Exemplo prático de redução

Veremos neste pequeno texto como reduzir o problema da mochila binária para o problema de encontrar o caminho máximo entre dois vértices em um grafo orientado acíclico.

O problema da mochila binária

Dado n itens, tal que o j-ésimo item tem um peso a_j e um valor p_j associado a ele, ambos inteiros positivos. O objetivo é encontrar o subconjunto de itens mais valioso cujo peso total dos itens não excede uma capacidade b (capacidade da mochila). Este problema pode ser formulado como o seguinte problema de programação linear inteira.

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \sum_j p_j x_j \\ \text{Subject to} & \sum_j a_j x_j \leq b, \\ & x \in \mathbb{B} \end{array}$$

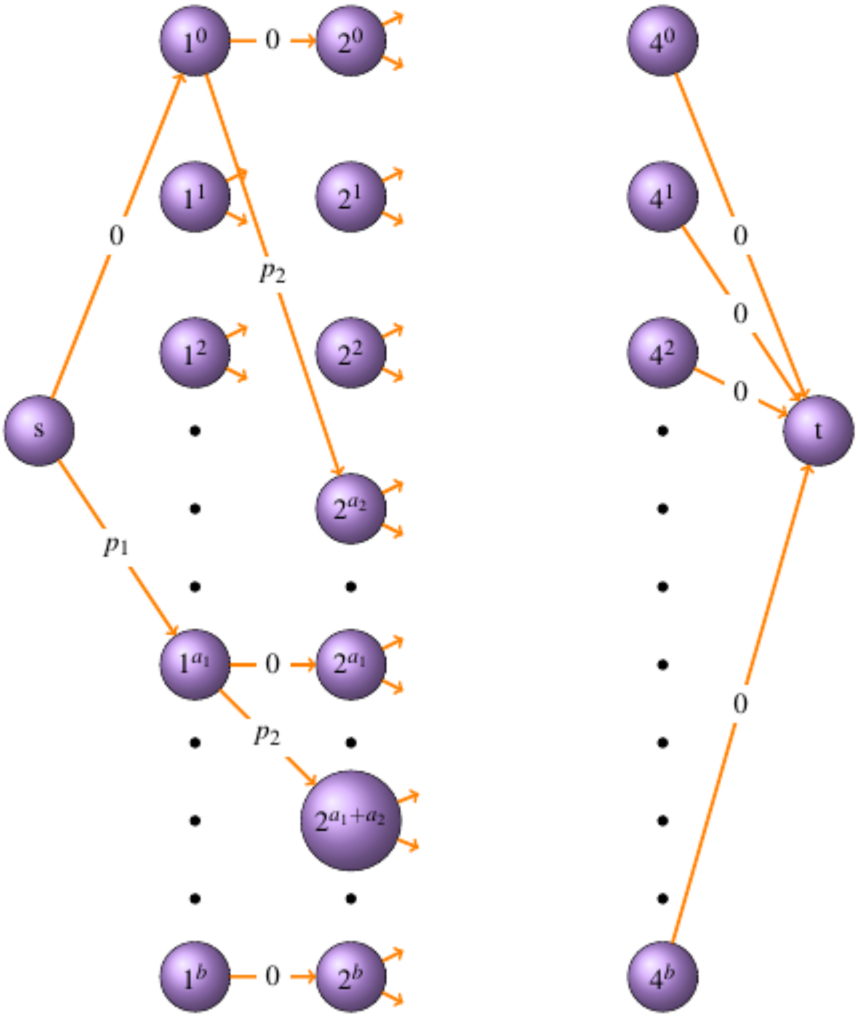
- Obs: $x \in \mathbb{B}$ significa que x é uma variável binária, ou seja, x só pode assumir o valor 0 ou 1.

Este problema pode ser reduzido para o problema de encontrar o caminho mais longo entre dois vértices em um grafo orientado acíclico.

Reduzindo o problema da mochila binária para o problema de encontrar o caminho mais longo entre dois vértices em um grafo orientado acíclico.

Seja um grafo com $n(b+1)$ vértices denotados por j^k, onde $j = 1, 2, \ldots, n$ e $k = 0, 1, \ldots, b$. O vértice j^k possui dois arcos de entrada, um do vértice $(j-1)^k$ e outro do vértice $(j-1)^{(k-a_j)}$, desde que esses vértices existam. A distância do primeiro arco é zero e a do segundo é de p_j. Um vértice de origem s também é adicionado ao grafo. s possui dois arcos de saída, um para o vértice 1^0 e outro para o vértice 1^{a_1} com distâncias zero e p_1, respectivamente. Assim, cada caminho do vértice s ao vértice j^k corresponde a um subconjunto dos primeiros j itens, cuja soma dos pesos é exatamente k.

Um nó de destino t também é adicionado. Este vértice possui um arco de entrada vindo de cada um dos vértices n^k. A distância desses arcos é zero. Assim os caminhos de s a t são identificados com subconjuntos de n itens cujo peso total é no máximo b. O valor do caminho mais longo de s a t é igual ao valor da solução ótima do problema da mochila binária. A imagem abaixo exemplifica a estrutura do grafo criado pela redução.



Seja $P = \{s = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1} = t\}$ um caminho mais longo no grafo gerado pela redução. Podemos construir a solução para o problema da mochila a partir desta solução levando o i-ésimo item sempre que o arco (v_{i-1}, v_i) do caminho mais longo for maior que zero.

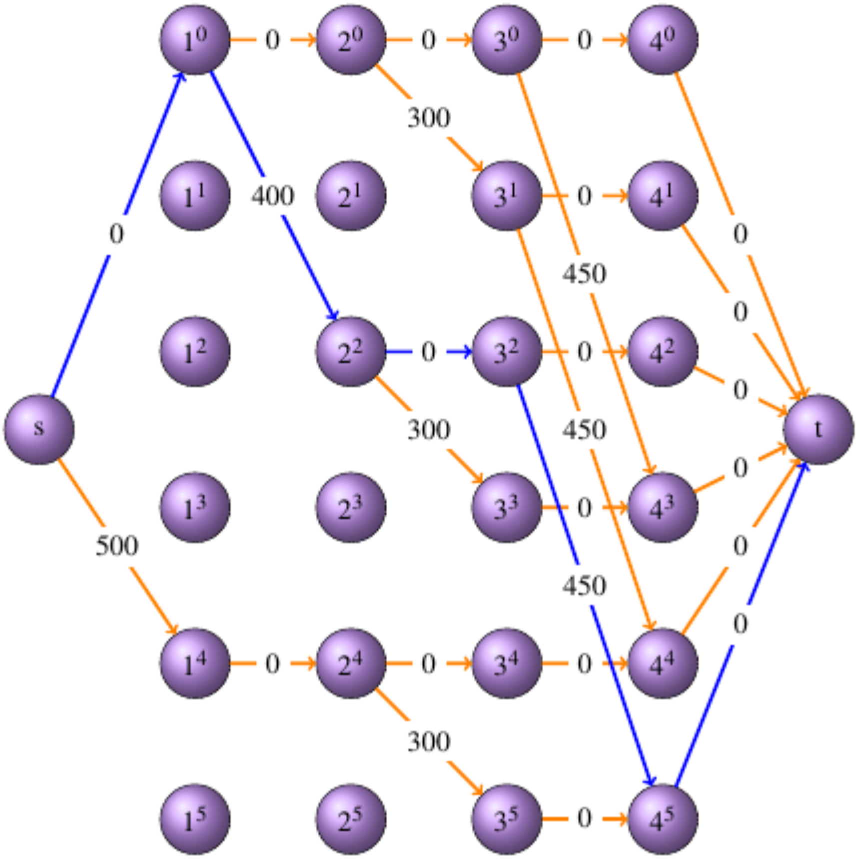
Exemplo

Suponha uma instância do problema da mochila com $n = 4$ e $b = 5$, com os pesos e valores dos itens dados pela tabela a seguir.

	Itens			
	1	*2*	*3*	*4*
a_i	4	2	1	3
p_j	500	400	300	450

O valor ótimo para a solução desta instância é de 850 e consiste em levar os itens 2 e 4.

Aplicando a redução descrita no paragrafo anterior a instância acima, resulta no seguinte grafo. **Note que algumas arestas desnecessárias foram omitidas.**



O caminho mais longo neste grafo do vértice s ao vértice t foi destacado em azul. Repare que o custo deste caminho é de 850, igual o valor ótimo da instância do problema da mochila.

O caminho mais longo P no grafo gerado pela redução consiste dos vértices $P = \{s, 1^0, 2^2, 3^2, 4^5, t\}$. A transformação desta solução em uma solução do problema da mochila nos diz para levar os itens 2 e 4, que como tínhamos visto anteriormente é a solução ótima.