第 2 問　ぼっちくんは、硬貨 2 枚を衝突させながら遊んでいる。次の文章を読み、後の問い (**問** 1 〜 5) に答えよ。(配点　25)

ぼっちくんは、同じ質量 m・半径 r を持つ円形の硬貨 2 枚（A、B）を用意した。硬貨 A をなめらかで水平な机の上に静止させ、A に向かって硬貨 B を速さ v で射出する。

簡単のため、硬貨は図 1 の xy 平面上にあるものとする。最初 A は原点 O に、B は $(-a, b)$ $(a > 0, b \geq 0)$ にあり、x 軸の正の方向に射出されるものとする。ただし b は硬貨の半径よりも小さいものとする。

衝突後の A の速さを v_{A}、x 軸と速度とがなす角を θ_{A} とし、B の速さ、なす角についてもそれぞれ同様に v_{B}、θ_{B} と定義する。

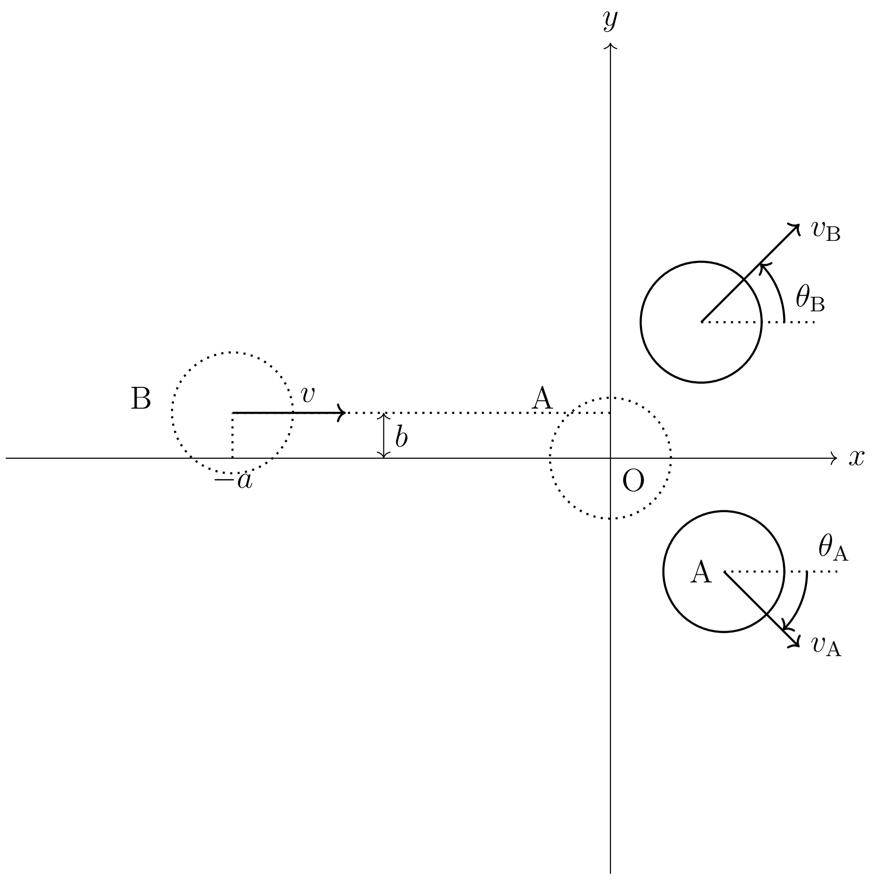

図 1

問 1　次の発言の内容が正しくなるように、空欄 $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ウ}}$ に入れる語句の組合せとして最も適当なものを後の ① ～ ⑧ のうちから一つ選べ。 $\boxed{1}$

やることないなあ、そういえば昨日食べた $\boxed{\text{ア}}$ 美味しかったなあ。今机の上には、小銭 2 枚しかないや。それを使って遊ぼうか。
(しばらく硬貨で遊ぶ)
なるほどね、衝突時のエネルギー損失を無視すると、A と B とが正面衝突する $(b = 0)$ ときは、A の速さが $\boxed{\text{イ}}$ になって、B の速さが $\boxed{\text{ウ}}$ になるんだね。

	ア	イ	ウ
①	チーズ牛丼	0	v
②	チーズ牛丼	0	$v/2$
③	チーズ牛丼	$v/2$	$v/2$
④	チーズ牛丼	v	0
⑤	タピオカ	0	v
⑥	タピオカ	0	$v/2$
⑦	タピオカ	$v/2$	$v/2$
⑧	タピオカ	v	0

次は、正面衝突じゃないとき、つまり $b > 0$ のときの $\theta = \theta_{\mathrm{A}} + \theta_{\mathrm{B}}$ について（ただしエネルギー損失は無視）考えようとしたんだけど、わからないなあ。少し $\boxed{\text{エ}}$ で聞いてみようかなあ。

問 2 $\boxed{\text{エ}}$ には、SNS の名前が入る。最も適当なものを次の ① 〜 ④ のうちから一つ選べ。 $\boxed{2}$

① Twitter　② Instagram　③ Facebook　④ mixi

こま○けろとめ○ちゃんからリプライがとどいた。ただし、$\vec{v}$ は B の衝突前の速度ベクトル、$\vec{v_{\mathrm{A}}}$、$\vec{v_{\mathrm{B}}}$ はそれぞれ A、B の衝突後の速度ベクトルである。

こま○けろの考え

こういう問題は運動量保存 $m\vec{v} = m\vec{v_{\mathrm{A}}} + m\vec{v_{\mathrm{B}}}$ は使うよ。あと、エネルギーは保存するから、跳ね返り係数を 1 とすれば計算できるのではないかな？ けろけろ。

め○ちゃんの考え

跳ね返り係数なんて使わずに、そのままエネルギー保存を使うのー。めぇ。

問 3 上の 2 人 (?) の考えを参考にして、θ の値として最も適当なものを、次の ① 〜 ⑧ のうちから一つ選べ。 $\boxed{3}$

$\boxed{3}$

① 0°　② 30°

③ 45°　④ 60°

⑤ 90°　⑥ 120°

⑦ 135°　⑧ 150°

問 4　次の文章の内容が正しくなるように、次の 2 つの空欄に入れる数式の組合せとして最も適当なものをそれぞれ後の ① 〜 ⑧ のうちから一つ選べ。 $\boxed{4}$ $\boxed{5}$

一般に、ベクトル $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ と、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ とのなす角 α との間には

余弦定理

$$|\vec{c}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$$

が成立する。

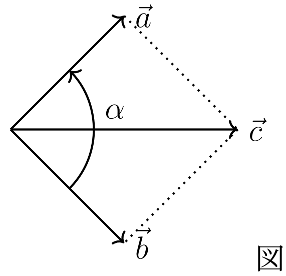

図 2

簡単のため $v_{\mathrm{A}}=v_{\mathrm{B}}$、$\theta_{\mathrm{A}}=\theta_{\mathrm{B}}$ とする。衝突時に全体の 1/3 の運動エネルギーが失われたとき、その失われたエネルギーの大きさ A を考慮した上でエネルギー保存の式を立式し、余弦定理を適用した式と比較することにより、$A=$ $\boxed{4}$ が得られる。

よって、このとき $\theta=$ $\boxed{5}$ を得る。

$\boxed{4}$

① $v_{\mathrm{A}}^2\cos\theta$　② $mv_{\mathrm{A}}^2\cos\theta$

③ $2v_{\mathrm{A}}^2\cos\theta$　④ $2mv_{\mathrm{A}}^2\cos\theta$

⑤ $-v_{\mathrm{A}}^2\cos\theta$　⑥ $-mv_{\mathrm{A}}^2\cos\theta$

⑦ $-2v_{\mathrm{A}}^2\cos\theta$　⑧ $-2mv_{\mathrm{A}}^2\cos\theta$

$\boxed{5}$

① $0°$　② $30°$

③ $45°$　④ $60°$

⑤ $90°$　⑥ $120°$

⑦ $135°$　⑧ $150°$

問 5　最後にぼっちくんは、硬貨 B を、質量 $2m$ の硬貨 C に置き換えた。このとき、次の 2 つの空欄に入れる数式の組合せとして最も適当なものをそれぞれ後の選択肢のうちから一つ選べ。 $\boxed{6}$ $\boxed{7}$

衝突前、衝突後の C の速さをそれぞれ v'、$v_{\rm C}$ 、x 軸と速度とがなす角を $\theta_{\rm C}$ とおく。衝突時にエネルギーが損失しないと考えると、問 4 と同様な余弦定理とエネルギー保存の比較による考察から、$\theta' = \theta_{\rm A} + \theta_{\rm C}$ とおくと、$\cos\theta' =$ $\boxed{6}$ と求まる。これは、常に θ' が $\boxed{7}$ であることを意味する。

$\boxed{6}$

① $v_{\rm C}/2v_{\rm A}$　② $v_{\rm C}/4v_{\rm A}$

③ $v_{\rm A}/2v_{\rm C}$　④ $v_{\rm A}/4v_{\rm C}$

⑤ $-v_{\rm C}/2v_{\rm A}$　⑥ $-v_{\rm C}/4v_{\rm A}$

⑦ $-v_{\rm A}/2v_{\rm C}$　⑧ $-v_{\rm A}/4v_{\rm C}$

$\boxed{7}$

① 鋭角

② 直角

③ 鈍角

解答・解説

計 25 点

問題番号	正解	配点
1	④	4
2	①	2
3	⑤	5
4	②	3
5	④	3
6	④	5
7	①	3

出題のねらい

2021 年度から導入された「大学入学共通テスト」。無駄に生徒同士を「対話」させているけれども、別にぼっちで考察してもいいでしょ。考察中に Twitter をいじってもいいでしょ。なにか反論あります？ 文科省さん。

問 1 [同一質量・一直線上の弾性衝突]

ぼっちが食べるのはチーズ牛丼である。

ここ重要！

ぼっちが食べるのはチーズ牛丼、陽キャが食べるのはインスタ映えする食べ物（ど偏見）

運動量保存より、

$$mv = mv_{\mathrm{A}} + mv_{\mathrm{B}}$$

弾性衝突なので、跳ね返り係数は 1 だから、

$$1 = \frac{v_{\mathrm{A}} - v_{\mathrm{B}}}{v}$$

これらより、$v_{\mathrm{A}} = v$、$v_{\mathrm{B}} = 0$ が成立する。よって答えは ④ 。

問 2 [ぼっちの使う SNS]

ここ重要！

ぼっちが使うのは、Twitter。ぼっちじゃない人は Instagram を使う。

よって、答えは ① 。

問 3 [弾性衝突時の散乱角]

ここでは、め〇ちゃんの考えを採用した。おそらくこま〇けろの考えを採用しても解けると思われる。

運動量保存

$$\vec{v} = \vec{v_{\mathrm{A}}} + \vec{v_{\mathrm{B}}}$$

力学的エネルギー保存の式

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2 + \frac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^2$$

すなわち、

$$v^2 = v_{\mathrm{A}}^2 + v_{\mathrm{B}}^2$$

これらの式は、v^2、v_{A}^2、v_{B}^2 についてピタゴラスの定理が成り立つことを意味している。よって、答えは 90° すなわち ⑤ 。

問 4 [非弾性衝突時の散乱角]

運動量保存の式に余弦定理を適用すると、

$$v^2 - 2v_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{B}}\cos\theta = v_{\mathrm{A}}^2 + v_{\mathrm{B}}^2$$

エネルギー保存の式

$$\frac{1}{2}mv^2 - A = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2 + \frac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^2$$

すなわち

$$v^2 - \frac{2A}{m} = v_{\mathrm{A}}^2 + v_{\mathrm{B}}^2$$

これらの式を比較すると、$A = v_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{B}} \cos\theta$ となり、答えは ② 。

ここで、損失したエネルギーは 1/3 であるから、

$$2v_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{B}} \cos\theta : (v_{\mathrm{A}}^2 + v_{\mathrm{B}}^2) = 1 : 2$$

となる。$v_{\mathrm{A}} = v_{\mathrm{B}}$ であるから、$\cos\theta = 1/2$ よって、答えは 60° すなわち ④ 。

問 5 [質量が違う硬貨同士の衝突時の散乱角]

運動量保存の式

$$2m\vec{v'} = m\vec{v_{\mathrm{A}}} + 2m\vec{v_{\mathrm{C}}}$$

これに余弦定理を適用すると、

$$4v'^2 - 4v_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{C}} \cos\theta' = v_{\mathrm{A}}^2 + 4v_{\mathrm{C}}^2$$

力学的エネルギー保存の式

$$mv'^2 = \frac{1}{2} m v_{\mathrm{A}}^2 + m v_{\mathrm{C}}^2$$

すなわち

$$4v'^2 = 2v_{\mathrm{A}}^2 + 4v_{\mathrm{C}}^2$$

さらに変形して、

$$4v'^2 - v_{\mathrm{A}}^2 = v_{\mathrm{A}}^2 + 4v_{\mathrm{C}}^2$$

これらの式を比較して、$\cos\theta' = v_{\mathrm{A}}/4v_{\mathrm{C}}$ を得る。つまり、答えは ④ 。

速さの値は正（特に $v_{\mathrm{A}} > 0$ は自明）なので $\cos\theta' > 0$ となり、これはなす角が鋭角だということを意味する。よって、答えは ① 。

このことは定性的には、重いものが軽いものにぶつかっても、重いものが後ろの方向に飛ばされることなく前方に進むこととして理解される。

参考文献

兵頭俊夫.『考える力学 第 2 版』. 学術図書出版社.(2021).