Problema 1

Sejam P_1 e P_2 dois problemas tais que $P_1 \propto_n P_2$ onde n é um parâmetro que mede o tamanho de uma instância de P_1. Suponha que $\Omega(h_1(n))$ e $\Omega(h_2(n))$ seja cotas inferiores de P_1 e P_2, respectivamente. Indique quais afirmações abaixo são verdadeiras (V) ou falsas (F). **Se não for possível chegar a uma conclusão, marque F.**

1. Todo algoritmo que resolve P_1 pode ser usado para resolver P_2.
2. Todo algoritmo que resolveP_2 pode ser usado para resolver P_1.
3. $h_2(n) \in \Omega(h_1(n))$, ou seja, P_2 tem cota inferior $\Omega(h_1(n))$.
4. $h_1(n) \in \Omega(h_2(n))$, ou seja, P_1 tem cota inferior $\Omega(h_2(n))$.
5. P_1 pode ser resolvido em tempo $O(h_2(n))$.
6. P_1 pode ser resolvido em tempo $O(h_1(n))$.

Solução

Sejam P_1 e P_2 dois problemas tais que $P_1 \propto_n P_2$ onde n é um parâmetro que mede o tamanho de uma instância de P_1. Suponha que $\Omega(h_1(n))$ e $\Omega(h_2(n))$ seja cotas inferiores de P_1 e P_2, respectivamente. Indique quais afirmações abaixo são verdadeiras (V) ou falsas (F). **Se não for possível chegar a uma conclusão, marque F.**

1. Todo algoritmo que resolve P_1 pode ser usado para resolver P_2. F
2. Todo algoritmo que resolve P_2 pode ser usado para resolver P_1. V
3. $h_2(n) \in \Omega(h_1(n))$, ou seja, P_2 tem cota inferior $\Omega(h_1(n))$. V
4. $h_1(n) \in \Omega(h_2(n))$, ou seja, P_1 tem cota inferior $\Omega(h_2(n))$. F
5. P_1 pode ser resolvido em tempo $O(h_2(n))$. F
6. P_1 pode ser resolvido em tempo $O(h_1(n))$. F

Problema 2

Dizemos que um ponto $p = (x_p, y_p)$ do plano **domina** um outro ponto $q = (x_q, y_q)$ do plano se $(x_p, y_p) \geq (x_q, y_q)$, ou seja, $x_p \geq x_q$ e $y_p \geq y_q$. Um ponto p é **maximal** em um conjunto de pontos P se $p \in P$ e nenhum ponto de $P - \{p\}$ domina p.

Considere os seguintes problemas:

`MAXIMAL`: dado um conjunto $P = \{(x_i, y_i) : i = 1, \ldots, n\}$ de n pontos no plano, devolver todos os pontos maximais de P.

`INTERVAL`: dado um conjunto $I = \{[s_i, t_i] : i = 1, \ldots, n\}$ de n intervalos da reta, encontrar todos os intervalos de I que **não** estão contidos em outro intervalo de I. (diferente da lista)

Mostre que $\texttt{INTERVAL} \propto_n \texttt{MAXIMAL}$ (redução de Turing).

Mostre que $\texttt{MAXIMAL} \propto_n \texttt{INTERVAL}$ (redução de Turing).
(Mais difícil)

Solução: $\texttt{INTERVAL} \propto_n \texttt{MAXIMAL}$

τ_I: Seja $I_V = \{[s_i, t_i] : i = 1, \ldots, n\}$ uma instância de INTERVAL.

Seja $I_M = \{(-s_i, t_i) : i = 1, \ldots, n\}$ a instância correspondente de MAXIMAL.

τ_S: Se S_M é a resposta de I_M, então devolva $S_V = \{[s_i, t_i] : (-s_i, t_i) \in S_M\}$.

Complexidade τ_I e τ_S: $O(n)$.

Por que isto funciona?

$$[s_i, t_i] \subseteq [s_j, t_j] \Leftrightarrow s_j \leq s_i \leq t_i \leq t_j \Leftrightarrow (-s_i, t_i) \leq (-s_j, t_j)$$

Ou seja, $[s_i, t_i]$ está contido em outro intervalo $[s_j, t_j]$ se, e somente se, $(-s_i, t_i)$ é dominado por $(-s_j, t_j)$.

Solução: MAXIMAL $\propto_n$ INTERVAL

τ_I: Seja $I_M = \{(x_i, y_i) : i = 1, \ldots, n\}$ uma instância de MAXIMAL. Não é possível fazer a redução inversa $(x_i, y_i) \mapsto [-x_i, y_i]$ pois $[-x_i, y_i]$ pode não ser um intervalo.

Escolha $M > 0$ grande o suficiente tal que $-x_i \leq y_i + M$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Seja $I_V = \{[-x_i, y_+ M] : i = 1, \ldots, n\}$ a instância correpondente de INTERVAL.

τ_S: Se S_V é a resposta de I_V, então devolva $S_M = \{(x_i, y_i) : [-x_i, y_i + M] \in S_V\}$.

Complexidade τ_I e τ_S: $O(n)$.

Por que isto funciona?

$$(x_i, y_i) \leq (x_j, y_j) \Leftrightarrow -x_j \leq -x_i \text{ e } y_i + M \leq y_j + M$$
$$\Leftrightarrow [-x_i, y_i + M] \leq [-x_j, y_j + M]$$

Problema 3

Um caminho/ciclo (simples) em um grafo G é **Hamiltoniano** se passa por todos os vértices de G. Considere os problemas:

`CaH`: dado um grafo não-orientado G, decidir se G possui um caminho Hamiltoniano.

`CiH`: dado um grafo não-orientado G, decidir se G possui um ciclo Hamiltoniano.

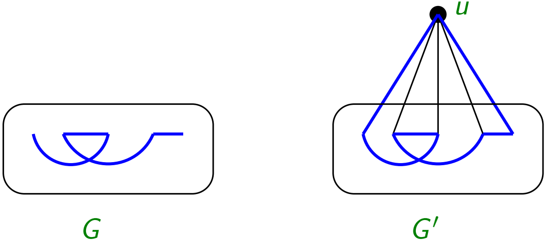
Suponha que `CaH` é NP-completo. Prove que `CiH` é NP-completo.

Solução: $\texttt{CaH} \propto_{\text{poli}} \texttt{CiH}$

τ_I: Seja G uma instância de CaH. Seja G' o grafo obtido de G acrescentando um vértice novo u adjacente a todos os vértices de G; esta é a instância correspondente de CiH.

τ_S: devolva SIM se a resposta de G' for SIM e devolva NÃO, caso contrário (redução de Karp).

Por que isto funciona?



Se $C = (u, v_1, \ldots, v_n, u)$ é um ciclo Hamiltoniano de G', então $(v_1, \ldots, v_n)$ é um caminho Hamiltoniano de G e vice-versa.