**MC558 – Projeto e Análise de Algoritmos II**
**Lista de Exercícios 4**

Os exercícios sem marcas são (ou deveriam ser) relativamente simples. Os exercícios marcados com (*) exigem alguma reflexão.... Os exercícios marcados com (**) são mais difíceis.

1. (a) Mostre que todo grafo simples $G$ contém um caminho de comprimento $\delta(G)$.
   (b) Para cada inteiro $k \geq 0$, encontre um grafo simples $G$ com $\delta(G) = k$ que não contém nenhum caminho de comprimento maior que $k$.

2. (a) Mostre que todo grafo simples $G$ com $\delta(G) \geq 2$ contém um ciclo de comprimento pelo menos $\delta(G) + 1$.
   (b) Para cada inteiro $k \geq 2$, encontre um grafo simples $G$ com $\delta(G) = k$ que não contém nenhum ciclo de comprimento maior que $k + 1$.

3. Seja $G$ um grafo sem laços com $\delta(G) \geq 3$. Mostre que $G$ contém um ciclo par.

4. Mostre que para qualquer inteiro $k \geq 2$, todo grafo $k$-regular bipartido não possui aresta-de-corte.

5. Seja $G$ um grafo par conexo.
   (a) Mostre que $G$ não possui aresta-de-corte.
   (b) Mostre que para qualquer vértice $v \in V$, $c(G - v) \leq d(v)/2$.

6. Prove ou mostre um contra-exemplo.
   (a) Todo grafo par bipartido possui um número par de arestas.
   (b) Todo grafo simples par com um número par de vértices possui um número par de arestas.
   (c) Se $e$ e $f$ são arestas adjacentes (isto é, incidentes a um mesmo vértice) de um grafo Euleriano $G$, então existe uma trilha Euleriana fechada em $G$ na qual $e$ e $f$ são consecutivas.

7. Uma **trilha aberta de Euler** em um grafo $G$ é uma trilha aberta que passa exatamente uma vez por cada aresta de $G$.
   (a) Mostre que um grafo conexo $G$ possui uma trilha aberta de Euler ligando $x$ e $y$ se e somente se $G + xy$ admite uma trilha de Euler fechada.
   (b) Deduza que um grafo conexo $G$ admite uma trilha aberta de Euler ligando $x$ e $y$ se, e somente se, $d(x)$ e $d(y)$ são ímpares e $d(v)$ é par para todo $v \in V - \{x, y\}$.

8. Seja $G$ um grafo conexo com exatamente dois vértices $x$ e $y$ de grau ímpar. Seja $T$ uma trilha maximal começando em $x$. Ela é necessariamente máxima? O que se pode dizer de uma trilha máxima começando em $x$?

9. Seja $G$ um grafo e seja $X$ o conjunto de vértices de grau ímpar de $G$.
   (a) Mostre que se $|X| = 2$ então $G$ pode ser decomposto em um caminho (ligando os dois vértices de grau ímpar) e alguns ciclos (possivelmente nenhum).

(b) Mostre que se $|X| = 2k$, onde $k \geq 1$, $G$ pode ser decomposto em $k$ caminhos (ligando vértices de grau ímpar) e alguns ciclos.

(c) Suponha que todo componente de $G$ contém um vértice de $X$. Mostre que $G$ pode ser decomposto em $k$ trilhas $Q_1, \ldots, Q_k$ (ligando vértices de grau ímpar). Os itens (b) e (c) podem ser resolvidos em qualquer ordem.

10. Seja $G$ um grafo par conexo sem laços e suponha que (i) cada aresta de $G$ possui uma cor: azul ou vermelha e (ii) para cada $v \in V(G)$, metade das arestas incidentes a $v$ é azul e a outra metade é vermelha. Uma trilha é **alternante** se arestas consecutivas na trilha têm cores distintas. Prove ou mostre um contra-exemplo para as afirmações abaixo:

    (a) $G$ possui um número par de arestas.

    (b) $G$ contém um ciclo alternante.

    (c) $G$ possui uma trilha Euleriana alternante fechada.

    (d) (*) se $G$ não possui um vértice-de-corte, então $G$ pode ser decomposto em ciclos alternantes aresta-disjuntos.

11. Um grafo $G$ é **randomicamente**[1] **Euleriano a partir de um vértice** $v$ se a seguinte construção **sempre** produz uma trilha Euleriana: começando com $x := v$, escolha uma aresta $e = xy$ ainda não visitada, faça $x := y$ e repita o processo enquanto for possível. Ou seja, toda trilha maximal em $G$ começando em $v$ é uma trilha Euleriana de $G$.

    (a) Mostre que o grafo da Figura **??** é randomicamente Euleriano a partir de $v$.

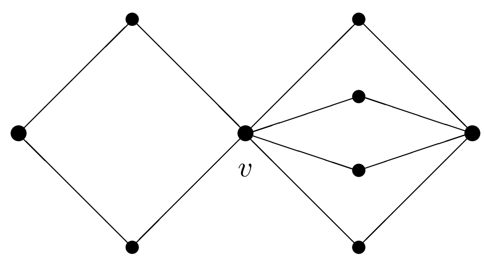


Figura 1: grafo $G$

    (b) Exiba um grafo euleriano que não seja randomicamente Euleriano a partir de nenhum vértice.

    (c) (*) Enuncie condições necessárias e suficientes para que um grafo conexo seja randomicamente Euleriano a partir de um vértice fixo $v$. Depois prove a afirmação.

[1]Esta é uma tradução horrível de *randomly Eulerian graph*, mas grafo aleatório Euleriano sugere outra coisa...