MC558 — Análise de Algoritmos II

Cid C. de Souza Cândida N. da Silva Orlando Lee

7 de março de 2023

Antes de mais nada...

- Uma versão anterior deste conjunto de slides foi preparada por Cid Carvalho de Souza e Cândida Nunes da Silva para uma instância anterior desta disciplina.
- O que vocês tem em mãos é uma versão modificada preparada para atender a meus gostos.
- Nunca é demais enfatizar que o material é apenas um guia e não deve ser usado como única fonte de estudo. Para isso consultem a bibliografia (em especial o CLR ou CLRS).

Orlando Lee

Agradecimentos (Cid e Cândida)

- Várias pessoas contribuíram direta ou indiretamente com a preparação deste material.
- Algumas destas pessoas cederam gentilmente seus arquivos digitais enquanto outras cederam gentilmente o seu tempo fazendo correções e dando sugestões.
- Uma lista destes "colaboradores" (em ordem alfabética) é dada abaixo:
  - Célia Picinin de Mello
  - José Coelho de Pina
  - Orlando Lee
  - Paulo Feofiloff
  - Pedro Rezende
  - Ricardo Dahab
  - Zanoni Dias

Grafos

Grafos

Um grafo é uma tripla $G = (V, E, \psi)$ na qual:

1. V é um conjunto de elementos chamados vértices,
2. E é um conjunto disjunto de V de elementos chamados arestas e
3. ψ é uma função que associa cada elemento de E a um par não-ordenado de elementos de V.

Grafos

Um grafo é uma tripla $G = (V, E, \psi)$ na qual:

1. V é um conjunto de elementos chamados vértices,
2. E é um conjunto disjunto de V de elementos chamados arestas e
3. ψ é uma função que associa cada elemento de E a um par não-ordenado de elementos de V.

Exemplo:

1. $V = \{u, v, w, x, y, z\}$,
2. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$,
3.

e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
$\psi(e)$	$\{x, y\}$	$\{x, y\}$	$\{y, z\}$	$\{z, v\}$	$\{v, y\}$	$\{v, u\}$	$\{u, x\}$	$\{u, u\}$	$\{v, w\}$

Desenho de grafos

e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
$\psi(e)$	$\{x, y\}$	$\{x, y\}$	$\{y, z\}$	$\{z, v\}$	$\{v, y\}$	$\{v, u\}$	$\{u, x\}$	$\{u, u\}$	$\{v, w\}$

Desenho de grafos

e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
$\psi(e)$	$\{x, y\}$	$\{x, y\}$	$\{y, z\}$	$\{z, v\}$	$\{v, y\}$	$\{v, u\}$	$\{u, x\}$	$\{u, u\}$	$\{v, w\}$

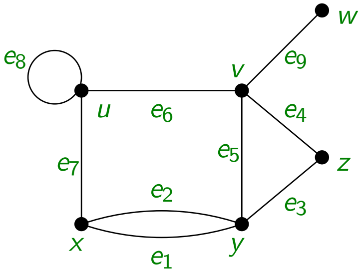


Figura: Desenho de um grafo G.

Desenho de grafos

Desenho de grafos

1. Desenhos de grafos são convenientes para se descobrir visualmente propriedades importantes.

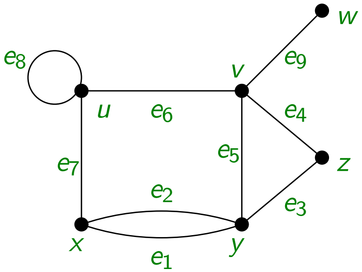


Figura: Desenho de um grafo G.

Desenho de grafos

1. Desenhos de grafos são convenientes para se descobrir visualmente propriedades importantes.
2. Obviamente, isto só funciona para grafos *pequenos*.

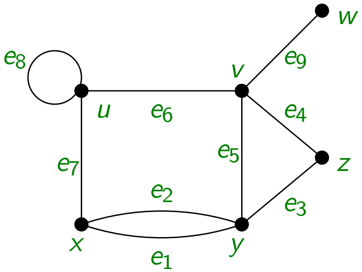


Figura: Desenho de um grafo G.

Desenho de grafos

1. Desenhos de grafos são convenientes para se descobrir visualmente propriedades importantes.
2. Obviamente, isto só funciona para grafos *pequenos*.
3. Usaremos bastante desenhos de grafos para ilustrar conceitos ou ideias.

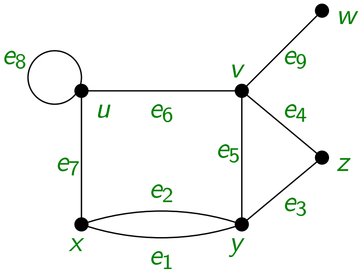


Figura: Desenho de um grafo G.

Grafos

Grafos

Para um grafo $G = (V, E, \psi)$,

Grafos

Para um grafo $G = (V, E, \psi)$,

1. V é chamado conjunto de vértices de G,

Grafos

Para um grafo $G = (V, E, \psi)$,

1. V é chamado conjunto de vértices de G,
2. E é chamado conjunto de arestas de G e

Grafos

Para um grafo $G = (V, E, \psi)$,

1. V é chamado conjunto de vértices de G,
2. E é chamado conjunto de arestas de G e
3. ψ é chamada função de incidência de G.

Grafos

Para um grafo $G = (V, E, \psi)$,

1. V é chamado conjunto de vértices de G,
2. E é chamado conjunto de arestas de G e
3. ψ é chamada função de incidência de G.

Muitas vezes, escreveremos simplesmente grafo G ficando implícito que $G = (V(G), E(G), \psi_G)$.

Grafos

Para um grafo $G = (V, E, \psi)$,

1. V é chamado conjunto de vértices de G,
2. E é chamado conjunto de arestas de G e
3. ψ é chamada função de incidência de G.

Muitas vezes, escreveremos simplesmente grafo G ficando implícito que $G = (V(G), E(G), \psi_G)$.

Observação. Neste curso suporemos que V e E são sempre finitos.

Adjacência de vértices

Adjacência de vértices

- Escrevemos $e = uv$ se $\psi(e) = \{u, v\}$.

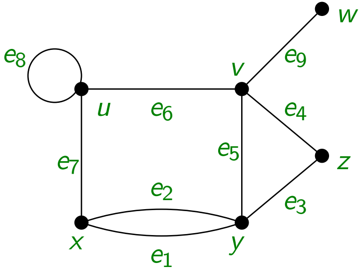


Figura: Desenho de um grafo G.

Adjacência de vértices

- Escrevemos $e = uv$ se $\psi(e) = \{u, v\}$.
- Neste caso, dizemos que u e v são extremos de e e que u e v são ligados por e.

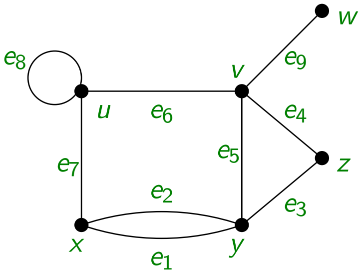


Figura: Desenho de um grafo G.

Adjacência de vértices

- Escrevemos $e = uv$ se $\psi(e) = \{u, v\}$.
- Neste caso, dizemos que u e v são extremos de e e que u e v são ligados por e.
- Dizemos que dois vértices são adjacentes ou vizinhos se são extremos de uma mesma aresta.

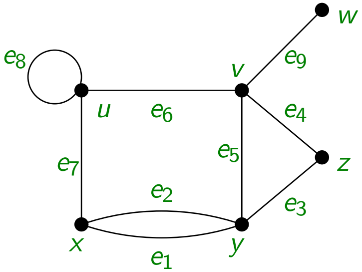


Figura: Desenho de um grafo G.

Adjacência de arestas e incidência

Adjacência de arestas e incidência

- Dizemos que duas arestas são adjacentes se têm um extremo em comum.

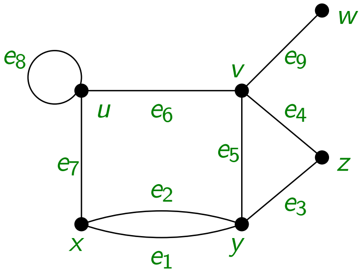


Figura: Desenho de um grafo G.

Adjacência de arestas e incidência

- Dizemos que duas arestas são adjacentes se têm um extremo em comum.
- Se $e = uv$, então dizemos que u (v) é incidente a e e **vice versa**.

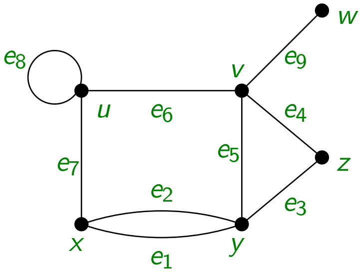


Figura: Desenho de um grafo G.

Laços

Laços

Uma aresta e é um laço se existe algum vértice u tal que $\psi(e) = \{u, u\}$, ou seja, tem extremos idênticos.

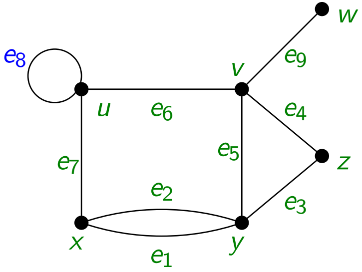


Figura: Desenho de um grafo G.

Arestas múltiplas/paralelas

Arestas múltiplas/paralelas

Duas arestas e e f são múltiplas ou paralelas se $\psi(e) = \psi(f)$, ou seja, têm os mesmos extremos.

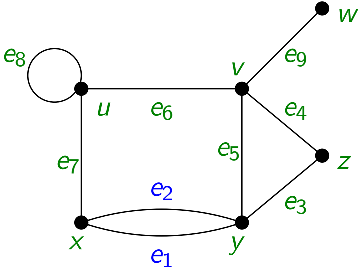


Figura: Desenho de um grafo G.

Grafos simples

Grafos simples

1. Um grafo G é simples se não possui laços nem arestas múltiplas.

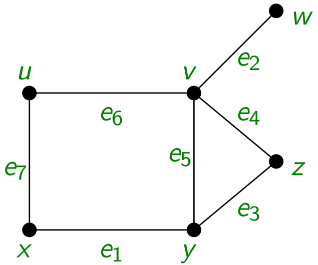


Figura: Desenho de um grafo simples G.

Grafos simples

1. Um grafo G é simples se não possui laços nem arestas múltiplas.
2. Em um grafo simples, uma aresta é totalmente identificada por seus extremos.

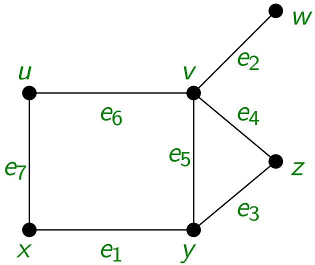


Figura: Desenho de um grafo simples G.

Grafos simples

1. Um grafo G é simples se não possui laços nem arestas múltiplas.
2. Em um grafo simples, uma aresta é totalmente identificada por seus extremos.
3. Assim, é usual pensar em uma aresta de um grafo simples como um par não-ordenado de vértices.

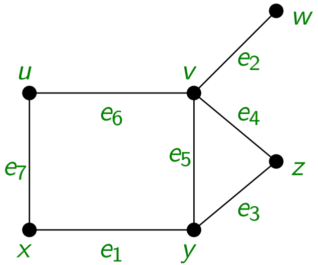


Figura: Desenho de um grafo simples G.

Notação

Notação

1. Muitas vezes definimos um grafo como um par $G = (V, E)$ deixando implícita a função de incidência, interpretando cada aresta como um par não-ordenado de vértices.

Notação

1. Muitas vezes definimos um grafo como um par $G = (V, E)$ deixando implícita a função de incidência, interpretando cada aresta como um par não-ordenado de vértices.
2. Podemos então escrever $uv \in E$ significando que existe uma aresta com extremos u e v em G.

Notação

1. Muitas vezes definimos um grafo como um par $G = (V, E)$ deixando implícita a função de incidência, interpretando cada aresta como um par não-ordenado de vértices.
2. Podemos então escrever $uv \in E$ significando que existe uma aresta com extremos u e v em G.
3. Isto não apresenta problemas se G é simples, mas pode causar confusão em grafos não-simples.

Notação

1. Muitas vezes definimos um grafo como um par $G = (V, E)$ deixando implícita a função de incidência, interpretando cada aresta como um par não-ordenado de vértices.
2. Podemos então escrever $uv \in E$ significando que existe uma aresta com extremos u e v em G.
3. Isto não apresenta problemas se G é simples, mas pode causar confusão em grafos não-simples.

Usaremos também as seguintes notações:

Notação

1. Muitas vezes definimos um grafo como um par $G = (V, E)$ deixando implícita a função de incidência, interpretando cada aresta como um par não-ordenado de vértices.
2. Podemos então escrever $uv \in E$ significando que existe uma aresta com extremos u e v em G.
3. Isto não apresenta problemas se G é simples, mas pode causar confusão em grafos não-simples.

Usaremos também as seguintes notações:

1. $n(G)$ é o número de vértices de G e

Notação

1. Muitas vezes definimos um grafo como um par $G = (V, E)$ deixando implícita a função de incidência, interpretando cada aresta como um par não-ordenado de vértices.
2. Podemos então escrever $uv \in E$ significando que existe uma aresta com extremos u e v em G.
3. Isto não apresenta problemas se G é simples, mas pode causar confusão em grafos não-simples.

Usaremos também as seguintes notações:

1. $n(G)$ é o número de vértices de G e
2. $m(G)$ é o número de arestas de G.

Notação

1. Muitas vezes definimos um grafo como um par $G = (V, E)$ deixando implícita a função de incidência, interpretando cada aresta como um par não-ordenado de vértices.
2. Podemos então escrever $uv \in E$ significando que existe uma aresta com extremos u e v em G.
3. Isto não apresenta problemas se G é simples, mas pode causar confusão em grafos não-simples.

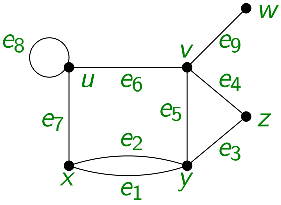
Usaremos também as seguintes notações:

1. $n(G)$ é o número de vértices de G e
2. $m(G)$ é o número de arestas de G.

Quando G está claro dentro do contexto, podemos escrever n e m simplesmente.

Matriz de adjacência

Seja $G = (V, E)$ um grafo. A matriz de adjacência de G é a matriz $A_G = (a_{uv})$ indexada nas linhas e colunas por V na qual a_{uv} é o número de arestas ligando u e v, contando laços duas vezes.

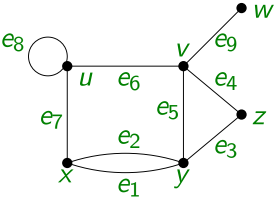


$$
\begin{array}{c|cccccc|}
 & u & v & w & x & y & z \\
\hline
u & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
v & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
w & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
y & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\
z & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Matriz de incidência

Matriz de incidência

Seja $G = (V, E)$ um grafo. A matriz de incidência de G é a matriz $M_G = (m_{ve})$ indexada nas linhas por V e nas colunas por E tal que m_{ve} é o número de vezes $(0, 1$ ou $2)$ que v e e incidem.



$$\begin{array}{c|ccccccccc|}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \\
\hline
u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\
v & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
x & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
y & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
z & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

Famílias especiais de grafos

Famílias especiais de grafos

1. Um grafo é nulo se não possui vértices (nem arestas).

Famílias especiais de grafos

1. Um grafo é nulo se não possui vértices (nem arestas).
2. Um grafo é vazio se não possui arestas.

Famílias especiais de grafos

1. Um grafo é nulo se não possui vértices (nem arestas).
2. Um grafo é vazio se não possui arestas.
3. Um grafo é trivial se for vazio e tiver um único vértice.

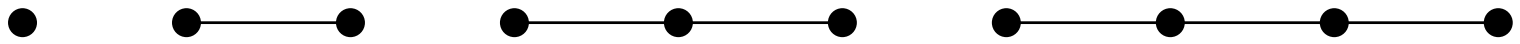
Famílias especiais de grafos

1. Um grafo é nulo se não possui vértices (nem arestas).
2. Um grafo é vazio se não possui arestas.
3. Um grafo é trivial se for vazio e tiver um único vértice.
4. Um grafo é não-trivial se possui pelo menos uma aresta ou pelo menos dois vértices.

Famílias especiais de grafos

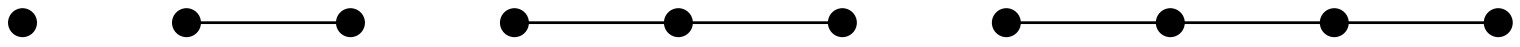
Famílias especiais de grafos

Um caminho é um grafo simples cujos vértices podem ser arranjados em uma ordem linear tal que dois vértices são adjacentes se são consecutivos na ordem.



Famílias especiais de grafos

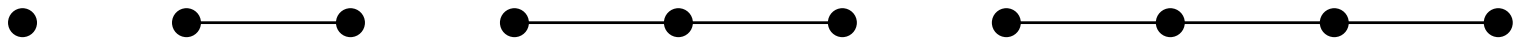
Um caminho é um grafo simples cujos vértices podem ser arranjados em uma ordem linear tal que dois vértices são adjacentes se são consecutivos na ordem.



Quantas arestas tem um caminho com n vértices?

Famílias especiais de grafos

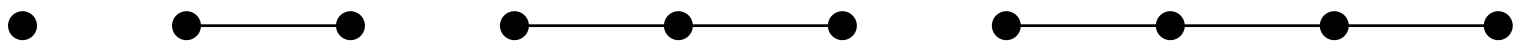
Um caminho é um grafo simples cujos vértices podem ser arranjados em uma ordem linear tal que dois vértices são adjacentes se são consecutivos na ordem.



Quantas arestas tem um caminho com n vértices? $n - 1$

Famílias especiais de grafos

Um caminho é um grafo simples cujos vértices podem ser arranjados em uma ordem linear tal que dois vértices são adjacentes se são consecutivos na ordem.



Quantas arestas tem um caminho com n vértices? $n - 1$

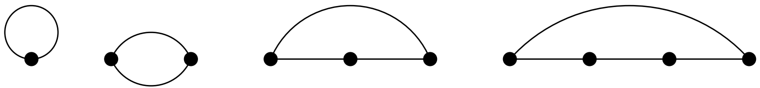
Você consegue exibir uma família infinita de grafos ($n \geq 2$) com este número de arestas que não são caminhos?

Observação. Família é o mesmo que conjunto, coleção. Usamos o termo família ou coleção quando seus membros são objetos mais complexos como conjuntos ou grafos.

Famílias especiais de grafos

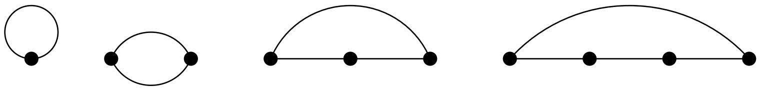
Famílias especiais de grafos

1. Um ciclo (ou circuito) com pelo menos três vértices é um grafo simples cujos vértices podem ser arranjados em uma ordem cíclica tal que dois vértices são adjacentes se são consecutivos na ordem.



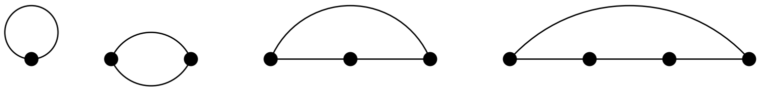
Famílias especiais de grafos

1. Um ciclo (ou circuito) com pelo menos três vértices é um grafo simples cujos vértices podem ser arranjados em uma ordem cíclica tal que dois vértices são adjacentes se são consecutivos na ordem.
2. Um ciclo com um vértice é um laço.



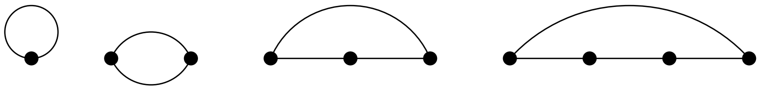
Famílias especiais de grafos

1. Um ciclo (ou circuito) com pelo menos três vértices é um grafo simples cujos vértices podem ser arranjados em uma ordem cíclica tal que dois vértices são adjacentes se são consecutivos na ordem.
2. Um ciclo com um vértice é um laço.
3. Um ciclo com dois vértices consiste de dois vértices ligados por duas arestas paralelas.



Famílias especiais de grafos

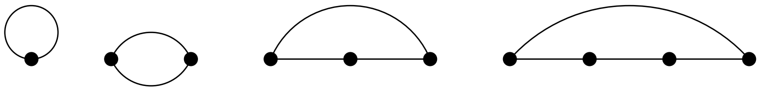
1. Um ciclo (ou circuito) com pelo menos três vértices é um grafo simples cujos vértices podem ser arranjados em uma ordem cíclica tal que dois vértices são adjacentes se são consecutivos na ordem.
2. Um ciclo com um vértice é um laço.
3. Um ciclo com dois vértices consiste de dois vértices ligados por duas arestas paralelas.



Quantas arestas tem um ciclo com n vértices?

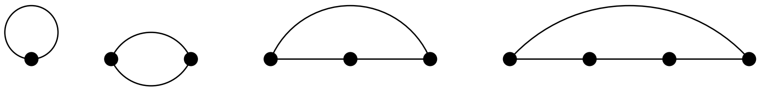
Famílias especiais de grafos

1. Um ciclo (ou circuito) com pelo menos três vértices é um grafo simples cujos vértices podem ser arranjados em uma ordem cíclica tal que dois vértices são adjacentes se são consecutivos na ordem.
2. Um ciclo com um vértice é um laço.
3. Um ciclo com dois vértices consiste de dois vértices ligados por duas arestas paralelas.



Quantas arestas tem um ciclo com n vértices? n

1. Um ciclo (ou circuito) com pelo menos três vértices é um grafo simples cujos vértices podem ser arranjados em uma ordem cíclica tal que dois vértices são adjacentes se são consecutivos na ordem.
2. Um ciclo com um vértice é um laço.
3. Um ciclo com dois vértices consiste de dois vértices ligados por duas arestas paralelas.



Quantas arestas tem um ciclo com n vértices? n

Você consegue exibir uma família infinita de grafos ($n \geq 2$) com este número de arestas que não são ciclos?

Comprimento de caminhos e ciclos

Comprimento de caminhos e ciclos

1. O comprimento de um caminho ou ciclo é seu número de arestas.

Comprimento de caminhos e ciclos

1. O comprimento de um caminho ou ciclo é seu número de arestas.
2. Um caminho ou ciclo é par (ímpar) se tem comprimento par (ímpar).

Comprimento de caminhos e ciclos

1. O comprimento de um caminho ou ciclo é seu número de arestas.
2. Um caminho ou ciclo é par (ímpar) se tem comprimento par (ímpar).
3. Um caminho ou ciclo de comprimento ℓ é chamado ℓ-caminho ou ℓ-ciclo, respectivamente.

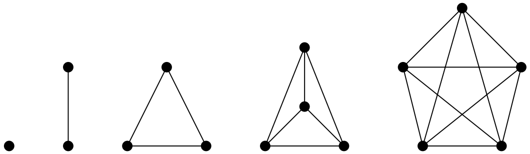
Comprimento de caminhos e ciclos

1. O comprimento de um caminho ou ciclo é seu número de arestas.
2. Um caminho ou ciclo é par (ímpar) se tem comprimento par (ímpar).
3. Um caminho ou ciclo de comprimento ℓ é chamado ℓ-caminho ou ℓ-ciclo, respectivamente.
4. Chamamos um 3-ciclo de triângulo, um 4-ciclo de quadrado, um 5-ciclo de pentágono etc.

Famílias especiais de grafos

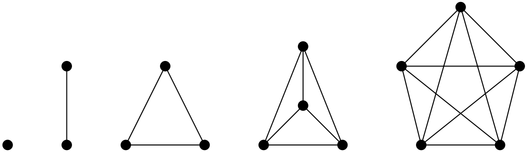
Famílias especiais de grafos

Um grafo é completo se for simples e quaisquer dois vértices distintos forem adjacentes.



Famílias especiais de grafos

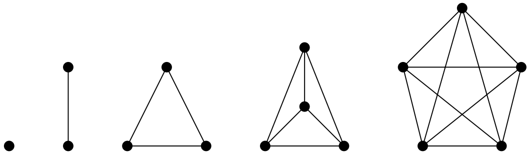
Um grafo é completo se for simples e quaisquer dois vértices distintos forem adjacentes.



Quantas arestas tem um grafo completo com n vértices?

Famílias especiais de grafos

Um grafo é completo se for simples e quaisquer dois vértices distintos forem adjacentes.



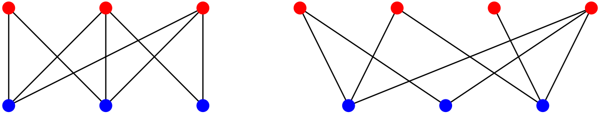
Quantas arestas tem um grafo completo com n vértices? $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Observação. $\binom{n}{k}$ é o número de subconjuntos de tamanho k de um conjunto de tamanho n. Cada aresta de um grafo simples pode ser vista como um subconjunto de tamanho dois do conjunto de vértices.

Famílias especiais de grafos

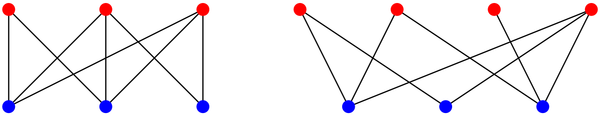
Famílias especiais de grafos

Um grafo G é **bipartido** se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos X e Y tais que cada aresta tem um extremo em X e outro em Y. Uma tal partição X, Y é chamada **bipartição** de G e dizemos que X e Y são as **partes** da bipartição. Neste caso, dizemos que G é (X, Y)-**bipartido**.



Famílias especiais de grafos

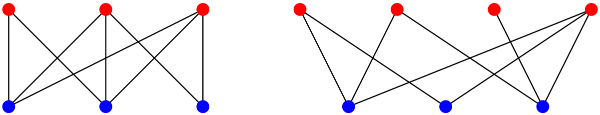
Um grafo G é **bipartido** se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos X e Y tais que cada aresta tem um extremo em X e outro em Y. Uma tal partição X, Y é chamada **bipartição** de G e dizemos que X e Y são as **partes** da bipartição. Neste caso, dizemos que G é (X, Y)-**bipartido**.



Definição alternativa: G é **bipartido** se é possível colorir os vértices de G com duas cores (por exemplo, azul e vermelho) de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas.

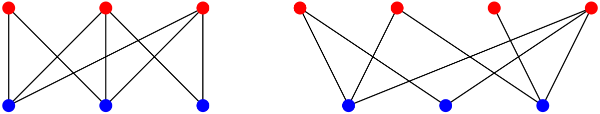
Famílias especiais de grafos

Um grafo G é **bipartido** se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos X e Y tais que cada aresta tem um extremo em X e outro em Y. Uma tal partição X, Y é chamada **bipartição** de G e dizemos que X e Y são as **partes** da bipartição. Neste caso, dizemos que G é (X, Y)-**bipartido**.



Famílias especiais de grafos

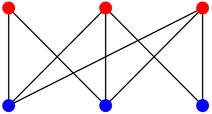
Um grafo G é **bipartido** se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos X e Y tais que cada aresta tem um extremo em X e outro em Y. Uma tal partição X, Y é chamada **bipartição** de G e dizemos que X e Y são as **partes** da bipartição. Neste caso, dizemos que G é (X, Y)-**bipartido**.

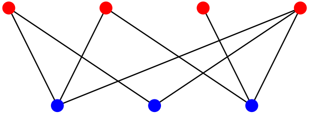


Um subconjunto S de $V(G)$ é independente se quaisquer dois vértices em S são **não-adjacentes** em G. Assim, G é bipartido se, e somente se, $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos independentes.

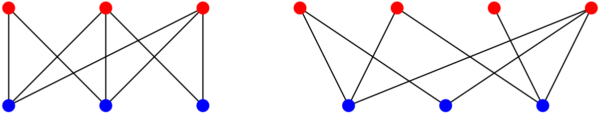
Famílias especiais de grafos

Um grafo G é **bipartido** se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos X e Y tais que cada aresta tem um extremo em X e outro em Y. Uma tal partição X, Y é chamada **bipartição** de G e dizemos que X e Y são as **partes** da bipartição. Neste caso, dizemos que G é (X, Y)-**bipartido**.





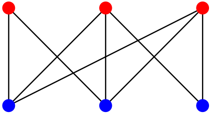
Um grafo G é **bipartido** se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos X e Y tais que cada aresta tem um extremo em X e outro em Y. Uma tal partição X, Y é chamada **bipartição** de G e dizemos que X e Y são as **partes** da bipartição. Neste caso, dizemos que G é (X, Y)-**bipartido**.

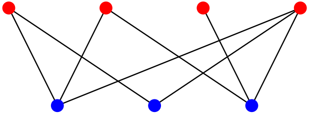


Você consegue exibir uma família infinita de grafos **não-bipartidos**?

Famílias especiais de grafos

Um grafo G é **bipartido** se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos X e Y tais que cada aresta tem um extremo em X e outro em Y. Uma tal partição X, Y é chamada **bipartição** de G e dizemos que X e Y são as **partes** da bipartição. Neste caso, dizemos que G é (X, Y)-**bipartido**.





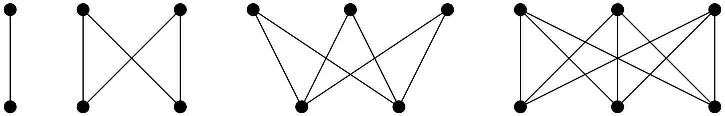
Você consegue exibir uma família infinita de grafos **não-bipartidos**?

Família de todos os ciclos ímpares.

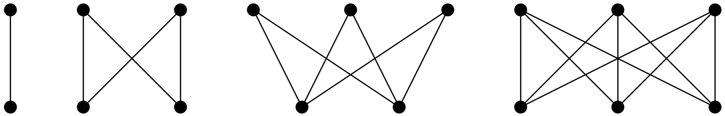
Famílias especiais de grafos

Famílias especiais de grafos

Um grafo simples (X, Y)-bipartido G é bipartido completo se todo vértice de X é adjacente a todo vértice de Y.

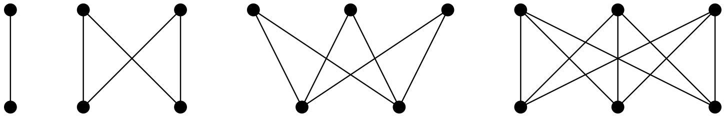


Um grafo simples (X, Y)-bipartido G é bipartido completo se todo vértice de X é adjacente a todo vértice de Y.



Quantas arestas tem um grafo bipartido completo com partes de tamanho r e s, respectivamente?

Um grafo simples (X, Y)-bipartido G é bipartido completo se todo vértice de X é adjacente a todo vértice de Y.



Quantas arestas tem um grafo bipartido completo com partes de tamanho r e s, respectivamente? rs

Grau

Grau

O grau de um vértice v em G, denotado por $d_G(v)$, é o número de arestas incidentes a v, sendo que laços são contados duas vezes.

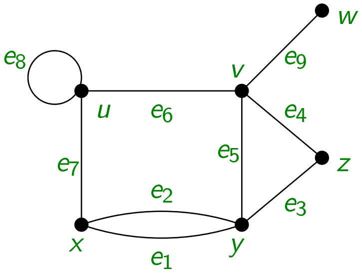


Figura: Desenho de um grafo G.

	u	v	w	x	y	z
$d_G(\ )$	?	?	?	?	?	?

Grau

O grau de um vértice v em G, denotado por $d_G(v)$, é o número de arestas incidentes a v, sendo que laços são contados duas vezes.

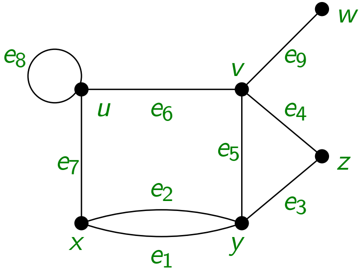


Figura: Desenho de um grafo G.

	u	v	w	x	y	z
$d_G(\ )$	4	4	1	3	4	2

Teorema do Aperto de Mãos

Teorema do Aperto de Mãos

Teorema. Para todo grafo $G = (V, E)$ temos que

$$\sum d_G(v) = 2|E|.$$

Prova (Contagem dupla).

Teorema do Aperto de Mãos

Teorema. Para todo grafo $G = (V, E)$ temos que

$$\sum d_G(v) = 2|E|.$$

Prova (Contagem dupla). Considere uma aresta qualquer de G, digamos $e = uv$. Ela é contada duas vezes no lado direito da equação. Por outro lado, ela também é contada em $d_G(u)$ e em $d_G(v)$ no lado esquerdo (lembre-se que se e é um laço, ela é contada duas vezes). Portanto, a igualdade vale. ■

Teorema do Aperto de Mãos

Teorema. Para todo grafo $G = (V, E)$ temos que

$$\sum d_G(v) = 2|E|.$$

Prova (Contagem dupla). Considere uma aresta qualquer de G, digamos $e = uv$. Ela é contada duas vezes no lado direito da equação. Por outro lado, ela também é contada em $d_G(u)$ e em $d_G(v)$ no lado esquerdo (lembre-se que se e é um laço, ela é contada duas vezes). Portanto, a igualdade vale. ■

Este é o teorema mais importante do Universo!

Teorema do Aperto de Mãos

Teorema. Para todo grafo $G = (V, E)$ temos que

$$\sum d_G(v) = 2|E|.$$

Prova (Contagem dupla). Considere uma aresta qualquer de G, digamos $e = uv$. Ela é contada duas vezes no lado direito da equação. Por outro lado, ela também é contada em $d_G(u)$ e em $d_G(v)$ no lado esquerdo (lembre-se que se e é um laço, ela é contada duas vezes). Portanto, a igualdade vale. ■

Este é o teorema mais importante do Universo!

Ok, estou exagerando para chamar sua atenção...

Teorema do Aperto de Mãos

Teorema. Para todo grafo $G = (V, E)$ temos que

$$\sum d_G(v) = 2|E|.$$

Prova (Contagem dupla). Considere uma aresta qualquer de G, digamos $e = uv$. Ela é contada duas vezes no lado direito da equação. Por outro lado, ela também é contada em $d_G(u)$ e em $d_G(v)$ no lado esquerdo (lembre-se que se e é um laço, ela é contada duas vezes). Portanto, a igualdade vale. ∎

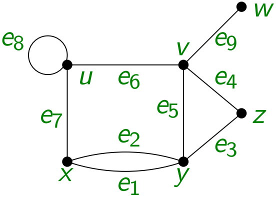
Este é o teorema mais importante do Universo!

Ok, estou exagerando para chamar sua atenção...

Este é um resultado básico, mas fundamental.

Outra prova (que é a mesma. . .)

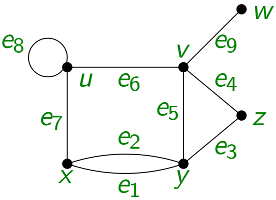
Outra prova (que é a mesma. . .)



$$\begin{array}{c|ccccccccc|}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \\
u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\
v & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
x & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
y & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
z & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Prova. Considere a matriz de incidência M_G de G.

Outra prova (que é a mesma. . .)

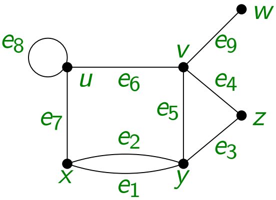


	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
u	0	0	0	0	0	1	1	2	0
v	0	0	0	1	1	1	0	0	1
w	0	0	0	0	0	0	0	0	1
x	1	1	0	0	0	0	1	0	0
y	1	1	1	0	1	0	0	0	0
z	0	0	1	1	0	0	0	0	0

Prova. Considere a matriz de incidência M_G de G.

Qual é a soma das entradas de uma linha v?

Outra prova (que é a mesma...)

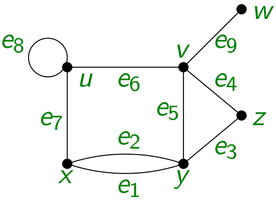


	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
u	0	0	0	0	0	1	1	2	0
v	0	0	0	1	1	1	0	0	1
w	0	0	0	0	0	0	0	0	1
x	1	1	0	0	0	0	1	0	0
y	1	1	1	0	1	0	0	0	0
z	0	0	1	1	0	0	0	0	0

Prova. Considere a matriz de incidência M_G de G.

Qual é a soma das entradas de uma linha v? $d_G(v)$

Outra prova (que é a mesma...)



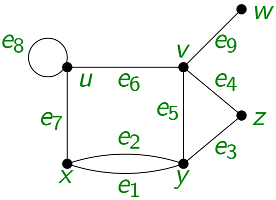
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
u	0	0	0	0	0	1	1	2	0
v	0	0	0	1	1	1	0	0	1
w	0	0	0	0	0	0	0	0	1
x	1	1	0	0	0	0	1	0	0
y	1	1	1	0	1	0	0	0	0
z	0	0	1	1	0	0	0	0	0

Prova. Considere a matriz de incidência M_G de G.

Qual é a soma das entradas de uma linha v? $d_G(v)$

Qual é a soma das entradas de uma coluna e?

Outra prova (que é a mesma...)



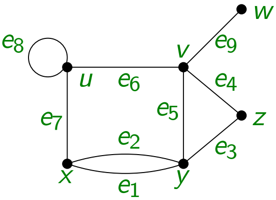
$$\begin{array}{c|ccccccccc|} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \\ \hline u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ v & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Prova. Considere a matriz de incidência M_G de G.

Qual é a soma das entradas de uma linha v? $d_G(v)$

Qual é a soma das entradas de uma coluna e? 2

Outra prova (que é a mesma. . .)



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
u	0	0	0	0	0	1	1	2	0
v	0	0	0	1	1	1	0	0	1
w	0	0	0	0	0	0	0	0	1
x	1	1	0	0	0	0	1	0	0
y	1	1	1	0	1	0	0	0	0
z	0	0	1	1	0	0	0	0	0

Prova. Considere a matriz de incidência M_G de G.

Qual é a soma das entradas de uma linha v? $d_G(v)$

Qual é a soma das entradas de uma coluna e? 2

Portanto, $\sum d_G(v) = 2|E|$. ∎

Uma observação fundamental

Uma observação fundamental

Teorema. Para todo grafo $G = (V, E)$ temos que

$$\sum d_G(v) = 2|E|.$$

Uma observação fundamental

Teorema. Para todo grafo $G = (V, E)$ temos que

$$\sum d_G(v) = 2|E|.$$

Corolário. Em todo grafo G, o número de vértices de grau ímpar é par. ■

Por quê?

Teorema. Para todo grafo $G = (V, E)$ temos que

$$\sum d_G(v) = 2|E|.$$

Corolário. Em todo grafo G, o número de vértices de grau ímpar é par. ■

Por quê?

Este é o corolário mais importante do Universo!

Uma observação fundamental

Teorema. Para todo grafo $G = (V, E)$ temos que

$$\sum d_G(v) = 2|E|.$$

Corolário. Em todo grafo G, o número de vértices de grau ímpar é par. ∎

Por quê?

Este é o corolário mais importante do Universo!

Ok, estou exagerando de novo...

Uma observação fundamental

Teorema. Para todo grafo $G = (V, E)$ temos que

$$\sum d_G(v) = 2|E|.$$

Corolário. Em todo grafo G, o número de vértices de grau ímpar é par. ■

Por quê?

Este é o corolário mais importante do Universo!

Ok, estou exagerando de novo...

Esta é uma observação simples, mas importante.

Adjacência/vizinhança

Adjacência/vizinhança

1. A vizinhança de um vértice u em um grafo G é definida por

$$N_G(u) := \{v \in V : uv \in E\}.$$

1. A vizinhança de um vértice u em um grafo G é definida por

$$N_G(u) := \{v \in V : uv \in E\}.$$

2. Na figura, $N_G(y) = \{v, x, z\}$ e $N_G(u) = \{u, v, x\}$.

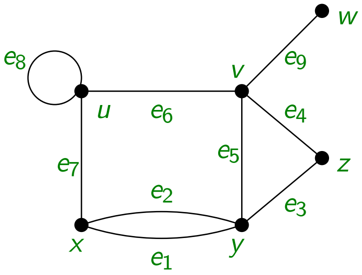


Figura: Desenho de um grafo G.

Adjacência/vizinhança

Observação. Se G é **simples**, então $d_G(u) = |N_G(u)|$ para todo $u \in V(G)$.

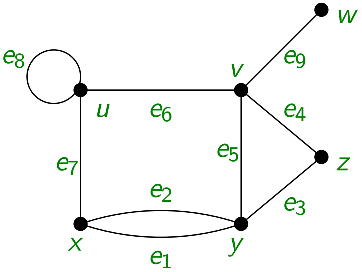
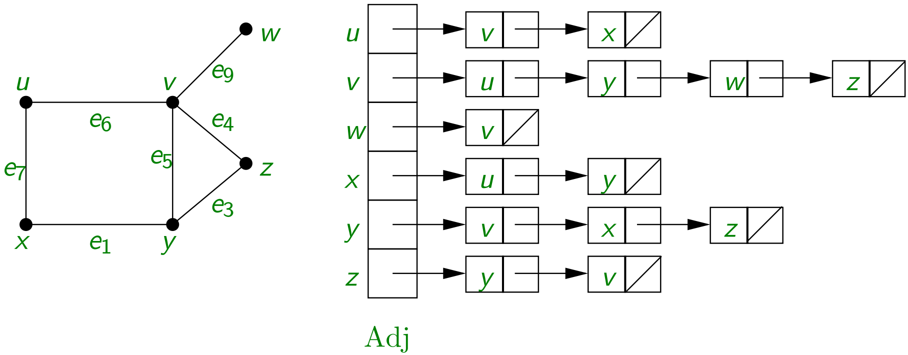


Figura: Desenhos de um grafo não-simples e um grafo simples.

Seja $G = (V, E)$ um grafo **simples**. A representação por listas de adjacências de G consiste em um vetor $\mathrm{Adj}[\ ]$ indexado por V tal que para cada $u \in V$, $\mathrm{Adj}[u]$ aponta para uma lista ligada contendo os vizinhos de u.



Notação para complexidade de algoritmos

- Veremos vários algoritmos em grafos neste curso.
- Quando analisarmos a complexidade de um algoritmo envolvendo um grafo $G = (V, E)$ usaremos V e E na notação assintótica, em vez de $|V|$ e $|E|$.

Notação para complexidade de algoritmos

- Veremos vários algoritmos em grafos neste curso.
- Quando analisarmos a complexidade de um algoritmo envolvendo um grafo $G = (V, E)$ usaremos V e E na notação assintótica, em vez de $|V|$ e $|E|$.

  Por exemplo, escrevemos $O(E^2 \lg V)$ em vez de $O(|E|^2 \lg |V|)$.

Matriz de adjacência versus Listas de adjacência

Qual é melhor?

Matriz de adjacência versus Listas de adjacência

Qual é melhor? **Depende**.

Matriz de adjacência versus Listas de adjacência

Qual é melhor? **Depende**.

- Matriz de adjacência: é possível verificar se ij é uma aresta de G em tempo constante.

Matriz de adjacência versus Listas de adjacência

Qual é melhor? **Depende**.

- Matriz de adjacência: é possível verificar se ij é uma aresta de G em tempo constante.
- Listas de adjacência: é possível descobrir os vizinhos de um dado vértice v (ou seja, listar $\mathrm{Adj}[v]$) em tempo $O(\mathrm{Adj}[v])$.

Matriz de adjacência versus Listas de adjacência

Qual é melhor? **Depende**.

- Matriz de adjacência: é possível verificar se ij é uma aresta de G em tempo constante.
- Listas de adjacência: é possível descobrir os vizinhos de um dado vértice v (ou seja, listar $\mathrm{Adj}[v]$) em tempo $O(\mathrm{Adj}[v])$.
- Matriz de adjacência: espaço $\Theta(V^2)$.
  Adequada a grafos densos ($|E| = \Theta(V^2)$).

Matriz de adjacência versus Listas de adjacência

Qual é melhor? **Depende**.

- Matriz de adjacência: é possível verificar se ij é uma aresta de G em tempo constante.
- Listas de adjacência: é possível descobrir os vizinhos de um dado vértice v (ou seja, listar $\mathrm{Adj}[v]$) em tempo $O(\mathrm{Adj}[v])$.
- Matriz de adjacência: espaço $\Theta(V^2)$.
  Adequada a grafos densos ($|E| = \Theta(V^2)$).
- Lista de adjacência: espaço $\Theta(V + E)$.
  Adequada a grafos esparsos ($|E| = \Theta(V)$).

Extensões

Extensões

- Há outras alternativas para representar grafos, mas matrizes e listas de adjacência são as mais usadas.

Extensões

- Há outras alternativas para representar grafos, mas matrizes e listas de adjacência são as mais usadas.
- Elas podem ser adaptadas para representar grafos ponderados, grafos com laços e arestas múltiplas, grafos com pesos nos vértices etc.

Extensões

- Há outras alternativas para representar grafos, mas matrizes e listas de adjacência são as mais usadas.
- Elas podem ser adaptadas para representar grafos ponderados, grafos com laços e arestas múltiplas, grafos com pesos nos vértices etc.
- Para determinados problemas é essencial ter estruturas de dados adicionais para melhorar a eficiência dos algoritmos.

Simplificando notação

Simplificando notação

1. Muitas vezes, quando estamos escrevendo ou lendo uma prova, o grafo G está claro dentro do contexto (por exemplo, não há outro grafo envolvido).

Simplificando notação

1. Muitas vezes, quando estamos escrevendo ou lendo uma prova, o grafo G está claro dentro do contexto (por exemplo, não há outro grafo envolvido).
2. Podemos então simplificar a notação e omitir o subscripto (ou similar) G de uma notação. Por exemplo, podemos escrever $d(v)$ e $N(v)$, em vez de $d_G(v)$ e $N_G(v)$.

Simplificando notação

1. Muitas vezes, quando estamos escrevendo ou lendo uma prova, o grafo G está claro dentro do contexto (por exemplo, não há outro grafo envolvido).
2. Podemos então simplificar a notação e omitir o subscripto (ou similar) G de uma notação. Por exemplo, podemos escrever $d(v)$ e $N(v)$, em vez de $d_G(v)$ e $N_G(v)$.
3. Quando há outros grafos em jogo, é necessário evitar ambiguidade e assim, é preferível escrever a notação completa.

Exercícios

Exercícios

Exercício. Seja G um grafo (X, Y)-bipartido. Mostre que

$$\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v).$$

Exercícios

Exercício. Seja G um grafo (X, Y)-bipartido. Mostre que

$$\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v).$$

Dica: $\sum_{v \in X} d(v)$ é igual a qual parâmetro de G?

Exercícios

Exercício. Seja G um grafo (X, Y)-bipartido. Mostre que

$$\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v).$$

Dica: $\sum_{v \in X} d(v)$ é igual a qual parâmetro de G?

Exercício. Seja $\mathcal{E}$ uma coleção de k-subconjuntos de um conjunto universo U. Para cada $u \in U$, denote por $t(u)$ o número de membros de $\mathcal{E}$ ao qual u pertence. Então

$$\sum_{u \in U} t(u) = ?$$

Observação: um k-conjunto é um conjunto de cardinalidade (tamanho) k.

Exercícios

Exercícios

Exercício. Mostre que em toda festa com pelo menos seis pessoas, uma das seguintes alternativas ocorre:

1. há três pessoas que se conhecem, ou
2. há três pessoas que não se conhecem.

Nesta questão, suponha que se A conhece B, então B também conhece A.

Exercícios

Exercício. Mostre que em toda festa com pelo menos seis pessoas, uma das seguintes alternativas ocorre:

1. há três pessoas que se conhecem, ou
2. há três pessoas que não se conhecem.

Nesta questão, suponha que se A conhece B, então B também conhece A.

Exercício. Considere um grupo S de $n \geq 4$ pessoas com a seguinte propriedade:

> *para todo subconjunto X de S com exatamente quatro pessoas, existe uma pessoa em X que conhece as demais pessoas de X.*

Mostre que existe uma pessoa em S que conhece todas as outras pessoas de S. Nesta questão, suponha que se A conhece B, então B também conhece A.

Complemento de um grafo

Complemento de um grafo

O complemento de um grafo G é o grafo $\overline{G}$ com mesmo conjunto de vértices tal que dois vértices são adjacentes em $\overline{G}$ se **não** são adjacentes em G.

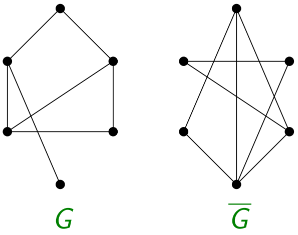


Figura: Um grafo G e seu complemento $\overline{G}$.

Complemento de um grafo

O complemento de um grafo G é o grafo $\overline{G}$ com mesmo conjunto de vértices tal que dois vértices são adjacentes em $\overline{G}$ se **não** são adjacentes em G.

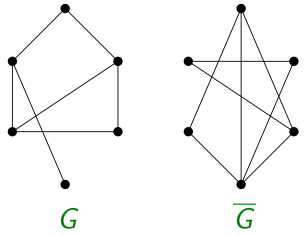


Figura: Um grafo G e seu complemento $\overline{G}$.

Qual é o grau de um vértice v em $\overline{G}$ em função de $n := n(G)$ e $d_G(v)$?

$d_{\overline{G}}(v) =$

Complemento de um grafo

O complemento de um grafo G é o grafo $\overline{G}$ com mesmo conjunto de vértices tal que dois vértices são adjacentes em $\overline{G}$ se **não** são adjacentes em G.

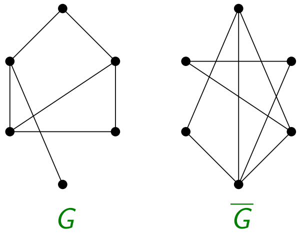


Figura: Um grafo G e seu complemento $\overline{G}$.

Qual é o grau de um vértice v em $\overline{G}$ em função de $n := n(G)$ e $d_G(v)$?

$d_{\overline{G}}(v) = n - 1 - d_G(v)$.

Grau mínimo e máximo

Grau mínimo e máximo

1. O grau mínimo de um grafo G, denotado por $\delta(G)$, é o menor valor dos graus dos vértices de G, ou seja,

$$\delta(G) := \min\{d(v) : v \in V(G)\}.$$

Grau mínimo e máximo

1. O grau mínimo de um grafo G, denotado por $\delta(G)$, é o menor valor dos graus dos vértices de G, ou seja,

$$\delta(G) := \min\{d(v) : v \in V(G)\}.$$

2. O grau máximo de um grafo G, denotado por $\Delta(G)$, é o maior valor dos graus dos vértices de G, ou seja,

$$\Delta(G) := \max\{d(v) : v \in V(G)\}.$$

Grau mínimo e máximo

1. O grau mínimo de um grafo G, denotado por $\delta(G)$, é o menor valor dos graus dos vértices de G, ou seja,

$$\delta(G) := \min\{d(v) : v \in V(G)\}.$$

2. O grau máximo de um grafo G, denotado por $\Delta(G)$, é o maior valor dos graus dos vértices de G, ou seja,

$$\Delta(G) := \max\{d(v) : v \in V(G)\}.$$

3. O grau médio (average degree) de um grafo $G = (V, E)$ é

$$\mathrm{ad}(G) := \sum d(v)/n = 2m/n \; (= 2|E|/|V|).$$

Grau mínimo e máximo

1. O grau mínimo de um grafo G, denotado por $\delta(G)$, é o menor valor dos graus dos vértices de G, ou seja,

$$\delta(G) := \min\{d(v) : v \in V(G)\}.$$

2. O grau máximo de um grafo G, denotado por $\Delta(G)$, é o maior valor dos graus dos vértices de G, ou seja,

$$\Delta(G) := \max\{d(v) : v \in V(G)\}.$$

3. O grau médio (average degree) de um grafo $G = (V, E)$ é

$$\mathrm{ad}(G) := \sum d(v)/n = 2m/n \; (= 2|E|/|V|).$$

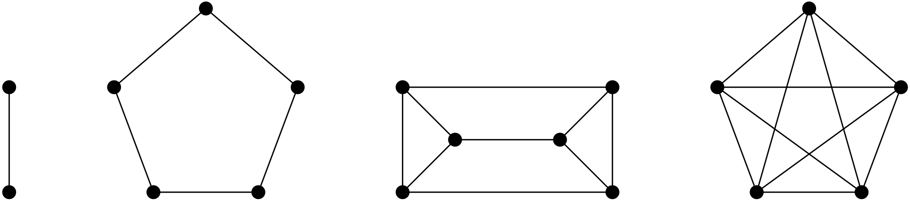
Proposição. Para todo grafo não-nulo G, $\delta(G) \leq \mathrm{ad}(G) \leq \Delta(G)$. ■

Grafos regulares

Grafos regulares

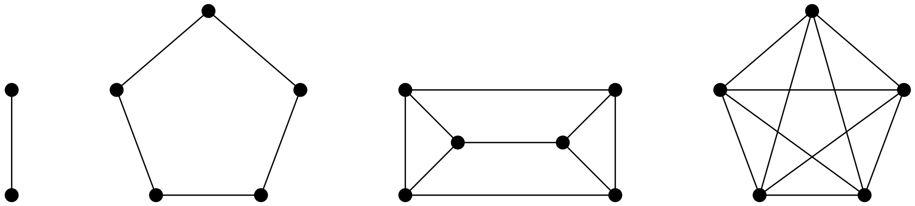
1. Um vértice é isolado se tem grau zero.

1. Um vértice é isolado se tem grau zero.
2. Um grafo G é k-regular se $d_G(v) = k$ para todo $v \in V(G)$.



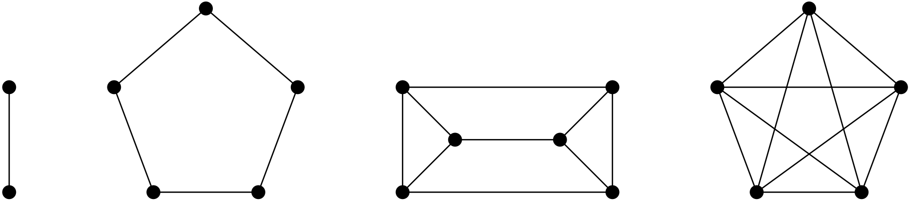
Grafos regulares

1. Um vértice é isolado se tem grau zero.
2. Um grafo G é k-regular se $d_G(v) = k$ para todo $v \in V(G)$.
3. Um grafo G é regular se for k-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.



Grafos regulares

1. Um vértice é isolado se tem grau zero.
2. Um grafo G é k-regular se $d_G(v) = k$ para todo $v \in V(G)$.
3. Um grafo G é regular se for k-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.
4. Um grafo cúbico é um grafo 3-regular.



Grafos regulares

1. Um vértice é isolado se tem grau zero.
2. Um grafo G é k-regular se $d_G(v) = k$ para todo $v \in V(G)$.
3. Um grafo G é regular se for k-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.
4. Um grafo cúbico é um grafo 3-regular.

Grafos regulares

1. Um vértice é isolado se tem grau zero.
2. Um grafo G é k-regular se $d_G(v) = k$ para todo $v \in V(G)$.
3. Um grafo G é regular se for k-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.
4. Um grafo cúbico é um grafo 3-regular.

Exercício. Descreva todos os grafos k-regulares para $k = 0, 1, 2$. Note que o grafo não precisa ser conexo (veja o próximo slide).

Grafos regulares

1. Um vértice é isolado se tem grau zero.
2. Um grafo G é k-regular se $d_G(v) = k$ para todo $v \in V(G)$.
3. Um grafo G é regular se for k-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.
4. Um grafo cúbico é um grafo 3-regular.

Exercício. Descreva todos os grafos k-regulares para $k = 0, 1, 2$. Note que o grafo não precisa ser conexo (veja o próximo slide).

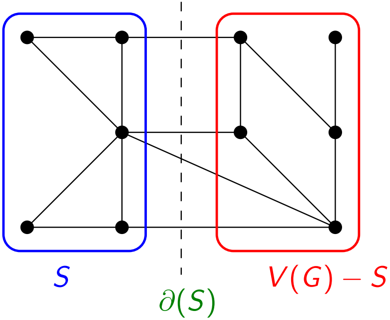
Exercício. Desenhe todos os grafos simples cúbicos com no máximo seis vértices.

Cortes

Sejam G um grafo e $S \subseteq V(G)$. Denotamos por $\partial(S)$ o conjunto das arestas de G com um extremo em S e outro em $V(G) - S$. Note que $\partial(\emptyset) = \partial(V(G) = \emptyset$.

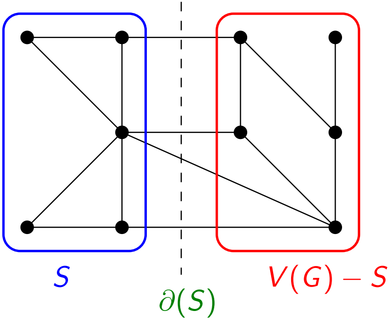
Cortes

Sejam G um grafo e $S \subseteq V(G)$. Denotamos por $\partial(S)$ o conjunto das arestas de G com um extremo em S e outro em $V(G) - S$. Note que $\partial(\emptyset) = \partial(V(G) = \emptyset$.



Cortes

Sejam G um grafo e $S \subseteq V(G)$. Denotamos por $\partial(S)$ o conjunto das arestas de G com um extremo em S e outro em $V(G) - S$. Note que $\partial(\emptyset) = \partial(V(G) = \emptyset$.



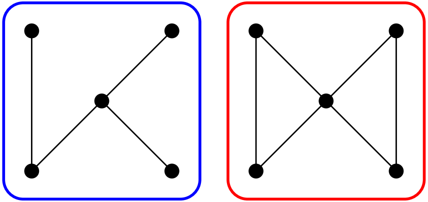
Quando S consiste de um único vértice v, dizemos que o corte é trivial e denotamos $\partial(v)$ em vez de $\partial(\{v\})$.

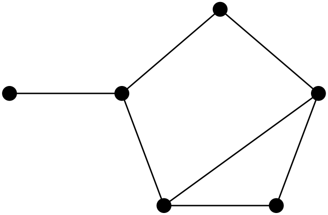
Grafos conexos e desconexos

Um grafo G é desconexo se existe $\emptyset \neq S \subset V(G)$ tal que $\partial(S) = \emptyset$.

Grafos conexos e desconexos

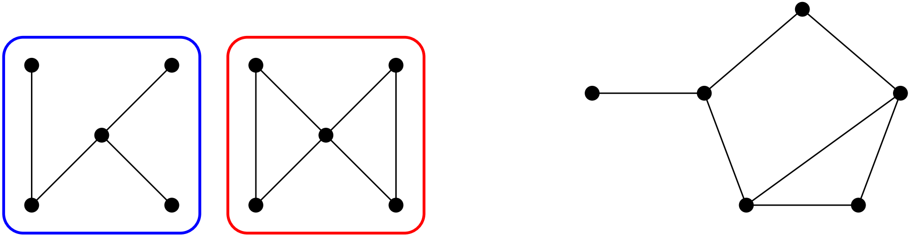
Um grafo G é desconexo se existe $\emptyset \neq S \subset V(G)$ tal que $\partial(S) = \emptyset$.





Grafos conexos e desconexos

Um grafo G é desconexo se existe $\emptyset \neq S \subset V(G)$ tal que $\partial(S) = \emptyset$.



Um grafo é conexo se não é desconexo. Depois veremos uma definição alternativa de conexidade.

Quiz

Seja G um grafo.

Seja $\emptyset \neq S \subset V(G)$. É verdade que $\partial(S) = \partial(V(G) - S)$?

Quiz

Seja G um grafo.

Seja $\emptyset \neq S \subset V(G)$. É verdade que $\partial(S) = \partial(V(G) - S)$? SIM.

Quiz

Seja G um grafo.

Seja $\emptyset \neq S \subset V(G)$. É verdade que $\partial(S) = \partial(V(G) - S)$? SIM.

Se G é bipartido, então existe $S \subseteq V(G)$ tal que $\partial(S) = E(G)$?

Quiz

Seja G um grafo.

Seja $\emptyset \neq S \subset V(G)$. É verdade que $\partial(S) = \partial(V(G) - S)$? SIM.

Se G é bipartido, então existe $S \subseteq V(G)$ tal que $\partial(S) = E(G)$? SIM.

Quiz

Seja G um grafo.

Seja $\emptyset \neq S \subset V(G)$. É verdade que $\partial(S) = \partial(V(G) - S)$? SIM.

Se G é bipartido, então existe $S \subseteq V(G)$ tal que $\partial(S) = E(G)$? SIM.

Se existe $S \subseteq V(G)$ tal que $\partial(S) = E(G)$, então G é bipartido?

Quiz

Seja G um grafo.

Seja $\emptyset \neq S \subset V(G)$. É verdade que $\partial(S) = \partial(V(G) - S)$? SIM.

Se G é bipartido, então existe $S \subseteq V(G)$ tal que $\partial(S) = E(G)$? SIM.

Se existe $S \subseteq V(G)$ tal que $\partial(S) = E(G)$, então G é bipartido? SIM.

Construindo grafos

A união de dois grafos G e H, denotada por $G \cup H$, é o grafo com conjunto de vértices $V(G) \cup V(H)$ e conjunto de arestas $E(G) \cup E(H)$.

Construindo grafos

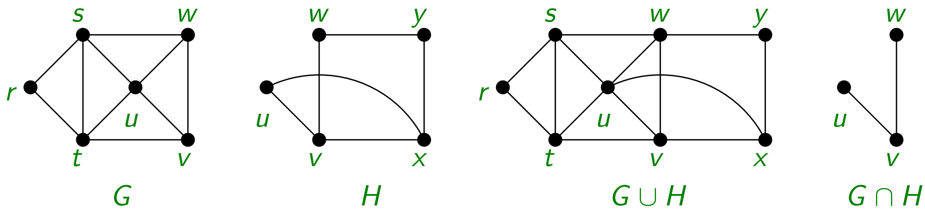
A união de dois grafos G e H, denotada por $G \cup H$, é o grafo com conjunto de vértices $V(G) \cup V(H)$ e conjunto de arestas $E(G) \cup E(H)$.

A interseção de dois grafos G e H, denotada por $G \cap H$, é o grafo com conjunto de vértices $V(G) \cap V(H)$ e conjunto de arestas $E(G) \cap E(H)$.

Construindo grafos

A união de dois grafos G e H, denotada por $G \cup H$, é o grafo com conjunto de vértices $V(G) \cup V(H)$ e conjunto de arestas $E(G) \cup E(H)$.

A interseção de dois grafos G e H, denotada por $G \cap H$, é o grafo com conjunto de vértices $V(G) \cap V(H)$ e conjunto de arestas $E(G) \cap E(H)$.



Construindo grafos

Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de conjuntos. O grafo interseção de $\mathcal{C}$ é o grafo com conjunto de vértices $\mathcal{C}$ tal que dois vértices (conjuntos) X e Y de $\mathcal{C}$ são adjacentes se $X \cap Y \neq \emptyset$.

Construindo grafos

Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de conjuntos. O grafo interseção de $\mathcal{C}$ é o grafo com conjunto de vértices $\mathcal{C}$ tal que dois vértices (conjuntos) X e Y de $\mathcal{C}$ são adjacentes se $X \cap Y \neq \emptyset$.

Eis um exemplo famoso.

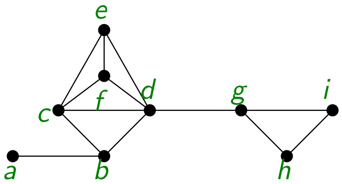
Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de intervalos fechados da reta real. O grafo-interseção de $\mathcal{C}$ é chamado grafo intervalo de $\mathcal{C}$.

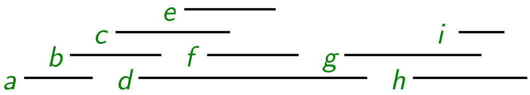
Construindo grafos

Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de conjuntos. O grafo interseção de $\mathcal{C}$ é o grafo com conjunto de vértices $\mathcal{C}$ tal que dois vértices (conjuntos) X e Y de $\mathcal{C}$ são adjacentes se $X \cap Y \neq \emptyset$.

Eis um exemplo famoso.

Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de intervalos fechados da reta real. O grafo-interseção de $\mathcal{C}$ é chamado grafo intervalo de $\mathcal{C}$.





Construindo grafos

Podemos combinar construções para obter novos grafos. Por exemplo, o **complemento** do grafo interseção de $\mathcal{C}$ é o grafo com conjunto de vértices $\mathcal{C}$ tal que dois vértices (conjuntos) X e Y são adjacentes se $X \cap Y = \emptyset$.

Construindo grafos

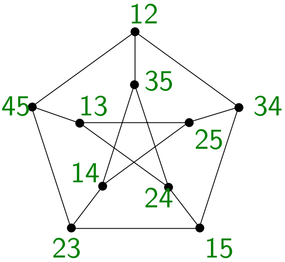
Podemos combinar construções para obter novos grafos. Por exemplo, o **complemento** do grafo interseção de $\mathcal{C}$ é o grafo com conjunto de vértices $\mathcal{C}$ tal que dois vértices (conjuntos) X e Y são adjacentes se $X \cap Y = \emptyset$.

Exemplo. Seja $\mathcal{C}$ a coleção de todos 2-subconjuntos de um conjunto de tamanho cinco, digamos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. O complemento do grafo interseção de $\mathcal{C}$ é chamado grafo de Petersen.

Construindo grafos

Podemos combinar construções para obter novos grafos. Por exemplo, o **complemento** do grafo interseção de $\mathcal{C}$ é o grafo com conjunto de vértices $\mathcal{C}$ tal que dois vértices (conjuntos) X e Y são adjacentes se $X \cap Y = \emptyset$.

Exemplo. Seja $\mathcal{C}$ a coleção de todos 2-subconjuntos de um conjunto de tamanho cinco, digamos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. O complemento do grafo interseção de $\mathcal{C}$ é chamado grafo de Petersen.



Letras usuais em grafos

- grafos: G, F, H,
- vértices: $r, s, t, u, v, w, x, y, z$,
- arestas: e, f, a,
- inteiros: i, j, k, ℓ, r, s, t,
- n (m): número de vértices (arestas) de um grafo,
- conjuntos: R, S, T, X, Y, U, V, Z (o importante é que sejam letras maiúsculas),
- P, Q, R, W para caminhos, C, Q, R para circuitos, W para passeios (*walk*), T para árvores (*tree*),
- letras gregas: $\psi, \delta, \alpha, \chi, \omega, \lambda, \kappa, \tau, \mu$ etc. (Google: latex greek letters)

É claro que você pode usar outras letras, mas se as indicadas acima estiverem disponíveis, recomendo usá-las.

Referências

Para a preparação destes slides foram usadas as seguintes referências. BM76 e West96 são livros-texto mais básicos. BM08 é um pouco mais avançado.

BM76 Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., *Graph Theory with Applications*, American Elsevier, New York, 1976.

BM08 Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., *Graph Theory*, Springer, 2008.

West96 West, D. B., *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall,1996.