MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II
Lista de Exercícios 2

Os exercícios sem marcas são (ou deveriam ser) relativamente simples. Os exercícios marcados com (*) exigem alguma reflexão.... Os exercícios marcados com (**) são mais difíceis.

1. Mostre que os grafos da Figura 1 não são isomorfos.

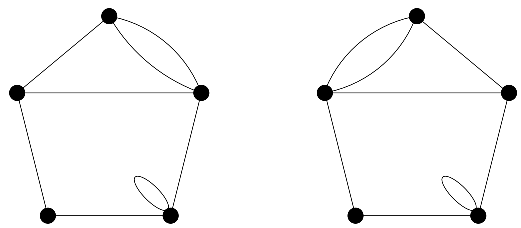

Figura 1: Grafos não isomorfos.

2. Determine:

   (a) o número de isomorfismos entre os grafos G e H da Figura 2, e

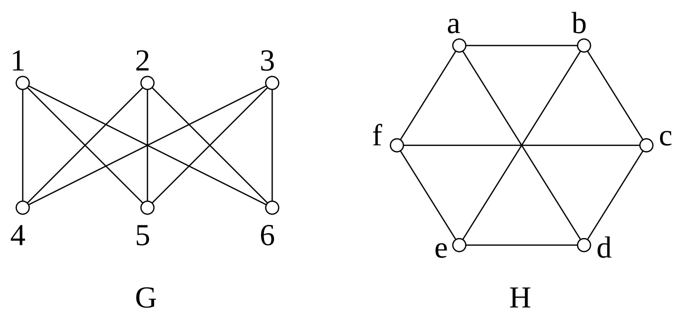

Figura 2: Grafos simples isomorfos.

3. Desenhe:

   (a) todos os grafos simples não isomorfos de ordem 4,

   (b) todos os grafos simples cúbicos não isomorfos de ordem no máximo 8.

4. Mostre que o n-hipercubo Q_n e o reticulado booleano BL_n são isomorfos (veja a Lista 1).

5. Um grafo simples G é *auto-complementar* se $G \cong \bar{G}$. Mostre que

   (a) P_4 e C_5 são auto-complementares,

   (b) todo grafo auto-complementar é conexo,

(c) se G é auto-complementar, então G possui $4k$ ou $4k+1$ vértices, para algum inteiro $k \geq 0$,

(d) todo grafo auto-complementar com $4k+1$ vértices possui um vértice de grau $2k$.

6. Seja G o subgrafo de Q_{2k+1} (o $(2k+1)$-cubo) induzido pelos vértices cuja quantidade de zeros e uns diferem de 1 (ou seja, contém k zeros e $k+1$ uns, ou contém $k+1$ zeros e k uns). Prove que G é regular e calcule o número de vértices, o número de arestas e a cintura de G. **Observação:** a cintura de G é o comprimento de um circuito mais curto em G. Para mostrar que a cintura de G é igual a ℓ, você precisa (i) exibir um ciclo de comprimento ℓ e (ii) mostrar que não existe ciclo de comprimento menor que ℓ.

7. Mostre que para todo grafo G e todo subconjunto S de $V(G)$ vale que:

$$\sum_{v \in S} d(v) = 2|E(G[S])| + |\partial(S)|.$$

Você pode fazer por contagem. Se quiser ser mais preciso, use indução no tamanho de S.

8. Prove ou mostre um contra-exemplo para cada uma das afirmações abaixo:

   (a) Todo caminho é uma trilha.

   (b) Um grafo é conexo se e somente se algum de seus vértices é adjacente a todos os outros.

   (c) Todo passeio fechado contém um ciclo.

   (d) Todo subgrafo de um grafo bipartido é bipartido.

   (e) Todo subgrafo de um grafo completo é completo.

   (f) Todo subgrafo induzido de um grafo completo é completo.

   (g) Todo subgrafo de um grafo conexo é conexo.

   (h) Todo subgrafo induzido de um grafo conexo é conexo.

9. (a) Mostre que todo grafo k-regular com cintura quatro tem pelo menos $2k$ vértices. **Dica:** tome um vértice arbitrário u e olhe sua vizinhança. Com a informação da cintura, deduza algo sobre $N(u)$. Repita o argumento para cada vértice em $N(u)$.

   (b) Para todo inteiro $k \geq 2$, determine todos os grafos k-regulares com cintura quatro que têm exatamente $2k$ vértices.

10. (a) Mostre que todo grafo k-regular com cintura cinco tem pelo menos k^2+1 vértices.

    (b) Para $k = 2, 3$, determine todos os grafos k-regulares com cintura cinco que tem exatamente k^2+1 vértices.

11. Seja W um passeio fechado que não contém um ciclo. Mostre que alguma aresta aparece repetida **consecutivamente** em W (em direções opostas).

12. (*) Seja e uma aresta que aparece um número ímpar de vezes em um passeio fechado W. Mostre que W contém um ciclo do qual e faz parte.

13. (a) Mostre um contra-exemplo para a seguinte afirmação: se W é um passeio ímpar de u a v em um grafo G, então W contém um caminho ímpar de u a v.

    (b) Prove a seguinte afirmação: se W é um passeio ímpar de u a v em um grafo G, então W contém um caminho ímpar de u a v ou contém um ciclo ímpar.

14. Prove que se um grafo simples G é desconexo então seu complemento $\bar{G}$ é conexo. A recíproca é verdadeira?

15. (*) Mostre que se G é um grafo simples com n vértices e mais que $\binom{n-1}{2}$ arestas, então G é conexo. Mostre que isso é o melhor possível exibindo para cada $n \geq 2$ um grafo simples desconexo com n vértices e exatamente $\binom{n-1}{2}$ arestas.

16. (*) Mostre que se G é um grafo simples tal que $\delta(G) > (n-2)/2$, então G é conexo. Mostre que isto é o melhor possível exibindo para cada $n \geq 2$ par um grafo simples desconexo com $\delta(G) = (n-2)/2$.