MC558 — Análise de Algoritmos II

Cid C. de Souza   Cândida N. da Silva   Orlando Lee

29 de março de 2023

Antes de mais nada...

- Uma versão anterior deste conjunto de slides foi preparada por Cid Carvalho de Souza e Cândida Nunes da Silva para uma instância anterior desta disciplina.
- O que vocês tem em mãos é uma versão modificada preparada para atender a meus gostos.
- Nunca é demais enfatizar que o material é apenas um guia e não deve ser usado como única fonte de estudo. Para isso consultem a bibliografia (em especial o CLR ou CLRS).

Orlando Lee

Agradecimentos (Cid e Cândida)

- Várias pessoas contribuíram direta ou indiretamente com a preparação deste material.
- Algumas destas pessoas cederam gentilmente seus arquivos digitais enquanto outras cederam gentilmente o seu tempo fazendo correções e dando sugestões.
- Uma lista destes "colaboradores" (em ordem alfabética) é dada abaixo:
  - Célia Picinin de Mello
  - José Coelho de Pina
  - Orlando Lee
  - Paulo Feofiloff
  - Pedro Rezende
  - Ricardo Dahab
  - Zanoni Dias

Digrafos

Um digrafo (grafo orientado/direcionado) é uma tripla $D = (V, A, \psi)$ na qual:

1. V é um conjunto de elementos chamados vértices,
2. A é um conjunto de elementos chamados arcos/arestas e
3. ψ é uma função que associa cada elemento de A a um par ordenado de elementos de V.

Exemplo:

1. $V = \{u, v, w, x, y, z\}$,
2. $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$,
3.

a	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
$\psi(a)$	(x, y)	(x, y)	(z, v)	(v, z)	(v, y)	(u, v)	(u, x)	(u, u)	(v, w)	(y, z)

Desenho de digrafos

a	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
$\psi(a)$	(x, y)	(x, y)	(z, v)	(v, z)	(v, y)	(u, v)	(u, x)	(u, u)	(v, w)	(y, z)

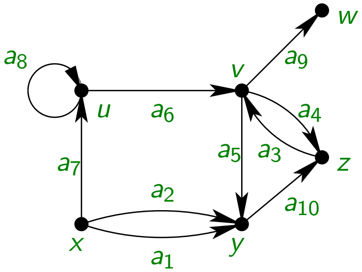


Figura: Desenho de um digrafo D.

Digrafos

Para um digrafo $D = (V, A, \psi)$,

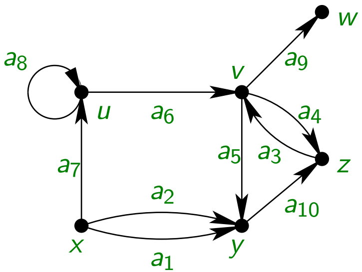
1. V é chamado conjunto de vértices de D,
2. A é chamado conjunto de arcos/arestas de D e
3. ψ é chamado função de incidência de D.

Muitas vezes, escreveremos simplesmente digrafo D ficando implícito que $D = (V(D), A(D), \psi_D)$.

Observação. neste curso suporemos que V e A são sempre finitos.

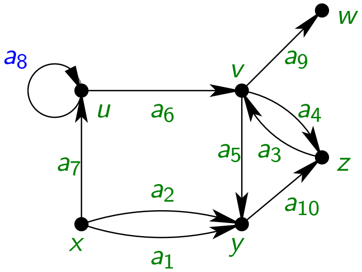
Arcos em digrafos

- Escrevemos $a = (u, v)$ se $\psi(a) = (u, v)$.
- Neste caso, dizemos que u é o início (cauda) e v é o final (cabeça) do arco a.
- Dizemos que u e v são os extremos de a e que u e v são ligados por a.
- Dizemos que u domina v e que v é dominado por u.
- Dizemos que a sai/parte de u e entra/chega em v.



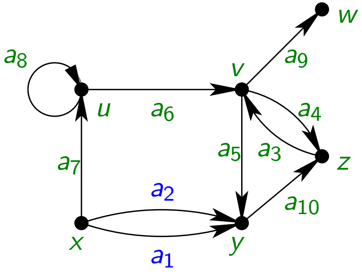
Laços

Um arco a é um laço se existe algum vértice u tal que $\psi(a) = (u, u)$, ou seja, tem início e final idênticos.



Arcos múltiplos/paralelos

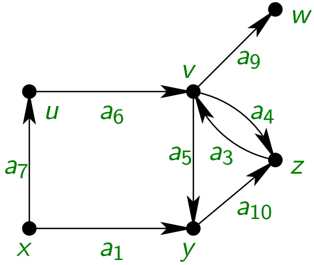
Dois arcos a e b são múltiplos ou paralelos se $\psi(a) = \psi(b)$, ou seja, têm o mesmo início e mesmo final.



Observação. Note que a_3 e a_4 **não** são paralelos.

Digrafos estritos

1. Um digrafo D é estrito se não possui laços nem arcos paralelos.
2. Em um digrafo estrito, um arco é totalmente identificado por seus extremos.
3. Assim, é usual pensar em um arco de um digrafo estrito como um par ordenado de vértices.



Notação

1. Muitas vezes definimos um digrafo como um par $D = (V, A)$ deixando implícita a função de incidência, interpretando cada arco como um par ordenado de vértices.
2. Podemos então escrever $(u, v) \in A$ significando que existe um arco com início u e final v em D.
3. Isto não apresenta problemas se D é estrito, mas pode causar confusão em grafos não-simples.

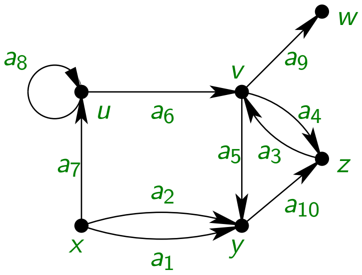
Usaremos também as seguintes notações:

1. $n(D)$ é o número de vértices de D e
2. $m(D)$ é o número de arcos de D.

Quando D está claro dentro do contexto, podemos escrever n e m simplesmente.

Grau de saída

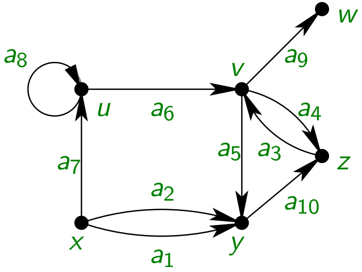
O grau de saída de um vértice v em D, denotado por $d^+_D(v)$, é o número de arcos que saem de v.



	u	v	w	x	y	z
$d^+_d(\ )$	2	3	0	3	1	1

Grau de entrada

O grau de entrada de um vértice v em D, denotado por $d_D^-(v)$, é o número de arcos que entram em v.



	u	v	w	x	y	z
$d_d^-(\ )$	2	2	1	0	3	2

Graus e arcos

Teorema. Para todo digrafo $D = (V, A)$ temos que

$$\sum_{v \in V} d_D^+(v) = \sum_{v \in V} d_D^-(v) = |A|.$$

Prova. (Contagem)
Considere um arco qualquer de D, digamos $a = (u, v)$. Ela é contada exatamente uma vez em cada uma das expressões. Logo, as identidades valem. ∎

Graus mínimo e máximo

1. O grau mínimo de saída de um digrafo D, denotado por $\delta^+(D)$ é o menor valor dos graus dos vértices de D, ou seja,

$$\delta^+(D) := \min\{d_D^+(v) : v \in V(G)\}.$$

2. O grau máximo de saída de um digrafo D, denotado por $\Delta^+(D)$ é o maior valor dos graus dos vértices de D, ou seja,

$$\Delta^+(D) := \max\{d_D^+(v) : v \in V(G)\}.$$

3. O grau mínimo de entrada $\delta^-(D)$ e o grau máximo de entrada $\Delta^-(D)$ são definidos de modo análogo.

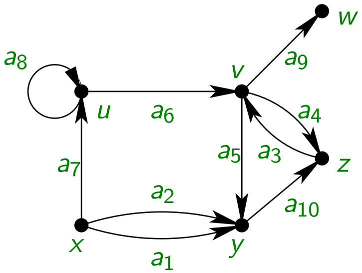
Vizinhança de saída

1. A vizinhança de saída de um vértice u em D é definida por

$$N_D^+(u) := \{v \in V : (u, v) \in A\}.$$

   Ou seja, é o conjunto dos vértices dominados por u.

2. Na figura, $N_D^+(v) = \{y, w, z\}$ e $N_D^+(u) = \{u, v\}$.

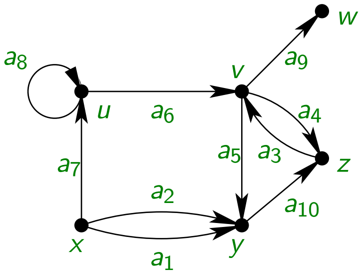


Vizinhança de entrada

1. A vizinhança de entrada de um vértice u em D é definida por

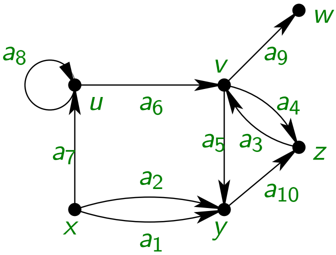
$$N_D^-(u) := \{v \in V : (v,u) \in A\}.$$

   Ou seja, é o conjunto dos vértices que dominam u.
2. Na figura, $N_D^-(v) = \{u, z\}$ e $N_D^-(u) = \{u, x\}$.



Matriz de adjacência

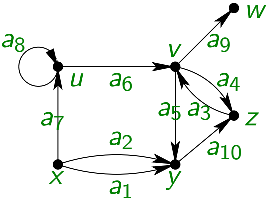
Seja $D = (V, A)$ um digrafo. A matriz de adjacência de D é a matriz $B_D = (b_{uv})$ indexada nas linhas e nas colunas por V tal que b_{uv} é o número de arcos ligando u a v.



$$
\begin{array}{c|cccccc|}
 & u & v & w & x & y & z \\
\hline
u & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
z & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Matriz de incidência

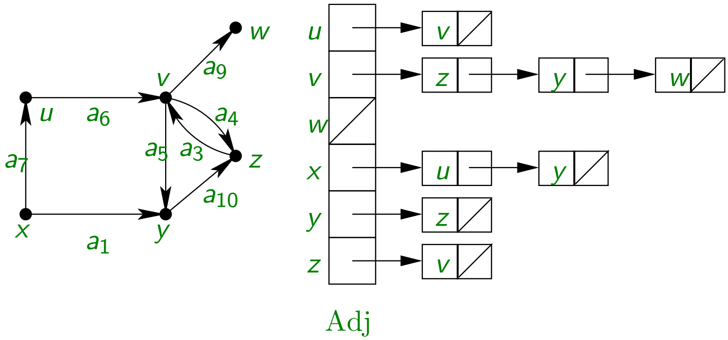
Seja $D = (V, A)$ um digrafo. A matriz de incidência de D é a matriz $M_D = (m_{va})$ indexada nas linhas por V e nas colunas por A tal que $m_{va} = 1$ se v é início de a, $m_{va} = -1$ se v é final de a e $m_{va} = 0$ caso contrário. No caso de a ser um laço, a coluna a é formada de zeros.



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
u	0	0	0	0	0	1	−1	0	0	0
v	0	0	−1	1	1	−1	0	0	1	0
w	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0
x	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
y	−1	−1	0	0	−1	0	0	0	0	1
z	0	0	1	−1	0	0	0	0	0	−1

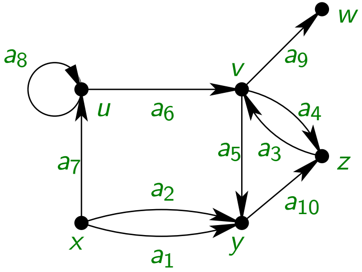
Listas de adjacências (usada em Algoritmos em Grafos)

Seja $D = (V, A)$ um digrafo **estrito**. A representação por listas de adjacências de D consiste em um vetor $\mathrm{Adj}[\ ]$ indexado por V tal que para cada $u \in V$, $\mathrm{Adj}[u]$ aponta para uma lista ligada contendo os vértices dominados por u.



Conceitos de grafos estendidos para digrafos

- Muitos conceitos vistos para grafos podem ser estendidos de modo natural para digrafos e não apresentaremos todos.
- Por exemplo: remoção de (conjunto de) vértices/arcos, subdigrafos (induzidos), superdigrafos, isomorfismo entre digrafos.



Grafo subjacente

Seja $D = (V, A)$ um digrafo. O grafo subjacente de D, denotado por $G(D)$, é o grafo obtido de D, substituindo cada arco (u, v) por uma aresta (par não-ordenado) uv.

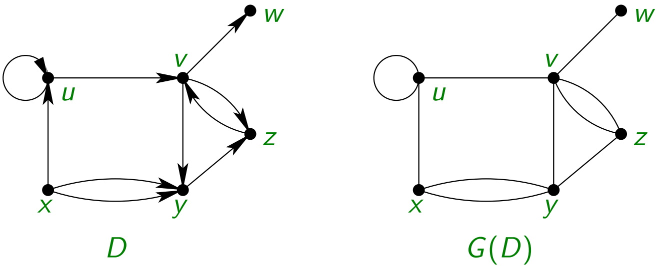


Figura: Digrafo D e seu grafo subjacente $G(D)$.

Grafo subjacente

- Usando o grafo subjacente de D, podemos tomar emprestado terminologia e conceitos típicos de grafos.
- Por exemplo: vizinhança/adjacência, incidência, grau, componentes, bipartição, decomposição etc.
- Certos conceitos como passeios ou cortes requerem definições específicas para digrafos.

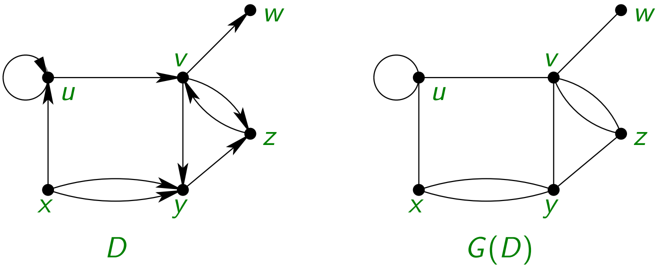


Figura: Digrafo D e seu grafo subjacente $G(D)$.

Orientações

Uma orientação de um grafo G é um digrafo obtido substituindo cada aresta uv de G por um arco (u, v) ou (v, u).

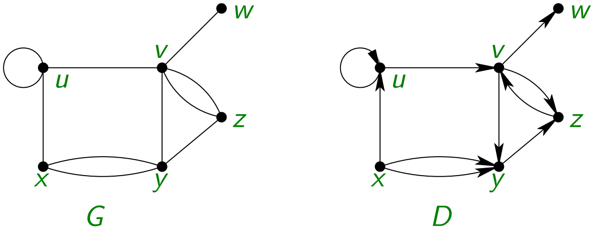


Figura: Um grafo G e uma orientação D de G.

Quantas possíveis orientações um grafo simples G possui? $2^{m(G)}$

Um passeio em um digrafo $D = (V, A)$ é uma sequência:

$$W = (v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, a_\ell, v_\ell),$$

onde $v_0, v_1, \ldots, v_\ell$ são vértices de G e $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ são arcos de D para todo $i = 1, 2, \ldots, \ell$. Se D for **estrito**, escrevemos apenas os vértices.

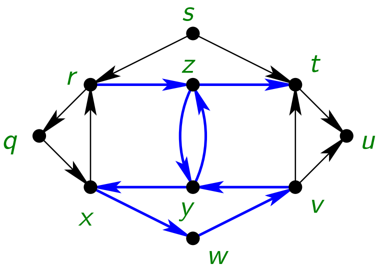


Figura: Passeio $W := (r, z, y, x, w, v, y, z, t)$.

Passeios

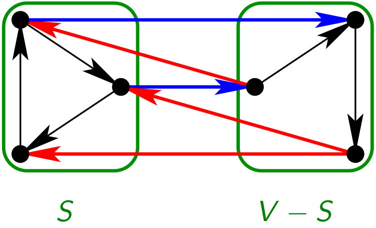
- Usamos a mesma terminologia que usamos para passeios em grafos: início e final de um passeio, comprimento, passeios fechados etc.
- As definições de trilhas, caminhos e ciclos são análogos e omitimos aqui.
- Algumas vezes usaremos o termo orientado para enfatizar que estamos nos referindo a um digrafo. Por exemplo, caminho (ou ciclo) orientado.

Corte orientado

Seja $D = (V, A)$ um digrafo e seja $S \subseteq V$.

Denotamos por $\partial_D^+(S)$ o conjunto dos arcos com início em S e final em $V - S$, i.e., o conjunto dos arcos que saem de S.

Denotamos por $\partial_D^-(S)$ o conjunto dos arcos com início em $V - S$ e final em S, i.e., o conjunto do arcos que entram em S.

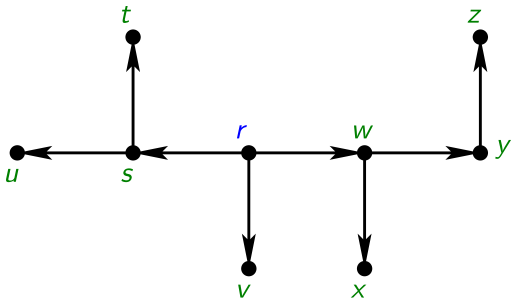


Arborescências

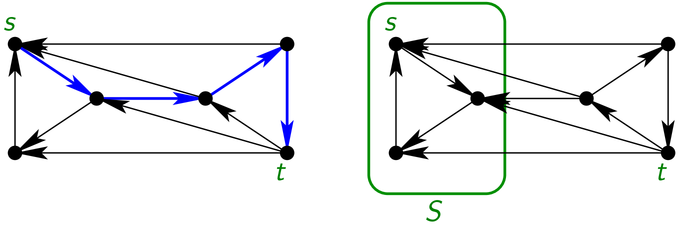
Uma r-arborescência é um digrafo conexo D contendo um vértice r chamado raiz tal que:

1. $d^-_D(r) = 0$ e
2. $d^-_D(v) = 1$ para todo $v \in V(D) - \{r\}$.

Equivalentemente, D é uma orientação de uma árvore na qual existe um caminho orientado de r a qualquer vértice de D. (Exercício!)



Teorema. Seja $D = (V, A)$ um digrafo e sejam $s, t \in V$. Então existe um caminho de s a t em D se, e somente se, não existe $S \subseteq V - \{t\}$ tal que $s \in S$ e $\partial_D^+(S) = \emptyset$.



Teorema. Seja $D = (V, A)$ um digrafo e sejam $s, t \in V$. Então existe um caminho de s a t em D se, e somente se, não existe $S \subseteq V - \{t\}$ tal que $s \in S$ e $\partial_D^+(S) = \emptyset$.

Prova.
($\Rightarrow$) Se existe um caminho de s a t em D, então claramente não existe $S \subseteq V - \{t\}$ tal que $s \in S$ e $\partial_D^+(S) = \emptyset$.
($\Leftarrow$) Suponha então que não existe caminho de s a t em D. Seja

$$S := \{v \in V : \text{existe um caminho de } s \text{ a } v \text{ em } D\}.$$

Claramente $t \notin S$, $s \in S$ e $\partial_D^+(S) = \emptyset$ e o resultado segue. ∎

Observação. Note que se um digrafo D contém uma r-arborescência geradora, então existe um caminho de r para cada vértice de $V(D)$. O próximo resultado diz que a recíproca também é verdade.

Exercício. Seja D um digrafo e seja r um vértice de D. Seja

$$R := \{v \in V : \text{existe um caminho de } r \text{ a } v \text{ em } D\}.$$

Mostre que D contém uma r-arborescência H com $V(H) = R$.

Um digrafo D é Euleriano se admite uma trilha fechada T que passa por todas os arcos de D. Dizemos que T é uma trilha Euleriana ou trilha de Euler.

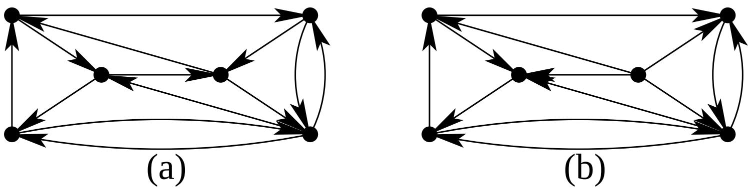


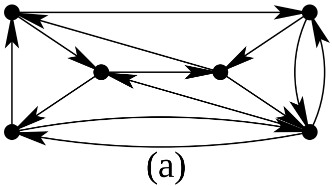
Figura: O digrafo em (a) é Euleriano, mas o digrafo em (b) não é.

Como seria uma condição necessária e suficiente para que um digrafo D seja Euleriano?

Digrafos Eulerianos

As seguintes condições são necessárias:

1. $d^+_D(v) = d^-_D(v)$ para todo vértice v de D, e
2. D tem no máximo um componente não-trivial.



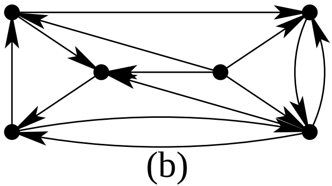


Figura: O digrafo em (a) é Euleriano, mas o digrafo em (b) não é.

Dizemos que D é balanceado se $d^+_D(v) = d^-_D(v)$ para todo vértice v de D.

Digrafos Eulerianos

Teorema. Seja D um digrafo. Então D é Euleriano se, e somente se,

1. D é balanceado e
2. D tem no máximo um componente não-trivial.

Prova. (Exercício). ■

Um modo de provar é tomar uma trilha T de comprimento máximo. Usando o fato de D ser balanceado, é fácil ver que T deve ser fechada. Se T não for Euleriana, então é possível construir uma trilha de comprimento maior que o de T, uma contradição.

Esta é a mesma estratégia que apresentamos na prova da caracterização de grafos Eulerianos.

Aplicação: digrafos de **de Bruijn**

Existem 2^n strings binárias de comprimento n. Existe um arranjo cíclico de 2^n dígitos em $\{0, 1\}$ tal que **todos** os 2^n segmentos de comprimento n sejam distintos dois-a-dois (ou seja, correspondem a todas as possíveis strings binárias de comprimento n)?

Por exemplo, para $n = 4$ as $2^n (= 16)$ sequências de comprimento n são: 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111

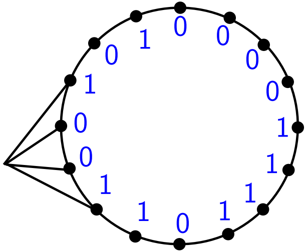
e a sequência

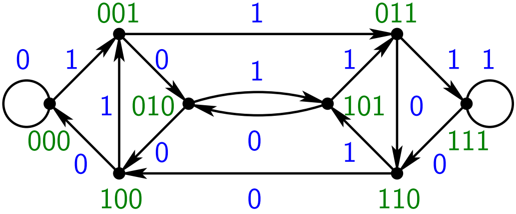
$$(0000111101100101)$$

faz o serviço (por verificação).

Aplicação: digrafos de **de Bruijn**

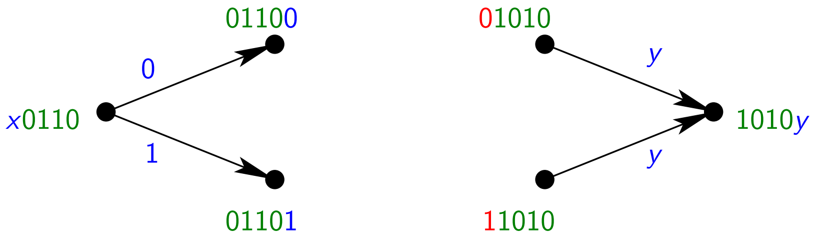
Segundo Good (1946), podemos usar tal arranjo para acompanhar a posição de um tambor rotativo. O tambor tem 2^n posições. Uma faixa colocada ao redor da circunferência é dividida em 2^n porções codificadas por 0 ou 1. Sensores lêem n posições consecutivas. Se a codificação tem a propriedade referida, então a posição do tambor é determinada (unicamente) pela string lida pelos sensores.





Aplicação: digrafos de **de Bruijn**

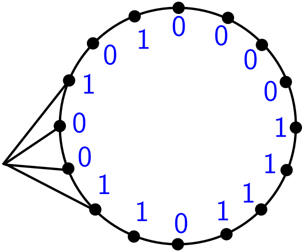
Para obter o arranjo circular, definimos o digrafo D_n com conjunto de vértices $\{0,1\}^{n-1}$ tal que um vértice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ domina outro vértice $y = (y_1, \ldots, y_{n-2}, y_{n-1})$ se $(x_2, \ldots, x_{n-1}) = (y_1, \ldots, y_{n-2})$.
(Ou seja, as últimas $n-2$ entradas de x coincidem com as primeiras $n-2$ entradas de y.)

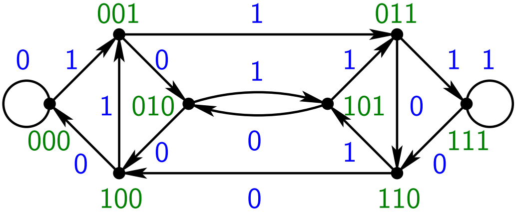


Rotule o arco (x, y) com a última entrada de y, i.e., y_{n-1}.

Aplicação: digrafos de **de Bruijn**

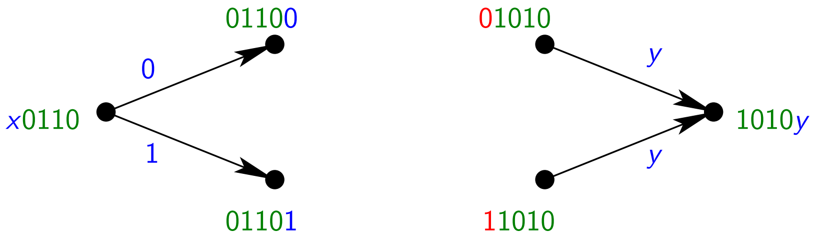
Digrafo D_4.





Aplicação: digrafos de **de Bruijn**

D_n é balanceado.



Todo vértice v de D_n tem grau de saída igual a 2, pois podemos acrescentar 0 ou 1 ao final do nome de v e obter o nome do vértice dominado por v. Similarmente, todo vértice de D_n tem grau de entrada igual a 2.

Note que isto implica que $|A(D_n)| = \sum_{v \in V(D_n)} d^+(v) = 2.2^{n-1} = 2^n$.

Aplicação: digrafos de **de Bruijn**

Teorema. O digrafo D_n é Euleriano. Além disso, se T é uma trilha fechada Euleriana de D_n, então a sequência dos rótulos das arestas de T formam um arranjo cíclico no qual todos os 2^n segmentos consecutivos de comprimento n são distintos dois-a-dois.

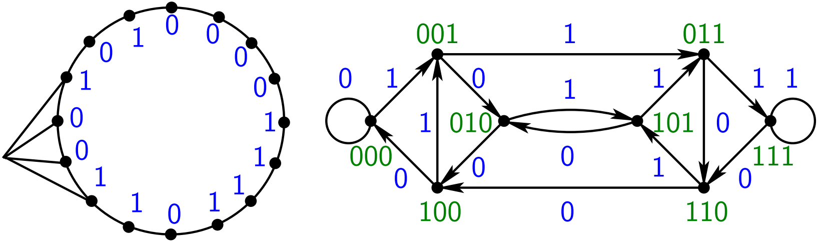
Prova: Primeiro mostraremos que D_n é Euleriano.

Já vimos que D_n é balanceado.

Resta mostrar que D_n é fortemente conexo.

Aplicação: digrafos de **de Bruijn**

Ideia: saindo de um vértice $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ podemos chegar a um vértice $b = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})$ seguindo arcos de rótulos $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ sucessivamente.



Exemplo. Um caminho de 001 a 101 é $(001, 011, 110, 101)$. Note que a sequência de rótulos dos arcos no caminho é 1, 0 e 1.

Aplicação: digrafos de **de Bruijn**

Saindo de um vértice $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ podemos chegar a outro vértice $b = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})$ seguindo arcos de rótulos $b_1 \ldots, b_{n-1}$ sucessivamente como abaixo:

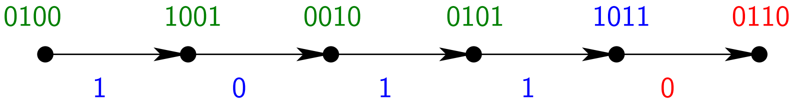
$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1})$$
$$(a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, b_1)$$
$$(a_3, a_4, a_5, \ldots, a_{n-1}, b_1, b_2)$$
$$(a_4, a_5, a_6, \ldots, b_1, b_2, b_3)$$
$$\vdots$$
$$(a_{n-1}, b_1, b_2, \ldots, b_{n-4}, b_{n-3}, b_{n-2})$$
$$(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-3}, b_{n-2}, b_{n-1})$$

Portanto, D_n é fortemente conexo e do teorema anterior, segue que D_n é Euleriano.

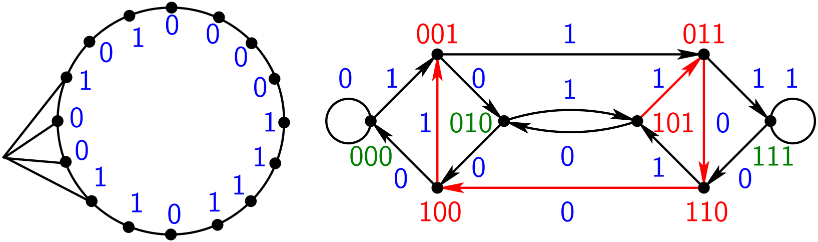
Aplicação: digrafos de **de Bruijn**

Seja T uma trilha Euleriana de D_n. Mostraremos que para quaisquer duas seções de T de comprimento n, as suas sequências de rótulos correspondentes são distintas.

Considere uma seção $Q = (v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$ de T de comprimento n. Suponha que $v_n = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$. Então os rótulos das arestas de $v_1 Q v_n$ são $b_1, \dots, b_{n-1}$ (slide anterior). Logo, a sequência dos n rótulos em Q consiste do nome do vértice v_n seguido do último bit de v_{n+1}.



Os nomes dos 2^{n-1} vértices de D_n são distintos, os arcos saindo de cada vértice têm rótulos distintos e T não repete arcos. Portanto, os 2^n segmentos de comprimento n são distintos dois-a-dois. ■



Trilha $T = (101, 010, 100, 000, 000, 001, 011, 111, 111, 110, 101, 011, 110, 100, 001, 010, 101)$

Sequência de rótulos de T: 0000111101100101

1001 é a sequência de rótulos da seção $Q = (101, 011, 110, 100, 001)$.

Referências

Consulte a Seção 1.4 do West96.