de tempo $\Omega(n \lg n)$. Isto significa que para todo n suficientemente grande, a função $T(n)$ que mede a complexidade de tempo (de pior caso) do MergeSort pertence à classe de funções $\Omega(n \lg n)$.

Convenção

Usaremos expressões como $f(n) = O(g(n))$. Ela significa a mesma coisa que $f(n) \in O(g(n))$, ou seja, a função $f(n)$ pertence à classe de funções $O(g(n))$. O mesmo se aplica para Ω e Θ.

- MergeSort tem complexidade de tempo $O(n \lg n)$. Isto significa que para todo n suficientemente grande, a função $T(n)$ que mede a complexidade de tempo (de pior caso) do MergeSort pertence à classe de funções $O(n \lg n)$.
- MergeSort tem complexidade de tempo $\Omega(n \lg n)$. Isto significa que para todo n suficientemente grande, a função $T(n)$ que mede a complexidade de tempo (de pior caso) do MergeSort pertence à classe de funções $\Omega(n \lg n)$.
- Logo MergeSort tem complexidade de tempo $\Theta(n \lg n)$.

Convenção

Usaremos expressões como $f(n) = O(g(n))$. Ela significa a mesma coisa que $f(n) \in O(g(n))$, ou seja, a função $f(n)$ pertence à classe de funções $O(g(n))$. O mesmo se aplica para Ω e Θ.

- MergeSort tem complexidade de tempo $O(n \lg n)$. Isto significa que para todo n suficientemente grande, a função $T(n)$ que mede a complexidade de tempo (de pior caso) do MergeSort pertence à classe de funções $O(n \lg n)$.
- MergeSort tem complexidade de tempo $\Omega(n \lg n)$. Isto significa que para todo n suficientemente grande, a função $T(n)$ que mede a complexidade de tempo (de pior caso) do MergeSort pertence à classe de funções $\Omega(n \lg n)$.
- Logo MergeSort tem complexidade de tempo $\Theta(n \lg n)$.
- Por outro lado, MergeSort tem complexidade de tempo $O(n^2)$ mas não $\Omega(n^2)$.

Exemplos

Faça a comparação assintótica das seguintes funções:

- $n \log n$
- 2^{π}
- 2^n
- n
- n^2
- $\log n$
- $100n^2 + 15n$