# MC558 — Análise de Algoritmos II

Cid C. de Souza  Cândida N. da Silva  Orlando Lee

25 de abril de 2023

# Antes de mais nada...

- Uma versão anterior deste conjunto de slides foi preparada por Cid Carvalho de Souza e Cândida Nunes da Silva para uma instância anterior desta disciplina.
- O que vocês tem em mãos é uma versão modificada preparada para atender a meus gostos.
- Nunca é demais enfatizar que o material é apenas um guia e não deve ser usado como única fonte de estudo. Para isso consultem a bibliografia (em especial o CLR ou CLRS).

Orlando Lee

# Agradecimentos (Cid e Cândida)

- Várias pessoas contribuíram direta ou indiretamente com a preparação deste material.
- Algumas destas pessoas cederam gentilmente seus arquivos digitais enquanto outras cederam gentilmente o seu tempo fazendo correções e dando sugestões.
- Uma lista destes "colaboradores" (em ordem alfabética) é dada abaixo:
  - Célia Picinin de Mello
  - José Coelho de Pina
  - Orlando Lee
  - Paulo Feofiloff
  - Pedro Rezende
  - Ricardo Dahab
  - Zanoni Dias

# Árvore Geradora Mínima

# Árvore Geradora Mínima

- Suponha que queremos resolver o seguinte problema:
  dado um conjunto de computadores, onde cada par de computadores pode ser ligado usando uma quantidade de fibra ótica, encontrar uma rede interconectando-os que use a menor quantidade de fibra ótica possível.

- Este problema pode ser modelado por um problema em grafos não orientados ponderados onde os vértices representam os computadores, as arestas representam as conexões que podem ser construídas e o peso/custo de uma aresta representa a quantidade de fibra ótica necessária.

# Árvore Geradora Mínima

- Nessa modelagem, o problema que queremos resolver é encontrar um subgrafo gerador (que contém todos os vértices do grafo original), conexo (para garantir a interligação de todas os computadores) e cuja soma dos custos de suas arestas seja a menor possível.
- Obviamente, o problema só tem solução se o grafo for conexo. Daqui pra frente vamos supor que o grafo de entrada é conexo.
- Além disso, o sugrafo gerador procurado é sempre uma árvore (supondo que os pesos são positivos).

# Árvore Geradora Mínima

## Problema da Árvore Geradora Mínima

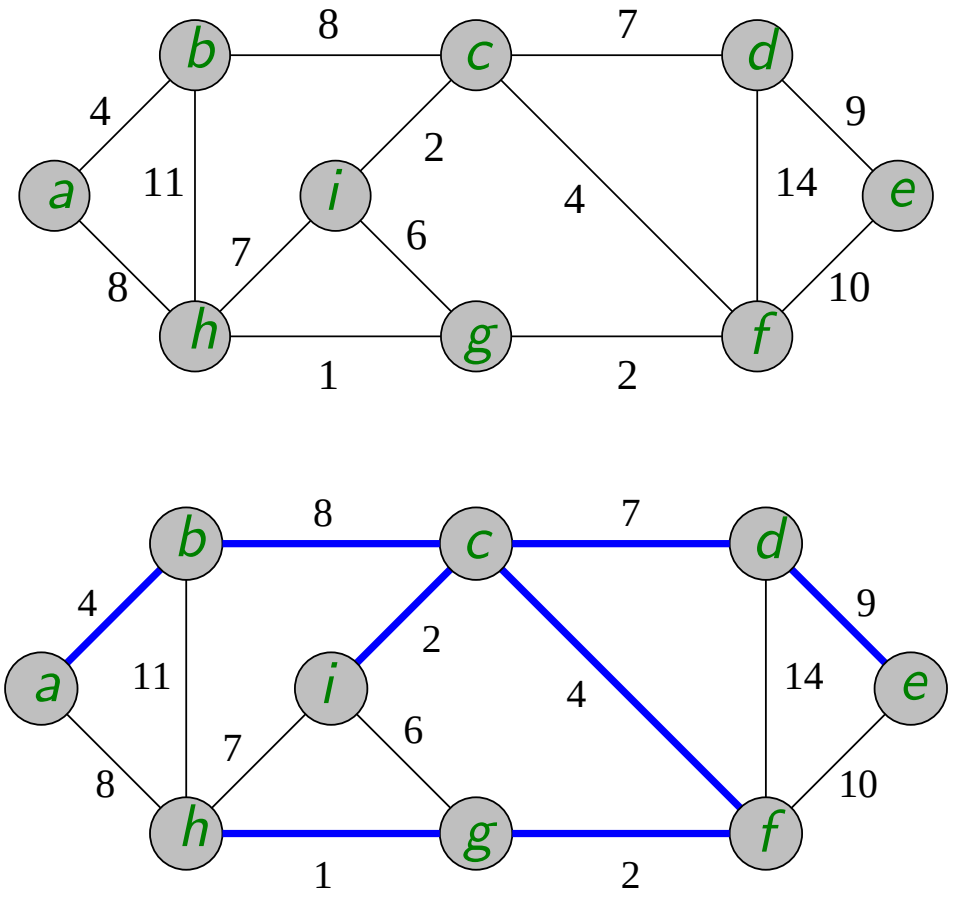
Entrada: grafo conexo $G = (V, E)$ com pesos $\omega(u, v)$ para cada aresta $(u, v)$.

Saída: subgrafo gerador conexo $T$ de $G$ cujo peso total

$$\omega(T) = \sum_{(u,v) \in T} \omega(u, v)$$

seja o menor possível.

# Exemplo


b
c
d
a
i
e
h
g
f
8
7
4
9
2
11
14
4
7
6
8
10
1
2
b
c
d
a
i
e
h
g
f
8
7
4
9
2
11
14
4
7
6
8
10
1
2

# Árvore Geradora Mínima

- Aqui trataremos do caso em que $\omega \geq 0$, ou seja, **não há arestas de peso negativo**.
- Depois pense em como o problema poderia ser resolvido se houvesse arestas de peso negativo na entrada.

# Árvore Geradora Mínima

- Veremos dois algoritmos para resolver o problema de encontrar uma AGM:
  - algoritmo de Prim
  - algoritmo de Kruskal
- Ambos algoritmos usam estratégia gulosa. Eles são exemplos clássicos de algoritmos gulosos.

# Algoritmo genérico

- A estratégia gulosa usada baseia-se em um algoritmo genérico que constrói uma AGM incrementalmente.
- O algoritmo mantém um conjunto de arestas $A$ que satisfaz o seguinte invariante:

  | No início de cada iteração, $A$ está contido em uma AGM. |
  |---|

- Em cada iteração, o algoritmo encontra uma aresta $(u, v)$ tal que $A' = A \cup \{(u, v)\}$ também satisfaz o invariante.

  Uma tal aresta é chamada aresta segura (para $A$).

# Algoritmo genérico

AGM-Genérico$(G, \omega)$

1 $A \leftarrow \emptyset$
2 **enquanto** $A$ não é uma árvore geradora
3 Encontre uma aresta segura $(u, v)$ para $A$
4 $A \leftarrow A \cup \{(u, v)\}$
5 **devolva** $A$

Obviamente o "algoritmo" está correto!

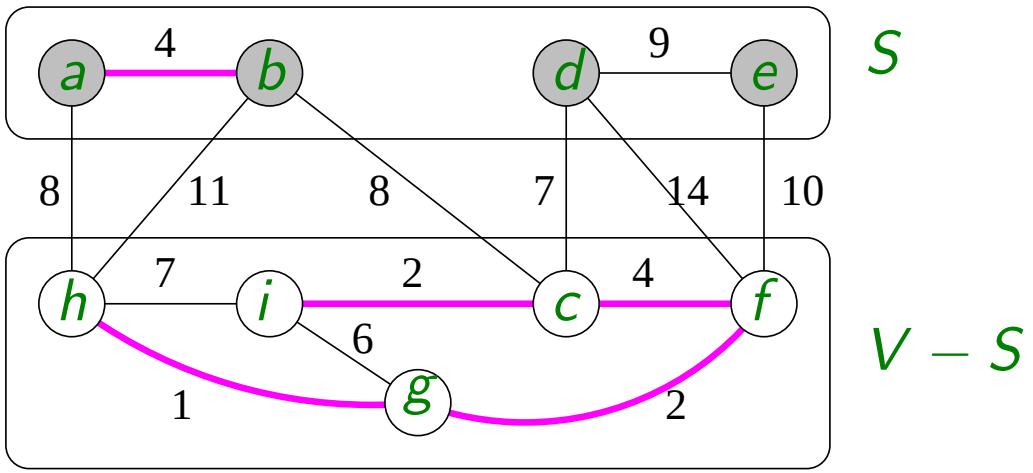
Note que nas linhas 2–4 $A$ está propriamente contido em uma AGM, digamos $T$. Logo, existe uma aresta segura $(u, v)$ em $E[T] - A$.

Naturalmente, para que isso seja um algoritmo de verdade, é preciso especificar como **encontrar** uma aresta segura.

# Como encontrar arestas seguras

Considere um grafo $G = (V, E)$ e seja $S \subset V$.

Denote por $\delta(S)$ o conjunto de arestas de $G$ com um extremo em $S$ e outro em $V - S$. Dizemos que um tal conjunto é um corte.



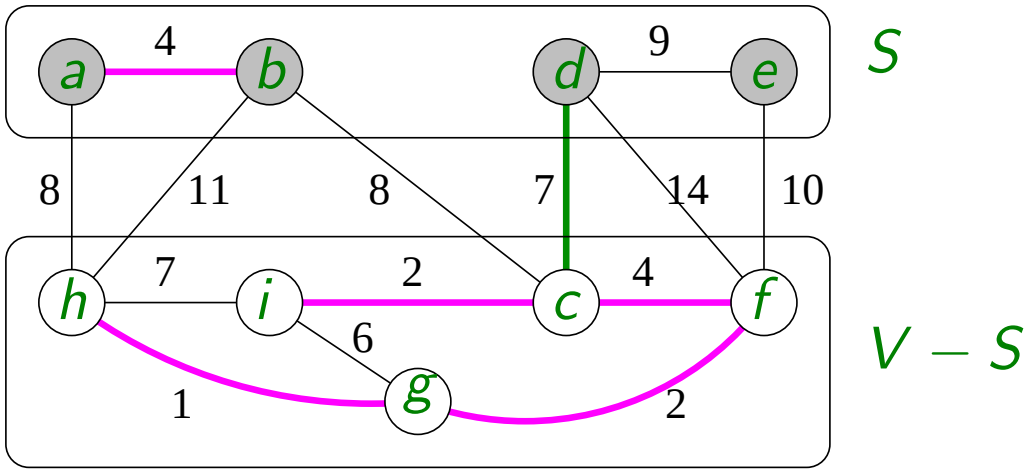

Um corte $\delta(S)$ **respeita** um conjunto $A$ de arestas se não contém nenhuma aresta de $A$.

# Como encontrar arestas seguras

Uma aresta de um corte $\delta(S)$ é leve se tem o menor peso entre as arestas do corte.

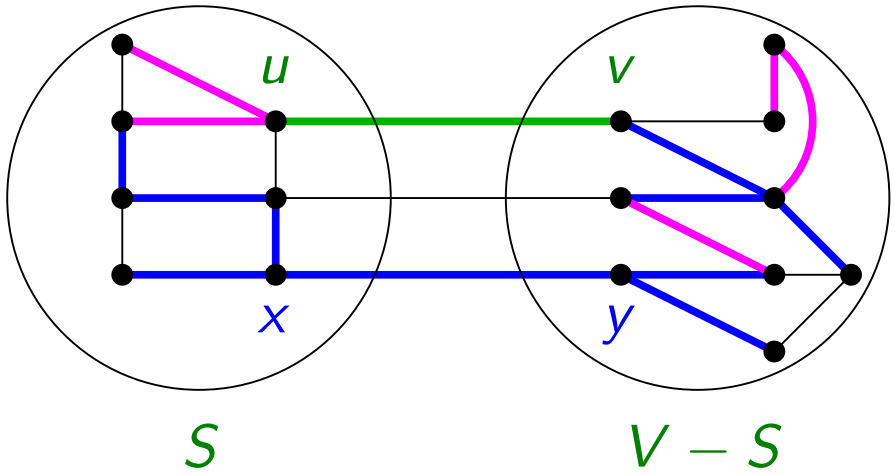
**Teorema 23.1: (CLRS)**

Seja $(G, \omega)$ um grafo com pesos nas arestas. Seja $A$ um subconjunto de arestas contido em uma AGM. Seja $\delta(S)$ um corte que respeita $A$ e $(u, v)$ uma aresta leve desse corte. Então $(u, v)$ é uma **aresta segura**.



# Prova do Teorema 23.1

Seja $T$ uma AGM que contém $A$. Seja $\delta(S)$ um corte que respeita $A$ e seja $(u, v)$ uma aresta leve deste corte.

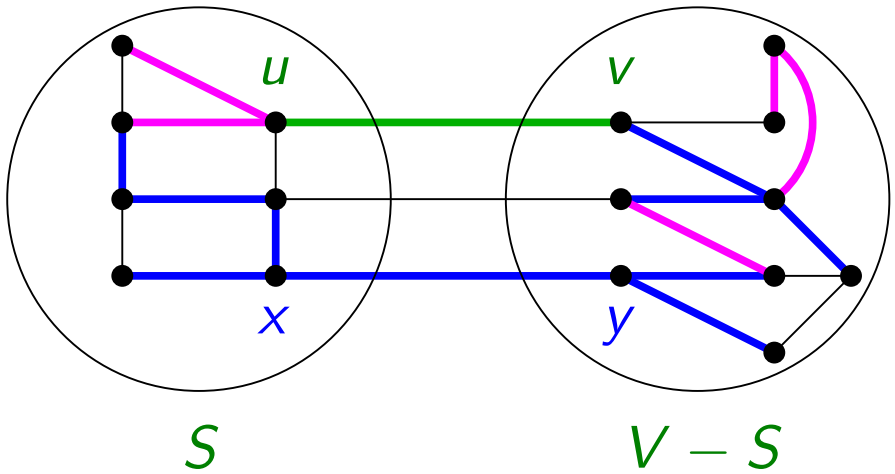



Suponha que $(u, v)$ **não** é uma aresta de $T$.

Construiremos uma AGM $T'$ que contém $A \cup \{(u, v)\}$ e daí segue que $(u, v)$ é segura.

# Prova do Teorema 23.1

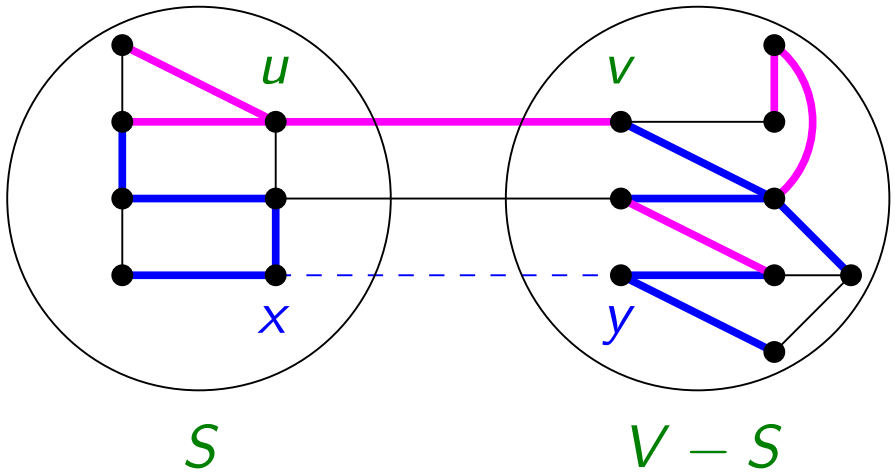
Existe um único caminho $P$ de $u$ a $v$ em $T$. Como $u$ a $v$ estão em lados opostos do corte $\delta(S)$, pelo menos uma aresta de $P$ pertence ao corte.




Seja $(x, y)$ uma tal aresta. Note que $(x, y)$ não pertence a $A$ pois o corte $\delta(S)$ respeita $A$.

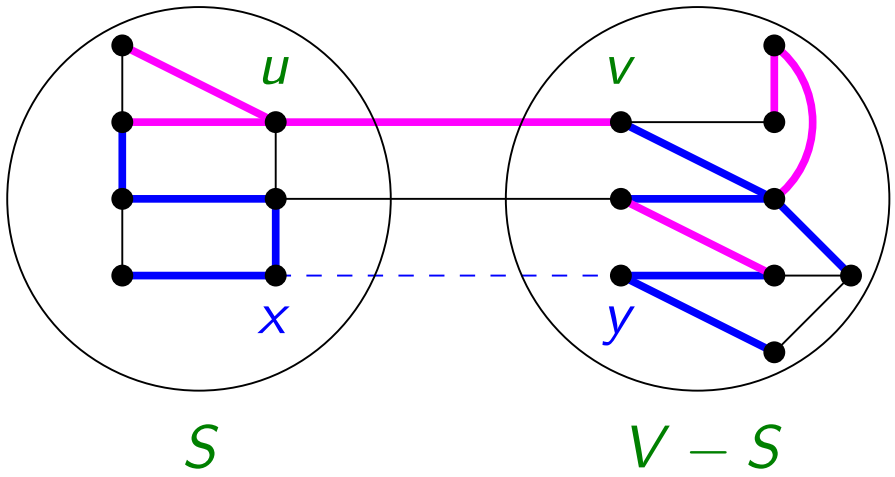
# Prova do Teorema 23.1

Temos que $T' := T - \{(x, y)\} \cup \{(u, v)\}$ é uma árvore geradora.




Mostraremos que $T'$ é uma AGM.

# Prova do Teorema 23.1




Como $(u, v)$ é uma aresta leve do corte $\delta(S)$ e $(x, y)$ pertence ao corte, temos que $\omega(u, v) \leq \omega(x, y)$. Assim,

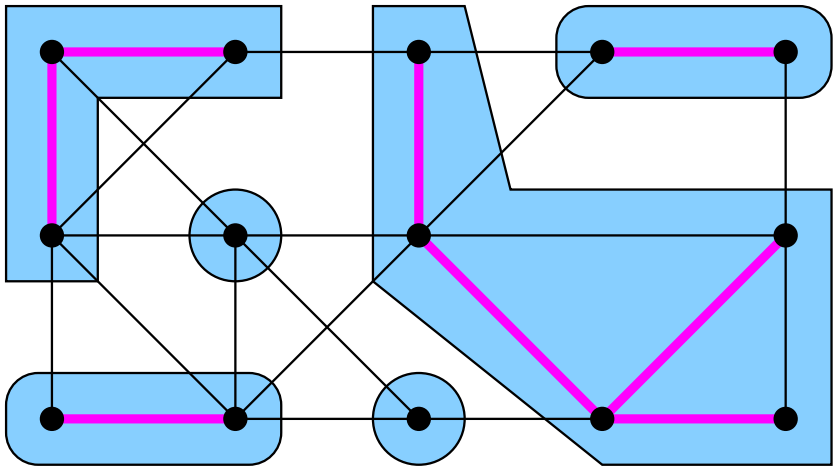
$$\omega(T') = \omega(T) - \omega(x, y) + \omega(u, v) \leq \omega(T).$$

Como $T$ é uma AGM, então $\omega(T) \leq \omega(T')$. Logo, $T'$ é uma AGM. Além disso, $T'$ contém $A \cup \{(u, v)\}$ e portanto, $(u, v)$ é uma aresta segura. Isto termina a prova. ■

# Como encontrar arestas seguras

## Corolário 23.2 (CLRS)

Seja $G$ um grafo com pesos nas arestas dado por $\omega$. Seja $A$ um subconjunto de arestas contido em uma AGM. Seja $C$ um componente (árvore) de $G_A = (V, A)$. Se $(u, v)$ é uma aresta leve de $\delta(C)$, então $(u, v)$ é segura para $A$.



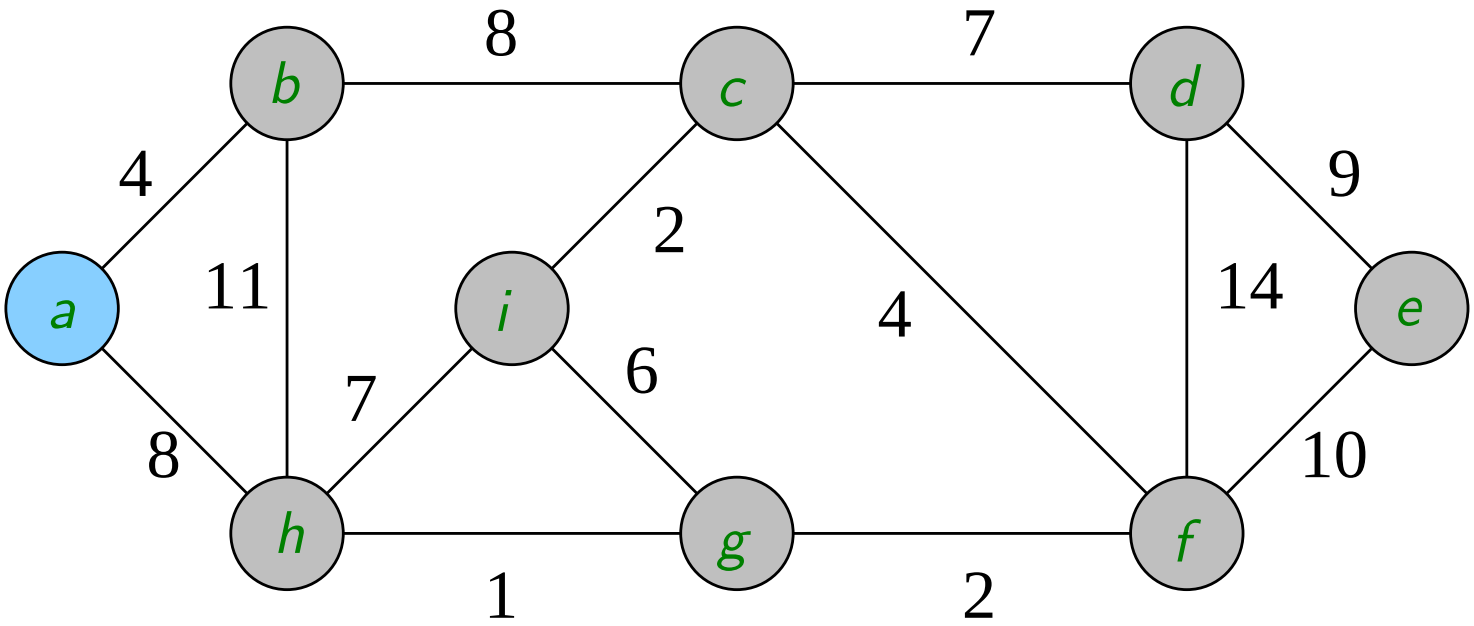
Os algoritmos de Prim e Kruskal são especializações do algoritmo genérico e fazem uso do Corolário 23.2.

# O algoritmo de Prim

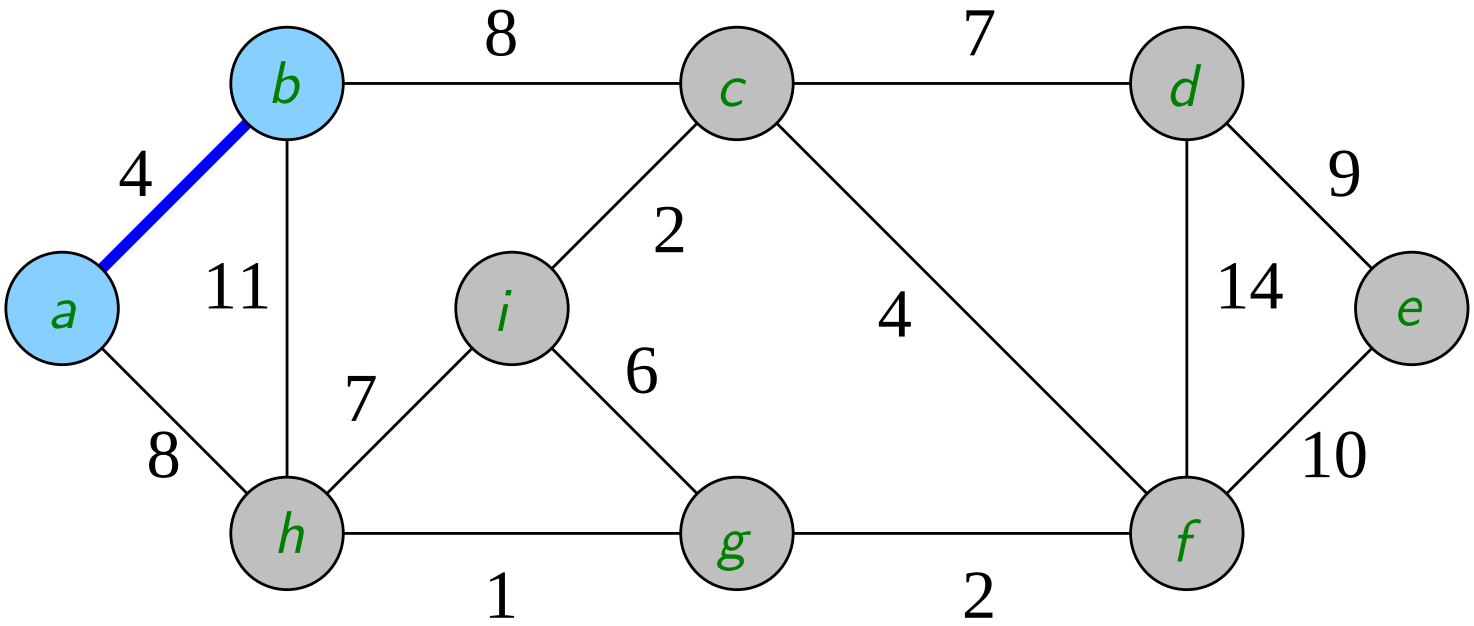
- No algoritmo de Prim, $A$ é o conjunto de arestas de uma árvore com raiz $r$ (escolhido arbitrariamente no início). Inicialmente, $A$ é vazio.
- Em cada iteração, o algoritmo considera o corte $\delta(S)$ onde $S$ é o conjunto de vértices que são extremos de $A$. Se $A = \emptyset$ então $S = \{r\}$.
- Ele encontra uma aresta leve $(u, v)$ neste corte, acrescenta-a ao conjunto $A$ e começa outra iteração.
  Isto é repetido até que $A$ seja uma árvore geradora.

Um detalhe de implementação importante é como encontrar eficientemente uma aresta leve no corte.

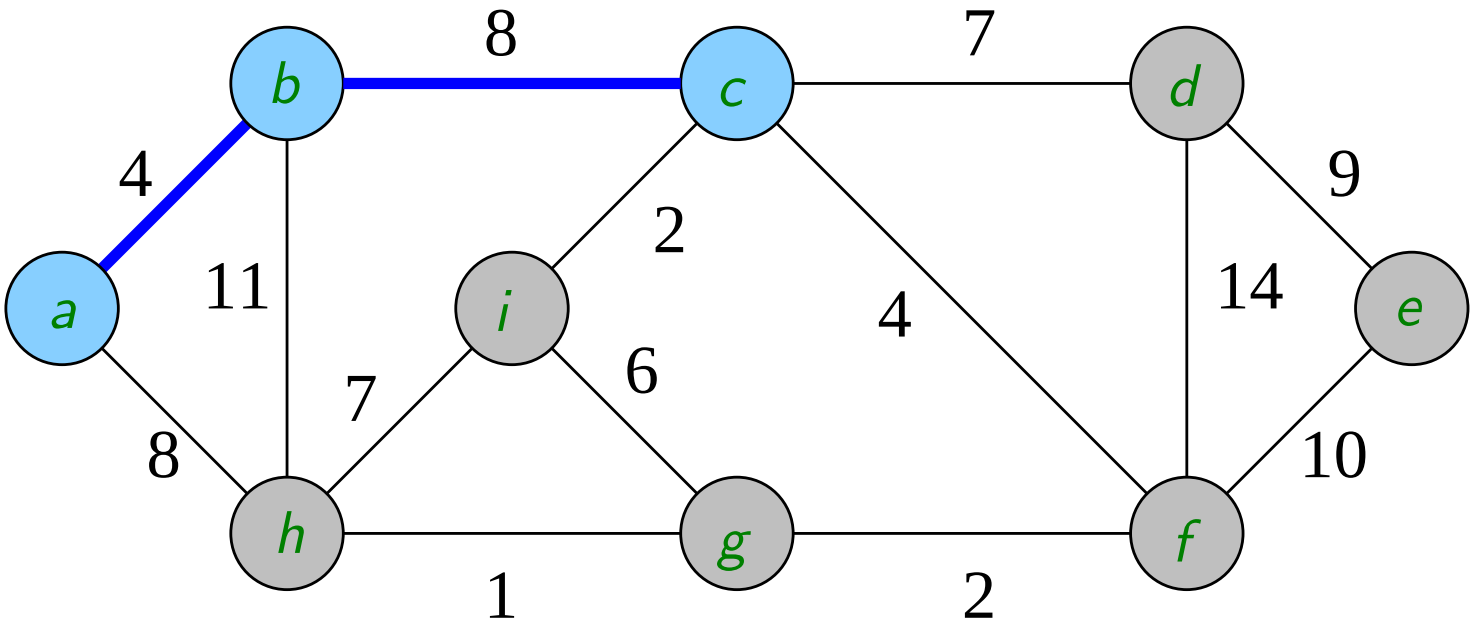
# O algoritmo de Prim



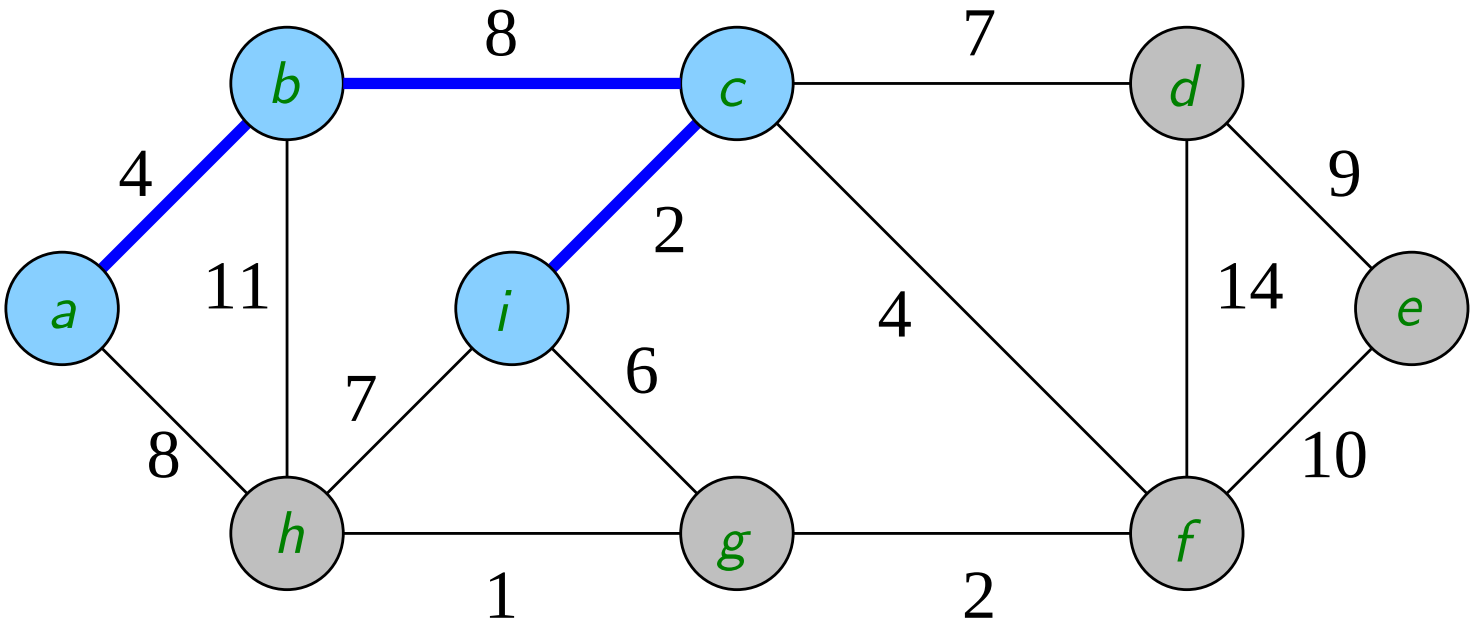
# O algoritmo de Prim



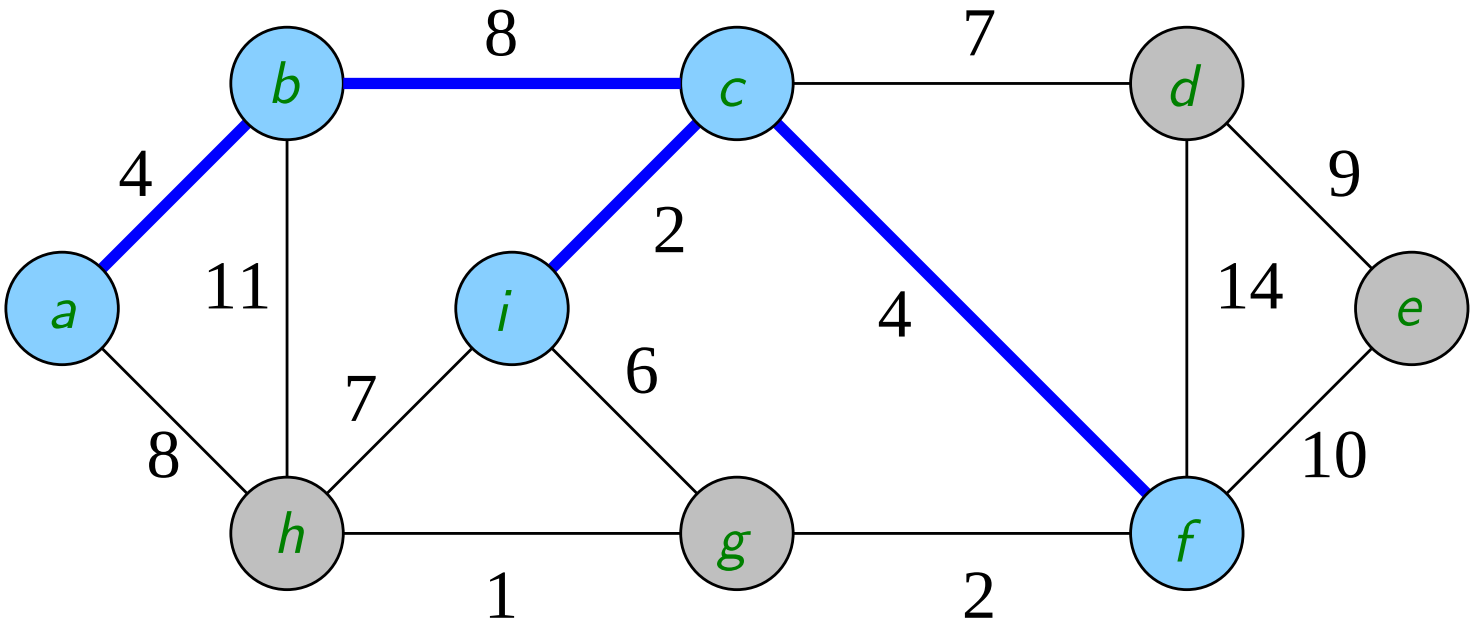
# O algoritmo de Prim



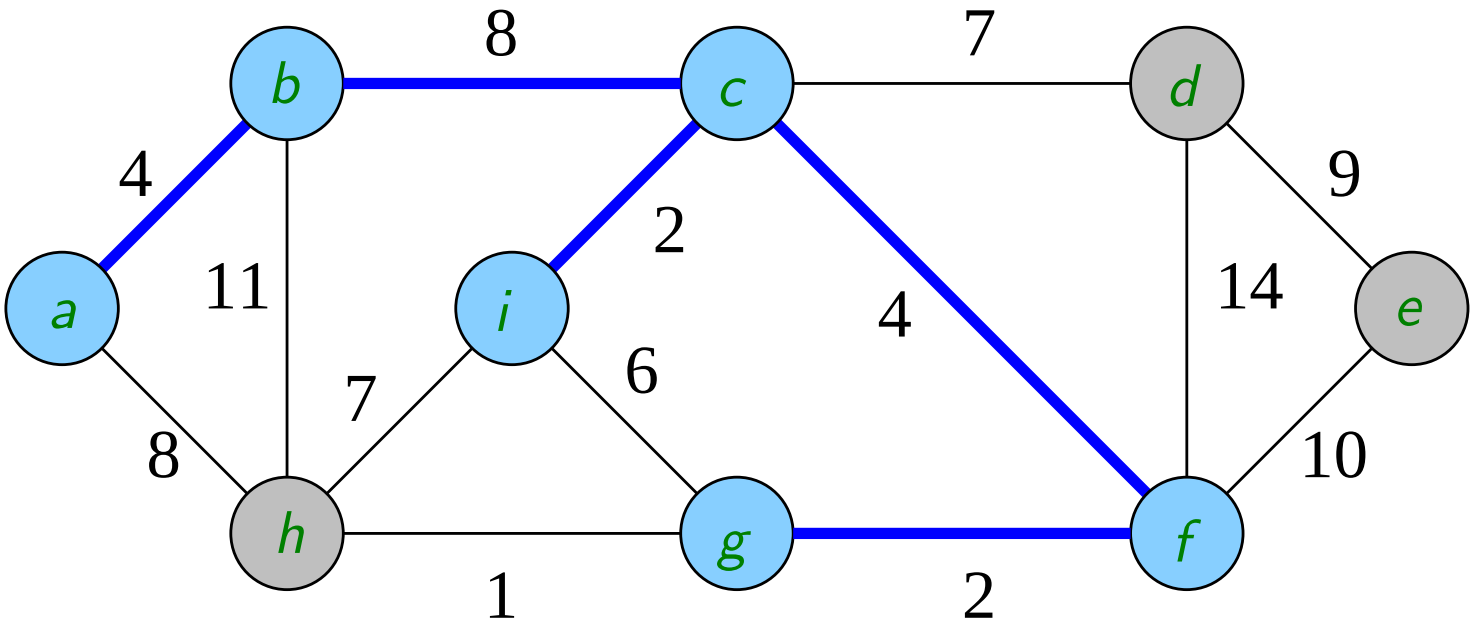
# O algoritmo de Prim



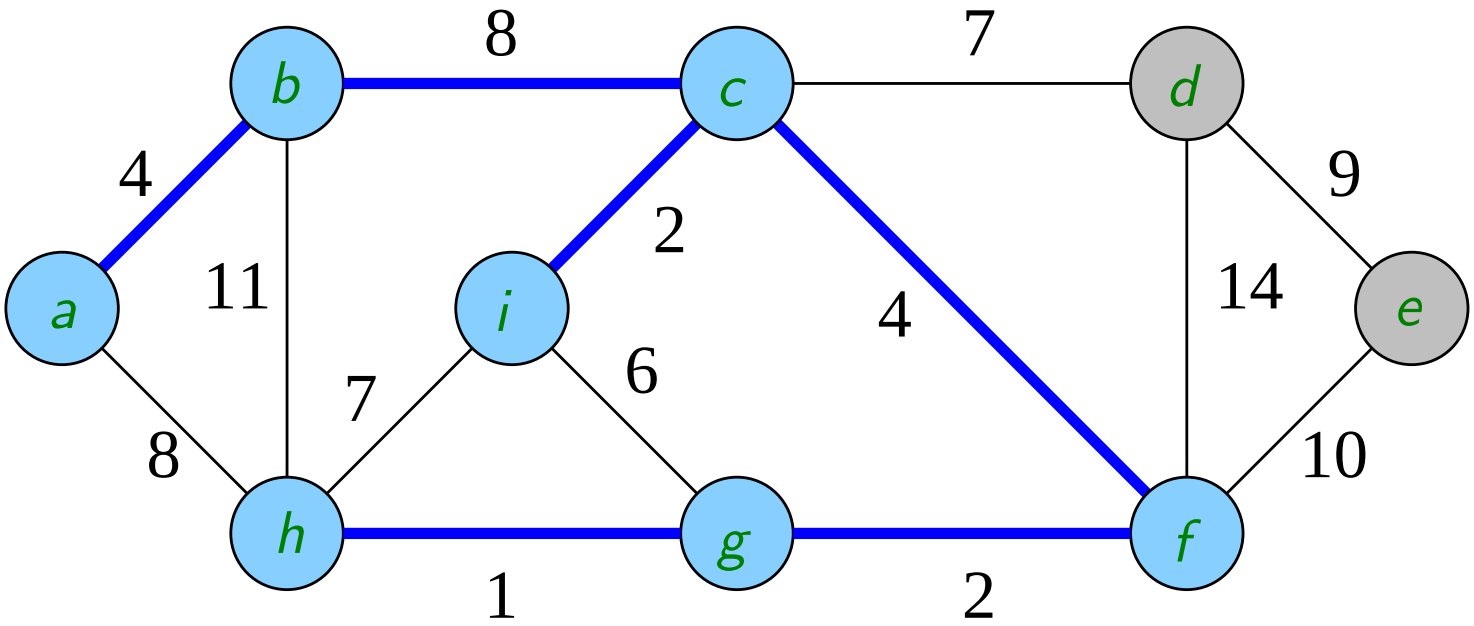
# O algoritmo de Prim



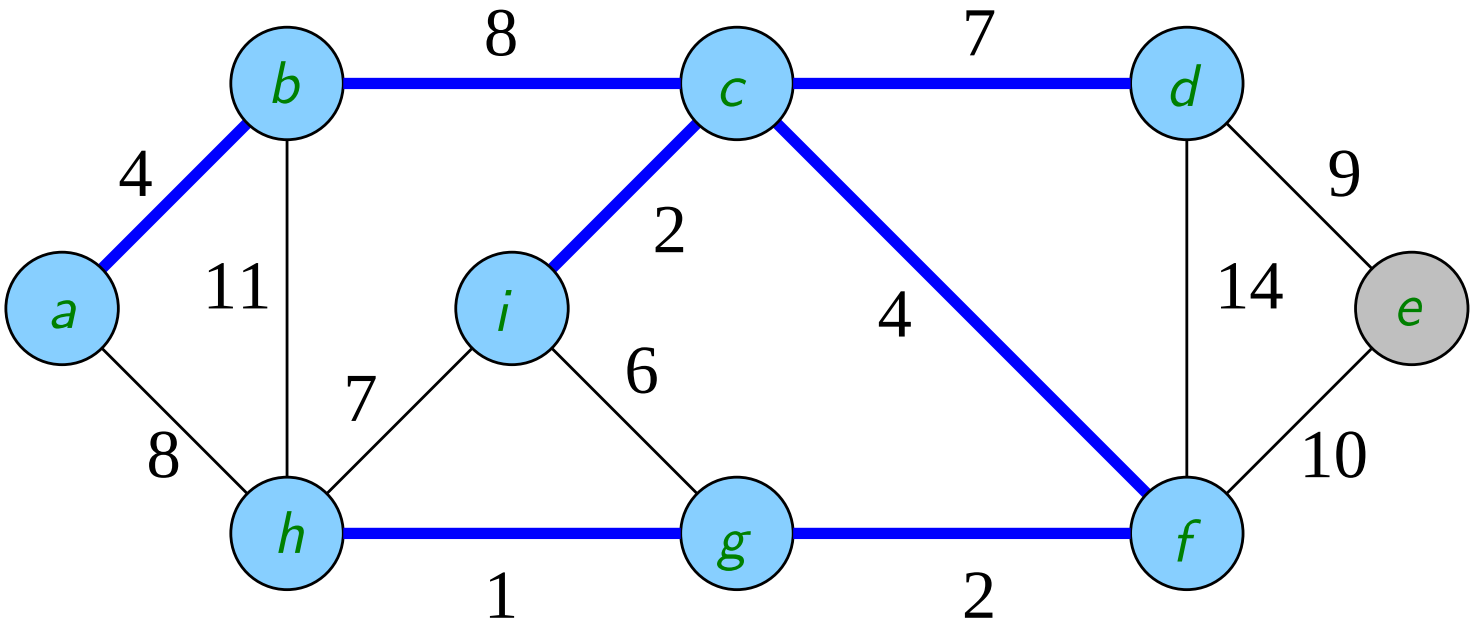
# O algoritmo de Prim



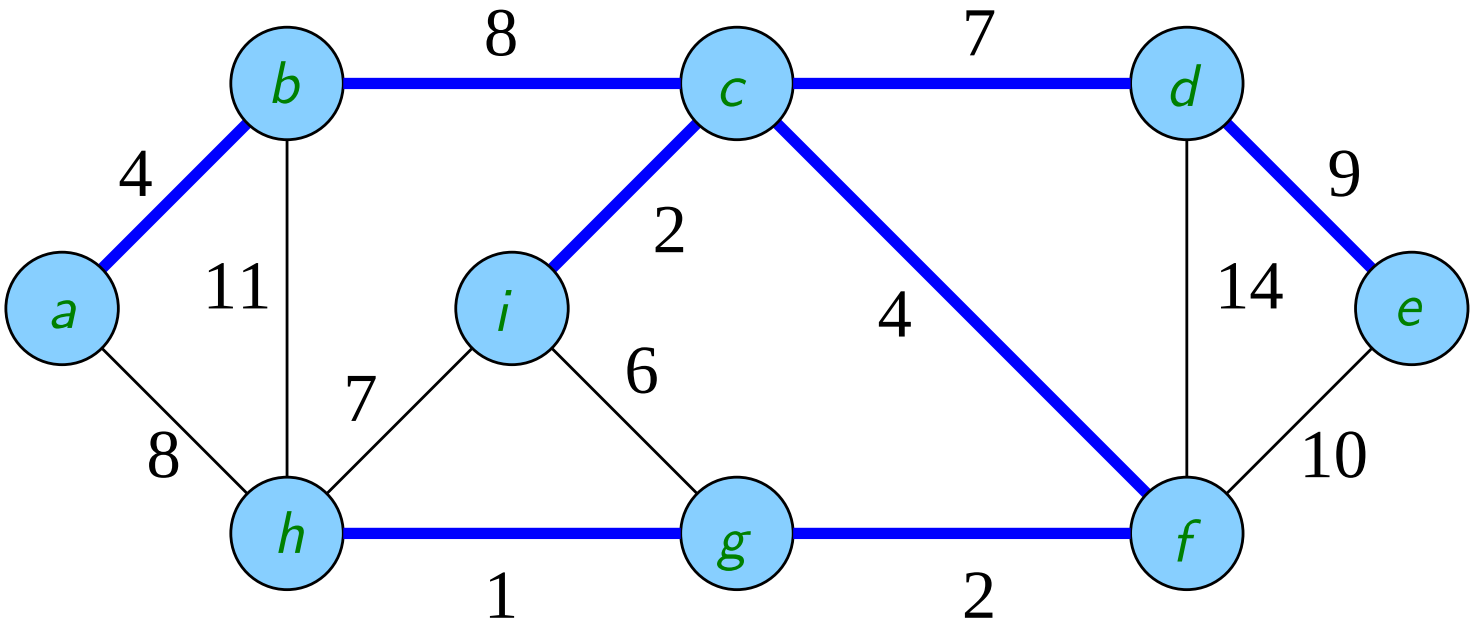
# O algoritmo de Prim



# O algoritmo de Prim



# O algoritmo de Prim



# O algoritmo de Prim

O algoritmo mantém durante sua execução as seguintes informações:

- Todos os vértices que não estão na árvore estão em uma fila de prioridade (de mínimo) $Q$.
- Cada vértice $v$ em $Q$ tem uma chave $\mathrm{key}[v]$ que indica o menor peso de qualquer aresta ligando $v$ a algum vértice $u$ da árvore — neste caso, $\pi[v] = u$. Se não existir nenhuma aresta, então $\mathrm{key}[v] = \infty$ e $\pi[v] = NIL$.

  Logo, uma **aresta leve** do corte $\delta(S)$ corresponde a alguma aresta $(\pi[v], v)$ com $\mathrm{key}[v]$ mínimo.
- A variável $\pi[u]$ indica o pai de $u$ na árvore. Então

$$A = \{(u, \pi[u]) \,:\, u \in V - \{r\} - Q,\ \pi[u] \neq \mathrm{NIL}\}.$$

# O algoritmo de Prim

```
AGM-PRIM(G, ω, r)
 1  para cada u ∈ V[G] faça
 2      key[u] ← ∞
 3      π[u] ← NIL
 4  key[r] ← 0
 5  Q ← V[G]
 6  enquanto Q ≠ ∅ faça
 7      u ← EXTRACT-MIN(Q)
 8      para cada v ∈ Adj[u]
 9          se v ∈ Q e  w(u, v) < key[v] então
10              π[v] ← u
11              key[v] ← w(u, v)
```

# Corretude do algoritmo de Prim

O algoritmo mantém os seguintes invariantes.

No início de cada iteração das linhas 6–11:

- $A = \{(u, \pi[u]) : u \in V - \{r\} - Q,\ \pi[u] \neq \text{NIL}\}$.
- O conjunto de vértices da árvore é $V[G] - Q$.
- Para cada $v \in Q$, se $\pi[v] \neq \text{NIL}$, então $\text{key}[v]$ é o peso de uma aresta $(v, \pi[v])$ de menor peso ligando $v$ a um vértice $\pi[v]$ na árvore.

Esses invariantes garantem que o algoritmo sempre escolhe uma aresta segura para acrescentar a $A$ e portanto, o algoritmo está correto.

# Complexidade do algoritmo de Prim

Obviamente, a complexidade de AGM-Prim depende de como a fila de prioridade $Q$ é implementada.

As operações que precisamos são:

- Insert (linhas 1– 5)
- Extract-Min
- Decrease-Key

**Observação:** como $G$ é conexo, temos que $V = O(E)$ e portanto, $O(V + E) = O(E)$.

# Complexidade do algoritmo de Prim

- As linhas 1–5 correspondem a $|V|$ chamadas a INSERT.
- O laço da linha 6 é executado $O(V)$ vezes.
  Total: $O(V)$ chamadas a EXTRACT-MIN.
- O laço das linhas 8–11 é executado $O(V + E) = O(E)$ vezes no total.
  O teste de pertinência a $Q$ pode ser feito em tempo constante com um **vetor booleano**.
  Ao atualizar uma chave na linha 11 é feita uma *chamada implícita* a DECREASE-KEY.
  Total: $O(E)$ chamadas a DECREASE-KEY.
- **Tempo total**:
  $O(V)$ INSERT + $O(V)$ EXTRACT-MIN +
  $O(E)$ DECREASE-KEY

# Complexidade do algoritmo de Prim

**Tempo total**

$O(V)$ INSERT + $O(V)$ EXTRACT-MIN +
$O(E)$ DECREASE-KEY

Vejamos o que acontece se implementarmos $Q$ como um min-heap.

- INSERT consome tempo $O(\lg V)$ resultando em tempo $O(V \lg V)$ no total. Na verdade, é possível inicializar o min-heap em tempo $O(V)$;
- EXTRACT-MIN consome tempo $O(\lg V)$;
- DECREASE-KEY consome tempo $O(\lg V)$.
- O tempo total é $O(V + V \lg V + E \lg V) = O(E \lg V)$.

# Custo amortizado

- Descreveremos superficialmente outra estrutura de dados que pode ser usada no lugar de min-heaps. Para tanto, apresentamos o conceito de custo amortizado de uma operação.
- Suponha que $S$ é uma estrutura de dados abstrata e $p(S)$ é uma operação que pode ser executada sobre $S$. Por exemplo, inserir ou remover um elemento de $S$ (pode haver mais parâmetros).

# Custo amortizado

- Suponha que durante a execução de um algoritmo foram feitas $m$ chamadas a $p(S)$. Se o tempo total de todas as operações $p$ durante a execução do algoritmo é $T(n)$ ($n = |S|$) então o custo (tempo) amortizado de $p$ é $T(n)/m$.
- Por exemplo, se $T(n) = 4n$ e $m = 2n$ então o custo amortizado é $2$. Note que isto não significa que a operação gasta tempo constante, mas apenas que em média o tempo gasto em cada execução de $p$ é constante.

# Complexidade do algoritmo de Prim

Pode-se fazer melhor usando uma estrutura de dados chamada *heap de Fibonacci* que guarda $|V|$ elementos e suporta as seguintes operações:

- EXTRACT-MIN – $O(\lg V)$,
- DECREASE-KEY – tempo amortizado $O(1)$.
- INSERT – tempo amortizado $O(1)$.
- Outras operações eficientes que um min-heap não suporta. Por exemplo, UNION. Maiores detalhes no CLRS.

Usando um *heap de Fibonacci* para implementar $Q$ melhoramos o tempo para $O(V + E + V \lg V) = O(E + V \lg V)$.

Este é um resultado interessante do ponto de vista teórico.
Na prática, a implementação anterior comporta-se muito melhor.

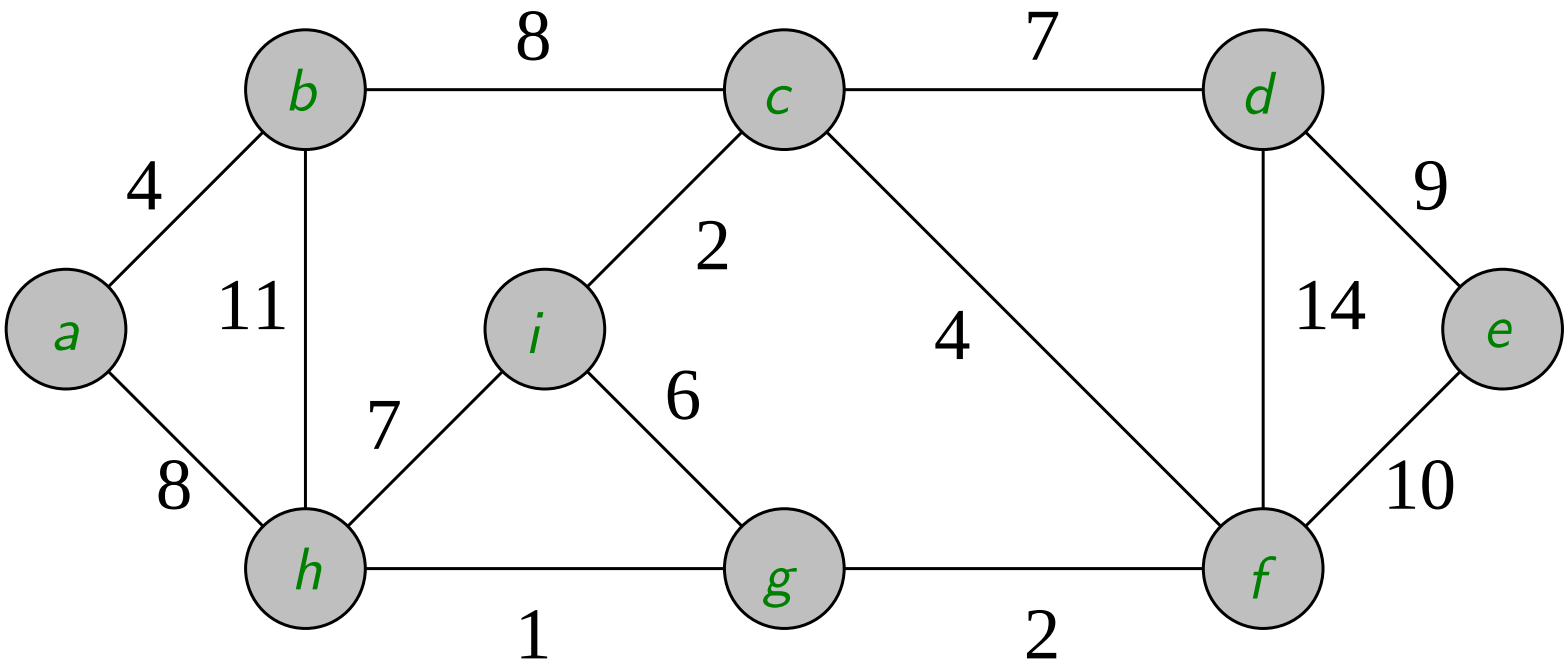
# O algoritmo de Kruskal

- No algoritmo de Kruskal o subgrafo $G_A = (V, A)$ é uma floresta. Inicialmente, $A = \emptyset$.
- Em cada iteração, o algoritmo escolhe uma aresta $(u, v)$ de menor peso que liga vértices de componentes (árvores) distintos $C$ e $C'$ de $G_A = (V, A)$.

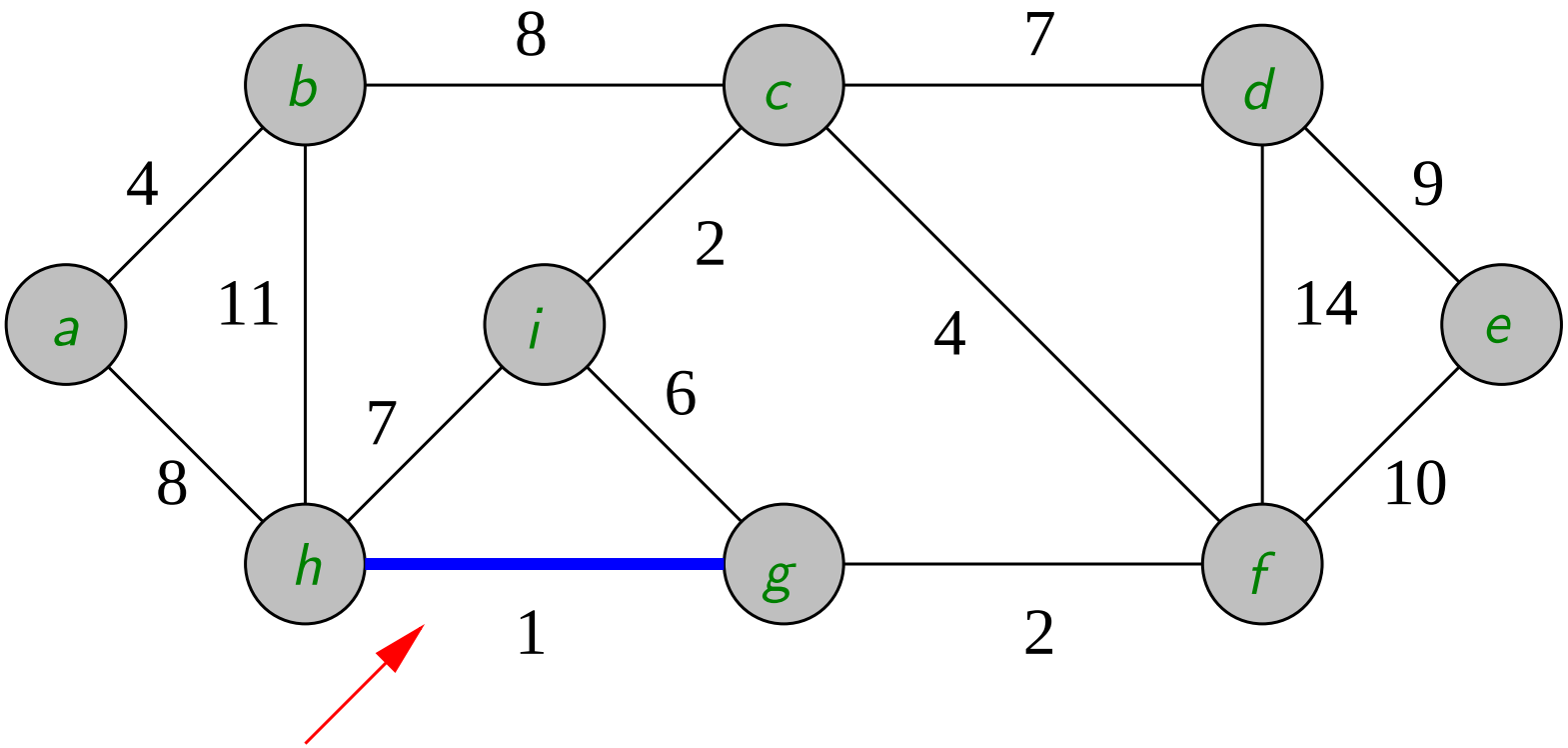
  Note que $(u, v)$ é uma aresta leve do corte $\delta(C)$.
- Ele acrescenta $(u, v)$ ao conjunto $A$ e começa outra iteração até que $A$ seja uma árvore geradora.

Um detalhe de implementação importante é como encontrar a aresta de menor peso ligando componentes distintos.

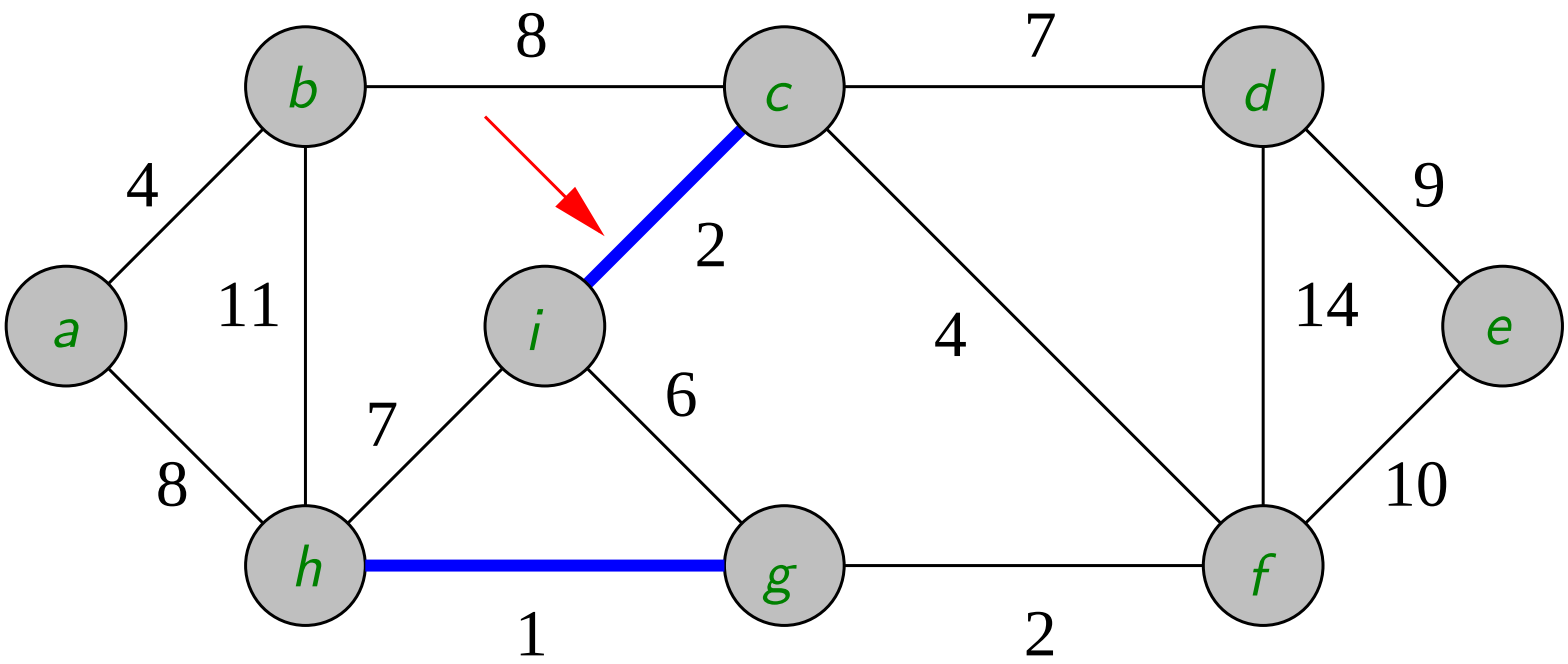
# O algoritmo de Kruskal



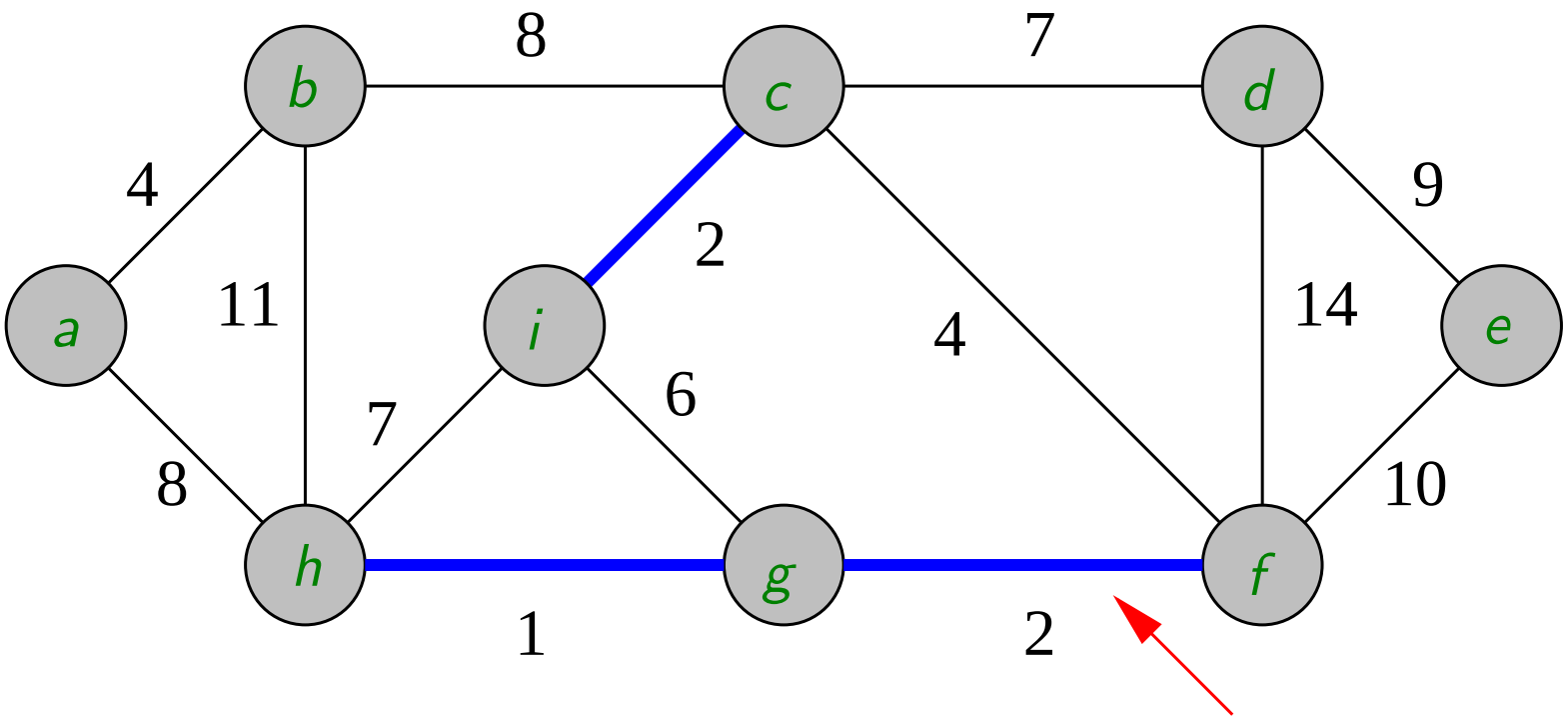
# O algoritmo de Kruskal



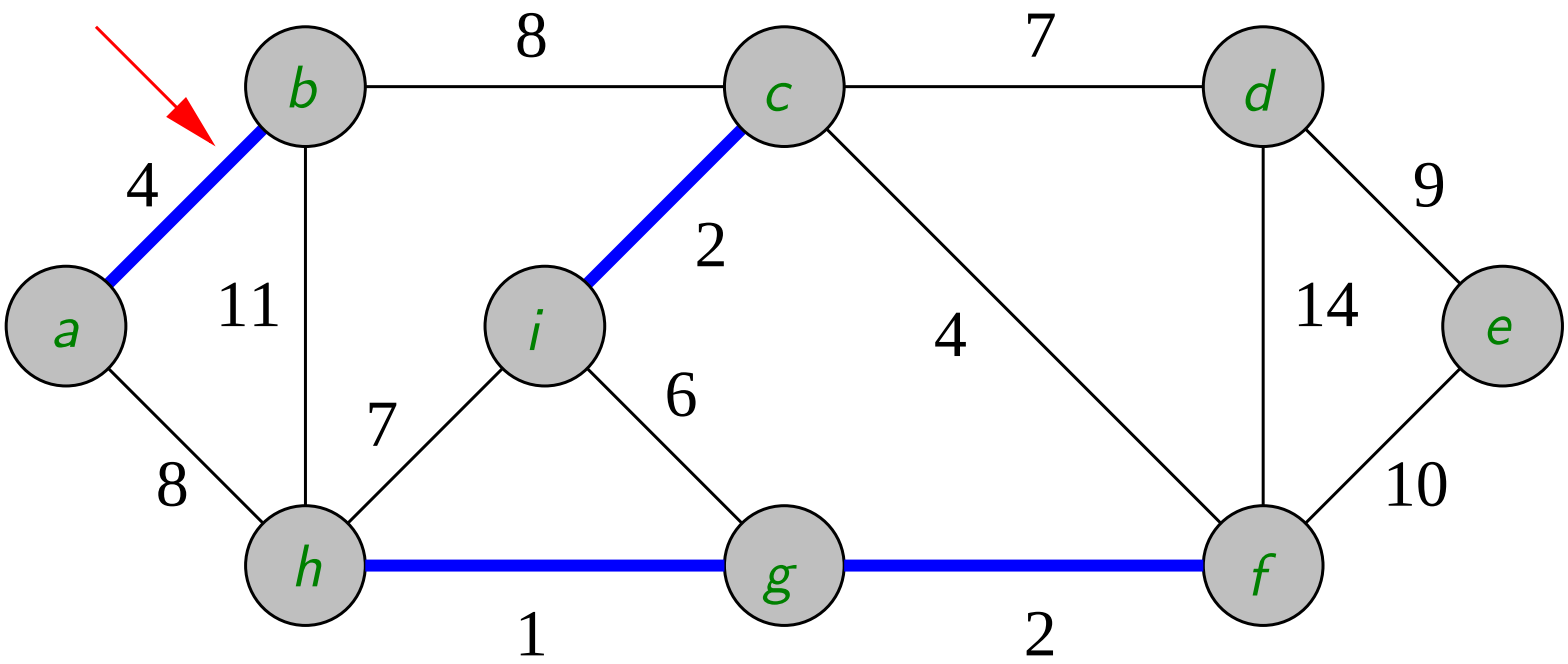
# O algoritmo de Kruskal



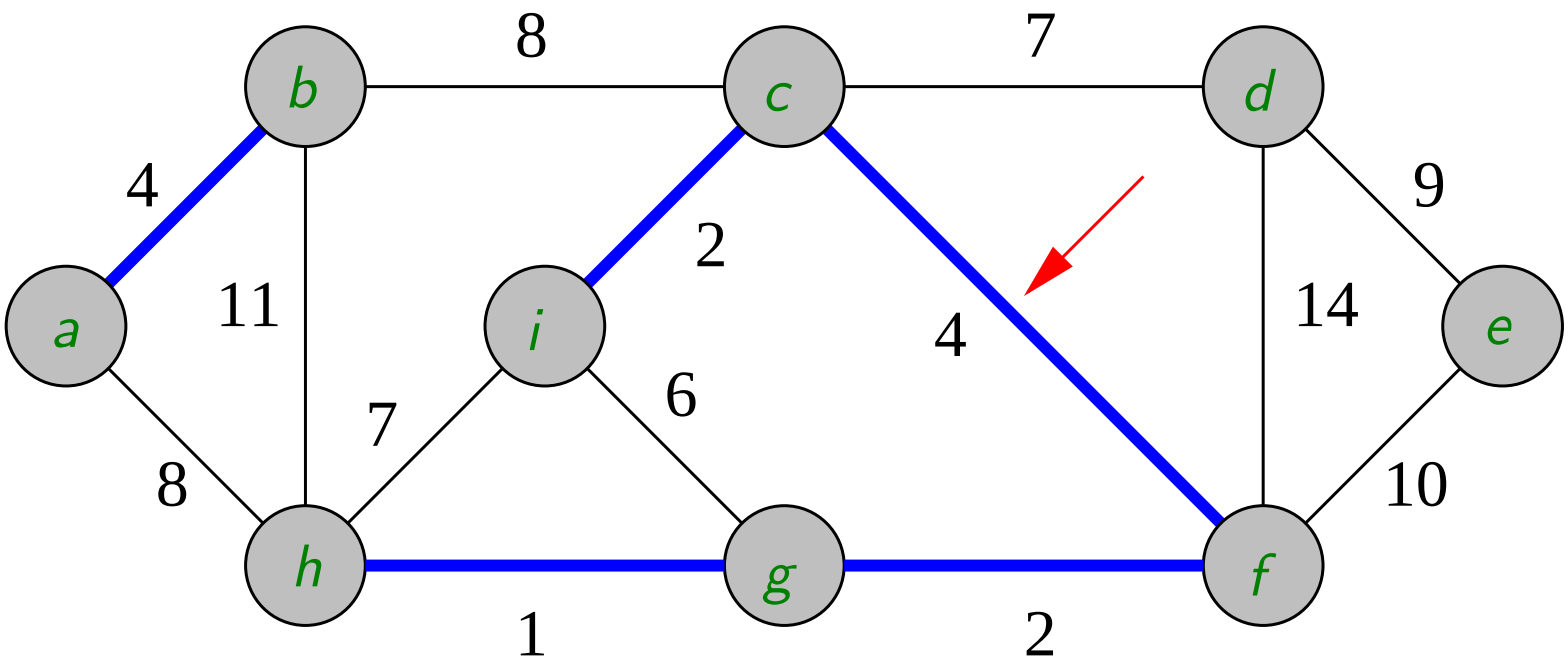
# O algoritmo de Kruskal



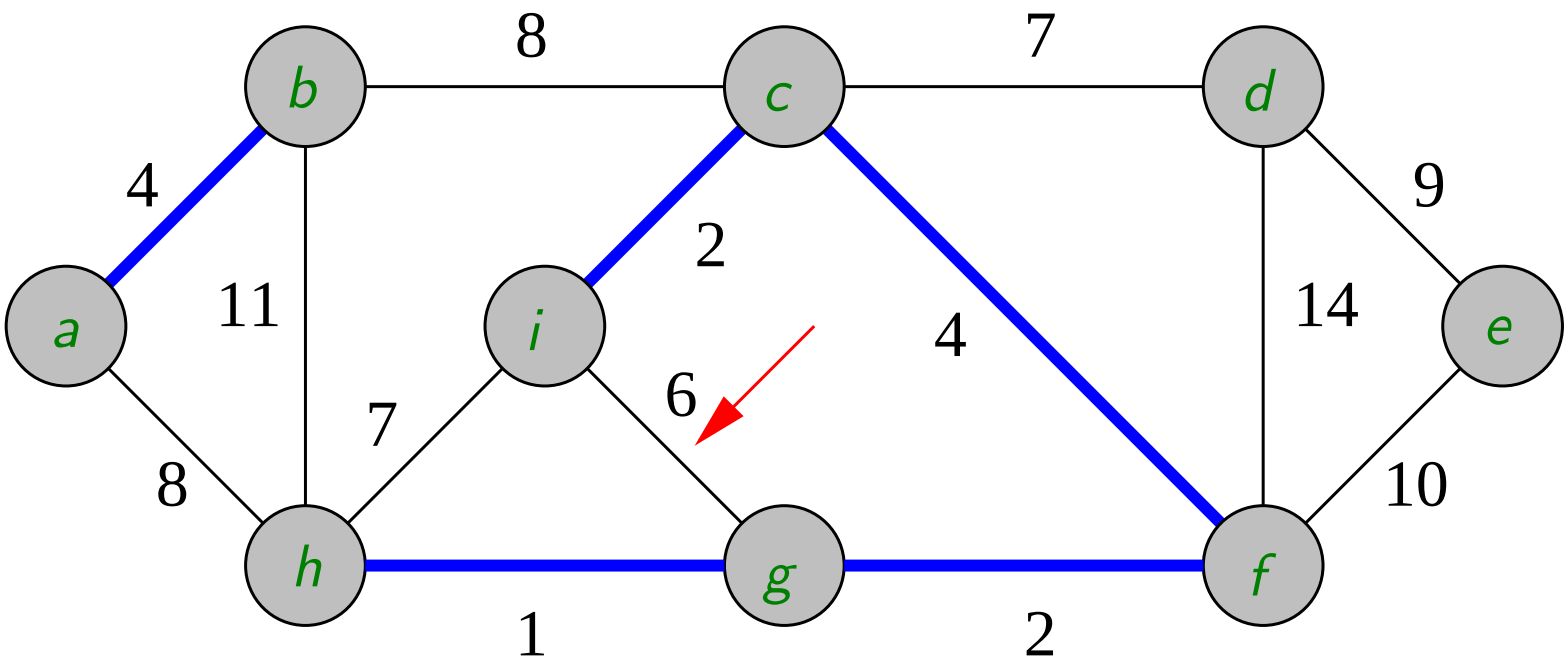
# O algoritmo de Kruskal



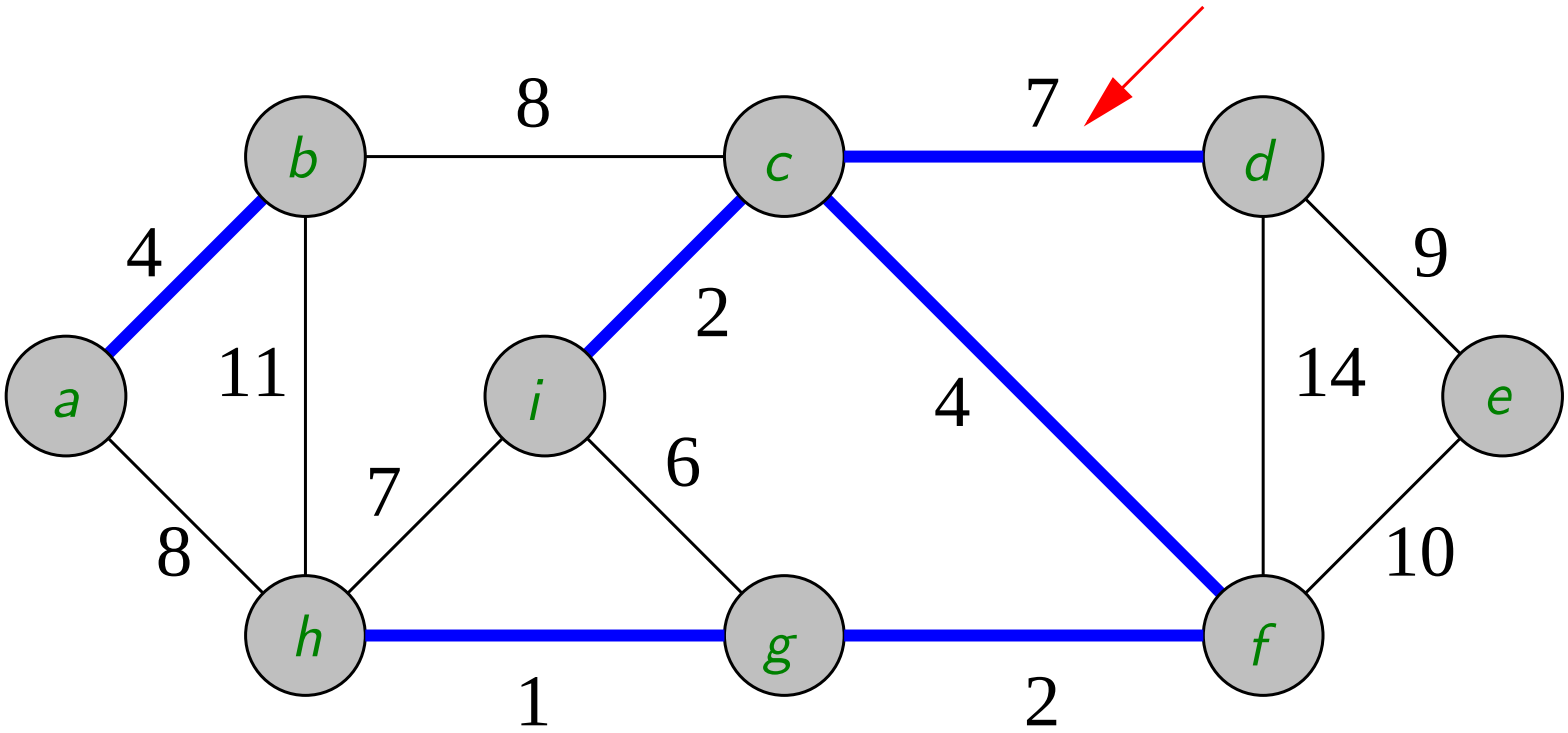
# O algoritmo de Kruskal



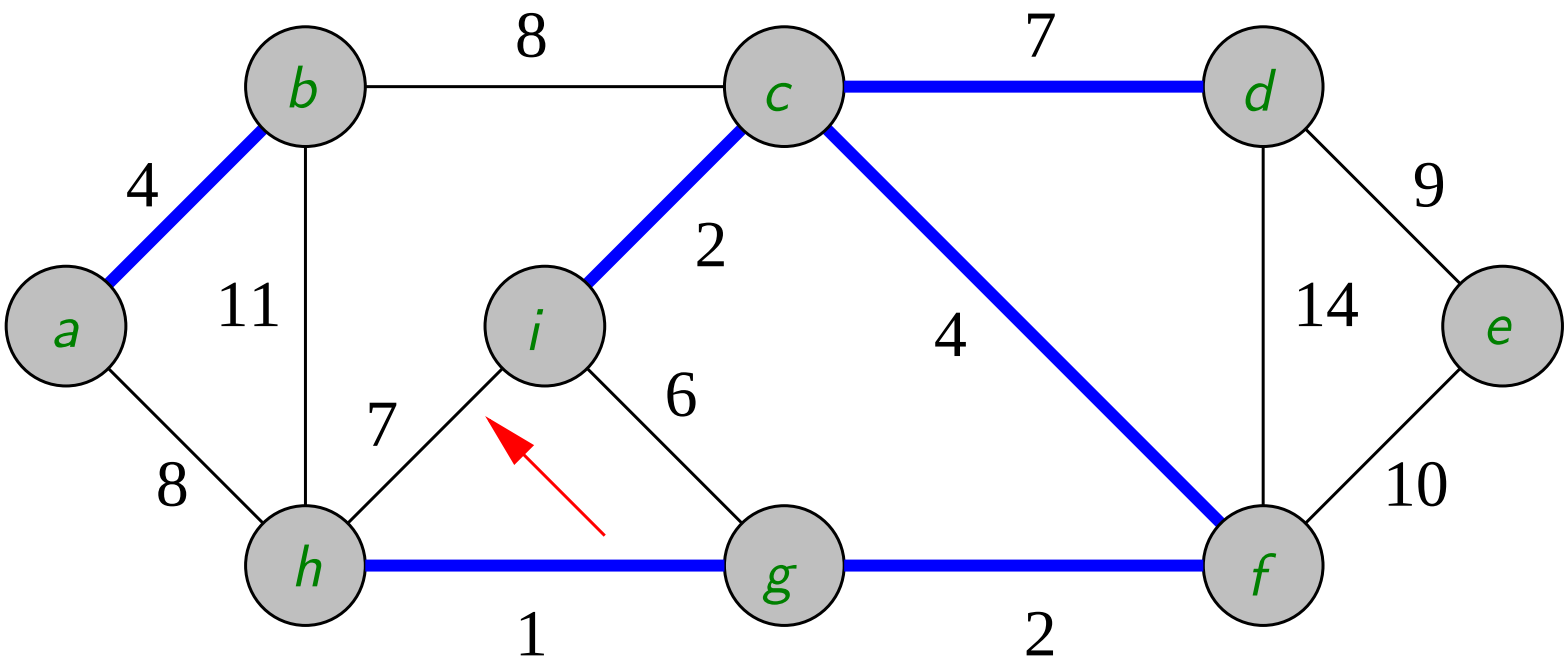
# O algoritmo de Kruskal



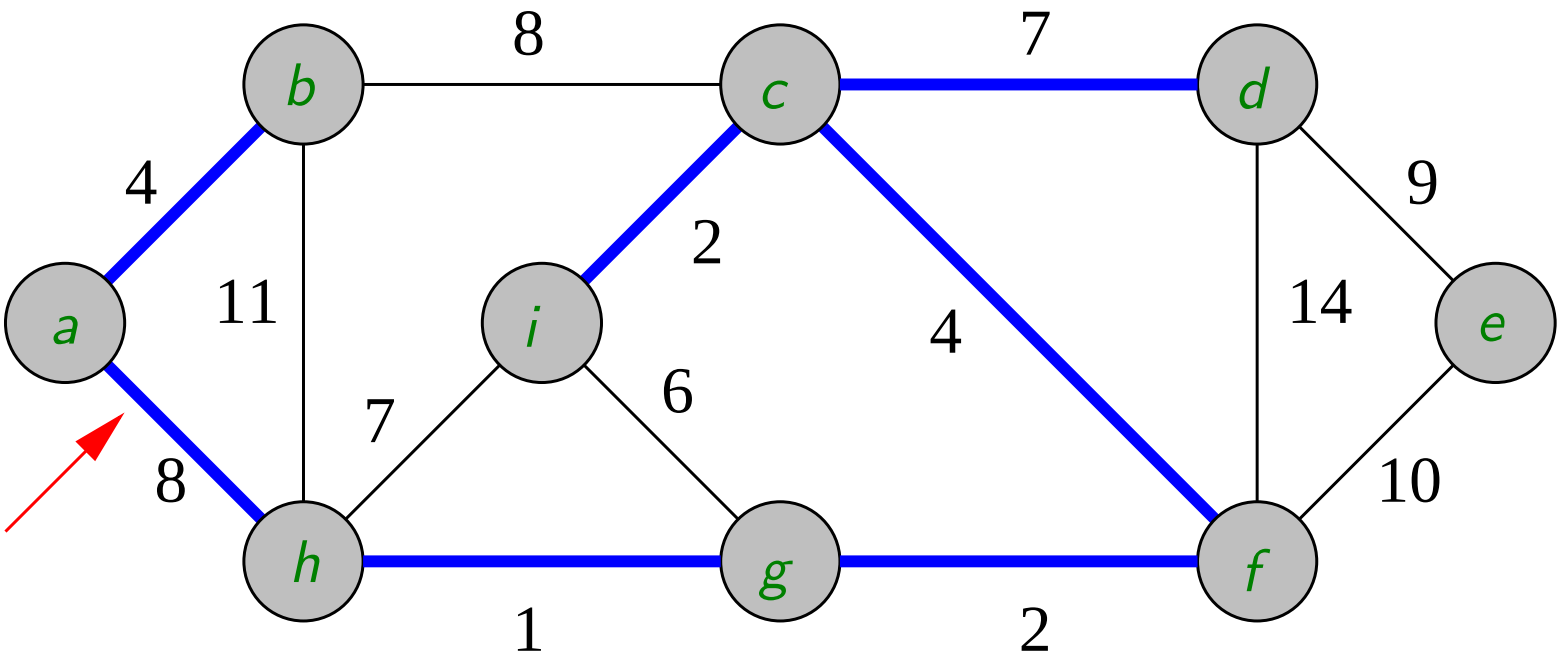
# O algoritmo de Kruskal



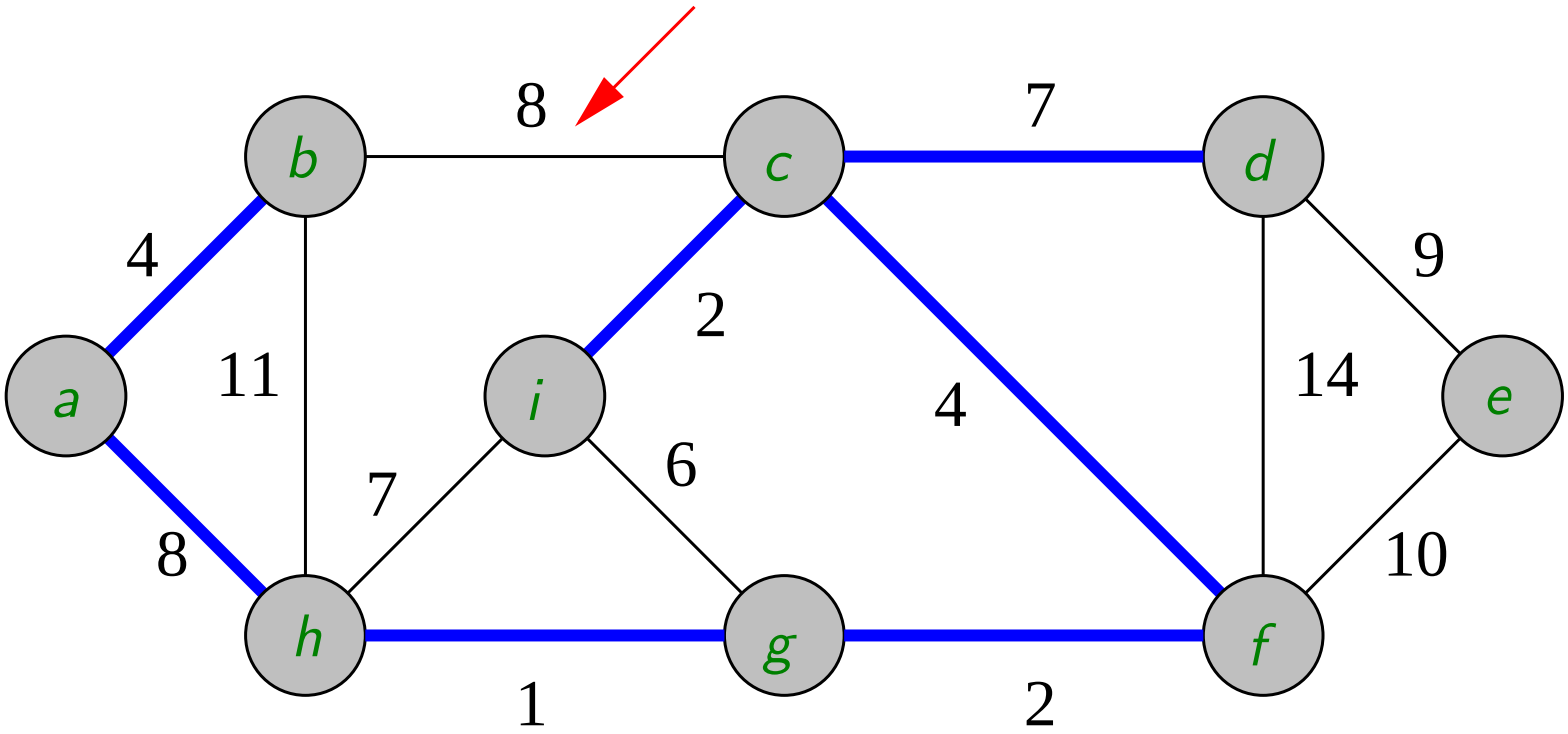
# O algoritmo de Kruskal



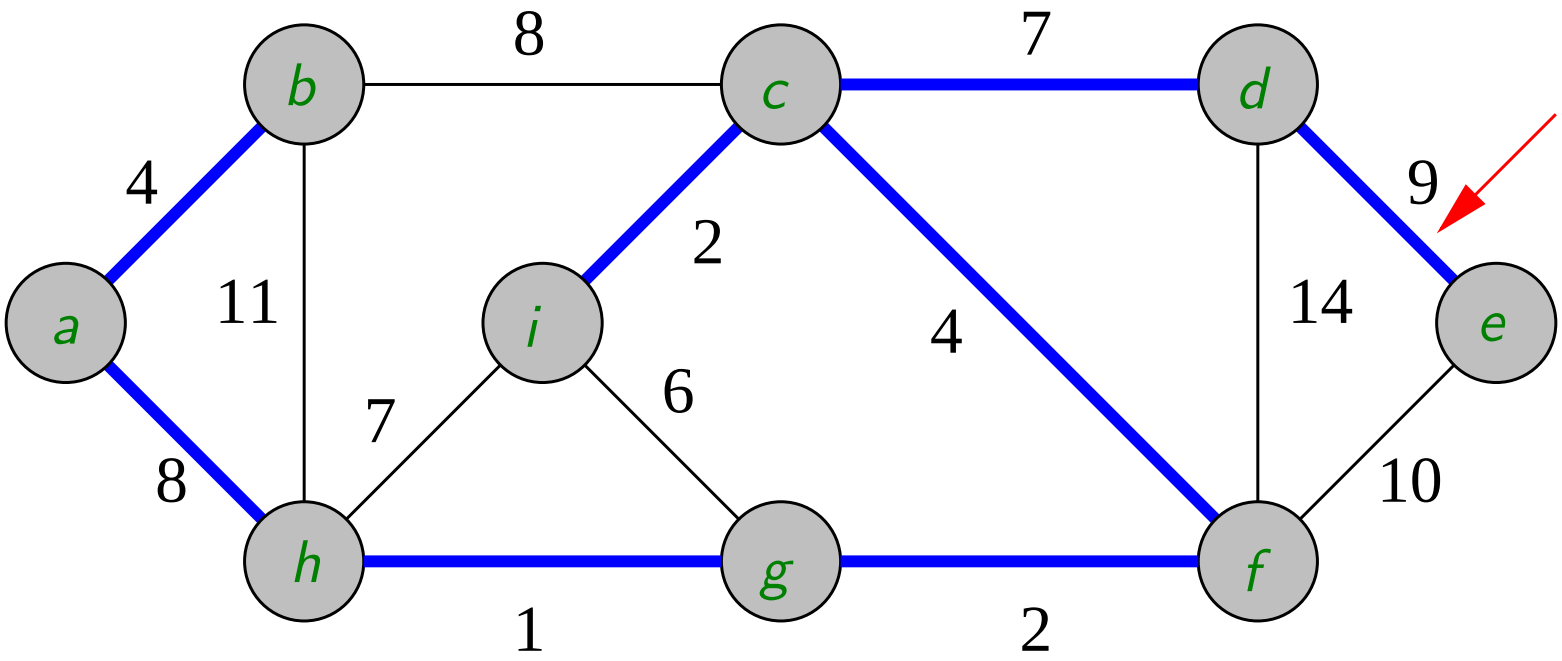
# O algoritmo de Kruskal



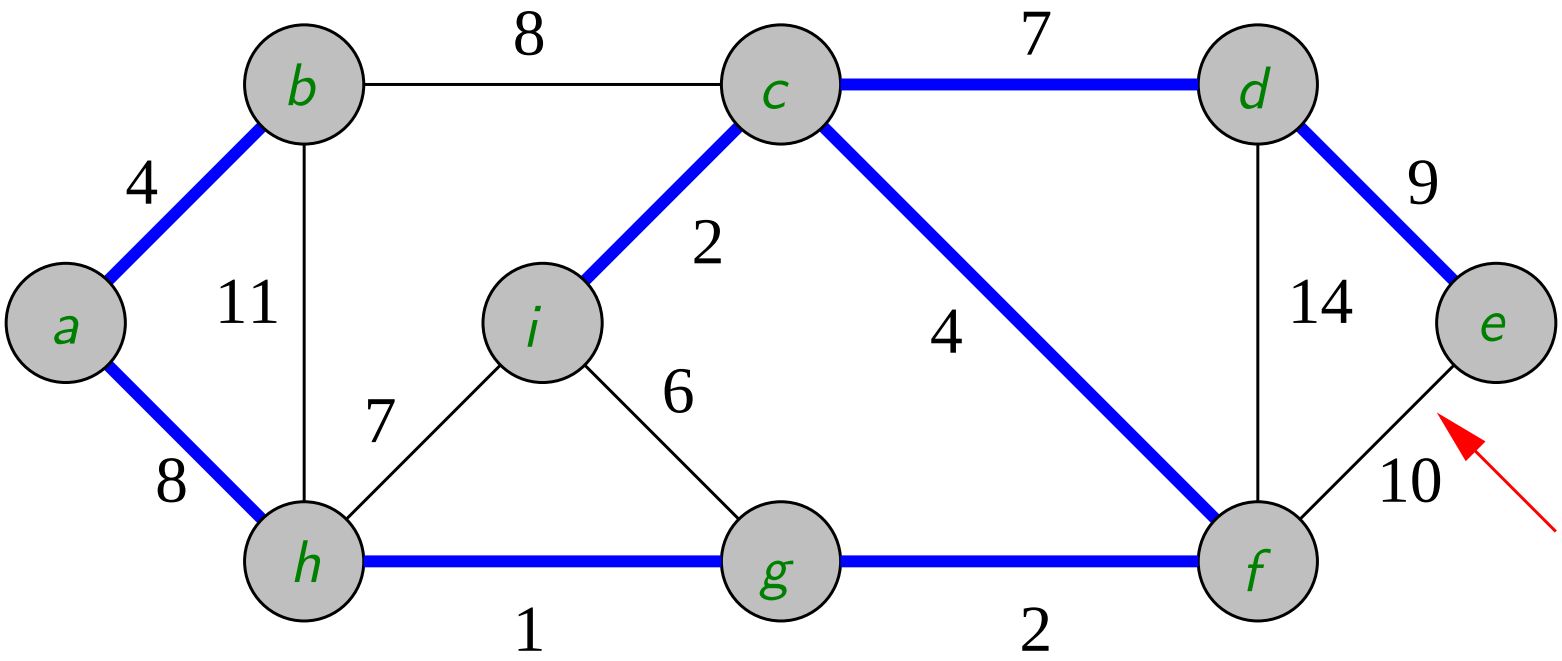
# O algoritmo de Kruskal



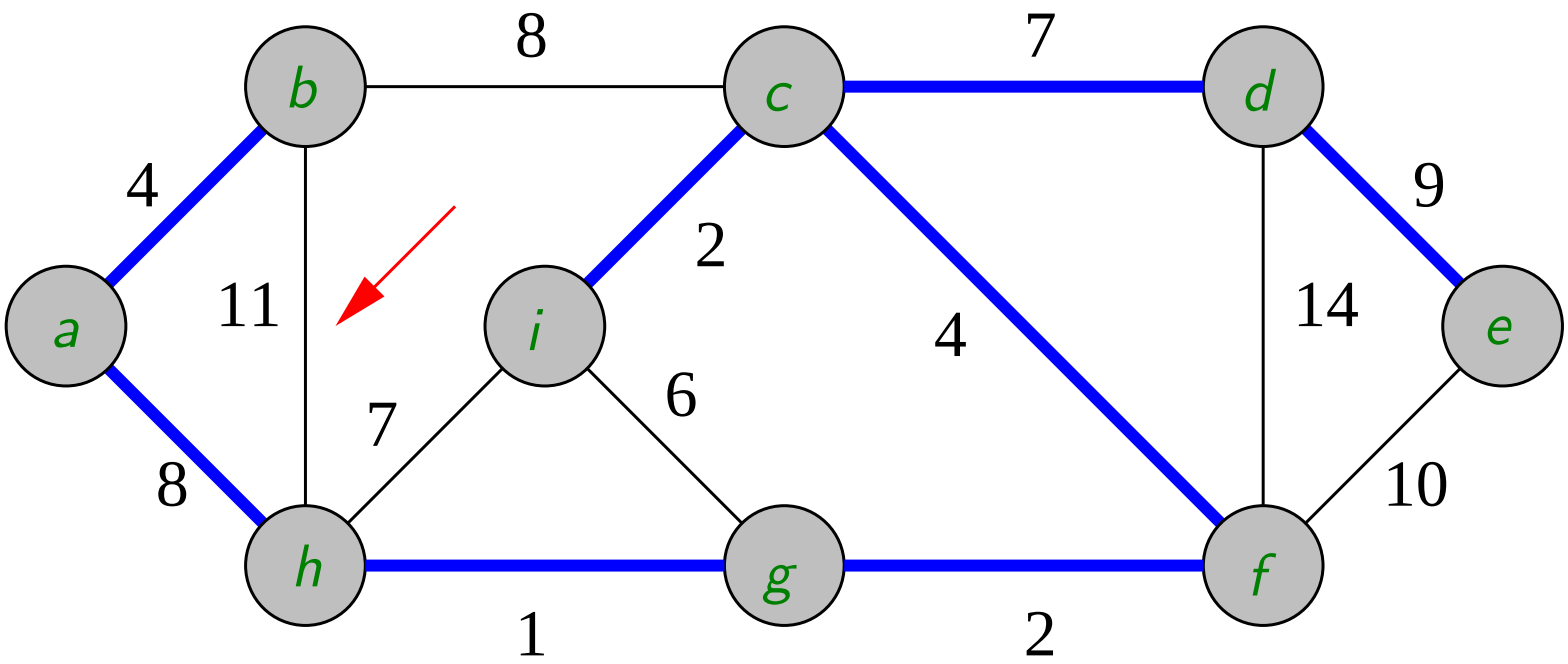
# O algoritmo de Kruskal



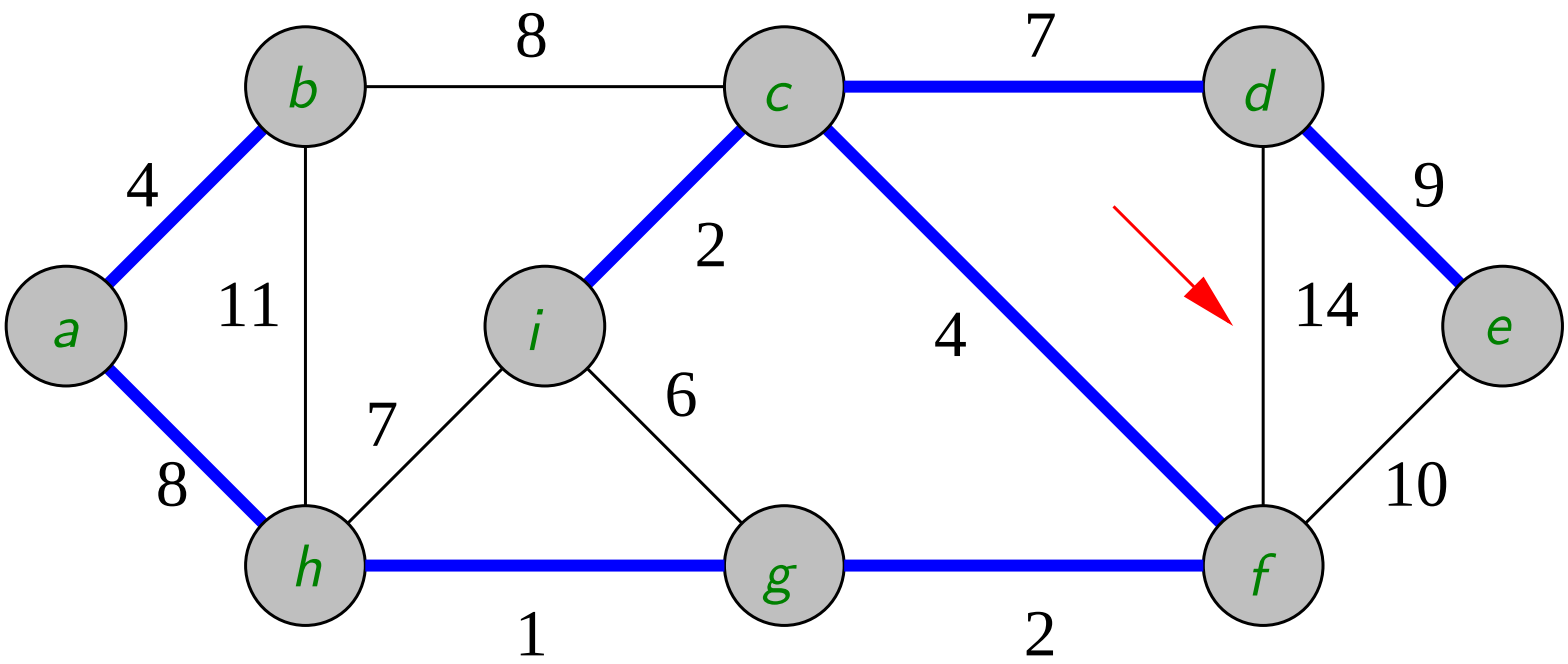
# O algoritmo de Kruskal



# O algoritmo de Kruskal



# O algoritmo de Kruskal



# O algoritmo de Kruskal

Eis uma versão preliminar do algoritmo de Kruskal.

AGM-KRUSKAL$(G, w)$
1 $A \leftarrow \emptyset$
2 Ordene as arestas em **ordem não-decrescente** de peso
3 **para cada** $(u, v) \in E$ nessa ordem **faça**
4 **se** $u$ e $v$ estão em componentes distintos de $(V, A)$
5 **então** $A \leftarrow A \cup \{(u, v)\}$
6 **devolva** $A$

Problema: Como verificar eficientemente se $u$ e $v$ estão no mesmo componente da floresta $G_A = (V, A)$?

# O algoritmo de Kruskal

Inicialmente $A = \emptyset$ e $G_A = (V, A)$ corresponde à floresta onde cada componente é um vértice isolado.

Ao longo do algoritmo, esses componentes são modificados pela inclusão de arestas em $A$.

Uma estrutura de dados para representar $G_A = (V, A)$ deve ser capaz de executar eficientemente as seguintes operações:

- dado um vértice $u$, determinar o componente de $G_A$ que contém $u$ e
- dados dois vértices $u$ e $v$ em componentes distintos $C$ e $C'$, fazer a união desses em um novo componente.

# ED para conjuntos disjuntos

- Uma estrutura de dados para conjuntos disjuntos mantém uma coleção $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ de conjuntos disjuntos dinâmicos (isto é, eles mudam ao longo do tempo).
- Cada conjunto é identificado por um representante que é um elemento do conjunto.

  Quem é o representante é irrelevante, mas se o conjunto não for modificado, então o representante não pode mudar.

# ED para conjuntos disjuntos

Uma estrutura de dados para conjuntos disjuntos deve ser capaz de executar as seguintes operações:

- MAKE-SET($x$): cria um novo conjunto $\{x\}$.
- UNION($x, y$): une os conjuntos (disjuntos) que contém $x$ e $y$, digamos $S_x$ e $S_y$, em um novo conjunto $S_x \cup S_y$.

  Os conjuntos $S_x$ e $S_y$ são descartados da coleção.
- FIND-SET($x$) devolve um apontador para o representante do (único) conjunto que contém $x$.

# Componentes conexos

Vamos ilustrar uma aplicação simples da estrutura de dados para conjuntos disjuntos para resolver o seguinte problema.

Dado um grafo não-orientado $G$ determinar seus componentes conexos.

Após determinar seus componentes conexos, gostaríamos também de ser capazes de verificar eficientemente se quaisquer dois vértices dados pertencem ao mesmo componente.

# Componentes conexos

```
CONNECTED-COMPONENTS(G)
1   para cada v ∈ V[G] faça
2       MAKE-SET(v)
3   para cada (u, v) ∈ E[G] faça
4       se FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
5           então UNION(u, v)

SAME-COMPONENT(u, v)
1   se FIND-SET(u) = FIND-SET(v)
2       então devolva VERDADEIRO
3       senão devolva FALSO
```

# Componentes conexos

"Complexidade" de CONNECTED-COMPONENTS

- $|V|$ chamadas a MAKE-SET
- $2|E|$ chamadas a FIND-SET
- $\leq |V| - 1$ chamadas a UNION

Usando a ED para conjuntos disjuntos também é fácil listar os vértices de cada componente (Exercício).

# O algoritmo de Kruskal

Eis a versão completa do algoritmo de Kruskal.

AGM-KRUSKAL$(G, \omega)$
1 $A \leftarrow \emptyset$
2 **para cada** $v \in V[G]$ **faça**
3 MAKE-SET$(v)$
4 Ordene as arestas em ordem não-decrescente de peso
5 **para cada** $(u, v) \in E$ nessa ordem **faça**
6 **se** FIND-SET$(u) \neq$ FIND-SET$(v)$
7 **então** $A \leftarrow A \cup \{(u, v)\}$
8 UNION$(u, v)$
9 **devolva** $A$

# O algoritmo de Kruskal

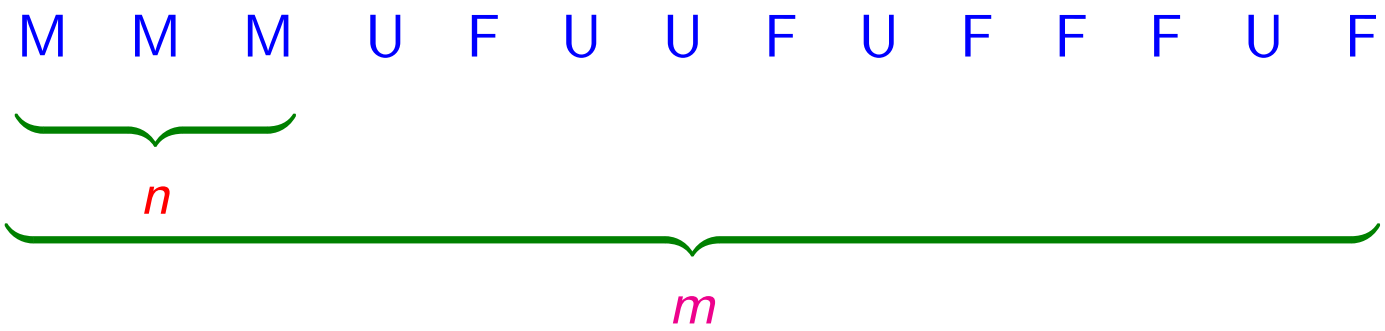
"Complexidade" de AGM-Kruskal

- Ordenação: $O(E \lg E)$
- $|V|$ chamadas a Make-Set
- $2|E|$ chamadas a Find-Set
- $|V| - 1$ chamadas a Union

A complexidade depende de como essas operações são implementadas.

# ED para conjuntos disjuntos

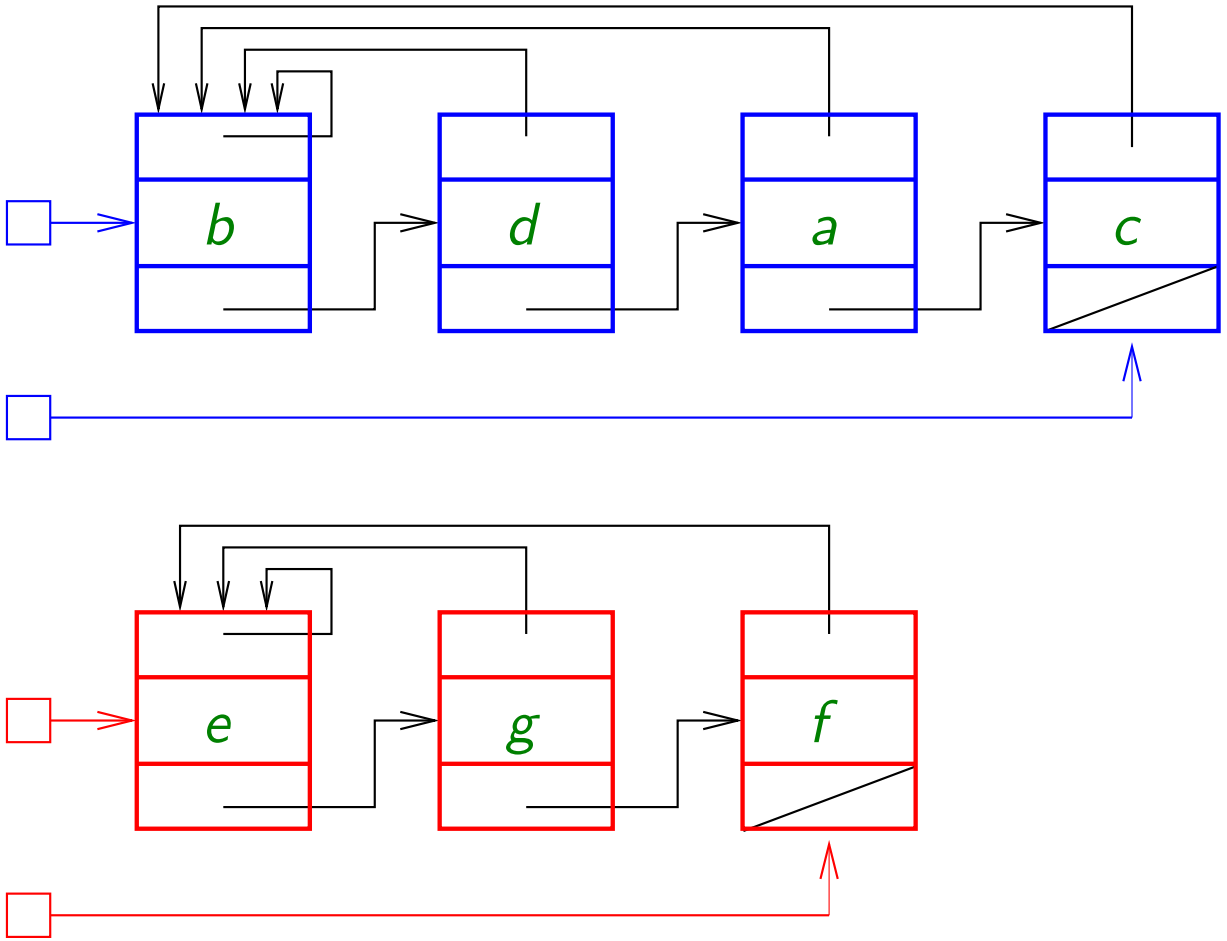
Seqüência de operações MAKE-SET, UNION e FIND-SET




Vamos medir a complexidade das operações em termos de $n$ e $m$.

Que estrutura de dados usar?
Ou seja, como representar os conjuntos?

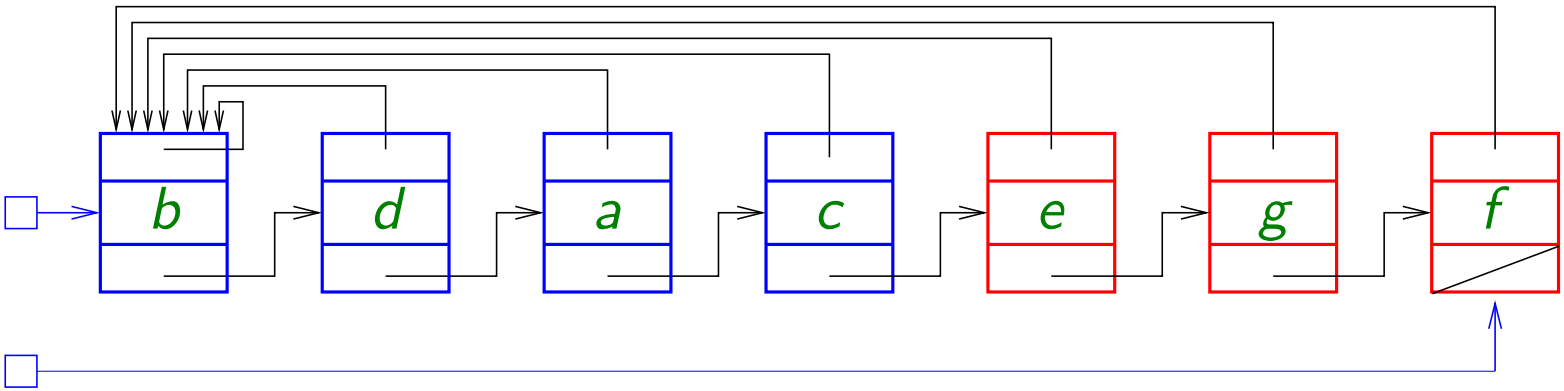
# Representação por listas ligadas




- Cada conjunto tem um representante (início da lista)
- Cada nó tem um campo que aponta para o representante
- Guarda-se um apontador para o fim da lista

# Representação por listas ligadas

- MAKE-SET($x$) – $O(1)$
- FIND-SET($x$) – $O(1)$
- UNION($x, y$) – concatena a lista de $y$ no final da lista de $x$




Complexidade: $O(n)$

É preciso atualizar os apontadores para o representante.

# Um exemplo de pior caso

| Operação | Atualizações | Listas |
|---|---|---|
| MAKE-SET$(x_1)$ | 1 | $x_1$ |
| MAKE-SET$(x_2)$ | 1 | $x_2$ $x_1$ |
| MAKE-SET$(x_3)$ | 1 | $x_3$ $x_2$ $x_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | |
| MAKE-SET$(x_n)$ | 1 | $x_n$ $x_{n-1}$ $\cdots$ $x_4$ $x_3$ $x_2$ $x_1$ |
| UNION$(x_2, x_1)$ | 1 | $x_n$ $x_{n-1}$ $\cdots$ $x_4$ $x_3$ $x_2x_1$ |
| UNION$(x_3, x_2)$ | 2 | $x_n$ $x_{n-1}$ $\cdots$ $x_4$ $x_3x_2x_1$ |
| UNION$(x_4, x_3)$ | 3 | $x_n$ $x_{n-1}$ $\cdots$ $x_4x_3x_2x_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | |
| UNION$(x_n, x_{n-1})$ | $n-1$ | $x_nx_{n-1}\cdots x_4x_3x_2x_1$ |

Número total de operações: $2n-1$

Custo total: $n + \sum_{i=1}^{n-1} i = \Theta(n^2)$

Custo amortizado de cada operação: $\frac{\Theta(n^2)}{2n-1} = \Theta(n)$

# Uma heurística muito simples

No exemplo anterior, cada chamada de UNION requer em média tempo $\Theta(n)$ pois concatenamos a maior lista no final da menor.

Uma idéia simples para evitar esta situação é sempre concatenar a menor lista no final da maior (*weighted-union heuristic*.)

Para implementar isto basta guardar o tamanho de cada lista.

Uma única execução de UNION pode gastar tempo $\Theta(n)$, mas na média o tempo é bem menor (próximo slide).

# Uma heurística muito simples

Teorema. Usando a representação por listas ligadas e *weighted-union heuristic*, uma seqüência de $m$ operações MAKE-SET, UNION e FIND-SET gasta tempo $O(m + n \lg n)$.

Prova.

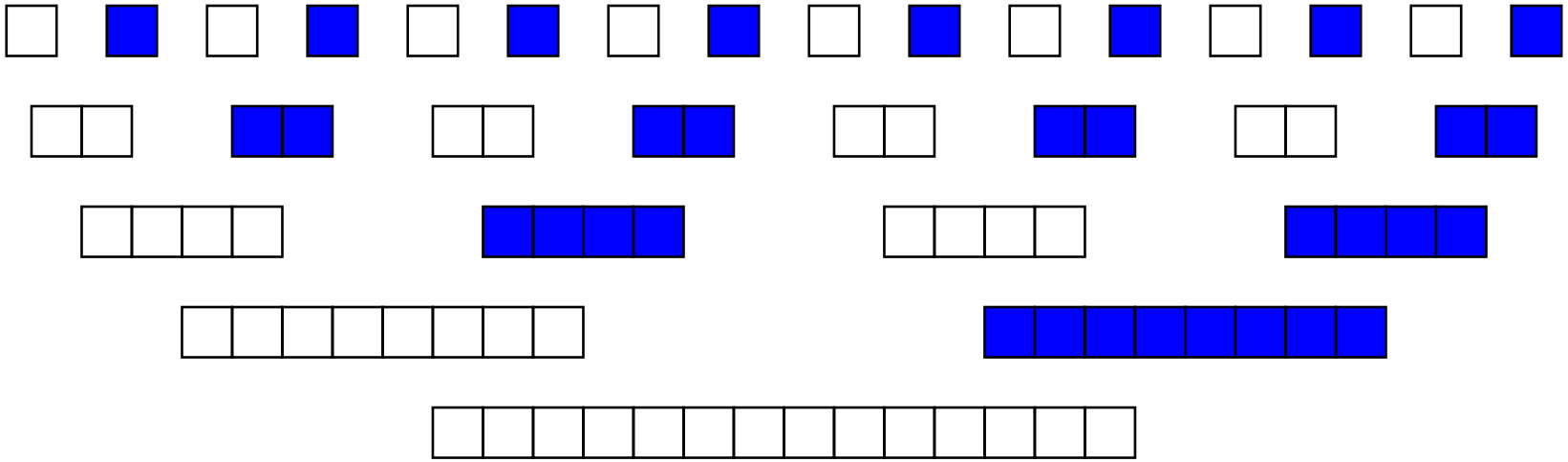
O tempo total em chamadas a MAKE-SET e FIND-SET é $O(m)$.

Sempre que o apontador para o representante de um elemento $x$ é atualizado, o tamanho da lista que contém $x$ (pelo menos) dobra.

Após ser atualizado $k$ vezes, a lista tem tamanho pelo menos $2^k$. Como $2^k$ tem que ser menor que $n$, cada apontador é atualizado no máximo $O(\lg n)$ vezes.

Assim, o tempo total em chamadas a UNION é $O(n \lg n)$. ■

# Um exemplo de pior caso



Em cada nível, a lista em azul é concatenada com a lista a sua esquerda e assim $n/2$ apontadores são atualizados.

Há $\Theta(\lg n)$ níveis.

O custo total de UNION é $\Theta(n \lg n)$ (como no MERGESORT!).

# Complexidade do algoritmo de Kruskal

Complexidade de AGM-Kruskal usando a representação por listas ligadas de Union-Find com *weighted-union heuristic*:

- Ordenação: $O(E \lg E)$
- $|V|$ chamadas a Make-Set
- $2|E|$ chamadas a Find-Set
- $|V| - 1$ chamadas a Union

Custo total: ordenação + $O(m + n \lg n)$

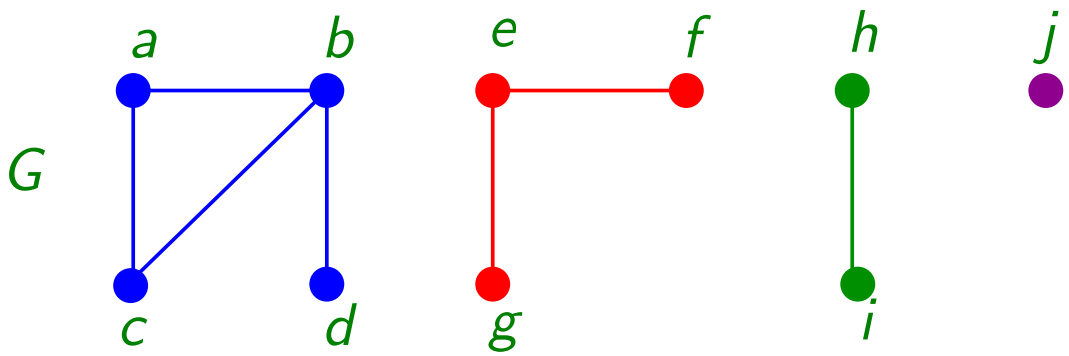
Custo total:
$O(E \lg E) + O(2V + 2E - 1 + V \lg V) = O(E \lg E) = O(E \lg V)$

# Representação por *disjoint-set forests*

- Veremos agora a representação por *disjoint-set forests*.
- Implementações ingênuas não são melhores assintoticamente do que esta representação.
- Usando duas heurísticas — union by rank e path compression — obtemos a representação por *disjoint-set forests* mais eficiente que se conhece até hoje.

**Observação:** isto não diminui a complexidade de AGM-Kruskal pois esta é dominada pelo passo de ordenação.

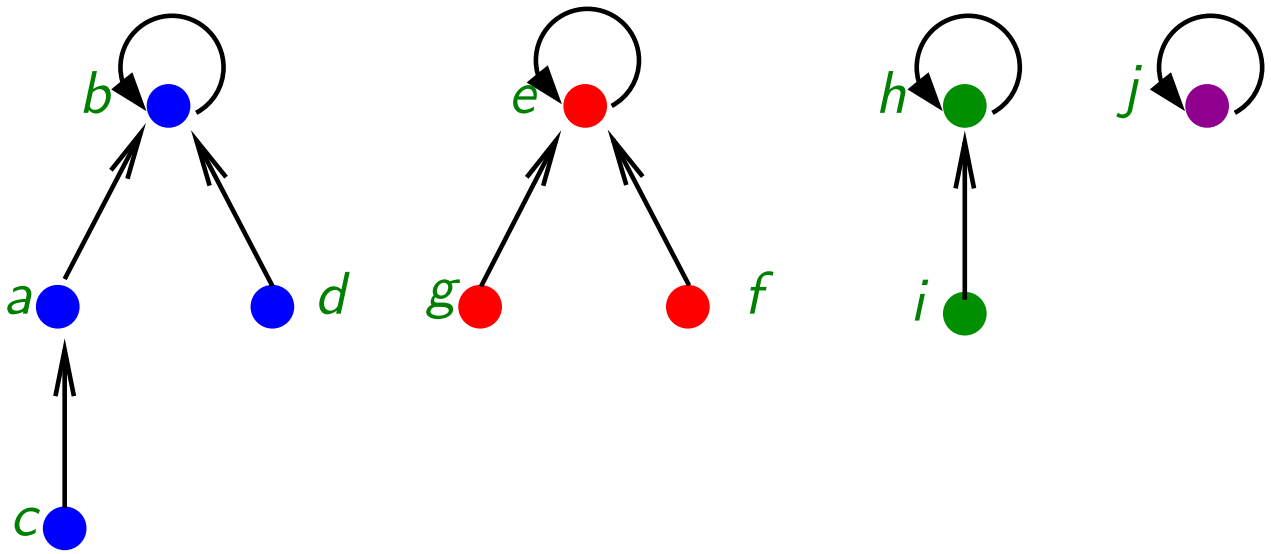
# Representação por *disjoint-set forests*




Grafo com vários componentes.

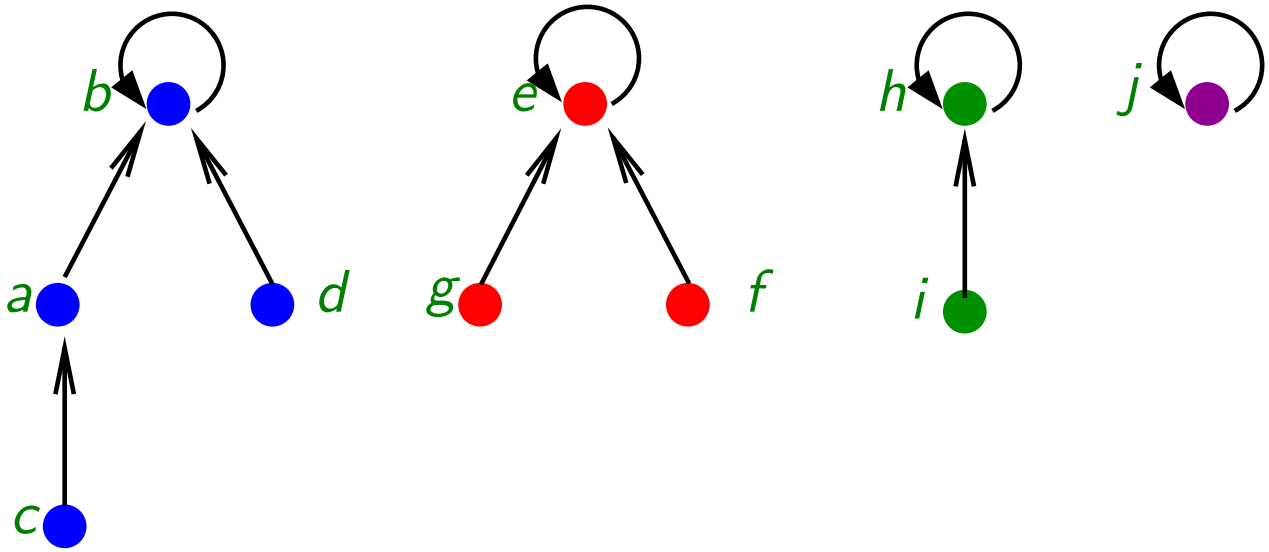
Como é a representação dos componentes na estrutura de dados *disjoint-set forests*?

# Representação por *disjoint-set forests*




- Cada conjunto corresponde a uma árvore enraizada.
- Cada elemento aponta para seu pai.
- A raiz é o representante do conjunto e aponta para si mesma.

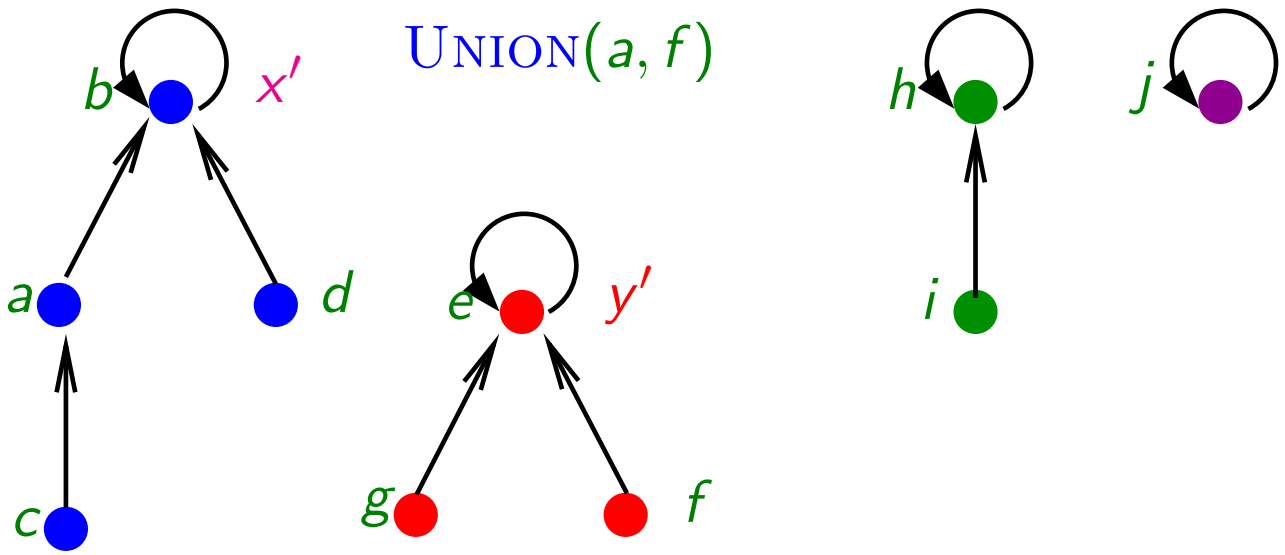
# Representação por *disjoint-set forests*




MAKE-SET($x$)
1 pai[$x$] $\leftarrow$ $x$

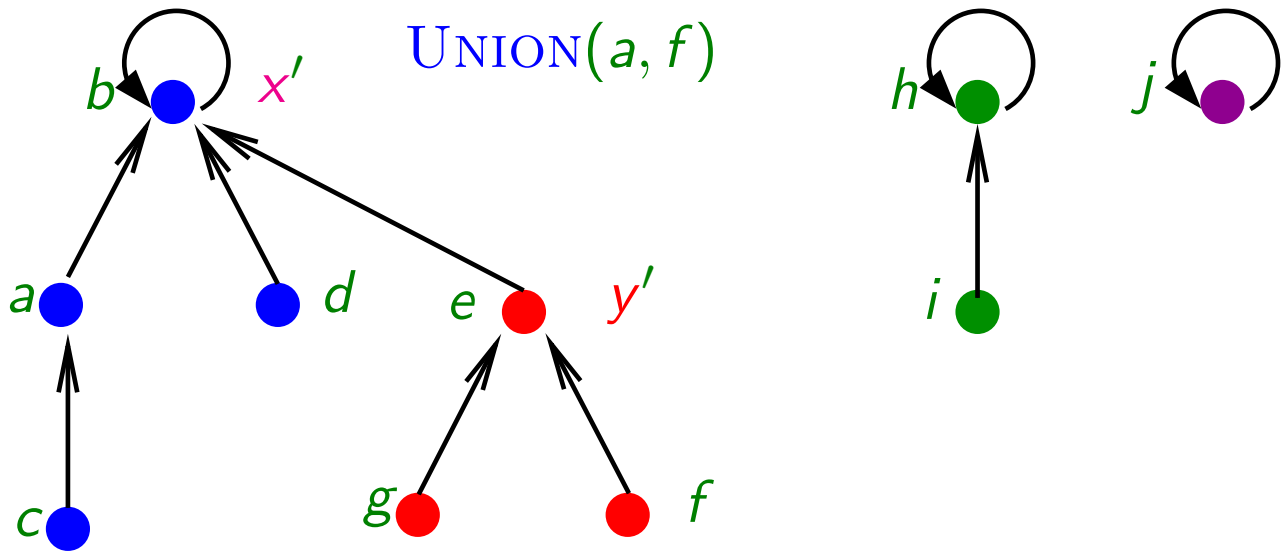
FIND-SET($x$)
1 **se** $x =$ pai[$x$]
2 **então** **devolva** $x$
3 **senão** **devolva** FIND-SET(pai[$x$])

# Representação por *disjoint-set forests*




UNION$(x, y)$
1 $x' \leftarrow$ FIND-SET$(x)$
2 $y' \leftarrow$ FIND-SET$(y)$
3 pai$[y'] \leftarrow x'$

# Representação por *disjoint-set forests*




UNION($x, y$)
1 $x' \leftarrow$ FIND-SET($x$)
2 $y' \leftarrow$ FIND-SET($y$)
3 pai[$y'$] $\leftarrow x'$

# Representação por *disjoint-set forests*

Com a implementação descrita até agora, não há melhoria assintótica em relação à representação por listas ligadas.

- MAKE-SET$(x)$ – $O(1)$
- FIND-SET$(x)$ – $O(n)$
- UNION$(x, y)$ – $O(n)$

É fácil descrever uma seqüência de $n-1$ chamadas a UNION que resultam em uma cadeia linear com $n$ nós. Isto torna FIND-SET custoso podendo levar a um custo total de $\Theta(n^2)$.

Pode-se melhorar (muito) isso usando duas heurísticas:

- union by rank
- path compression

# Union by rank

- A idéia é emprestada do weighted-union heuristic.
- Cada nó $x$ possui um "posto" $\mathrm{rank}[x]$ que é um limitante superior para a altura de $x$.
- Em union by rank a raiz com menor $\mathrm{rank}$ aponta para a raiz com maior $\mathrm{rank}$.

# Union by rank

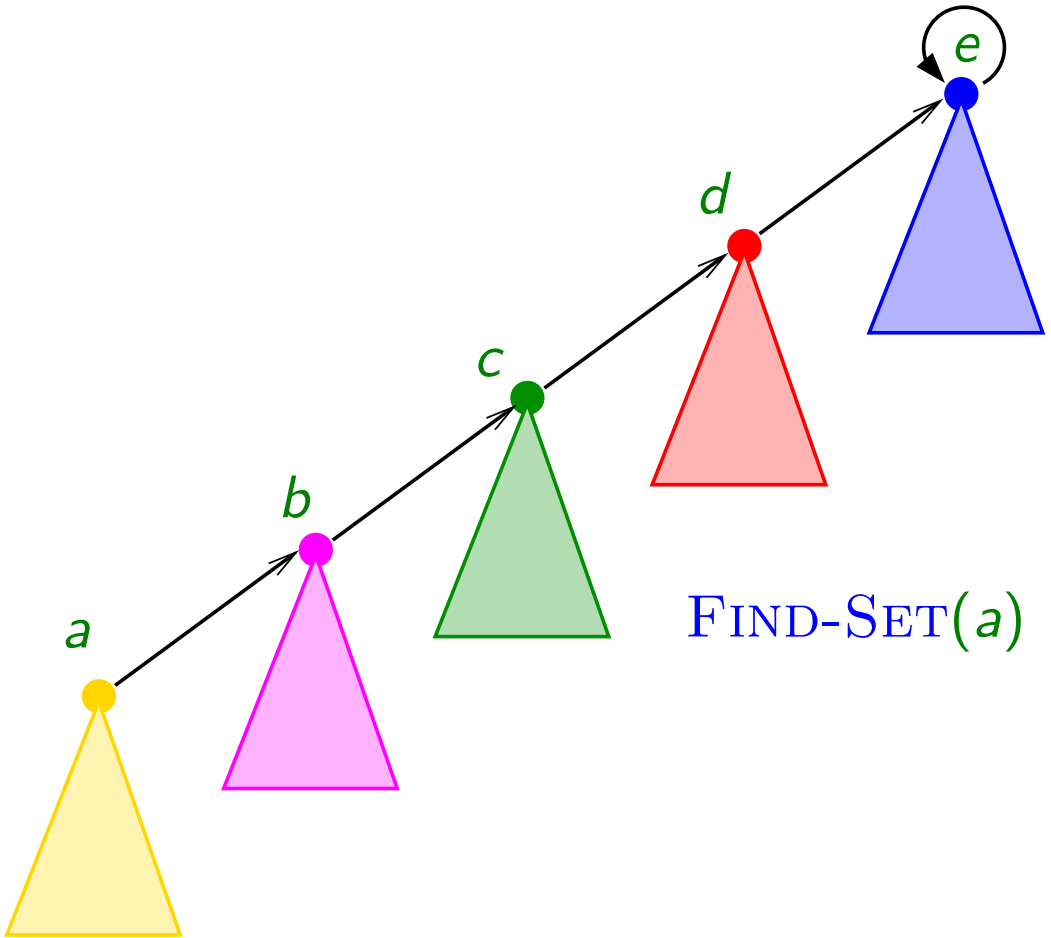
```
MAKE-SET(x)
1   pai[x] ← x
2   rank[x] ← 0

UNION(x, y)
1   LINK(FIND-SET(x), FIND-SET(y))

LINK(x, y) ▷ x e y são raízes
1   se  rank[x] > rank[y]
2       então pai[y] ← x
3       senão pai[x] ← y
4             se  rank[x] = rank[y]
5                 então  rank[y] ← rank[y] + 1
```

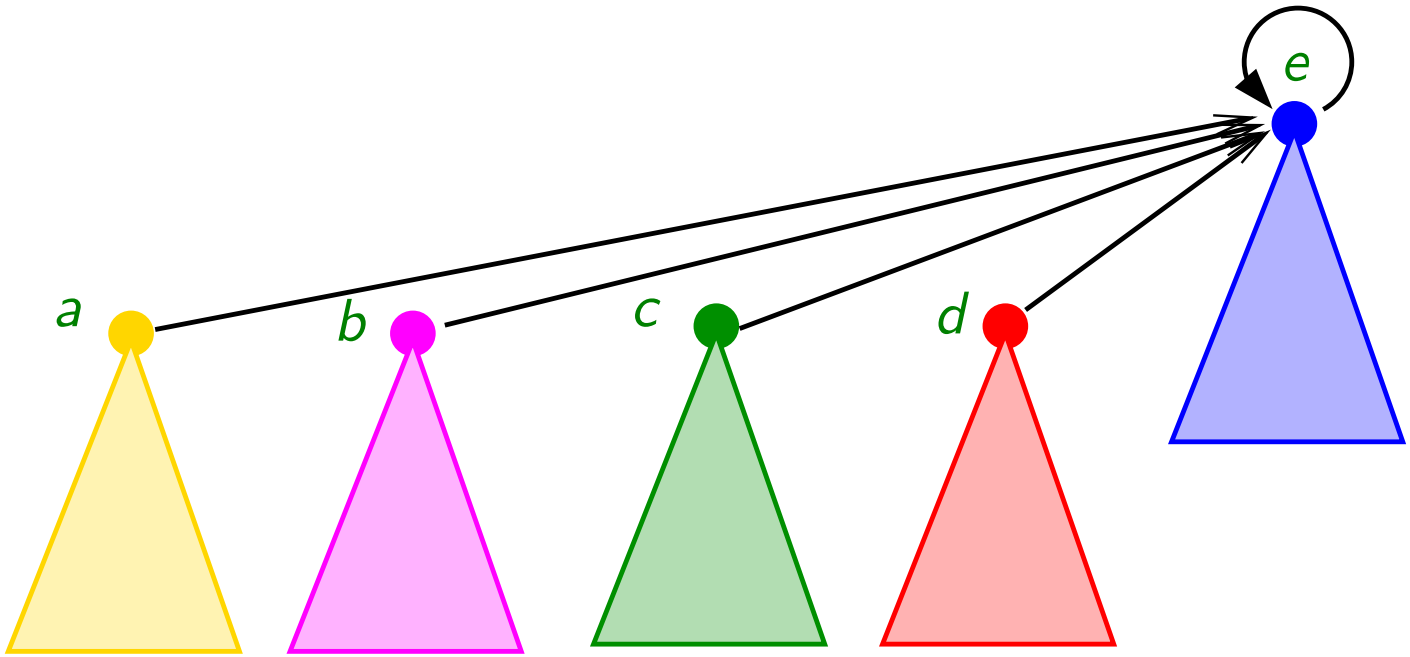
# Path compression

A idéia é muito simples: ao tentar determinar o representante (raiz da árvore) de um nó fazemos com que todos os nós no caminho apontem para a raiz.



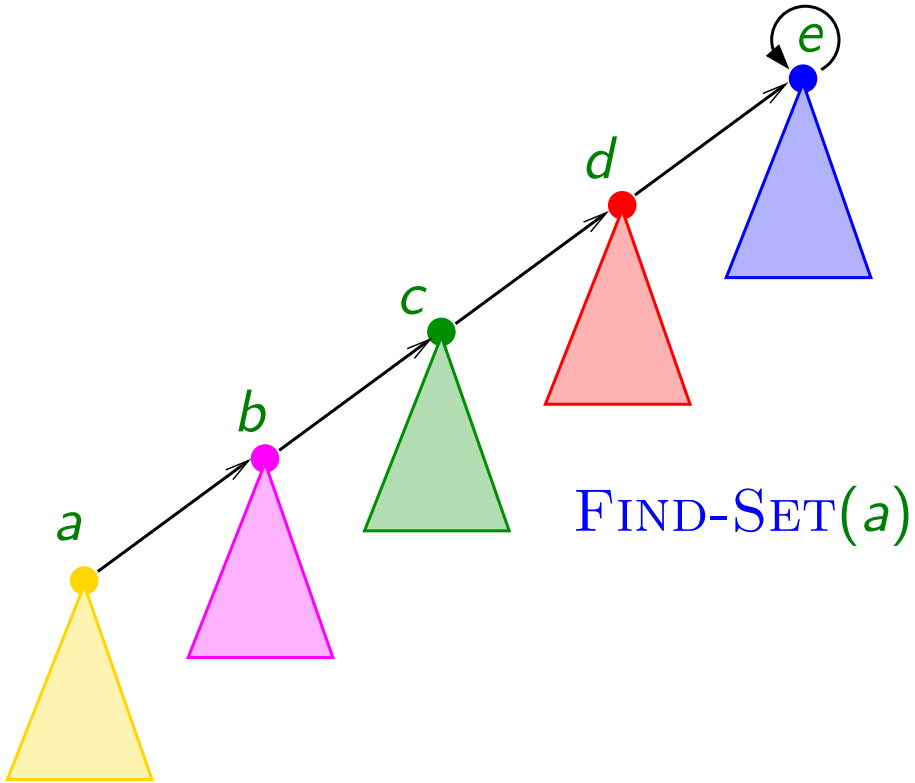
# Path compression

A idéia é muito simples: ao tentar determinar o representante (raiz da árvore) de um nó fazemos com que todos os nós no caminho apontem para a raiz.




FIND-SET($a$)

# Path compression




FIND-SET($x$)

```
1   se  x ≠ pai[x]
2       então  pai[x] ← FIND-SET(pai[x])
3   devolva  pai[x]
```

# Análise de union by rank e path compression separados

- Usando a ED disjoint-set forest somente com a heurística union by rank pode-se mostrar que o custo total é $O(m \lg n)$.
- Usando a ED disjoint-set forest somente com a heurística path compression e supondo que são feitas $f$ chamadas a FIND-SET, pode-se mostrar que o custo total é $O(n + f \cdot (1 + \log_{2+f/n} n))$.
- Quando combinamos as duas heurísticas juntas o custo total é $O(m\alpha(n))$ onde $\alpha(n)$ é uma função que cresce muito lentamente. Esta é a melhor implementação conhecida.

# Análise de union by rank com path compression

Vamos descrever (sem provar) a complexidade de uma seqüência de operações MAKE-SET, UNION e FIND-SET quando union by rank e path compression são usados juntas.

Para $k \geq 0$ e $j \geq 1$ considere a função

$$A_k(j) = \begin{cases} j+1 & \text{se } k = 0, \\ A_{k-1}^{(j+1)}(j) & \text{se } k \geq 1, \end{cases}$$

onde $A_{k-1}^{(j+1)}(j)$ significa que $A_{k-1}(j)$ foi iterada $j+1$ vezes.

# Análise de union by rank com path compression

Ok. Você não entendeu o que esta função faz...

Tudo que você precisa saber é que ela cresce muito rápido.

$$A_0(1) = 2$$
$$A_1(1) = 3$$
$$A_2(1) = 7$$
$$A_3(1) = 2047$$
$$A_4(1) = 16^{512}$$

Em particular, $A_4(1) = 16^{512} \gg 10^{80}$ que é número estimado de átomos do universo...

# Análise de union by rank com path compression

Considere agora inversa da função $A_k(n)$ definida como

$$\alpha(n) = \min\{k \,:\, A_k(1) \geq n\}.$$

Usando a tabela anterior temos

$$\alpha(n) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq n \leq 2, \\ 1 & \text{para } n = 3, \\ 2 & \text{para } 4 \leq n \leq 7, \\ 3 & \text{para } 8 \leq n \leq 2047, \\ 4 & \text{para } 2048 \leq n \leq A_4(1). \end{cases}$$

Ou seja, do **ponto de vista prático**, para qualquer valor razoável de $n$, temos $\alpha(n) \leq 4$, ou seja, $\alpha(n)$ é uma constante.

# Análise de union by rank com path compression

Teorema. (Tarjan) Uma seqüência de $m$ operações MAKE-SET, UNION e FIND-SET pode ser executada em uma ED *disjoint-set forest* com union by rank e path compression em tempo $O(m\alpha(n))$ no pior caso.

Dizemos que a função $m\alpha(n)$ é superlinear.

Dada a afirmação anterior de que $\alpha(n)$ é constante para qualquer valor razoável de $n$, isto significa que na prática o tempo total é linear e que o custo amortizado por operação é uma constante.

# Análise de union by rank com path compression

Uma discussão mais detalhada da ED *disjoint-set forests* pode ser vista no Capítulo 21 do CLRS.

Voltaremos agora à implementação do algoritmo de Kruskal.
Podemos supor que o grafo é conexo e assim $V = O(E)$.

# O algoritmo de Kruskal (de novo)

AGM-KRUSKAL$(G, w)$

```
1  A ← ∅
2  para cada v ∈ V[G] faça
3      MAKE-SET(v)
4  Ordene as arestas em ordem não-decrescente de peso
5  para cada (u, v) ∈ E nessa ordem faça
6      se FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
7          então A ← A ∪ {(u, v)}
8                UNION(u, v)
9  devolva A
```

Complexidade:

- Ordenação: $O(E \lg E)$
- $|V|$ chamadas a MAKE-SET
- $2|E| + |V| - 1 = O(E)$ chamadas a UNION e FIND-SET

# O algoritmo de Kruskal (de novo)

- Ordenação: $O(E \lg E)$
- $|V|$ chamadas a MAKE-SET
- $O(E)$ chamadas a UNION e FIND-SET

Usando a ED *disjoint-set forest* com union by rank e path compression, o tempo gasto com as operações é $O((V + E)\alpha(V)) = O(E\alpha(V))$.

Como $\alpha(V) = O(\lg V) = O(\lg E)$ o passo que consome mais tempo no algoritmo de Kruskal é a ordenação.

Logo, a complexidade do algoritmo é $O(E \lg E) = O(E \lg V)$.