MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II
Lista de Exercícios 1

Os exercícios sem marcas são (ou deveriam ser) relativamente simples. Os exercícios marcados com (*) exigem alguma reflexão. Os exercícios marcados com (**) são mais difíceis.
Fica implícito nesta lista que se em uma questão fizermos referência a um grafo G, então n e m denotam seu número de vértices e seu número de arestas, respectivamente.

1. Seja G um grafo simples. Mostre que $m \leq \binom{n}{2}$ e determine quando vale a igualdade.

2. Seja G um grafo (X, Y)-bipartido.
   (a) Mostre que $\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v)$.
   (b) Deduza que se G é k-regular, para algum $k \geq 1$, então $|X| = |Y|$.

3. Seja G um grafo simples (X, Y)-bipartido tal que $|X| = r$ e $|Y| = s$.
   (a) Mostre que $m \leq rs$.
   (b) Deduza que $m \leq n^2/4$.
   (c) Descreva os grafos bipartidos simples para os quais a igualdade vale em (b).

4. Para $k = 0, 1, 2$, caracterize todos os grafos k-regulares.

5. Mostre que em um grupo de duas ou mais pessoas, sempre há duas pessoas com exatamente o mesmo número de amigos no grupo.

6. Há um certo número de homens e 15 mulheres em um salão. Cada homem cumprimentou exatamente 6 mulheres e cada mulher cumprimentou exatamente 8 homens. Há quantos homens no salão?

7. Seja $n \geq 1$ um inteiro. O n-**hipercubo** Q_n é o grafo cujos vértices são todas as n-uplas de 0's e 1's, onde duas n-uplas são adjacentes em Q_n se diferem em exatamente uma coordenada.
   (a) Desenhe Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4.
   (b) Determine $n(Q_n)$ e $m(Q_n)$.
   (c) Mostre que Q_n é bipartido para todo $n \geq 1$.
   (d) Mostre que Q_n é regular. Determine o grau de cada vértice de Q_n.
   (e) (**) Mostre como construir recursivamente um n-hipercubo, isto é, como obter Q_n a partir de Q_{n-1}.

8. O **reticulado booleano** BL_n ($n \geq 1$) é o grafo cujo conjunto de vértices é o conjunto de todos os subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$, onde dois subconjuntos X e Y são adjacentes se a **diferença simétrica** deles possui exatamente um elemento. **Observação:** a **diferença simétrica** de dois conjuntos X e Y é definida como $X \triangle Y := (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.
   (a) Desenhe BL_1, BL_2, BL_3 e BL_4.
   (b) Determine $n(BL_n)$ e $m(BL_n)$.

(c) Mostre que BL_n é bipartido para todo $n \geq 1$.

(d) Mostre que BL_n é regular. Determine o grau de cada vértice de BL_n.

9. Seja G um grafo com vértices $v_1, \ldots, v_n$ tal que $d(v_i) \geq d(v_{i+1})$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. A seqüência $(d(v_1), \ldots, d(v_n))$ é chamada **seqüência de graus** de G.

   (a) Existe um grafo com seqüência de graus $(6, 6, 6, 6, 5, 3, 3, 3, 3)$?

   (b) Existe um grafo com seqüência de graus $(9, 8, 6, 5, 3, 3, 3, 3, 1, 1)$?

   (c) Existe um grafo **simples** com a seqüência de graus do item anterior?

10. Seja $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ uma sequência não-crescente de inteiros não-negativos. A questão apresenta condições necessárias e suficientes para que $\mathbf{d}$ seja uma sequência de graus um grafo. Mostre que

    (a) existe um grafo com sequência de graus $\mathbf{d}$ se, e somente se, $\sum_{i=1}^{n} d_i$ é par, e

    (b) (*) existe um grafo sem laços com sequência de graus $\mathbf{d}$ se, e somente se, $\sum_{i=1}^{n} d_i$ é par e $d_1 \leq \sum_{i=2}^{n} d_i$.

    Observação: muitos alunos (em várias turmas que tive) parecem não entender o enunciado. Na prova da **recíproca** de (a) ou (b), o grafo **não** é dado. Tudo que você tem é a informação sobre uma sequência $\mathbf{d}$. Você tem que mostrar que existe um grafo cuja sequência de graus é $\mathbf{d}$ (veja o exercício anterior). Use indução em n.

11. Mostre que em toda festa com pelo menos seis pessoas:

    - há três pessoas que se conhecem, ou
    - há três pessoas que não se conhecem.

    Observação. Suponha que a relação de "conhecimento"é comutativa, i.e., se A conhece B, então B conhece A.

12. (* ou **) Seja S um grupo com pelo menos quatro pessoas e suponha que S tem a seguinte propriedade: para todo subconjunto $X \subseteq S$ com $|X| = 4$, existe uma pessoa em X que conhece todas as outras pessoas em X. Mostre que existe uma pessoa em S que conhece todas as outras pessoas em S. **Observação.** Suponha que a relação de "conhecimento"é comutativa, i.e., se A conhece B, então B conhece A. **Dica:** (i) use indução em $n = |S|$ ou (ii) olhe o complemento do grafo (qual?) e tente descobrir a “estrutura” dele.

13. (* ou **) Caracterize todos os grafos simples contendo exatamente dois vértices com o mesmo grau. (Veja também a questão 5.) **Sugestão:** mostre que para cada $n \geq 2$, existem exatamente dois grafos simples com n vértices que possuem essa propriedade. A partir de um tal par de grafos de ordem $n-1$, construa o par de grafos de ordem n. **Dica:** se um grafo G de ordem n tem esta propriedade, então existe um candidato natural para ser o outro grafo de ordem n. Use indução em n para mostrar a **unicidade** (do par de grafos).