MC558 — Análise de Algoritmos II

Cid C. de Souza Cândida N. da Silva Orlando Lee

5 de março de 2023

Antes de mais nada...

- Uma versão anterior deste conjunto de slides foi preparada por Cid Carvalho de Souza e Cândida Nunes da Silva para uma instância anterior desta disciplina.
- O que vocês tem em mãos é uma versão modificada preparada para atender a meus gostos.
- Nunca é demais enfatizar que o material é apenas um guia e não deve ser usado como única fonte de estudo. Para isso consultem a bibliografia (em especial o CLR ou CLRS).

Orlando Lee

Agradecimentos (Cid e Cândida)

- Várias pessoas contribuíram direta ou indiretamente com a preparação deste material.
- Algumas destas pessoas cederam gentilmente seus arquivos digitais enquanto outras cederam gentilmente o seu tempo fazendo correções e dando sugestões.
- Uma lista destes "colaboradores" (em ordem alfabética) é dada abaixo:
  - Célia Picinin de Mello
  - José Coelho de Pina
  - Orlando Lee
  - Paulo Feofiloff
  - Pedro Rezende
  - Ricardo Dahab
  - Zanoni Dias

Isomorfismo entre grafos

Isomorfismo entre grafos

Dois grafos G e H são iguais ou idênticos se

- $V(G) = V(H)$,
- $E(G) = E(H)$, e
- $\psi_G = \psi_H$.

Isomorfismo entre grafos

Dois grafos G e H são iguais ou idênticos se

- $V(G) = V(H)$,
- $E(G) = E(H)$, e
- $\psi_G = \psi_H$.

Entretanto, há grafos que não são iguais, mas são fundamentalmente o mesmo objeto.

Isomorfismo entre grafos

Dois grafos G e H são iguais ou idênticos se

- $V(G) = V(H)$,
- $E(G) = E(H)$, e
- $\psi_G = \psi_H$.

Entretanto, há grafos que não são iguais, mas são fundamentalmente o mesmo objeto.

O conceito de isomorfismo entre grafos formaliza esta intuição.

Isomorfismo entre grafos

Isomorfismo entre grafos

- Os grafos G e H são idênticos?

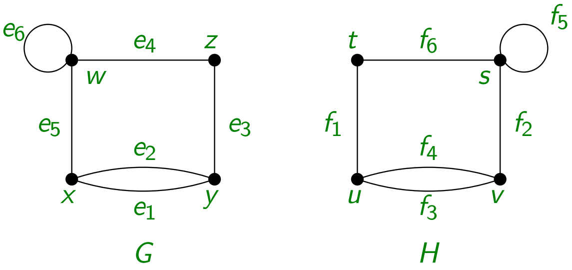


Figura: Grafos isomorfos G e H.

Isomorfismo entre grafos

- Os grafos G e H são idênticos? **NÃO!**

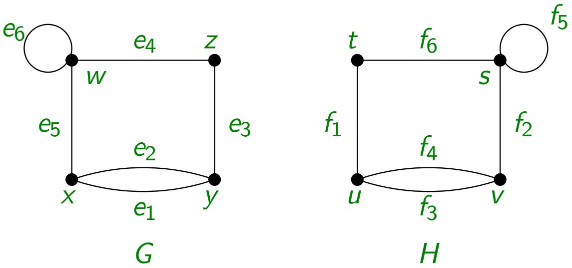


Figura: Grafos isomorfos G e H.

Isomorfismo entre grafos

- Os grafos G e H são idênticos? **NÃO!**
- Mas eles certamente têm a mesma "estrutura" ou "forma".

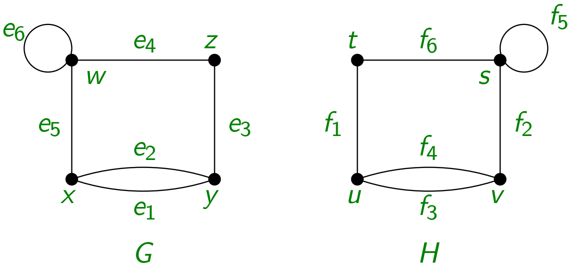


Figura: Grafos isomorfos G e H.

Isomorfismo entre grafos

- Os grafos G e H são idênticos? **NÃO!**
- Mas eles certamente têm a mesma "estrutura" ou "forma".
- Como formalizamos esta noção intuitiva?

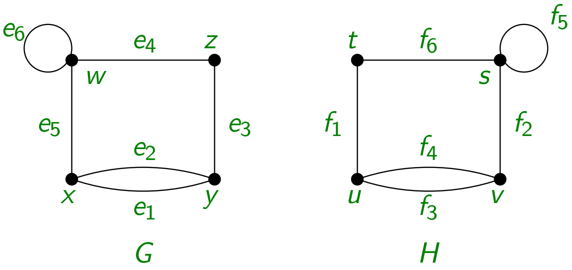


Figura: Grafos isomorfos G e H.

Isomorfismo entre grafos

Isomorfismo entre grafos

- Dois grafos G e H são isomorfos, denotado por $G \cong H$, se existem bijeções $\theta : V(G) \mapsto V(H)$ e $\phi : E(G) \mapsto E(H)$ tais que

  $\psi_G(e) = \{u, v\}$ se, e somente se, $\psi_H(\phi(e)) = \{\theta(u), \theta(v)\}$,

  para todo $u, v \in V(G)$ e todo $e \in E(G)$.

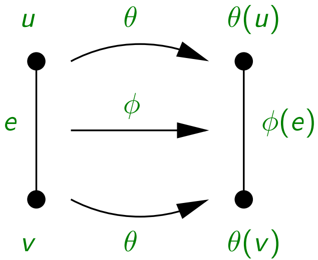


Figura: Isomorfismo preserva adjacências.

Isomorfismo entre grafos

- Dois grafos G e H são isomorfos, denotado por $G \cong H$, se existem bijeções $\theta : V(G) \mapsto V(H)$ e $\phi : E(G) \mapsto E(H)$ tais que

  $$\psi_G(e) = \{u, v\} \text{ se, e somente se, } \psi_H(\phi(e)) = \{\theta(u), \theta(v)\},$$

  para todo $u, v \in V(G)$ e todo $e \in E(G)$.
- Um tal par de funções é chamado isomorfismo entre G e H.

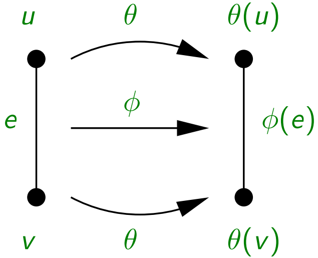


Figura: Isomorfismo preserva adjacências.

Isomorfismo entre grafos

Isomorfismo entre grafos

- Isomorfismo significa "forma igual".

Isomorfismo entre grafos

- Isomorfismo significa "forma igual".
- Não faz sentido falar apenas isomorfismo, sem dizer quais são os objetos envolvidos.

Isomorfismo entre grafos

- Isomorfismo significa "forma igual".
- Não faz sentido falar apenas isomorfismo, sem dizer quais são os objetos envolvidos.
- Em matemática temos isomorfismo entre: grafos, grupos, anéis etc.

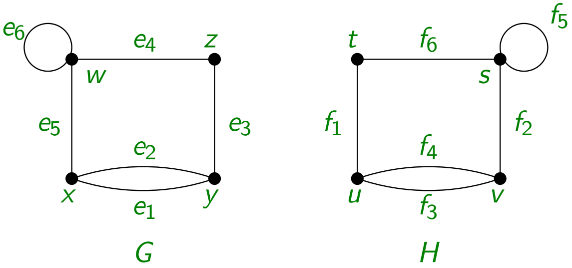
Isomorfismo entre grafos

- Isomorfismo significa "forma igual".
- Não faz sentido falar apenas isomorfismo, sem dizer quais são os objetos envolvidos.
- Em matemática temos isomorfismo entre: grafos, grupos, anéis etc.
- Cada tipo tem uma definição específica.

Isomorfismo entre grafos

Isomorfismo entre grafos

- Para mostrar que dois grafos são isomorfos, temos que exibir um isomorfismo entre eles.

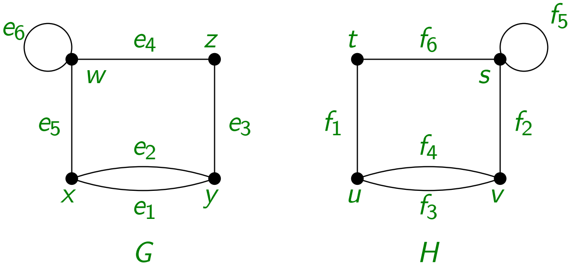


Isomorfismo entre grafos

- Para mostrar que dois grafos são isomorfos, temos que exibir um isomorfismo entre eles.
- O par de funções (θ, ϕ) definido por

$$\theta := \begin{pmatrix} x & y & z & w \\ v & u & t & s \end{pmatrix} \quad \phi := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ f_3 & f_4 & f_1 & f_6 & f_2 & f_5 \end{pmatrix}$$

é um isomorfismo entre os grafos G e H da figura.



Isomorfismo entre grafos simples

Isomorfismo entre grafos simples

- Quando G e H são simples, há uma forma mais compacta de exibir um isomorfismo (pois ϕ é completamente determinada por θ).

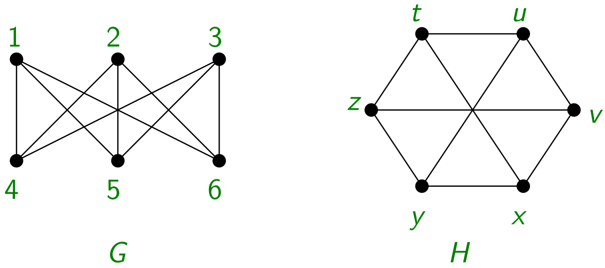


Figura: Grafos simples isomorfos G e H.

Isomorfismo entre grafos simples

- Quando G e H são simples, há uma forma mais compacta de exibir um isomorfismo (pois ϕ é completamente determinada por θ).
- Um isomorfismo entre dois grafos simples G e H é uma bijeção $\theta : V(G) \mapsto V(H)$ tal que u e v são adjacentes em G se, e somente se, $\theta(u)$ e $\theta(v)$ são adjacentes em H.

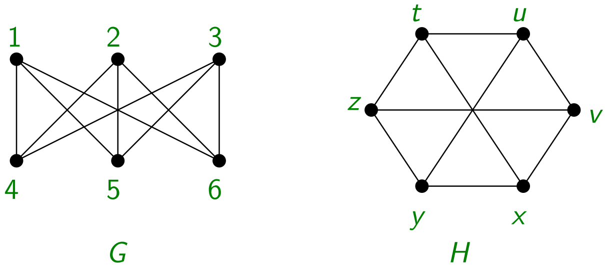


Figura: Grafos simples isomorfos G e H.

Isomorfismo entre grafos simples

- Quando G e H são simples, há uma forma mais compacta de exibir um isomorfismo (pois ϕ é completamente determinada por θ).
- Um isomorfismo entre dois grafos simples G e H é uma bijeção $\theta : V(G) \mapsto V(H)$ tal que u e v são adjacentes em G se, e somente se, $\theta(u)$ e $\theta(v)$ são adjacentes em H.
- Dizemos que θ preserva adjacências.

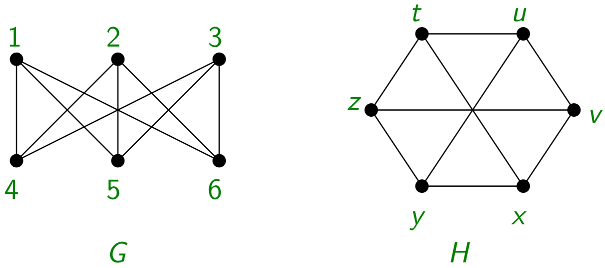


Figura: Grafos simples isomorfos G e H.

Isomorfismo entre grafos simples

Isomorfismo entre grafos simples

- As funções θ e θ' dadas por

$$\theta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ t & v & y & x & u & z \end{pmatrix} \quad \theta' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ u & x & z & y & t & v \end{pmatrix}.$$

são exemplos de isomorfismos entre G e H.

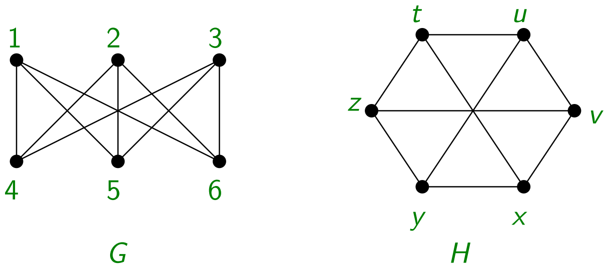


Figura: Grafos simples isomorfos G e H.

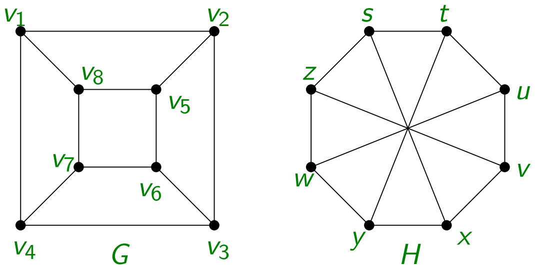
Isomorfismo entre grafos

Isomorfismo entre grafos

- Dois grafos isomorfos têm o mesmo número de vértices e arestas, mas a recíproca não é verdadeira.

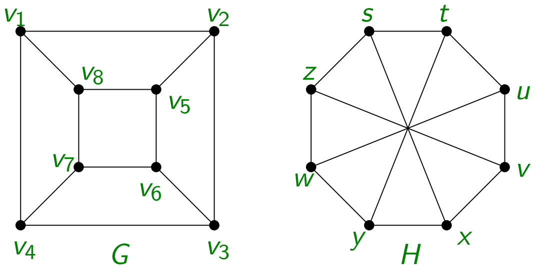
Isomorfismo entre grafos

- Dois grafos isomorfos têm o mesmo número de vértices e arestas, mas a recíproca não é verdadeira.
- Os grafos G e H da figura **não** são isomorfos.



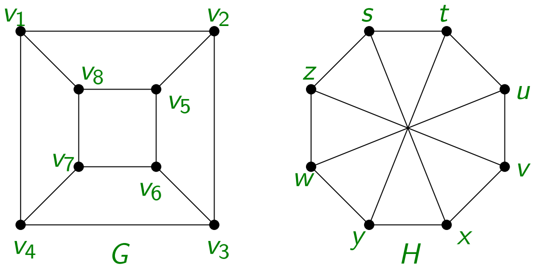
Isomorfismo entre grafos

- Dois grafos isomorfos têm o mesmo número de vértices e arestas, mas a recíproca não é verdadeira.
- Os grafos G e H da figura **não** são isomorfos. Note que o conjunto $\{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ é independente em G.



Isomorfismo entre grafos

- Dois grafos isomorfos têm o mesmo número de vértices e arestas, mas a recíproca não é verdadeira.
- Os grafos G e H da figura **não** são isomorfos. Note que o conjunto $\{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ é independente em G.
- Se existisse um isomorfismo θ entre G e H, então o conjunto $\{\theta(v_1), \theta(v_3), \theta(v_5), \theta(v_7)\}$ deveria ser independente em H. Mas H não possui nenhum 4-conjunto independente. Logo, $G \ncong H$.



Isomorfismo entre grafos

Isomorfismo entre grafos

- Grafos isomorfos são idênticos ou diferem apenas nos nomes dos seus vértices e arestas e assim, têm a mesma "estrutura".

Isomorfismo entre grafos

- Grafos isomorfos são idênticos ou diferem apenas nos nomes dos seus vértices e arestas e assim, têm a mesma "estrutura".
- Eles diferem apenas nos rótulos (nomes) dos vértices e arestas.

Isomorfismo entre grafos

- Grafos isomorfos são idênticos ou diferem apenas nos nomes dos seus vértices e arestas e assim, têm a mesma "estrutura".
- Eles diferem apenas nos rótulos (nomes) dos vértices e arestas.
- Se um grafo G tem uma certa propriedade estrutural, então todo grafo isomorfo a G também tem a mesma propriedade.

Isomorfismo entre grafos

- Grafos isomorfos são idênticos ou diferem apenas nos nomes dos seus vértices e arestas e assim, têm a mesma "estrutura".
- Eles diferem apenas nos rótulos (nomes) dos vértices e arestas.
- Se um grafo G tem uma certa propriedade estrutural, então todo grafo isomorfo a G também tem a mesma propriedade.
- Isomorfismo é um exemplo clássico de relação de equivalência.

Relação de equivalência

Relação de equivalência

- Uma relação sobre um conjunto S é uma coleção $\mathcal{R}$ de pares ordenados de elementos de S, i.e., $\mathcal{R} \subseteq S \times S$.

Relação de equivalência

- Uma relação sobre um conjunto S é uma coleção $\mathcal{R}$ de pares ordenados de elementos de S, i.e., $\mathcal{R} \subseteq S \times S$.
- Pense que um par (x, y) pertence a $\mathcal{R}$ se x é "relacionado" a y através de $\mathcal{R}$.

Relação de equivalência

- Uma relação sobre um conjunto S é uma coleção $\mathcal{R}$ de pares ordenados de elementos de S, i.e., $\mathcal{R} \subseteq S \times S$.
- Pense que um par (x, y) pertence a $\mathcal{R}$ se x é "relacionado" a y através de $\mathcal{R}$.
- Por exemplo, seja $\mathcal{R} := \{(x, y) : x \text{ divide } y,\ x, y \in \mathbb{Z}\}$.

Relação de equivalência

- Uma relação sobre um conjunto S é uma coleção $\mathcal{R}$ de pares ordenados de elementos de S, i.e., $\mathcal{R} \subseteq S \times S$.
- Pense que um par (x, y) pertence a $\mathcal{R}$ se x é "relacionado" a y através de $\mathcal{R}$.
- Por exemplo, seja $\mathcal{R} := \{(x, y) : x \text{ divide } y,\ x, y \in \mathbb{Z}\}$.
- Em geral, denotamos uma relação como um par $(S, \mathcal{R})$.

Exemplos de relação de equivalência

Exemplos de relação de equivalência

Uma relação de equivalência é uma relação $(S, \mathcal{R})$ que satisfaz:

1. Reflexividade: $(x, x) \in \mathcal{R}$, para todo $x \in S$;
2. Simetria: se $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $(y, x) \in \mathcal{R}$, para todo $x, y \in S$;
3. Transitividade: se $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$, então $(x, z) \in \mathcal{R}$, para todo $x, y, z \in S$.

Exemplos de relação de equivalência

Uma relação de equivalência é uma relação $(S, \mathcal{R})$ que satisfaz:

1. Reflexividade: $(x, x) \in \mathcal{R}$, para todo $x \in S$;
2. Simetria: se $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $(y, x) \in \mathcal{R}$, para todo $x, y \in S$;
3. Transitividade: se $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$, então $(x, z) \in \mathcal{R}$, para todo $x, y, z \in S$.

Exemplo:

Seja $\mathcal{T}$ o conjunto de todos os triângulos no plano.

$$\mathcal{R} := \{(T_1, T_2) : T_1 \text{ é semelhante a } T_2,\ T_1, T_2 \in \mathcal{T}\}$$

é uma relação de equivalência sobre $\mathcal{T}$.

Exemplos de relação de equivalência

Uma relação de equivalência é uma relação $(S, \mathcal{R})$ que satisfaz:

1. Reflexividade: $(x, x) \in \mathcal{R}$, para todo $x \in S$;
2. Simetria: se $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $(y, x) \in \mathcal{R}$, para todo $x, y \in S$;
3. Transitividade: se $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$, então $(x, z) \in \mathcal{R}$, para todo $x, y, z \in S$.

Exemplo:

Exemplos de relação de equivalência

Uma relação de equivalência é uma relação $(S, \mathcal{R})$ que satisfaz:

1. Reflexividade: $(x, x) \in \mathcal{R}$, para todo $x \in S$;
2. Simetria: se $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $(y, x) \in \mathcal{R}$, para todo $x, y \in S$;
3. Transitividade: se $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$, então $(x, z) \in \mathcal{R}$, para todo $x, y, z \in S$.

Exemplo:

Seja $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

$\mathcal{R} := \{(x, y) : x \bmod n = y \bmod n,\ x, y \in \mathbb{Z}\}$

é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}$.

Exemplos de relação de equivalência

Uma relação de equivalência é uma relação $(S, \mathcal{R})$ que satisfaz:

1. Reflexividade: $(x, x) \in \mathcal{R}$, para todo $x \in S$;
2. Simetria: se $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $(y, x) \in \mathcal{R}$, para todo $x, y \in S$;
3. Transitividade: se $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$, então $(x, z) \in \mathcal{R}$, para todo $x, y, z \in S$.

Exemplo:

Exemplos de relação de equivalência

Uma relação de equivalência é uma relação $(S, \mathcal{R})$ que satisfaz:

1. Reflexividade: $(x, x) \in \mathcal{R}$, para todo $x \in S$;
2. Simetria: se $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $(y, x) \in \mathcal{R}$, para todo $x, y \in S$;
3. Transitividade: se $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$, então $(x, z) \in \mathcal{R}$, para todo $x, y, z \in S$.

Exemplo:

Seja $\mathcal{G}$ o conjunto de todos os grafos.

$$\mathcal{R} := \{(G, H) : G \cong H,\ G, H \in \mathcal{G}\}$$

é uma relação de equivalência sobre $\mathcal{G}$.

Relação de equivalência

Relação de equivalência

Uma relação de equivalência é uma relação $(S, \mathcal{R})$ que satisfaz:

1. Reflexividade: $(x, x) \in \mathcal{R}$, para todo $x \in S$;
2. Simetria: se $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $(y, x) \in \mathcal{R}$, para todo $x, y \in S$;
3. Transitividade: se $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$, então $(x, z) \in \mathcal{R}$, para todo $x, y, z \in S$.

Relação de equivalência

Uma relação de equivalência é uma relação $(S, \mathcal{R})$ que satisfaz:

1. Reflexividade: $(x, x) \in \mathcal{R}$, para todo $x \in S$;
2. Simetria: se $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $(y, x) \in \mathcal{R}$, para todo $x, y \in S$;
3. Transitividade: se $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$, então $(x, z) \in \mathcal{R}$, para todo $x, y, z \in S$.

Uma classe de equivalência de $(S, \mathcal{R})$ é um subconjunto não-vazio C de S tal que se $x \in C$ e $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $y \in C$.

Relação de equivalência

Uma relação de equivalência é uma relação $(S, \mathcal{R})$ que satisfaz:

1. Reflexividade: $(x, x) \in \mathcal{R}$, para todo $x \in S$;
2. Simetria: se $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $(y, x) \in \mathcal{R}$, para todo $x, y \in S$;
3. Transitividade: se $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$, então $(x, z) \in \mathcal{R}$, para todo $x, y, z \in S$.

Uma classe de equivalência de $(S, \mathcal{R})$ é um subconjunto não-vazio C de S tal que se $x \in C$ e $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $y \in C$.

É fácil ver que $\mathcal{R}$ induz uma partição de S em classes de equivalência.

Classes de isomorfismo

Classes de isomorfismo

- Considere a relação de equivalência definida por isomorfismo de grafos:

  $\mathcal{R} := \{(G, H) : G \cong H,\ G, H \in \mathcal{G}\}$.

Classes de isomorfismo

- Considere a relação de equivalência definida por isomorfismo de grafos:

  $\mathcal{R} := \{(G, H) : G \cong H,\ G, H \in \mathcal{G}\}.$

- Uma classe de isomorfismo de grafos é uma classe de equivalência de $\mathcal{R}$.

Classes de isomorfismo

- Considere a relação de equivalência definida por isomorfismo de grafos:

  $\mathcal{R} := \{(G, H) : G \cong H,\ G, H \in \mathcal{G}\}$.

- Uma classe de isomorfismo de grafos é uma classe de equivalência de $\mathcal{R}$.
- Quando estudamos um grafo G, fixamos seu conjunto de vértices. Entretanto, os resultados estruturais que obtemos para G também valem para qualquer grafo isomorfo a G.

Classes de isomorfismo

- Considere a relação de equivalência definida por isomorfismo de grafos:

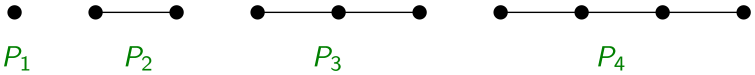
  $\mathcal{R} := \{(G, H) : G \cong H,\ G, H \in \mathcal{G}\}$.

- Uma classe de isomorfismo de grafos é uma classe de equivalência de $\mathcal{R}$.
- Quando estudamos um grafo G, fixamos seu conjunto de vértices. Entretanto, os resultados estruturais que obtemos para G também valem para qualquer grafo isomorfo a G.
- Usamos o termo grafo não-rotulado para indicar um representante qualquer de uma classe de isomorfismo.

Classes de isomorfismo

Classes de isomorfismo

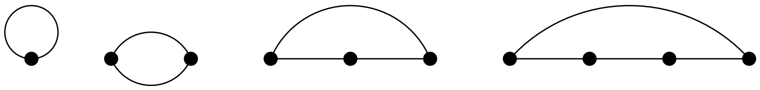
A menos de isomorfismo, existe um único caminho de ordem n, denotado por P_n.



Classes de isomorfismo

Classes de isomorfismo

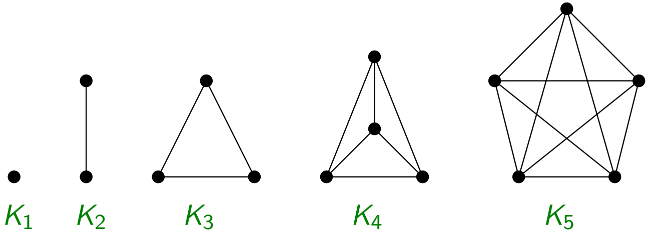
A menos de isomorfismo, existe um único ciclo de ordem n, denotado por C_n.



C_1 C_2 C_3 C_4

Classes de isomorfismo

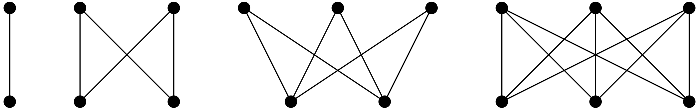
A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo de ordem n, denotado por K_n.



Classes de isomorfismo

Classes de isomorfismo

A menos de isomorfismo, existe um único grafo bipartido completo com partes de tamanho r e s, denotado por $K_{r,s}$.



$K_{1,1}$ $K_{2,2}$ $K_{2,3}$ $K_{3,3}$

Testando isomorfismo computacionalmente

Testando isomorfismo computacionalmente

- Considere o seguinte problema: dados dois grafos (simples) G e H, decidir se eles são isomorfos e exibir um isomorfismo, caso exista.

Testando isomorfismo computacionalmente

- Considere o seguinte problema: dados dois grafos (simples) G e H, decidir se eles são isomorfos e exibir um isomorfismo, caso exista.
- Não se conhece um algoritmo eficiente (polinomial) para o problema. Também não se sabe se o problema é NP-difícil.

Testando isomorfismo computacionalmente

- Considere o seguinte problema: dados dois grafos (simples) G e H, decidir se eles são isomorfos e exibir um isomorfismo, caso exista.
- Não se conhece um algoritmo eficiente (polinomial) para o problema. Também não se sabe se o problema é NP-difícil.
- O problema está em NP. Dada uma bijeção $\theta : V(G) \mapsto V(H)$, é fácil verificar se θ é um isomorfismo entre G e H.

Testando isomorfismo computacionalmente

- Considere o seguinte problema: dados dois grafos (simples) G e H, decidir se eles são isomorfos e exibir um isomorfismo, caso exista.
- Não se conhece um algoritmo eficiente (polinomial) para o problema. Também não se sabe se o problema é NP-difícil.
- O problema está em NP. Dada uma bijeção $\theta : V(G) \mapsto V(H)$, é fácil verificar se θ é um isomorfismo entre G e H.
- Por outro lado, se G e H não são isomorfos, não é óbvio como certificar isto. Não se conhece uma propriedade que sirva para qualquer par de grafos não isomorfos.

Remoção de aresta

Seja $G = (V, E)$ um grafo e seja e uma aresta de G. O grafo obtido de G pela remoção de e é denotado por $G - e$ ou $G \setminus e$.

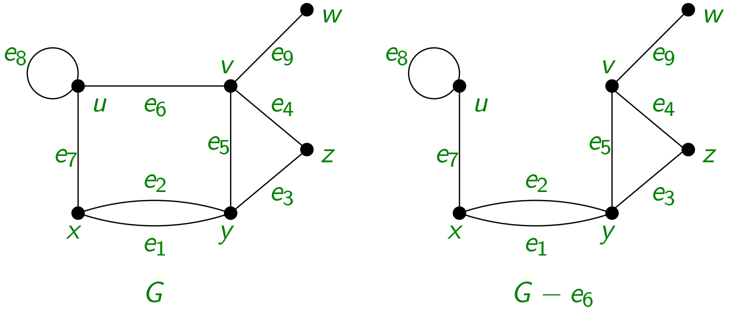


Figura: Grafos G e $G - e_6$.

Remoção de vértice

Seja $G = (V, E)$ um grafo e seja v um vértice de G. O grafo obtido de G pela remoção de v e todas as arestas incidentes a v é denotado por $G - v$.

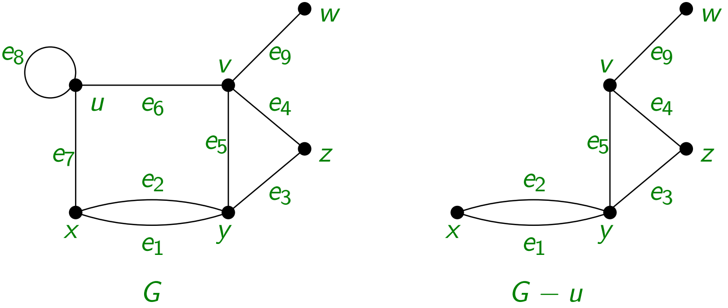


Figura: Grafos G e $G - u$.

Subgrafos

Subgrafos

- Os grafos $G - e$ e $G - v$ são exemplos de subgrafos de G.

Subgrafos

- Os grafos $G - e$ e $G - v$ são exemplos de subgrafos de G.
- Um grafo H é um subgrafo de um grafo G se:
  1. $V(H) \subseteq V(G)$,
  2. $E(H) \subseteq E(G)$ e
  3. ψ_H é a restrição de ψ_G a $E(H)$.

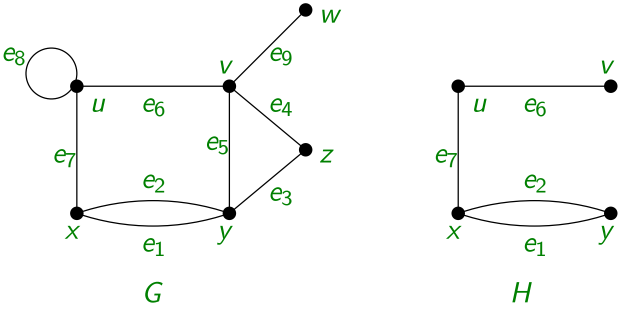


Figura: Grafos G e um subgrafo H de G.

Subgrafos

Subgrafos

- Dizemos que H **está contido em** G ($H \subseteq G$) e que G **contém** H ($G \supseteq H$). Também dizemos que G é **supergrafo** de H ($G \supseteq H$).

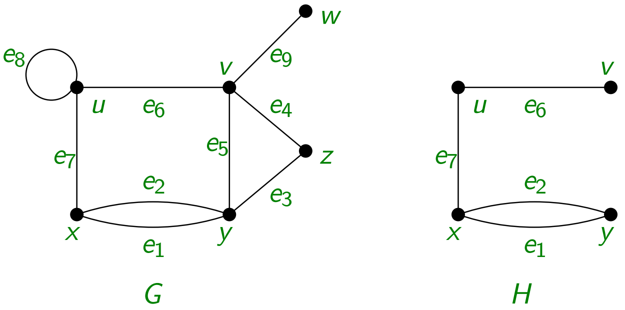


Figura: Grafos G e um subgrafo H de G.

Subgrafos

- Dizemos que H está contido em G ($H \subseteq G$) e que G contém H ($G \supseteq H$). Também dizemos que G é supergrafo de H ($G \supseteq H$).
- Todo subgrafo de G pode ser obtido de G através de uma sequência de remoções de arestas ou vértices.

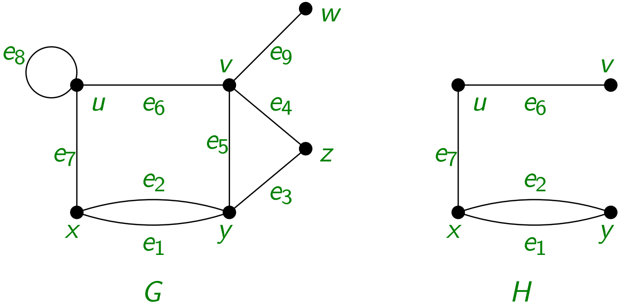


Figura: Grafos G e um subgrafo H de G.

Subgrafos

Subgrafos

- Uma cópia de um grafo H em um grafo G é um subgrafo de G que é isomorfo a H.

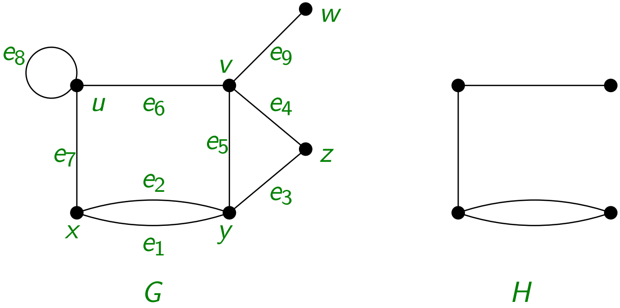


Figura: Grafos G e um subgrafo H de G.

Subgrafos

- Uma cópia de um grafo H em um grafo G é um subgrafo de G que é isomorfo a H.
- Um subgrafo ou supergrafo H de G é próprio se for distinto de G. Denotamos isto por $H \subset G$ ou $H \supset G$, respectivamente.

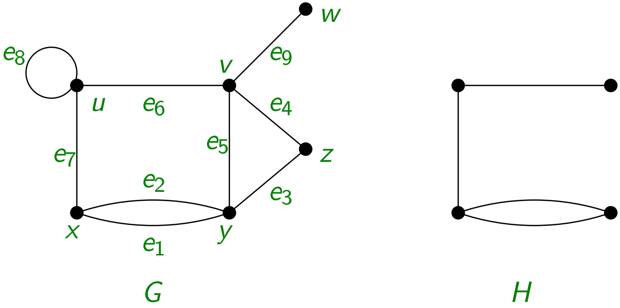


Figura: Grafos G e um subgrafo H de G.

Remoção de um subconjunto de arestas

Seja $G = (V, E)$ um grafo e seja $F \subseteq E$. O grafo obtido de G removendo-se as arestas de F (em qualquer ordem) é denotado por $G - F$ ou $G \setminus F$.

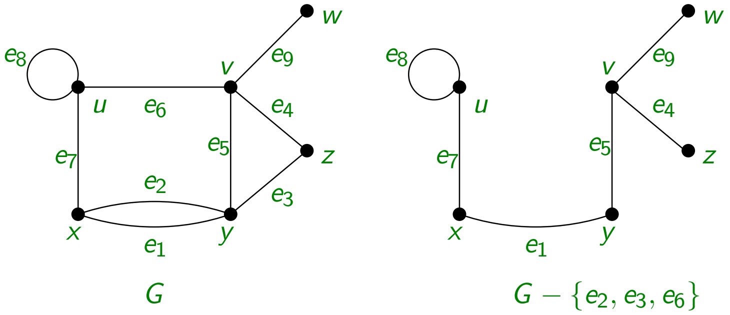


Figura: Grafos G e $G - \{e_2, e_3, e_6\}$.

Remoção de um subconjunto de vértices

Remoção de um subconjunto de vértices

Seja $G = (V, E)$ um grafo e seja $U \subseteq V$. O grafo obtido de G removendo-se os vértices de U (em qualquer ordem) e todas as arestas incidentes a esses é denotado por $G - U$.

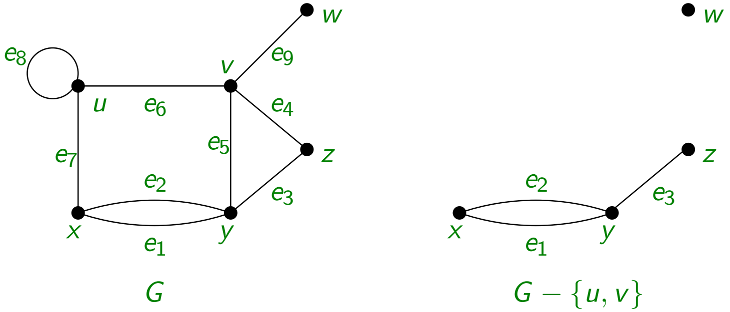


Figura: Grafos G e $G - \{u, v\}$.

Subgrafo induzido por arestas

Subgrafo induzido por arestas

Seja $G = (V, E)$ um grafo e seja $F \subseteq E$. O subgrafo de G induzido por F, denotado por $G[F]$, é o subgrafo cujo conjunto de vértices consiste daqueles que incidem em alguma aresta de F e cujo conjunto de arestas é exatamente F.

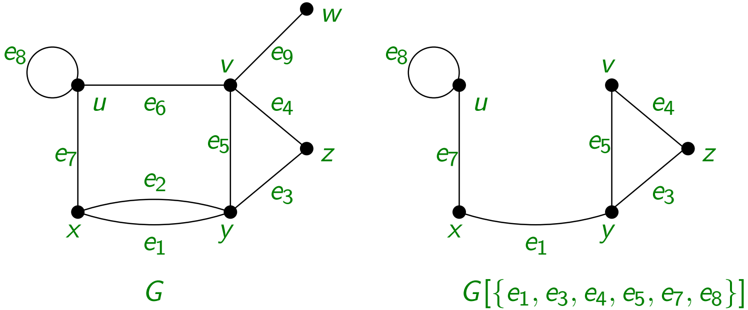


Figura: Grafo G e subgrafo $G[\{e_1, e_3, e_4, e_5, e_7, e_8\}]$.

Subgrafo induzido por vértices

Subgrafo induzido por vértices

Seja $G = (V, E)$ um grafo e seja $U \subseteq V$. O subgrafo de G induzido por U, denotado por $G[U]$, é o subgrafo cujo conjunto de vértices é U e cujo conjunto de arestas consiste de todas as que tem ambos extremos em U.

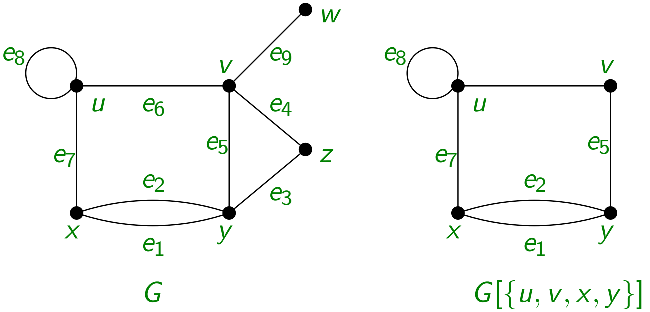


Figura: Grafo G e subgrafo $G[\{u, v, x, y\}]$.

Subgrafo induzido

Subgrafo induzido

Dizemos que H é um subgrafo induzido de G se existe $U \subseteq V(G)$ tal que $H = G[U]$. Note que $G[U] = G - (V \setminus U)$.

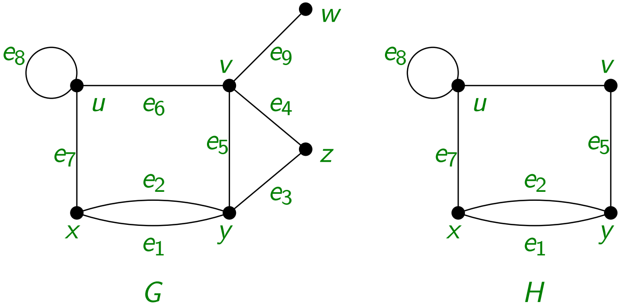


Figura: Grafo G e subgrafo induzido $H = G[\{u, v, x, y\}]$.

Adição de uma aresta

Seja $G = (V, E)$ um grafo e sejam $u, v \in V$. O grafo $G + uv := (V, E \cup \{uv\})$ é o grafo obtido a partir de G pela adição da aresta uv. Se já existe uma aresta uv em G, então ela será duplicada.

Seja $G = (V, E)$ um grafo e seja F uma coleção de pares não-ordenados de vértices de V. O grafo $G + F := (V, E \cup F)$ é o grafo obtido a partir de G pela adição das arestas em F.

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Considere a operação de adicionar um novo vértice u a G.

Aqui é necessário também descrever quais arestas serão adicionadas a G. Não há uma notação padrão para esta operação.

Todo supergrafo de um grafo G pode ser obtido por uma sequência de adições de vértices e arestas.

Passeios

Passeios

Um passeio (*walk*) em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência:

$$W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell),$$

onde $v_0, v_1, \ldots, v_\ell$ são vértices de G e $e_i = v_{i-1}v_i$ são arestas de G para todo $i = 1, 2, \ldots, \ell$. Se G for **simples**, escrevemos apenas os vértices.

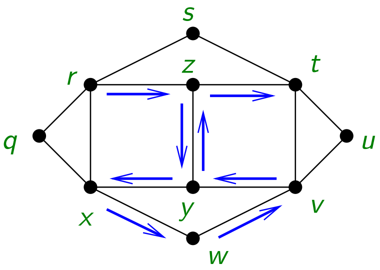


Figura: Passeio $W := (r, z, y, x, w, v, y, z, t)$.

Passeios

Passeios

- Seja $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell)$ um passeio em G.

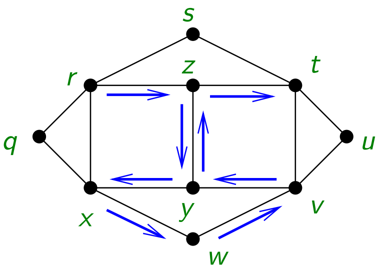


Figura: Passeio $W := (r, z, y, x, w, v, y, z, t)$.

Passeios

- Seja $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell)$ um passeio em G.
- Dizemos que W começa em v_0 e termina em v_ℓ; v_0 é o início (começo) e v_ℓ é o término (final) de W.

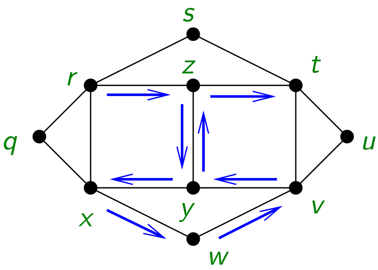


Figura: Passeio $W := (r, z, y, x, w, v, y, z, t)$.

Passeios

- Seja $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell)$ um passeio em G.
- Dizemos que W começa em v_0 e termina em v_ℓ; v_0 é o início (começo) e v_ℓ é o término (final) de W.
- Dizemos também que W é um passeio de v_0 a v_ℓ ou que W é um v_0v_ℓ-passeio ou que W conecta/liga v_0 e v_ℓ.

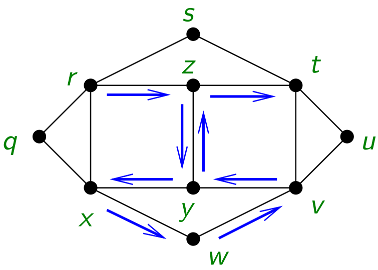


Figura: Passeio $W := (r, z, y, x, w, v, y, z, t)$.

Conexidade

Conexidade

- Seja $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell)$ um passeio em G.

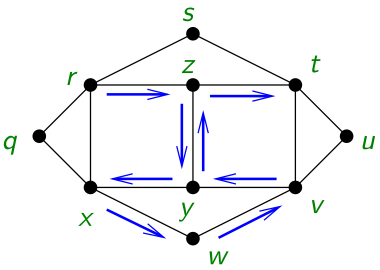


Figura: Passeio $W := (r, z, y, x, w, v, y, z, t)$.

Conexidade

- Seja $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell)$ um passeio em G.
- Os vértices $v_1, \ldots, v_{\ell-1}$ são chamados vértices internos de W.

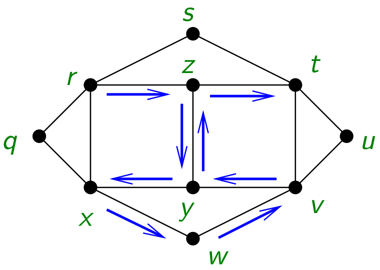


Figura: Passeio $W := (r, z, y, x, w, v, y, z, t)$.

Conexidade

- Seja $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell)$ um passeio em G.
- Os vértices $v_1, \ldots, v_{\ell-1}$ são chamados vértices internos de W.
- Denotamos o conjunto de vértices e o conjunto de arestas de W por $V(W)$ e $E(W)$, respectivamente.

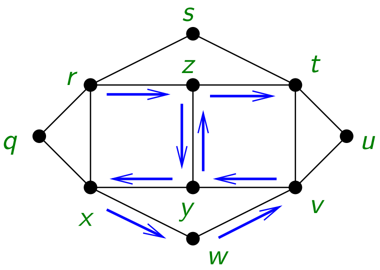


Figura: Passeio $W := (r, z, y, x, w, v, y, z, t)$.

Passeios

Passeios

- Seja $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell)$ um passeio em G.

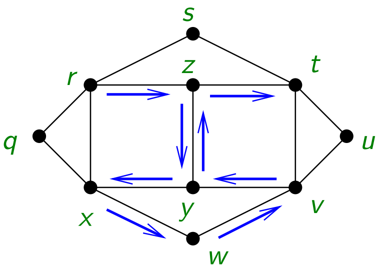


Figura: Passeio $W := (r, z, y, x, w, v, y, z, t)$.

Passeios

- Seja $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell)$ um passeio em G.
- O comprimento de W, denotado por $|W|$, é ℓ, o número de arestas na sequência.

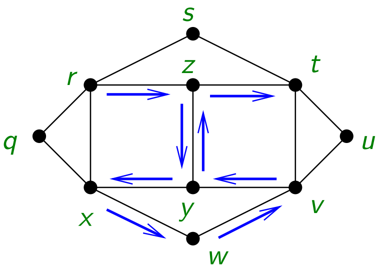


Figura: Passeio $W := (r, z, y, x, w, v, y, z, t)$.

Passeios

- Seja $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell)$ um passeio em G.
- O comprimento de W, denotado por $|W|$, é ℓ, o número de arestas na sequência.
- O passeio W é ímpar (par) se $|W|$ é ímpar (par).

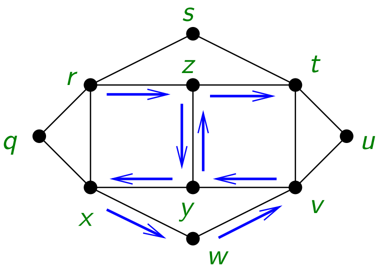


Figura: Passeio $W := (r, z, y, x, w, v, y, z, t)$.

Passeios fechados

Passeios fechados

- Um passeio $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell)$ é um passeio fechado se $v_0 = v_\ell$ e $\ell > 0$.
- Caso contrário, dizemos que W é um passeio aberto.

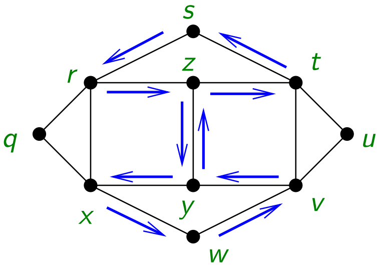


Figura: Passeio fechado $W := (r, z, y, x, w, v, y, z, t, s, r)$.

Seções de passeios

Seções de passeios

- Seja $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell)$ um passeio em G.

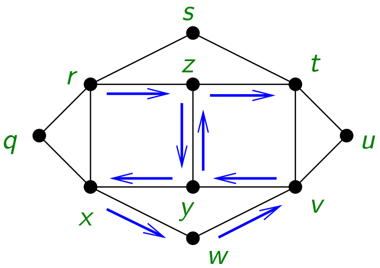


Figura: $zWv = (z, y, x, w, v)$ é a seção de W de z a v.

Seções de passeios

- Seja $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell)$ um passeio em G.
- Denotamos por $v_i W v_j$ $(i \leq j)$ o passeio $(v_i, \ldots, v_j)$.

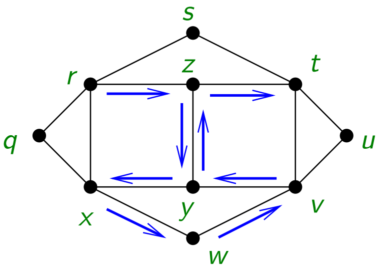


Figura: $zWv = (z, y, x, w, v)$ é a seção de W de z a v.

Seções de passeios

- Seja $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell)$ um passeio em G.
- Denotamos por $v_i W v_j$ $(i \leq j)$ o passeio $(v_i, \ldots, v_j)$.
- Dizemos que $v_i W v_j$ é a seção de W de v_i a v_j.

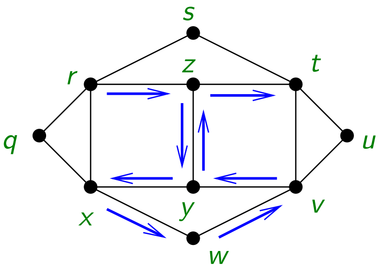


Figura: $zWv = (z, y, x, w, v)$ é a seção de W de z a v.

Trilhas

Trilhas

- Um passeio $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell)$ é uma trilha (trail) se **não repete arestas** na sequência.
- Muitas vezes, é conveniente pensar em W como um subgrafo de G.

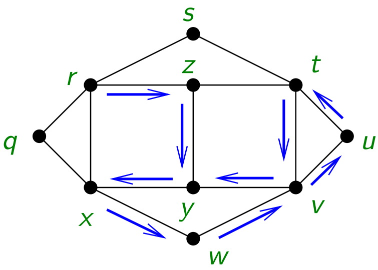


Figura: Trilha $W := (r, z, y, x, w, v, u, t, v, y)$.

Caminhos

Caminhos

- Um passeio $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell)$ é um caminho se **não repete vértices** na sequência **ou** se $\ell = 0$ (neste caso, dizemos que $W = (v_0)$ é um caminho trivial).
- Muitas vezes, é conveniente pensar em W como um subgrafo de G.

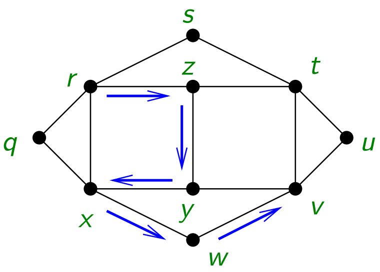


Figura: Caminho $W := (r, z, y, x, w, v)$.

Ciclos

Ciclos

- Um passeio $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell)$ é um ciclo se **não repete vértices nem arestas** na sequência, **exceto** $v_0 = v_\ell$, e $\ell > 0$.
- Muitas vezes, é conveniente pensar em W como um subgrafo de G.
- A cintura de um grafo G é o comprimento de um ciclo mínimo (mais curto) de G.

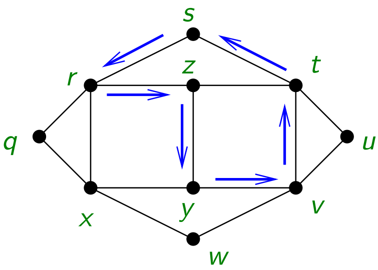
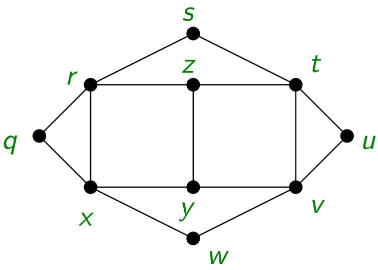


Figura: Ciclo $W := (r, z, y, v, t, s, r)$.

Distância

Sejam u, v vértices de um grafo G. A distância de u a v em G, denotada por $\mathrm{dist}_G(u, v)$, é o comprimento de um caminho mínimo (mais curto) de u a v em G. Se **não** existe caminho de u a v, então $\mathrm{dist}_G(u, v) = +\infty$.



Teorema. Se existe um passeio aberto W de u a v em um grafo $G = (V, E)$, então existe um caminho P de u a v em G tal que $E(P) \subseteq E(W)$.

Prova.

Passeios e caminhos

Teorema. Se existe um passeio aberto W de u a v em um grafo $G = (V, E)$, então existe um caminho P de u a v em G tal que $E(P) \subseteq E(W)$.

Prova. Seja

$$W := (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell),$$

onde $v_0 = u$ e $v_\ell = v$. Provaremos a afirmação por indução em $|W| = \ell$.

Teorema. Se existe um passeio aberto W de u a v em um grafo $G = (V, E)$, então existe um caminho P de u a v em G tal que $E(P) \subseteq E(W)$.

Prova. Seja

$$W := (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell),$$

onde $v_0 = u$ e $v_\ell = v$. Provaremos a afirmação por indução em $|W| = \ell$.

Base: $|W| = 0$ ou $|W| = 1$. Neste caso, W é um caminho e o resultado segue.

Passeios e caminhos

Teorema. Se existe um passeio aberto W de u a v em um grafo $G = (V, E)$, então existe um caminho P de u a v em G tal que $E(P) \subseteq E(W)$.

Prova. Seja

$$W := (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell),$$

onde $v_0 = u$ e $v_\ell = v$. Provaremos a afirmação por indução em $|W| = \ell$.

Base: $|W| = 0$ ou $|W| = 1$. Neste caso, W é um caminho e o resultado segue.

Hipótese de indução: se W' é um passeio de u a v com $|W'| < \ell$, então existe um caminho P de u a v tal que $E(P) \subseteq E(W')$.

Passeios e caminhos

Passeios e caminhos

Se W não repete vértices, então W é um caminho de u a v em G e o resultado segue.

Passeios e caminhos

Se W não repete vértices, então W é um caminho de u a v em G e o resultado segue.

Assim, suponha que existem $i, j \in \{0, 1, \ldots, \ell\}$ tais que $i < j$ e $v_i = v_j$, ou seja,

$$W = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, e_{j+1}, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell).$$

Se W não repete vértices, então W é um caminho de u a v em G e o resultado segue.

Assim, suponha que existem $i, j \in \{0, 1, \ldots, \ell\}$ tais que $i < j$ e $v_i = v_j$, ou seja,

$$W = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, e_{j+1}, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell).$$

Considere o passeio:

$$W' = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_i = v_j, e_{j+1}, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell).$$

Se W não repete vértices, então W é um caminho de u a v em G e o resultado segue.

Assim, suponha que existem $i, j \in \{0, 1, \ldots, \ell\}$ tais que $i < j$ e $v_i = v_j$, ou seja,

$$W = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, e_{j+1}, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell).$$

Considere o passeio:

$$W' = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_i = v_j, e_{j+1}, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell).$$

Assim, W' é um passeio de u a v de comprimento $|W'| < \ell$. Pela HI, existe um caminho P de u a v tal que $E(P) \subseteq E(W')$. Como $E(W') \subseteq E(W)$, o resultado segue. ∎

Concatenação

Concatenação

Sejam

$$P = (v_0, e_1, v_1, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell) \quad \text{e}$$
$$Q = (u_0, f_1, u_2, \dots, u_{k-1}, f_k, u_k)$$

dois passeios tais que o término de de P é igual ao início de Q.

Concatenação

Sejam

$$P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell) \quad \text{e}$$
$$Q = (u_0, f_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, f_k, u_k)$$

dois passeios tais que o término de de P é igual ao início de Q.

A concatenação de P e Q é o passeio:

$$P \bullet Q = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell = u_0, f_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, f_k, u_k).$$

Por exemplo, na prova do slide anterior, $W' := v_0 W v_i \bullet v_j W v_\ell$.

Passeio inverso

Passeio inverso

Seja

$$P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell)$$

um passeio.

Passeio inverso

Seja

$$P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell)$$

um passeio.

O passeio inverso de P é o passeio:

$$P^{-1} = (v_\ell, e_\ell, v_{\ell-1}, \ldots, v_1, e_1, v_0).$$

Observação. note que P e P^{-1} representam o mesmo subgrafo, mas a notação é usada para capturar a *ordem de percurso*.

Conexidade

Conexidade

Um grafo G é conexo se para todo par de vértices u e v existe um caminho de u a v em G.

Conexidade

Um grafo G é conexo se para todo par de vértices u e v existe um caminho de u a v em G.

Caso contrário, dizemos que G é desconexo.

Conexidade

Um grafo G é conexo se para todo par de vértices u e v existe um caminho de u a v em G.

Caso contrário, dizemos que G é desconexo.

Teorema. Seja $G = (V, E)$ um grafo. A relação $(V, \mathcal{R})$ definida por:

$$\mathcal{R} := \{(u, v) : \text{existe um caminho de } u \text{ a } v \text{ em } G,\ u, v \in V\}$$

é uma relação de equivalência. (Exercício!) ■

Conexidade

Um grafo G é conexo se para todo par de vértices u e v existe um caminho de u a v em G.

Caso contrário, dizemos que G é desconexo.

Teorema. Seja $G = (V, E)$ um grafo. A relação $(V, \mathcal{R})$ definida por:

$$\mathcal{R} := \{(u, v) : \text{existe um caminho de } u \text{ a } v \text{ em } G,\ u, v \in V\}$$

é uma relação de equivalência. (Exercício!) ■

As classes de equivalência de $(V, \mathcal{R})$ são os componentes de G.

Componentes

Componentes

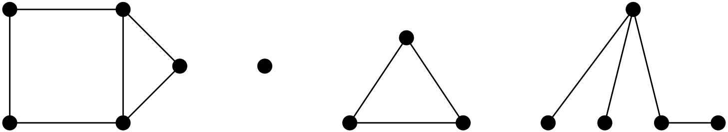


Figura: Componentes de um grafo.

Componentes

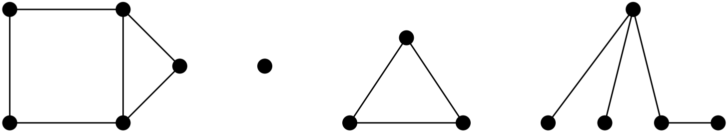


Figura: Componentes de um grafo.

Eis uma definição alternativa.

Um componente de um grafo G é um **subgrafo conexo maximal** de G.

Maximalidade e minimalidade

Maximalidade e minimalidade

- Seja $\mathcal{G}$ uma família de subgrafos de um grafo G.

Maximalidade e minimalidade

- Seja $\mathcal{G}$ uma família de subgrafos de um grafo G.
- Um subgrafo $H \in \mathcal{G}$ é maximal em $\mathcal{G}$ se não existe subgrafo em $\mathcal{G}$ que contém propriamente H.

Maximalidade e minimalidade

- Seja $\mathcal{G}$ uma família de subgrafos de um grafo G.
- Um subgrafo $H \in \mathcal{G}$ é maximal em $\mathcal{G}$ se não existe subgrafo em $\mathcal{G}$ que contém propriamente H.
- Um subgrafo $H \in \mathcal{G}$ é minimal em $\mathcal{G}$ se não existe subgrafo em $\mathcal{G}$ propriamente contido em H.

Maximalidade e minimalidade

- Seja $\mathcal{G}$ uma família de subgrafos de um grafo G.
- Um subgrafo $H \in \mathcal{G}$ é maximal em $\mathcal{G}$ se não existe subgrafo em $\mathcal{G}$ que contém propriamente H.
- Um subgrafo $H \in \mathcal{G}$ é minimal em $\mathcal{G}$ se não existe subgrafo em $\mathcal{G}$ propriamente contido em H.

Exemplo: seja $\mathcal{G}$ a família de todos os caminhos em um grafo G. Um caminho maximal é um caminho que não está contido propriamente em (e.g., é subgrafo próprio de) outro caminho.

Maximalidade e minimalidade

Maximalidade e minimalidade

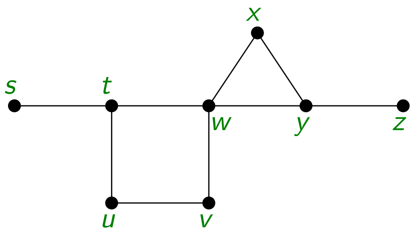


Figura: Caminhos maximais: (s, t, w, y, z), (v, u, t, w, y, z), (v, u, t, w, x, y, z).

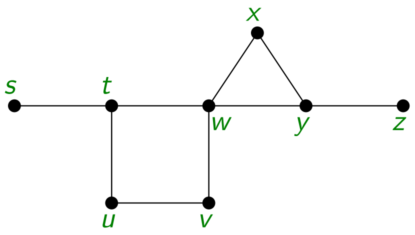


Figura: Caminhos maximais: (s, t, w, y, z), (v, u, t, w, y, z), (v, u, t, w, x, y, z).

Note que caminhos maximais podem ter comprimentos distintos. Um caminho é máximo ou mais longo se tem comprimento máximo.

Componentes

Componentes

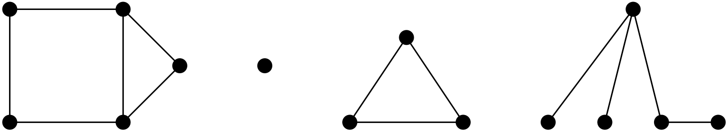


Figura: Componentes de um grafo.

Componentes

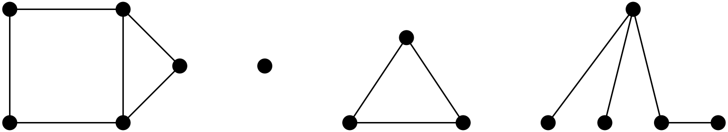


Figura: Componentes de um grafo.

Seja $\mathcal{G}$ a família de todos os subgrafos conexos de G. Um componente de G é um subgrafo maximal de $\mathcal{G}$.

Componentes

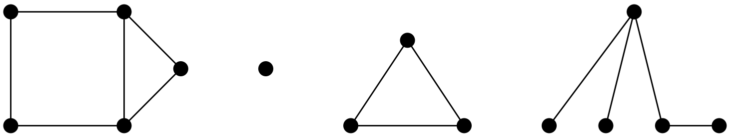


Figura: Componentes de um grafo.

Seja $\mathcal{G}$ a família de todos os subgrafos conexos de G. Um componente de G é um subgrafo maximal de $\mathcal{G}$.

Em geral, a definição de $\mathcal{G}$ fica implícita no contexto. O adjetivo maximal se aplica à propriedade discutida, e.g., subgrafo conexo maximal ou caminho maximal.

Maximalidade e minimalidade

Eis um resumo. Seja $\mathcal{G}$ uma família de grafos. Um membro $G \in \mathcal{G}$ é:

- maximal em $\mathcal{G}$ se não está contido em outro membro de $\mathcal{G}$,
- máximo em $\mathcal{G}$ se tem tamanho máximo entre os membros de $\mathcal{G}$,
- minimal em $\mathcal{G}$ se não contém outro membro de $\mathcal{G}$,
- mínimo em $\mathcal{G}$ se tem tamanho mínimo entre os membros de $\mathcal{G}$.

Observação.

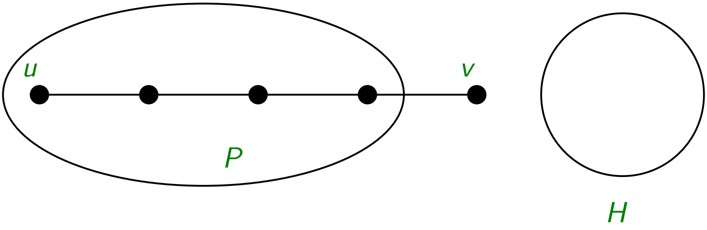
- O conceito de tamanho pode depender do problema tratado e deve ficar claro no contexto. Por exemplo, tamanho poderia ser número de vértices, número de arestas ou qualquer métrica que faça sentido.
- Pode existir mais de um membro máximo (ou mínimo). O correto é então dizer "seja G um membro máximo de $\mathcal{G}$" em vez de "seja G o membro máximo de $\mathcal{G}$".

Técnica do caminho maximal/máximo

Ilustraremos a técnica provando o seguinte resultado.

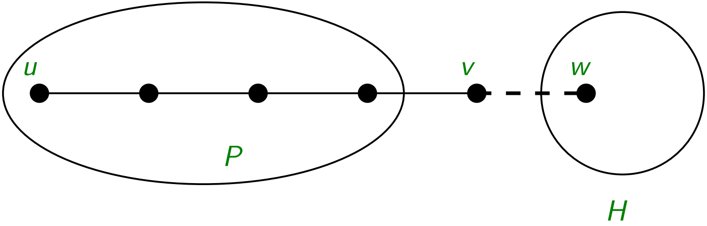
Proposição. Todo grafo conexo com pelo menos uma aresta que não é um laço possui pelo menos dois vértices u e v tal que $G - u$ e $G - v$ são conexos.

Prova. Seja P um caminho maximal em G com comprimento pelo menos um. Sejam u e v o início e o término de P, respectivamente. Suponha por contradição que $G - v$ não seja conexo. Então $P - v$ está contido em algum componente de $G - v$. Seja H outro componente de $G - v$.



Técnica do caminho maximal/máximo

Como G é conexo, v é adjacente a algum vértice w em H. Mas então $P \bullet (v, w)$ é um caminho que contém propriamente P, contrariando a escolha de P. Portanto, $G - v$ é conexo. De modo análogo, concluímos que $G - u$ é conexo. O resultado segue. ■



Técnica do caminho maximal/máximo

A ideia de escolher um caminho maximal é simplesmente um modo compacto de apresentar a seguinte ideia algorítmica de construir P a partir de um vértice u:

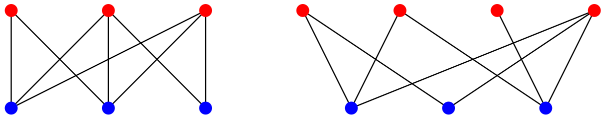
1. seja $P := (u)$
2. seja v o término de P
3. se v tem algum vizinho w em $V(G) - V(P)$, então estenda $P := P \bullet (v, w)$ e volte ao passo anterior
4. senão, $G - v$ é conexo

Na prova acima, escolhendo P maximal foi suficiente para obter o resultado desejado. Em outras situações pode ser necessário escolher P como um caminho máximo (mais longo).

Grafos bipartidos

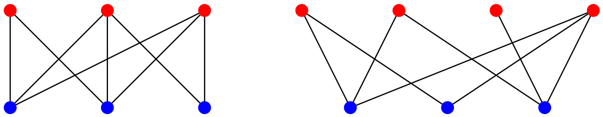
Grafos bipartidos

Um grafo G é **bipartido** se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos X e Y tais que cada aresta tem um extremo em X e outro em Y. Uma tal partição X, Y é chamada **bipartição** de G e dizemos que X e Y são as **partes** da bipartição. Neste caso, dizemos que G é (X, Y)-**bipartido**.



Grafos bipartidos

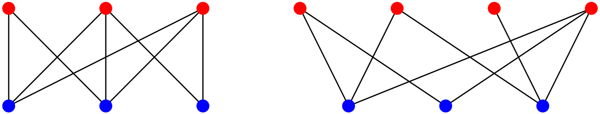
Um grafo G é **bipartido** se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos X e Y tais que cada aresta tem um extremo em X e outro em Y. Uma tal partição X, Y é chamada **bipartição** de G e dizemos que X e Y são as **partes** da bipartição. Neste caso, dizemos que G é (X, Y)-**bipartido**.



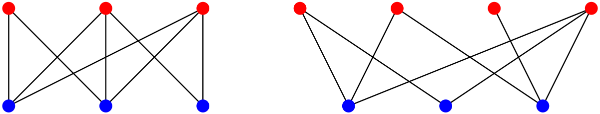
Definição alternativa: G é **bipartido** se é possível colorir os vértices de G com duas cores, digamos vermelho e azul, de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas.

Grafos bipartidos

Grafos bipartidos

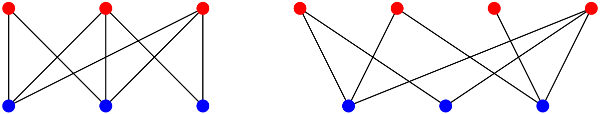


Grafos bipartidos



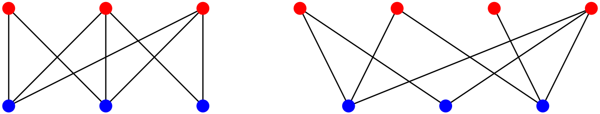
- Todo subgrafo de um grafo bipartido é bipartido.

Grafos bipartidos



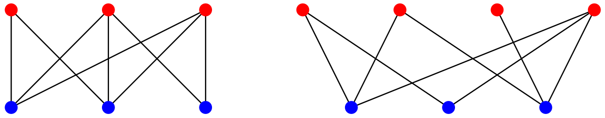
- Todo subgrafo de um grafo bipartido é bipartido.
- Ciclos ímpares não são bipartidos.

Grafos bipartidos



- Todo subgrafo de um grafo bipartido é bipartido.
- Ciclos ímpares não são bipartidos.
- Assim, um grafo bipartido não pode conter ciclos ímpares.

Grafos bipartidos



- Todo subgrafo de um grafo bipartido é bipartido.
- Ciclos ímpares não são bipartidos.
- Assim, um grafo bipartido não pode conter ciclos ímpares.

Queremos provar a seguinte caracterização:

Teorema. (König, 1936) Um grafo G é bipartido se, e somente se, G não contém ciclos ímpares.

Caracterização

Caracterização

- Caracterizar uma família de grafos $\mathcal{G}$ através de uma propriedade P significa provar a equivalência:

  $G \in \mathcal{G}$ *se, e somente se,* G *satisfaz* P.

Caracterização

- Caracterizar uma família de grafos $\mathcal{G}$ através de uma propriedade P significa provar a equivalência:

  $G \in \mathcal{G}$ *se, e somente se,* G *satisfaz* P.

- Dizemos que P é uma condição necessária e suficiente para que G pertença a $\mathcal{G}$.

Caracterização

- Caracterizar uma família de grafos $\mathcal{G}$ através de uma propriedade P significa provar a equivalência:

  $G \in \mathcal{G}$ se, e somente se, G satisfaz P.

- Dizemos que P é uma condição necessária e suficiente para que G pertença a $\mathcal{G}$.
- Necessidade: se $G \in \mathcal{G}$ então G satisfaz P.

Caracterização

- Caracterizar uma família de grafos $\mathcal{G}$ através de uma propriedade P significa provar a equivalência:

  $G \in \mathcal{G}$ *se, e somente se,* G *satisfaz* P*.*

- Dizemos que P é uma condição necessária e suficiente para que G pertença a $\mathcal{G}$.
- Necessidade: se $G \in \mathcal{G}$ então G satisfaz P.
- Suficiência: $G \in \mathcal{G}$ se G satisfaz P.

Caracterização

- Caracterizar uma família de grafos $\mathcal{G}$ através de uma propriedade P significa provar a equivalência:

  $G \in \mathcal{G}$ *se, e somente se,* G *satisfaz* P*.*

- Dizemos que P é uma condição necessária e suficiente para que G pertença a $\mathcal{G}$.
- Necessidade: se $G \in \mathcal{G}$ então G satisfaz P.
- Suficiência: $G \in \mathcal{G}$ se G satisfaz P.

No caso de $\mathcal{G}$ ser a família de todos os grafos bipartidos, a propriedade P é: não contém ciclos ímpares.

Paridade de passeios

Paridade de passeios

Teorema. Todo passeio fechado ímpar de um grafo G contém um ciclo ímpar.

Prova.

Paridade de passeios

Teorema. Todo passeio fechado ímpar de um grafo G contém um ciclo ímpar.

Prova. Seja W um passeio fechado ímpar com $|W| = 2k + 1$. Provaremos por indução em k que W contém um ciclo ímpar.

Paridade de passeios

Teorema. Todo passeio fechado ímpar de um grafo G contém um ciclo ímpar.

Prova. Seja W um passeio fechado ímpar com $|W| = 2k + 1$. Provaremos por indução em k que W contém um ciclo ímpar.

Base: $k = 0$. Neste caso, W é um laço e o resultado segue.

Paridade de passeios

Teorema. Todo passeio fechado ímpar de um grafo G contém um ciclo ímpar.

Prova. Seja W um passeio fechado ímpar com $|W| = 2k + 1$. Provaremos por indução em k que W contém um ciclo ímpar.

Base: $k = 0$. Neste caso, W é um laço e o resultado segue.

Hipótese de indução: suponha que todo passeio fechado ímpar W' com $|W'| = 2k' + 1$ e $k' < k$ contém um ciclo ímpar.

Paridade de passeios

Paridade de passeios

Seja

$$W := (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{2k}, e_{2k+1}, v_{2k+1})$$

um passeio fechado ímpar.

Paridade de passeios

Seja

$$W := (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{2k}, e_{2k+1}, v_{2k+1})$$

um passeio fechado ímpar.

Se W não tem vértices repetidos, exceto $v_0 = v_{2k+1}$, então W é um ciclo ímpar e nada há a provar.

Paridade de passeios

Seja

$$W := (v_0, e_1, v_1, \dots, v_{2k}, e_{2k+1}, v_{2k+1})$$

um passeio fechado ímpar.

Se W não tem vértices repetidos, exceto $v_0 = v_{2k+1}$, então W é um ciclo ímpar e nada há a provar.

Assim, suponha que existem $i, j \in \{0, 1, \dots, \ell\}$ tais que $i < j$ e $v_i = v_j$, ou seja,

$$W = (v_0, e_1, v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, e_{j+1}, \dots, v_{2k}, e_{2k+1}, v_{2k+1}).$$

Paridade de passeios

Assim, suponha que existem $i, j \in \{0, 1, \ldots, \ell\}$ tais que $i < j$ e $v_i = v_j$, ou seja,

$$W = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, e_{j+1}, \ldots, v_{2k}, e_{2k+1}, v_{2k+1}).$$

Paridade de passeios

Assim, suponha que existem $i, j \in \{0, 1, \ldots, \ell\}$ tais que $i < j$ e $v_i = v_j$, ou seja,

$$W = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, e_{j+1}, \ldots, v_{2k}, e_{2k+1}, v_{2k+1}).$$

Considere os passeios fechados $W' := v_0 W v_i \bullet v_j W v_{2k+1}$ e $W'' := v_i W v_j$, i.e.

$$W' := (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_i = v_j, e_{j+1}, \ldots, v_{2k}, e_{2k+1}, v_{2k+1}) \text{ e}$$
$$W'' := (v_i, \ldots, v_j)$$

Note que $E(W) = E(W') \cup E(W'')$ e $E(W') \cap E(W'') = \emptyset$.

Paridade de passeios

Assim, suponha que existem $i, j \in \{0, 1, \ldots, \ell\}$ tais que $i < j$ e $v_i = v_j$, ou seja,

$$W = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, e_{j+1}, \ldots, v_{2k}, e_{2k+1}, v_{2k+1}).$$

Considere os passeios fechados $W' := v_0 W v_i \bullet v_j W v_{2k+1}$ e $W'' := v_i W v_j$, i.e.

$$W' := (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_i = v_j, e_{j+1}, \ldots, v_{2k}, e_{2k+1}, v_{2k+1}) \text{ e}$$
$$W'' := (v_i, \ldots, v_j)$$

Note que $E(W) = E(W') \cup E(W'')$ e $E(W') \cap E(W'') = \emptyset$.

Como W é ímpar, ou W' é ímpar ou W'' é ímpar. Aplicando a HI ao passeio que é ímpar, concluímos que tal passeio (e portanto, W) contém um ciclo ímpar. ■

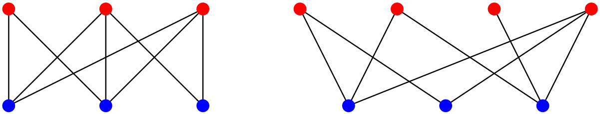
Caracterização de grafos bipartidos

Caracterização de grafos bipartidos

Seja $G = (V, E)$ um grafo (X, Y)-bipartido e seja $u \in X$. Note que

1. qualquer caminho de u a um vértice $v \in Y$ é ímpar e
2. qualquer caminho de u a um vértice $v \in X$ é par.

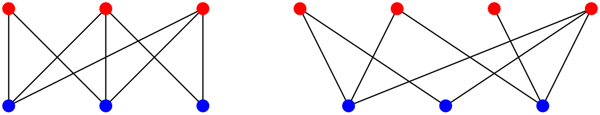
Em outras palavras, qualquer caminho de u a um vértice v tem a mesma paridade.



Caracterização de grafos bipartidos

Ideia da prova.

Supondo que G é um grafo que não contém ciclos ímpares, queremos construir uma bipartição de G baseada na observação anterior. Entretanto, ainda não sabemos se vale a propriedade da paridade dos caminhos. Para contornar isto, usamos a distância entre dois vértices.



Caracterização de grafos bipartidos

Caracterização de grafos bipartidos

Teorema. (König, 1936) Um grafo G é bipartido se, e somente se, G não contém ciclos ímpares.

Prova.

Caracterização de grafos bipartidos

Teorema. (König, 1936) Um grafo G é bipartido se, e somente se, G não contém ciclos ímpares.

Prova.

Necessidade: já vimos que se G é bipartido, então G não contém ciclos ímpares.

Teorema. (König, 1936) Um grafo G é bipartido se, e somente se, G não contém ciclos ímpares.

Prova.

Necessidade: já vimos que se G é bipartido, então G não contém ciclos ímpares.

Suficiência: seja G um grafo que não contém ciclos ímpares. Queremos provar que G tem uma bipartição.

Caracterização de grafos bipartidos

Teorema. (König, 1936) Um grafo G é bipartido se, e somente se, G não contém ciclos ímpares.

Prova.

Necessidade: já vimos que se G é bipartido, então G não contém ciclos ímpares.

Suficiência: seja G um grafo que não contém ciclos ímpares. Queremos provar que G tem uma bipartição.

Basta provar o resultado para cada componente de G. De fato, suponha que $G_1, \ldots, G_k$ sejam os componentes de G e verificamos que cada G_i tem uma bipartição (X_i, Y_i). Então $X := \bigcup_{i=1}^{k} X_i$ e $Y := \bigcup_{i=1}^{k} Y_i$ formam uma bipartição de G.

Caracterização de grafos bipartidos

Teorema. (König, 1936) Um grafo G é bipartido se, e somente se, G não contém ciclos ímpares.

Prova.

Necessidade: já vimos que se G é bipartido, então G não contém ciclos ímpares.

Suficiência: seja G um grafo que não contém ciclos ímpares. Queremos provar que G tem uma bipartição.

Basta provar o resultado para cada componente de G. De fato, suponha que $G_1, \ldots, G_k$ sejam os componentes de G e verificamos que cada G_i tem uma bipartição (X_i, Y_i). Então $X := \bigcup_{i=1}^{k} X_i$ e $Y := \bigcup_{i=1}^{k} Y_i$ formam uma bipartição de G.

Caracterização de grafos bipartidos

Teorema. (König, 1936) Um grafo G é bipartido se, e somente se, G não contém ciclos ímpares.

Prova.

Necessidade: já vimos que se G é bipartido, então G não contém ciclos ímpares.

Suficiência: seja G um grafo que não contém ciclos ímpares. Queremos provar que G tem uma bipartição.

Basta provar o resultado para cada componente de G. De fato, suponha que $G_1, \ldots, G_k$ sejam os componentes de G e verificamos que cada G_i tem uma bipartição (X_i, Y_i). Então $X := \bigcup_{i=1}^{k} X_i$ e $Y := \bigcup_{i=1}^{k} Y_i$ formam uma bipartição de G.

Assim, podemos supor que G é conexo.

Caracterização de grafos bipartidos

Caracterização de grafos bipartidos

Seja u um vértice qualquer de G. Sejam

$$X = \{v \in V(G) : \mathrm{dist}(u, v) \text{ é par}\} \text{ e}$$
$$Y = \{v \in V(G) : \mathrm{dist}(u, v) \text{ é ímpar}\}.$$

Claramente $\{X, Y\}$ é uma partição de $V(G)$. Resta mostrar que X e Y são conjuntos independentes.

Caracterização de grafos bipartidos

Seja u um vértice qualquer de G. Sejam

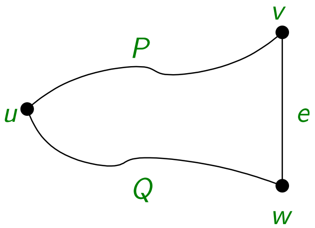
$$X = \{v \in V(G) : \mathrm{dist}(u, v) \text{ é par}\} \text{ e}$$
$$Y = \{v \in V(G) : \mathrm{dist}(u, v) \text{ é ímpar}\}.$$

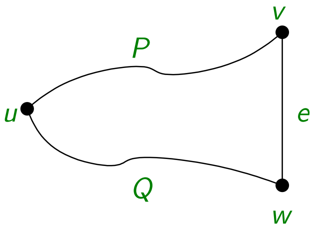
Claramente $\{X, Y\}$ é uma partição de $V(G)$. Resta mostrar que X e Y são conjuntos independentes.

Suponha por contradição que existe uma aresta $e = vw$ de G com ambos extremos em uma mesma parte.

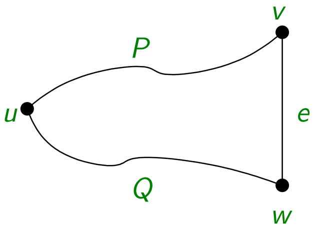
Caracterização de grafos bipartidos

Caracterização de grafos bipartidos





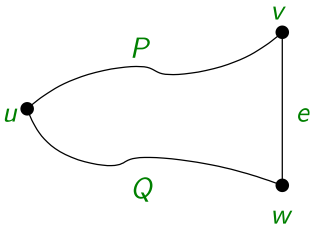
Seja P um uv-caminho mais curto e seja Q um uw-caminho mais curto.
Por definição de X e Y, tanto P quanto Q tem a **mesma paridade**.



Seja P um uv-caminho mais curto e seja Q um uw-caminho mais curto. Por definição de X e Y, tanto P quanto Q tem a **mesma paridade**.

Portanto, o passeio fechado $P \bullet (v, e, w) \bullet Q^{-1}$ é ímpar e pelo Teorema anterior, contém um ciclo ímpar, uma contradição.

Caracterização de grafos bipartidos



Seja P um uv-caminho mais curto e seja Q um uw-caminho mais curto. Por definição de X e Y, tanto P quanto Q tem a **mesma paridade**.

Portanto, o passeio fechado $P \bullet (v, e, w) \bullet Q^{-1}$ é ímpar e pelo Teorema anterior, contém um ciclo ímpar, uma contradição.

Portanto, X e Y são independentes e (X, Y) é uma bipartição de G. ■

Caracterização de grafos bipartidos

Caracterização de grafos bipartidos

- Segundo Lovász, o teorema de König é um exemplo de boa caracterização; note que isto é apenas um termo matemático, e não uma apreciação da qualidade do resultado.

- Segundo Lovász, o teorema de König é um exemplo de boa caracterização; note que isto é apenas um termo matemático, e não uma apreciação da qualidade do resultado.
- O que significa ser uma boa caracterização? O teorema fornece certificados "simples" tanto para a resposta SIM quanto NÃO.

Caracterização de grafos bipartidos

- Segundo Lovász, o teorema de König é um exemplo de boa caracterização; note que isto é apenas um termo matemático, e não uma apreciação da qualidade do resultado.
- O que significa ser uma boa caracterização? O teorema fornece certificados "simples" tanto para a resposta SIM quanto NÃO.
- Para verificar que um dado grafo G é bipartido, basta exibir uma bipartição de G.

Caracterização de grafos bipartidos

- Segundo Lovász, o teorema de König é um exemplo de boa caracterização; note que isto é apenas um termo matemático, e não uma apreciação da qualidade do resultado.
- O que significa ser uma boa caracterização? O teorema fornece certificados "simples" tanto para a resposta SIM quanto NÃO.
- Para verificar que um dado grafo G é bipartido, basta exibir uma bipartição de G.
- Para mostrar que G não é bipartido, basta exibir um ciclo ímpar cuja existência é garantida pelo teorema.

Caracterização de grafos bipartidos

- Segundo Lovász, o teorema de König é um exemplo de boa caracterização; note que isto é apenas um termo matemático, e não uma apreciação da qualidade do resultado.
- O que significa ser uma boa caracterização? O teorema fornece certificados "simples" tanto para a resposta SIM quanto NÃO.
- Para verificar que um dado grafo G é bipartido, basta exibir uma bipartição de G.
- Para mostrar que G não é bipartido, basta exibir um ciclo ímpar cuja existência é garantida pelo teorema.
- Compare isto com o problema de testar se dois grafos G e H são isomorfos para o qual não se conhece uma boa caracterização.

Referências

Consulte a Seção 1.2 (até a subseção *Bipartite graphs*) de West96 (os slides foram inspirados nesta seção). Outra alternativa é consultar as Seções 1.6 e 1.7 de BM76.

Referências

Estes slides não seguem estritamente nenhum dos livros indicados nas referências no site. Entretanto, durante sua preparação os seguintes livros foram os mais consultados:

BM76 Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., *Graph Theory with Applications*, American Elsevier, New York, 1976.

BM08 Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., *Graph Theory*, Springer, 2008.

West96 West, D. B., *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall,1996.