Programação Dinâmica

prof. Fábio Luiz Usberti

MC521 - Desafios de Programação I

Instituto de Computação - UNICAMP - 2018

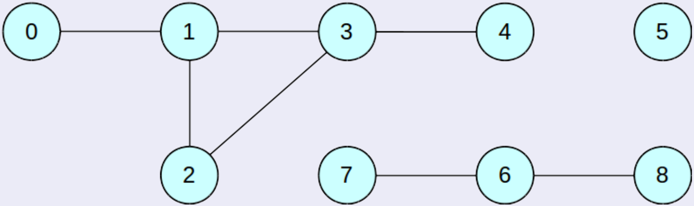
Sumário

Busca em Profundidade

- Busca em profundidade (“depth first search” – DFS) é um algoritmo de percurso em grafo que se inicia em um nó raiz para, em seguida, realizar chamadas recursivas da busca em cada nó vizinho não-visitado.
- Ao atingir um nó que não possui vizinhos não-visitados, o algoritmo DFS recua para o nó anterior e busca recursivamente outro vizinho não-visitado, se houver.
- A complexidade do DFS depende da estrutura de dados utilizada:
  1. Lista de adjacência: $O(|V| + |E|)$.
  2. Matriz de adjacência: $O(|V|^2)$.

Busca em Profundidade

- Supondo que a chamada `dfs(0)` realiza a DFS com origem no vértice 0 e que a vizinhança de um vértice está armazenada de modo crescente pelo rótulo do vértice.
- Nesse caso, para o grafo abaixo a sequência de visitação será $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$.

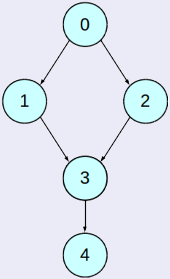


Busca em Profundidade

```
#define UNVISITED -1
#define VISITED 1

typedef pair<int, int> ii;       // In this chapter, we will frequently use these
typedef vector<ii> vii;        // three data type shortcuts. They may look cryptic
typedef vector<int> vi;    // but shortcuts are useful in competitive programming

vi dfs_num;     // this variable has to be global, we cannot put it in recursion
vector<vii> AdjList;

void dfs(int u) {          // DFS for normal usage: as graph traversal algorithm
  printf(" %d", u);                                       // this vertex is visited
  dfs_num[u] = VISITED;      // important step: we mark this vertex as visited
  for (int j = 0; j < (int)AdjList[u].size(); j++) {
    ii v = AdjList[u][j];                         // v is a (neighbor, weight) pair
    if (dfs_num[v.first] == UNVISITED)            // important check to avoid cycle
      dfs(v.first);      // recursively visits unvisited neighbors v of vertex u
} }
```

Busca em Profundidade

- UVa 11902 - Dominator: Um vértice X é um dominador de um vértice Y se todo o caminho que começa da raiz (nó 0) até o nó Y necessariamente passa pelo nó X. Se o nó Y não é alcançável a partir da raiz, então Y não possui um dominador. Além disso, todo nó alcançável a partir da raiz é seu próprio dominador. Dado um grafo com $|V| < 100$, determine os dominadores de todos os vértices.



Busca em Profundidade

- Esse problema pode ser resolvido com o seguinte algoritmo $O(|V|^2 + |V||E|)$:

1. Verifique quais são os nós alcançáveis a partir da raiz 0, executando `dfs(0)`.
2. Para verificar quais são os nós dominados por um nó X, este nó é temporariamente removido do grafo e o método `dfs(0)` é executado novamente.
3. Um nó Y é dominado por X quando: (*i*) a busca DFS no grafo original alcançou o nó Y e (*ii*) a busca DFS não alcançou Y após a remoção de X.
4. Repetir para todo $X \in [0, \ldots, |V| - 1]$.

- Obs.: Não é necessário remover de fato o nó X da estrutura em cada iteração. Basta simplesmente encerrar o percurso caso o nó X seja atingido.

Busca em Largura

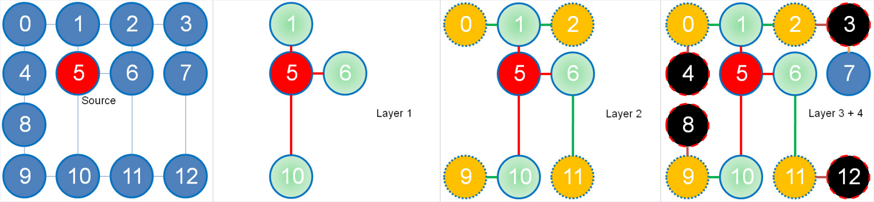
- Busca em largura ("breadth first search" – BFS) é um algoritmo de percurso em grafo que se inicia em um nó raiz 0 e visita todos os nós vizinhos a 0 (primeira camada) para depois visitar os vizinhos (não-visitados) dos vizinhos (segunda camada), e assim sucessivamente, camada por camada.
- A complexidade do BFS depende da estrutura de dados utilizada:
  1. Lista de adjacência: $O(|V| + |E|)$.
  2. Matriz de adjacência: $O(|V|^2)$.

Percursos em Grafos

Busca em Largura

- Supondo que o algoritmo BFS utiliza como raiz o nó 5 e que a vizinhança de um vértice está armazenada de modo crescente pelo número do vértice. Nesse caso, para o grafo abaixo a sequência de visitação será:

1. Camada 0: 5.
2. Camada 1: $1 \rightarrow 6 \rightarrow 10$.
3. Camada 2: $0 \rightarrow 2 \rightarrow 11 \rightarrow 9$.
4. Camada 3: $4 \rightarrow 3 \rightarrow 12 \rightarrow 8$.
5. Camada 4: 7.



Busca em Largura

```
// inside int main()——no recursion
   vi d(V, INF); d[s] = 0;     // distance from source s to s is 0
   queue<int> q; q.push(s);    // start from source

   while (!q.empty()) {
   int u = q.front(); q.pop();    // queue: layer by layer!
      for (int j = 0; j < (int)AdjList[u].size(); j++) {
         ii v = AdjList[u][j];        // for each neighbor of u
         if (d[v.first] == INF) {    // if v.first is unvisited + reachable
            d[v.first] = d[u] + 1;   // make d[v.first] != INF to flag it
            q.push(v.first);         // enqueue v.first for the next iteration
         }
      }
   }
```

Busca em Largura

- Alguns problemas exigem como saída a reconstrução do caminho mais curto, e não apenas o comprimento do caminho;
- Exemplo: o caminho mais curto entre os vértices 5 e 7 é $5 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 7$;
- Isso pode ser facilmente feito utilizando um vetor de inteiros p. Cada vértice v lembra de seu pai u ($p[v] = u$);
- Exemplo: para o caminho mais curto entre os vértice 5 e 7 onde $5 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 7$, o vértice 7 terá o vértice 3 como seu pai; o vértice 3 terá o vértice 2 como seu pai, e assim sucessivamente até que o vértice 1 terá o vértice 5 (origem) como seu pai;

Busca em Largura

```
// uses information from vector p
void printPath(int u) {
   // base case, at the source s
   if (u == s) {
      printf("%d", s); return;
   }
   // recursive: to make the output format: s -> ... -> t
   printPath(p[u]);
   printf(" %d", u);
}
```

Aplicação de Percursos em Grafos

- Uma única chamada de `dfs(u)` (ou `bfs(u)`) visita somente vértices conectados a u. Esse fato pode ser utilizado para encontrar e enumerar os componentes conexos de um grafo não-orientado.
- Para isso é suficiente uma simples adaptação do algoritmo DFS: após o término do percurso, reiniciar a busca a partir de um nó ainda não-visitado. Se houver tal nó, um novo componente conexo foi encontrado.

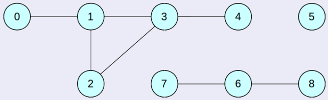
Componentes Conexos

Aplicação de Percursos em Grafos

```
// inside int main()---this is the DFS solution
  numCC = 0;
  dfs_num.assign(V, UNVISITED);    // this sets all vertices' state to UNVISITED
  for (int i = 0; i < V; i++)                    // for each vertex i in [0..V-1]
    if (dfs_num[i] == UNVISITED)              // if that vertex is not visited yet
      printf("Component %d:", ++numCC), dfs(i), printf("\n");   // 3 lines here!
  printf("There are %d connected components\n", numCC);
```

- Para o grafo abaixo, a saída será:

```
Component 1: 0 1 2 3 4
Component 2: 5
Component 3: 6 7 8
There are 3 connected components
```



Ordenação Topológica

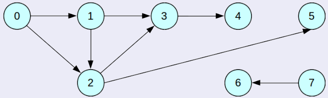
Aplicação de Percursos em Grafos

- Uma ordenação topológica tem por objetivo encontrar em um grafo orientado acíclico ("directed acyclic graph" – DAG) uma ordem para os vértices de modo que para cada arco (u, v) do DAG, tem-se que $u \prec v$ (u precede v) na ordenação topológica.
- Todo DAG possui pelo menos uma e possivelmente múltiplas ordenações topológicas.
- Exemplo: encontrar uma sequência de disciplinas tal que um aluno complete todos os créditos necessários para integralização de um curso. Uma disciplina pode conter pré-requisitos e estes nunca são cíclicos, logo as disciplinas podem ser modeladas por um DAG.

Aplicação de Percursos em Grafos

- Um algoritmo para a solução do problema de ordenação topológica pode ser obtido modificando o algoritmo DFS.
- O algoritmo, proposto por Robert E. Tarjan, inclui um nó *u* na lista de nós (ordenados topologicamente) quando todos as subárvores de *u* na árvore geradora DFS já foram visitados.
- Para o grafo abaixo, uma solução possível para o problema de ordenação topológica é:

```
7 6 0 1 2 5 3 4
```

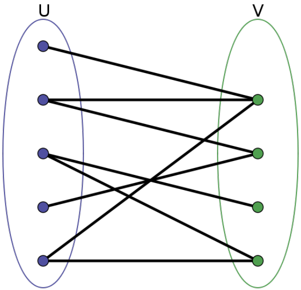


Aplicação de Percursos em Grafos

```
vi topoSort;             // global vector to store the toposort in reverse order

void dfs2(int u) {    // change function name to differentiate with original dfs
  dfs_num[u] = VISITED;
  for (int j = 0; j < (int)AdjList[u].size(); j++) {
    ii v = AdjList[u][j];
    if (dfs_num[v.first] == UNVISITED)
      dfs2(v.first);
  }
  topoSort.push_back(u);   // this is the only change from DFS
}

int main() {
  // make sure that the given graph is DAG
  printThis("Topological Sort (the input graph must be DAG)");
  topoSort.clear();
  dfs_num.assign(V, UNVISITED);
  for (int i = 0; i < V; i++)            // this part is the same as finding CCs
    if (dfs_num[i] == UNVISITED)
      dfs2(i);
  reverse(topoSort.begin(), topoSort.end());                // reverse topoSort
  for (int i = 0; i < (int)topoSort.size(); i++)       // or you can simply read
    printf(" %d", topoSort[i]);            // the content of topoSort backwards
  printf("\n");
  return 0;
}
```

Aplicação de Percursos em Grafos

- Um grafo bipartido é um grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos U e V tais que toda aresta conecta um vértice em U a um vértice em V.
- Um grafo G é bipartido se e somente se G não possui ciclos de tamanho ímpar.
- Um grafo G é bipartido se e somente se G é 2-colorível, o que significa que é possível colorir os vértices de G utilizando até 2 cores de modo que vértices adjacentes possuam cores distintas.



Grafos Bipartidos

Aplicação de Percursos em Grafos

- Para checar se um grafo é 2-colorível, é possível utilizar o algoritmo BFS da seguinte forma:

1. Colorir o nó raiz de branco (camada 0).
2. Colorir os nós vizinhos à raiz de preto (camada 1).
3. Colorir os nós vizinhos dos vizinhos da raiz de branco (camada 2).
4. Continue alternando as cores camada a camada da busca BFS. Se houver dois nós adjacentes com a mesma cor, então o grafo não é bipartido.

Aplicação de Percursos em Grafos

```
int main() {
  queue<int> q; q.push(s);
  vi color(V, INF); color[s] = 0;
  bool isBipartite = true; // addition of one boolean flag, initially true
  while (!q.empty() & isBipartite) { // similar to the original BFS routine
    int u = q.front(); q.pop();
    for (int j = 0; j < (int)AdjList[u].size(); j++) {
      ii v = AdjList[u][j];
      if (color[v.first] == INF) {     // but, instead of recording distance,
        color[v.first] = 1 - color[u];  // we just record two colors {0, 1}
        q.push(v.first); }
      else if (color[v.first] == color[u]) { // u & v.first has same color
        isBipartite = false; break; // we have a coloring conflict
      }
    }
  }
}
```

Referências

1. S. Halim e F. Halim. Competitive Programming 2, Second Edition Lulu (www.lulu.com), 2011. (IMECC – 005.1 H139c)
2. S. S. Skiena, M. A. Revilla. Programming Challenges: The Programming Contest Training Manual, Springer, 2003.
3. T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L.Rivest e C. Stein. Introduction to Algorithms. 2nd Edition, McGraw-Hill, 2001. (no. chamada IMECC – 005.133 Ar64j 3.ed.)
4. U. Manber. Introduction to Algorithms: A Creative Approach. Addison-Wesley. 1989. (no. chamada IMECC – 005.133 Ec53t 2.ed.)