Introdução à Programação Linear

Cid C. de Souza

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Computação

2º semestre de 2010

Programas Lineares (PL)

Em um problema de **programação linear**, queremos otimizar (maximizar ou minimizar) uma função linear sujeito a certas restrições (igualdades ou desigualdades lineares).

Uma função linear sobre variáveis $x_1, \ldots, x_n$ tem a forma:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n,$$

onde $a_1, \ldots, a_n$ são constantes reais.

Restrições tem uma das três formas ($a_1, \ldots, a_n, b$ são reais):

$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ (igualdade)

$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leq b$ (desigualdade)

$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \geq b$ (desigualdade)

Exemplo 1:

José Velho está se preparando para se aposentar. Para garantir uma aposentadoria tranqüila, ele resolve aplicar suas economias em fundos de longo e médio prazos. As informações sobre os seis fundos de aplicação que ele achou mais atraentes no mercado estão tabeladas abaixo:

Fundo	Rendimento Anual	Período de Maturação	Classificação no Mercado
1	8.65%	11 anos	Excelente
2	9.50%	10 anos	Bom
3	10.00%	6 anos	Aceitável
4	8.75%	10 anos	Excelente
5	9.25%	7 anos	Bom
6	9.00%	13 anos	Muito bom

Exemplo 1: (cont.)

José dispõe de R$ 750.000,00 em economias. Para dar maior segurança ao investimento, José consultou um analista financeiro que lhe fez as seguintes recomendações:

- (i) não investir mais de 25% do dinheiro em um único fundo;
- (ii) pelo menos metade do dinheiro deveria ser investido em fundos de longo prazo, i.e., com pelo menos 10 anos de maturação;
- (iii) no máximo 35% do investimento deveria ser aplicado nos fundos com classificação inferior a "Muito bom".

Como José Velho deve aplicar o seu dinheiro de modo a maximizar o seu lucro anual?

Exemplo 1: formulação

- Variáveis: $x_i \doteq$ total investido no fundo i
- Função objetivo:
  $\max z = .0865x_1 + .095x_2 + .10x_3 + .0875x_4 + .0925x_5 + .09x_6$
- Restrição (i): $x_i \leq 187.500, \;\; i = 1, \ldots, 6$
- Restrição (ii): $x_1 + x_2 + x_4 + x_6 \geq 375.000$
- Restrição (iii): $x_2 + x_3 + x_5 \leq 262.500$
- Total investido: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 750.000$
- Não-negatividade: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Exemplo 2:

A CPFL tem um plano de instalar uma usina termoelétrica em Paulínea. A maior dificuldade da empresa está em atender às exigências impostas pelas leis de proteção ambiental. Uma delas refere-se aos poluentes emitidos na atmosfera. O carvão necessário para aquecer as caldeiras deverá ser fornecido por três minas. As propriedades dos diferentes tipos de carvão produzidos em cada uma das minas estão indicadas na tabela abaixo. Os valores mostrados são relativos à queima de uma tonelada de carvão.

Mina	Enxofre (em ppm)	Poeira de Carvão (em Kg)	Vapor produzido (em Kg)
1–Morro Velho	1100	1.7	24000
2–Monjolo	3500	3.2	36000
3–Jabuticaba	1300	2.4	28000

Exemplo 2: (cont)

Os 3 tipos de carvão podem ser misturados e combinados em qualquer proporção. As emissões de poluentes e de vapor de uma mistura qualquer são proporcionais aos valores indicados na tabela. As exigências ambientais requerem que:

- (i) para cada tonelada de carvão queimada a quantidade de enxofre não deve ser superior a 2.500 ppm.
- (ii) para cada tonelada de carvão queimada a quantidade de poeira de carvão não deve ser superior a 2.8 kg

Os engenheiros querem determinar qual é a quantidade máxima de vapor (energia) que é possível gerar com a queima de uma tonelada de carvão.

Exemplo 2: formulação

- Variáveis:

  $x_1 \doteq$ proporção de carvão da mina Morro Velho
  $x_2 \doteq$ proporção de carvão da mina Monjolo
  $x_3 \doteq$ proporção de carvão da mina Jabuticaba

- Função objetivo: $\max z = 24000x_1 + 36000x_2 + 28000x_3$
- Restrição (i): (produção de enxofre)

  $1100x_1 + 3500x_2 + 1300x_3 \leq 2500$

- Restrição (ii): (emissão de poeira)

  $1.7x_1 + 3.2x_2 + 2.4x_3 \leq 2.8$

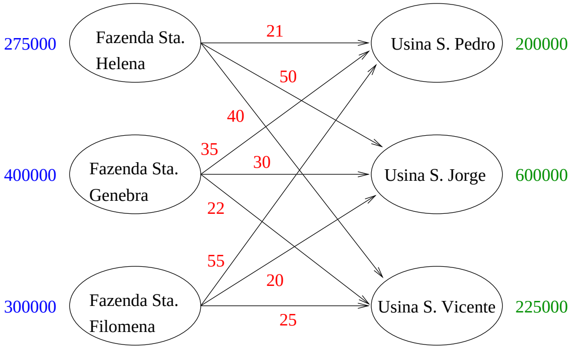
- Proporção da mistura: $x_1 + x_2 + x_3 = 1.0$
- Não-negatividade: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Exemplo 3:

O Grupo CanaBraba possui três fazendas com canaviais e três usinas de produção de alcool. Os administradores da empresa estão organizando a logística da colheita da cana para a safra deste ano.

O transporte da cana das fazendas para as usinas é terceirizado. O custo do quilômetro rodado por tonelada de cana transportada que é cobrado pela transportadora é fixo independente do trajeto realizado. A produção das fazendas e a capacidade de processamento das usinas, ambas dadas em toneladas, assim como as distâncias em quilômetros entre as fazendas e as usinas são esquematizadas a seguir.

Exemplo 3: (cont)



Qual deve ser a quantidade de cana transportada de cada fazenda para cada usina de modo a minimizar o custo total do transporte?

Exemplo 3: formulação

- Variáveis:

$$x_{ij} \doteq \begin{cases} \text{quantidade de cana transportada} \\ \text{da fazenda } i \text{ para a usina } j \end{cases}$$

- Função objetivo: $\min z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} d_{ij} x_{ij}$
- Restrições de capacidades das usinas:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &\leq 200000 && \text{(Usina São Pedro)} \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &\leq 600000 && \text{(Usina São Jorge)} \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &\leq 225000 && \text{(Usina São Vicente)} \end{aligned}$$

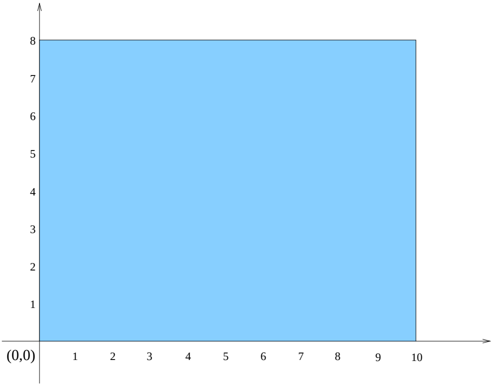
- Escoamento da produção das fazendas:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 275000 && \text{(Fazenda Santa Helena)} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 400000 && \text{(Fazenda Santa Genebra)} \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &= 300000 && \text{(Fazenda Santa Filomena)} \end{aligned}$$

- Não-negatividade:

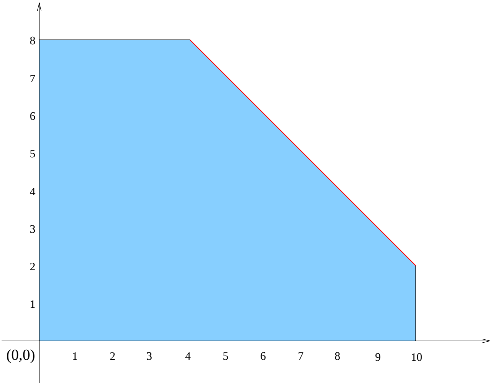
$$x_{ij} \geq 0 \text{ para todo } (i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$$

PL: solução gráfica



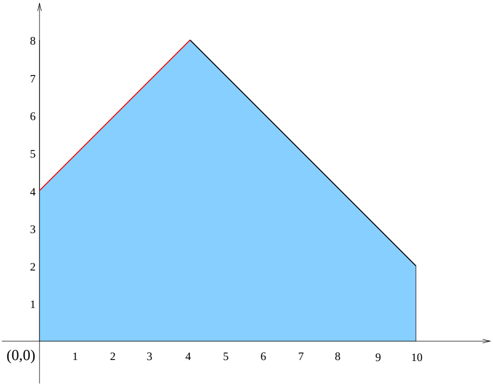
- $x_1, x_2 \geq 0$

PL: solução gráfica



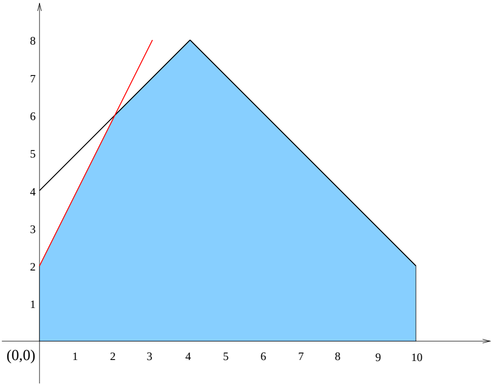
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$

PL: solução gráfica



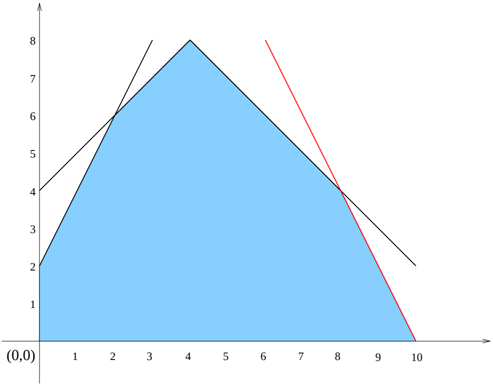
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$

PL: solução gráfica



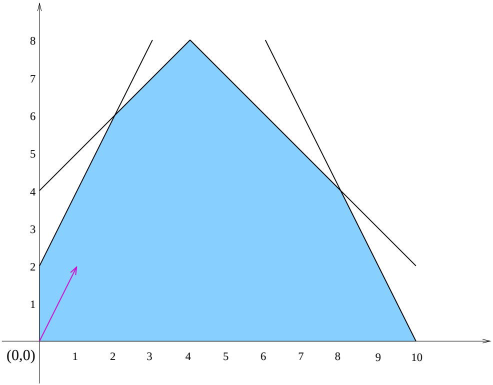
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$

PL: solução gráfica



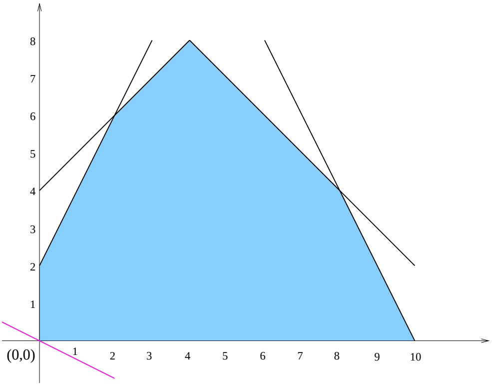
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$

PL: solução gráfica



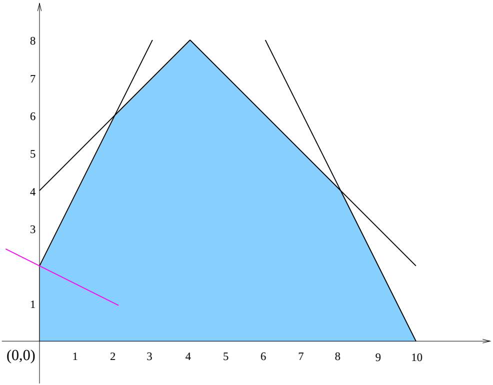
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $\max z = x_1 + 2x_2$

PL: solução gráfica



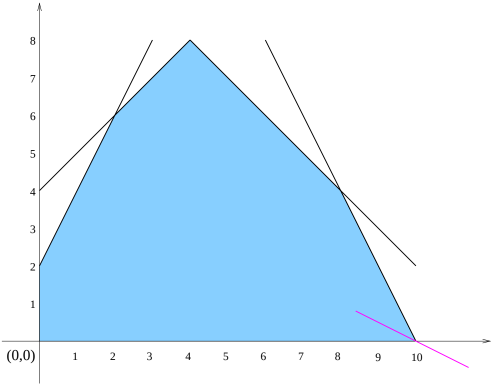
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $z = x_1 + 2x_2 = 0$

PL: solução gráfica



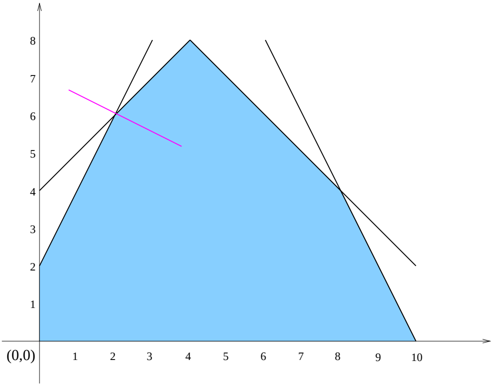
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $z = x_1 + 2x_2 = 4$

PL: solução gráfica



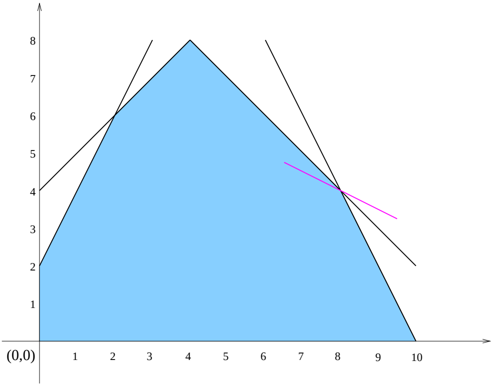
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $z = x_1 + 2x_2 = 10$

PL: solução gráfica



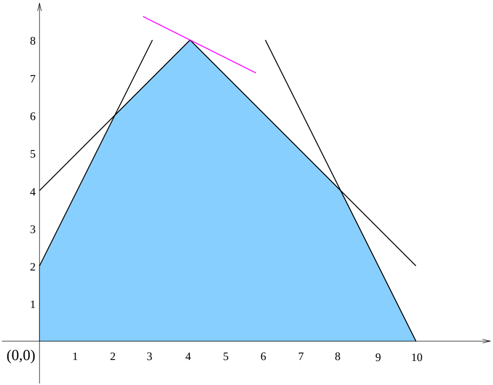
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $z = x_1 + 2x_2 = 14$

PL: solução gráfica



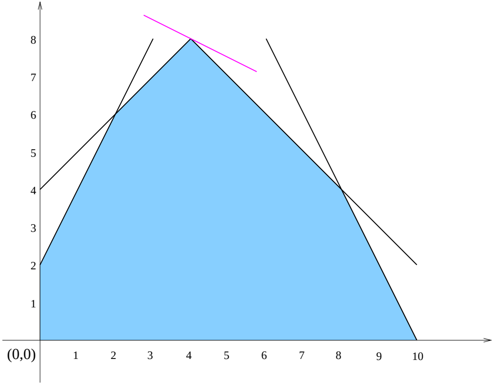
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $z = x_1 + 2x_2 = 16$

PL: solução gráfica



- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $z = x_1 + 2x_2 = 20$

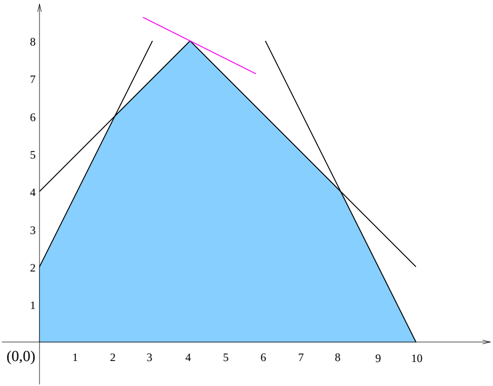
PL: solução gráfica



- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $z = x_1 + 2x_2 = 20$

OBSERVAÇÃO: o conjunto de soluções de um sistema de inequações lineares é um poliedro.

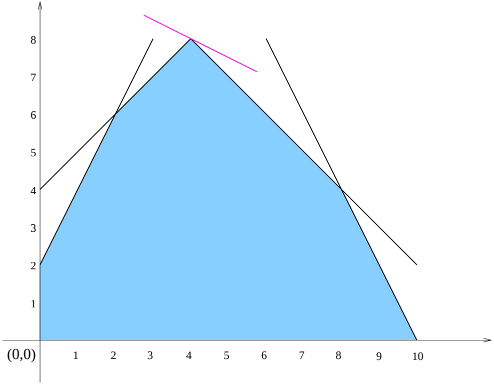
PL: solução gráfica



- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $z = x_1 + 2x_2 = 20$

OBSERVAÇÃO: o conjunto de soluções de um sistema de inequações lineares é um poliedro.

Esse poliedro é denominado região viável e os pontos no seu interior são as soluções viáveis do PL.



- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $z = x_1 + 2x_2 = 20$

OBSERVAÇÃO: o conjunto de soluções de um sistema de inequações lineares é um poliedro.

Esse poliedro é denominado região viável e os pontos no seu interior são as soluções viáveis do PL.

INTUIÇÃO: existe uma solução ótima do PL que é um ponto extremo (vértice) desse poliedro.

PL Inteira: exemplo

Em uma plataforma marítima de petróleo, a inspeção das válvulas deve ser realizada 24 horas por dia. A inspeção é feita por equipes divididas em turnos de trabalho. Um período de trabalho é composto de 4 horas e um turno é composto de dois períodos de trabalho separados por um descanso também de 4 horas. Terminado o seu turno, a equipe descansa por 12 horas seguidas. No total, são seis turnos de trabalho cujos horários de trabalho ao longo do dia são mostrados na tabela a seguir.

Nem todas as válvulas da plataforma precisam ser inspecionadas em todos os períodos. Contudo, num período qualquer, deve haver um funcionário para cada válvula a ser inspecionada. O número de válvulas a inspecionar em cada período também é dado na tabela.

PL Inteira: exemplo (cont)

Turno	Período					
	24–04	04–08	08–12	12–16	16–20	20–24
1	$\surd$		$\surd$			
2		$\surd$		$\surd$		
3			$\surd$		$\surd$	
4				$\surd$		$\surd$
5	$\surd$				$\surd$	
6		$\surd$				$\surd$
Válvulas a inspecionar	6	7	15	9	13	10

Qual o número mínimo de funcionários necessário para montar as equipes de inspeção das válvulas?

PLI: exemplo (formulação)

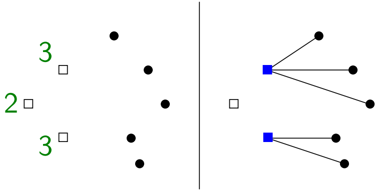
- Variáveis:

  $x_i \doteq$ número de funcionários no turno i
- Função objetivo: $\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$
- Restrições de número de funcionários por turno:

$$
\begin{array}{ll}
x_1 + x_5 \geq 6 & \text{(período 24–04)} \\
x_2 + x_6 \geq 7 & \text{(período 04–08)} \\
x_1 + x_3 \geq 15 & \text{(período 08–12)} \\
x_2 + x_4 \geq 9 & \text{(período 12–16)} \\
x_3 + x_5 \geq 13 & \text{(período 16–20)} \\
x_4 + x_6 \geq 10 & \text{(período 20–24)}
\end{array}
$$

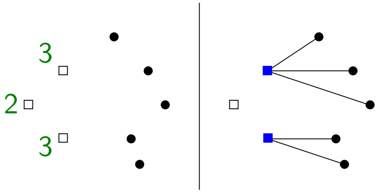
- Não-negatividade: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$
- Integralidade: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{Z}$

Suponha que uma companhia conhece a localização de seus n clientes denotados por $j = 1, 2, \ldots, n$. Para atendê-los a companhia decide abrir um conjunto de instalações: cada cliente será atendido por exatamente uma instalação, mas uma instalação pode atender vários clientes. Digamos que as possíveis instalações sejam $i = 1, 2, \ldots, m$; a companhia sabe para cada instalação i seu custo de abertura f_i e sua localização. Ela também sabe a distância d_{ij} de cada instalação i a cada cliente j.



PLI: Facility Location

A companhia deve escolher um subconjunto S de instalações a serem abertas e estabelecer qual instalação atenderá cada cliente. O objetivo é minimizar o custo total de abertura das instalações mais a soma das distâncias de cada cliente à instalação que vai atendê-lo.



Note que uma vez escolhido S, basta associar cada cliente à instalação aberta mais próxima.

PLI: exemplo (formulação)

- Variáveis:
  $y_i = 1$ se abre a instalação i e $y_i = 0$ caso contrário

  $x_{ij} = 1$ se a instalação i atende j e $x_{ij} = 0$ caso contrário
- Função objetivo: $\sum_{i=1}^{m} y_i f_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}$
- Cada cliente é atendido por exatamente uma instalação:
  $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$ para $j = 1, \ldots, n$
- Cliente só pode ser atendido por uma instalação aberta:
  $x_{ij} \leq y_i$ para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$
- Não-negatividade:
  $y_i \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$
  $x_{ij} \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$
- Integralidade:
  $y_i \in \mathbb{Z}$ para $j = 1, \ldots, n$
  $x_{ij} \in \mathbb{Z}$ para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$

Complexidade de PL e de PLI

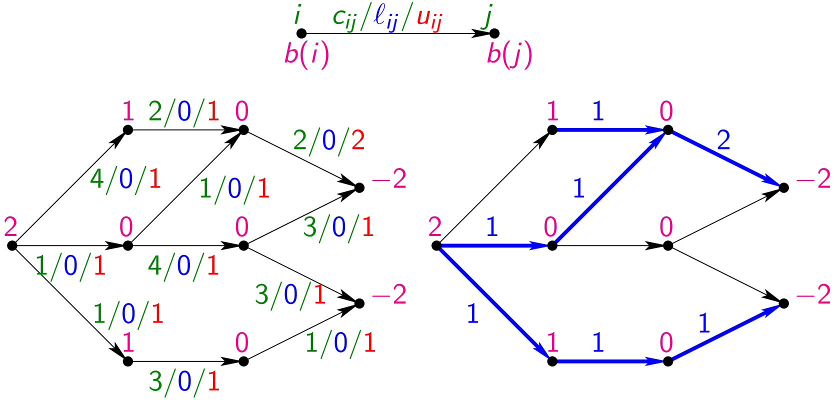
- SIMPLEX:
  Primeiro algoritmo conhecido para PL.
  Complexidade exponencial (pior caso) no tamanho da entrada.
  Muito eficiente na prática!
- MÉTODO DOS ELIPSÓIDES:
  Primeiro algoritmo polinomial para PL.
  Muito ineficiente na prática (instabilidade numérica).
- MÉTODO DOS PONTOS INTERIORES:
  Outro algoritmo polinomial para PL.
  Competitivo com o SIMPLEX na prática (muitas vezes, é melhor).
- PLI:
  Não se conhece algoritmo polinomial para PLI.
  Problema NP-difícil.

Programação Linear e Fluxos em Redes

- Suponha que um problema Π pode ser formulado como um PL.
- Como um PL pode ser resolvido em tempo polinomial através de um algoritmo de pontos interiores, **se** a formulação PL de Π tiver um número de restrições e variáveis polinomial no tamanho da instância de Π, **então** temos um algoritmo polinomial para Π!
  Daí a importância de sabermos fazer modelos de PL.
- Uma classe de problemas de PL que tem várias aplicações combinatórias são os problemas de fluxo em redes.
- O problema mais geral desta classe é o Problema do Fluxo de Custo Mínimo (FCM), porque vários outros problemas importantes de fluxos em redes são casos especiais do FCM.

- **Entrada**: rede (G, c, ℓ, u, b) onde
  - $G = (V, A)$ é um grafo orientado,
  - c_{ij} representa o custo por unidade de fluxo da aresta (i, j),
  - ℓ_{ij} capacidade inferior da aresta (i, j),
  - $u_{i,j}$ capacidade superior da aresta (i, j), e
  - $b(i)$ representa o oferta/fornecimento ($b(i) > 0$) ou demanda/consumo ($b(i) < 0$) de um vértice i; $b(i) = 0$ indica que i é um vértice de passagem.
- **Problema**: encontrar um fluxo que atende a oferta/demanda de cada vértice, respeitando as capacidades das arestas e que minimize o custo total.

O Problema do Fluxo de Custo Mínimo (FCM)



Custo da solução:

$\sum_{ij \in A} c_{ij} x_{ij} = 2 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 1 = 13.$

FCM formulado como um PL

- Variáveis: x_{ij} é o fluxo na aresta (i,j) de A.
- Hipótese: $\sum_{i \in V} b(i) = 0$.

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{s.a.} & \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ij} = b(i) & \forall\ i \in V \\
 & \ell_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} & \forall\ (i,j) \in A
\end{array}
$$

Se $\mathcal{N}$ é a matriz de incidência vértice–aresta de G, este programa linear pode ser escrito como:

$$
\begin{array}{ll}
\min & cx \\
\text{s.a.} & \mathcal{N}x = b \\
 & \ell \leq x \leq u
\end{array}
$$

Integralidade do poliedro

- Um resultado clássico da Teoria de Fluxos em Redes é que se b, ℓ e u forem vetores inteiros então este PL possui uma solução ótima inteira, se existir uma solução.
- Mais especificamente, todos vértices (pontos extremos) do poliedro associado ao PL tem coordenadas inteiras, desde que b, ℓ e u sejam vetores inteiros.
- Isto segue do fato da matriz de incidência $\mathcal{N}$ ser totalmente unimodular (TU), isto é, qualquer submatriz quadrada de $\mathcal{N}$ tem determinante igual a -1, 0 ou 1.
- Este fato permite modelar vários problemas de otimização combinatória como um problema de fluxo em redes.

Formulação de CM/CMMO como FCM

- Na versão básica do Problema de Caminho Mínimo (CM), são dados dois vértices s e t de $G = (V, A)$ e um *peso/custo* c_{ij} é associado a cada aresta (i, j) de A. Queremos encontrar um caminho mínimo de s a t.
- Este problema pode ser modelado como um FCM tomando-se: (1) $b(s) = 1$, $b(t) = -1$ e $b(i) = 0$ para todo $i \in V \setminus \{s, t\}$, e (2) $\ell_{ij} = 0$ e $u_{ij} = 1$ para todo $(i, j) \in A$.
- No Problema de Caminhos Mínimos com Mesma Origem (CMMO) desejamos encontrar caminhos mínimos de s a cada vértice de G.
- A formulação de CMMO como um FCM pode ser feita tomando-se:
  (1) $b(i) = -1$ para todo $i \in V \setminus \{s\}$,
  (2) $b(s) = (n - 1)$ e
  (3) $\ell_{ij} = 0$ e $u_{ij} = (n - 1)$.

Formulação de FM como FCM

- No Problema do Fluxo Máximo (FM), é dada uma rede (G, u, s, t) em que u_{ij} é a capacidade superior da aresta (i, j), s é a fonte/origem e t é o terminal/destino. Queremos encontrar um fluxo de valor máximo em (G, u, s, t).
- Para formular o FM como um FCM fazemos o seguinte:
  (1) adicionamos uma aresta especial (t, s) à rede;
  (2) para cada aresta (i, j) em A, setamos custo $c_{ij} = 0$, capacidade inferior $\ell_{ij} = 0$ e capacidade superior u_{ij};
  (3) para a aresta especial, definimos $c_{ts} = -1$, $\ell_{ts} = 0$ e $u_{ts} = +\infty$;
  (4) tomamos $b(i) = 0$ para todo vértice $i \in V$.

- Como todo $b(i)$ é nulo para todo $i \in V$, a quantidade de fluxo na aresta especial (t, s) é igual ao valor do fluxo que vai de s para t através das arestas em A.
- Como $c_{ts} = -1$, ao minimizar o custo do fluxo na aresta especial (t, s), maximizamos o fluxo nesta aresta, e portanto, maximizamos o valor do fluxo na rede original.

Formulação de AR como FCM

- No Problema de Alocação de Recursos (AR) são dados dois conjuntos V_1 e V_2 de mesmo tamanho e uma coleção de pares $A \subseteq V_1 \times V_2$, representando possíveis alocações de recursos de V_1 em elementos de V_2. Além disso, dado um par (i, j) de A, c_{ij} denota o custo desta associação.
- Deseja-se encontrar em A um emparelhamento 1-para-1 entre os elementos de V_1 e V_2 cujo custo total (soma dos custos dos pares do emparelhamento) seja mínimo.
- Para formular este problema como um FCM, basta definir $G = (V_1 \cup V_2, A)$ e fazer:
  (1) $b(i) = 1$ para todo $i \in V_1$;
  (2) $b(i) = -1$ para todo $i \in V_2$;
  (3) $\ell_{ij} = 0$ e $u_{ij} = 1$ para toda aresta $(i, j) \in A$.
- Vimos um caso particular deste problema: o problema do transporte (caso das fazendas de cana e das usinas de álcool).

Observações sobre problemas de Fluxos em Rede

- Pela formulação mostrada aqui, sabemos que o FCM pode ser resolvido usando qualquer algoritmo disponível para resolver PLs, em particular, o SIMPLEX.
- Porém, é possível especializar o algoritmo do SIMPLEX exclusivamente para tratar problemas de fluxos em redes. Esse algoritmo é chamado de *network simplex*.
- Nessa implementação o SIMPLEX é muito mais eficiente do que no caso geral, valendo-se da relação existente entre *soluções básicas* e *árvores* na rede.
- Existe uma implementação para o *network simplex* com complexidade $O(\min\{VE \log V(\log V + \log C), VE^2 \log^2 V\})$, onde $\log C$ é o espaço necessário (em número de bits) para armazenar o valor do maior custo de uma aresta da rede (Orlin, 1997 + Tarjan, 1997).

Observações sobre problemas de Fluxos em Rede

- Como mencionado anteriormente, o Problema de Fluxo de Custo Mínimo (FCM) possui uma característica muito importante: se as restrições envolvem apenas valores inteiros (b, ℓ e u são vetores inteiros) então todos os vértices (pontos extremos) do poliedro que define a região viável do problema são vetores inteiros, ou seja, possuem coordenadas inteiras.
- Sendo assim, se as restrições forem inteiras, o SIMPLEX (e sua versão especializada *network simplex*) encontra soluções inteiras.

Observações sobre problemas de Fluxos em Rede

- O resultado anterior juntamente com as formulações que mostramos dos problemas de caminhos mínimos, fluxo máximo e alocação de recursos ao FCM, mostram que esses problemas admitem algoritmos polinomiais.
- Note entretanto que esses algoritmos não são necessariamente os mais eficientes para cada problema.
- Por exemplo:
  - O Problema do Fluxo Máximo (FM) pode ser resolvido em $O(V^2\sqrt{E})$ (Cheriyan e Maheshwari, 1989).
  - O Problema dos Caminhos Mínimos com Mesma Origem (CMMO) pode ser resolvido em $O(VE)$ (Bellman-Ford, 1958).

Maiores informações sobre Fluxos em Redes:

Consulte o livro *"Network Flows: Theory, algorithms, and applications"*, *R.K. Ahuja, T.L. Magnanti e J.B. Orlin, Prentice-Hall, 1993*.