

地球惑星物理学入門 試験持込資料

最終更新：2023 年 12 月 15 日

1. 始めに

本資料は実際に総合科目 E 系列「地球惑星物理学入門」の期末試験（持ち込み可）で実際に持ち込んだ資料です。誤り等あれば指摘してください。巻末に簡単な予想問題を付してあります。期末試験で出題される可能性を○, △, ×で表示しています。

.....

2. 授業の簡潔なまとめ

惑星宇宙分野

エネルギー保存

$$\frac{\mu}{2}v^2 - G\frac{m_s m_p}{r} = E \quad (1)$$

有効ポテンシャル

$$U_{\text{eff}} = -G\frac{m_s m_p}{r} + \frac{\mu l^2}{2r^2} \quad (2)$$

これをグラフに表すと、 $E < 0$ では軌道の r が有界になるとわかる。ケプラーの第一法則によると、惑星の軌道は楕円軌道を取り、

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi} \quad (3)$$

とおける。ただし、 $\mu' = Gm_s m_p / \mu$ として、 $e = \sqrt{1 + 2El^2/\mu'}$ 、 $a = l^2/\mu'(1 - e^2)$ である。また、

$$E = -\frac{\mu'}{2a} \quad l = \sqrt{\mu'a(1 - e^2)} \quad (4)$$

静水圧平衡・ポテト半径 ($R/2$ 程度で岩石が壊れない：天体が丸くならない)

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g \quad R_{\text{potato}} = \sqrt{\frac{2\sigma}{\pi G \rho^2}} \quad (5)$$

質量集中がある場合の慣性モーメント $x = r_c/R$ 、 $\alpha = \rho_c/\rho_m$ として、

$$\frac{I}{MR^2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{(\alpha - 1)x^5 + 1}{(\alpha - 1)x^3 + 1} \quad (6)$$

ジーンズ半径・ジーンズ質量 c_s を音速として、

$$R_j \sim \frac{c_s}{\sqrt{G\rho}} \quad M_j \sim \frac{c_s^3}{\sqrt{G^3\rho}} \quad (7)$$

大気海洋分野

- 過剰冷却されている部分：高緯度、高高度 過剰加熱されている部分：その逆
- 基本的に温度が上がり続ける/下がり続けるところはないので、それを満たすべくエネルギーを輸送するために風が吹く
- 長期間の天気予報は難しい。大規模で遅い変動（例：気候変動）の起こりうる幅は予測できるかもしれない。

ステファン・ボルツマンの法則より、放射フラックスの大きさ L

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (8)$$

質量保存則（オイラー式・ラグランジュ式記述）

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad \frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (9)$$

状態方程式

$$p = \rho RT \quad (10)$$

運動量保存の式（オイラー式・ラグランジュ式記述）

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) + \mathbf{F} \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad (11)$$

ナヴィエ・ストークス方程式（ μ は定数、 \mathbf{v} は非発散）

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (12)$$

これとコリオリの力を考慮して、以下の式が得られる。

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + f v + F_u \quad (13)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - fu + F_v \quad (14)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g + F_w \quad (15)$$

ここから、静水圧平衡や地衡風平衡、気温の通減率などに関する基礎方程式が導出される。

固体地球物理分野

- プレーートの沈み込んだものは地下 660km で溜まる。
- プレートと一緒に沈みこんだ含水鉱物は途中で無水鉱物の方が安定化する。よって地中に海水の貯蔵がされる。

地球史七大事件

- マグマオーシャンの形成
- プレートテクトニクスの開始
- 全マントル対流の開始
- 最初の超大陸ができる
- 海水の逆流
- P/T, K/T, ウィルソンサイクル
- 海水の消滅

ケルビン卿による地球年代予測 $z = 0$ において、

$$t = \frac{(T_0 - T_1)^2}{\pi \kappa (\partial T / \partial z)} \quad (16)$$

となり、 6.4×10^7 年と予測される。

波の伝播において、境界面での見かけの速さ c_x は一定であり、スネルの法則の式は、

$$c_x = \frac{\beta_1}{\sin i_1} = \frac{\beta_2}{\sin i_2} \quad (17)$$

- ダーウィン（海岸の侵食から地球が生まれてから少なくとも数億年が経過していると推定）とケルビン卿との論争があった。

- 3次元走時トモグラフィーによって、地球内部の3次元地図を作る試みがある。

宇宙プラズマ分野

- 太陽は内側から核、放射層、対流層でなっており、中心温度は1000万Kに達するが、表面温度は5800K程度である。
- プラズマとは、気体がさらに高温化して、原子核と電子とに電離してしまった状態である。
- 太陽中心での核融合 $4\text{H} \longrightarrow \text{He} + \nu + \Delta E$
毎秒起きている核融合反応数 $N = E/\Delta E$ 、現在の太陽のヘリウム数 $q[\text{He}]$ 、水素数 $q[\text{H}]$ とすると、
太陽年齢 $q[\text{He}]/N$ 、残りの寿命 $q[\text{H}]/4N$
- 太陽表面では対流ができていますが、磁場が対流を止め、プラズマによって磁場が閉じ込められるため、温度が低い黒点がピンポイントで生じる。
- 太陽の外側には太陽コロナというプラズマの大気があり、100万度以上に達する。また、太陽フレア爆発がしばしば発生し、それが地球の地磁気に影響を及ぼし、さまざまな機器に害を及ぼす。

質量保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (18)$$

磁場の誘導方程式 $\eta = 1/\sigma\mu_0$ として、

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (19)$$

(19) 式で $\eta = 0$ とすると、つまり完全導体だとすると、以下の磁力線凍結が成り立つ。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (20)$$

運動量保存の式は、

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) - \nabla P + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (21)$$

第3項はローレンツ力 F で、

$$F = -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (22)$$

であり、右辺第1項は磁気圧勾配、第2項は磁気張力である。

また、(18) とを用いて、音速を $a = \sqrt{P/\rho}$ とすると、

$$\frac{1}{v} \left(\frac{v^2}{a^2} - 1 \right) \frac{dv}{dr} = \frac{1}{r} \left(2 - \frac{GM}{a^2 r} \right) \quad (23)$$

となり、定性的な計算と観測から、超音速でプラズマが太陽風として飛んでくるとわかる。(両辺のかっこ内の正負によって、 dv/dr が変化する。臨界点があるので、 v^2/a^2 がそれ以上かそれ以下かで場合わけ)

その他、磁気リコネクションについて習った。詳細は本編で。磁力線の再結合によって、プラズマが局所的に溜まり、それが高圧になったところで大量のエネルギーを放出する。

マクスウェル方程式

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

ただし \mathbf{j} は電流密度を表す。

解釈として、 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ は、 \mathbf{E} 方向に流束があることを示し、 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ は $\partial \mathbf{B}/\partial t$ を軸として \mathbf{E} の循環があることを示している。

ついでにオームの法則は電気伝導率 σ を用いて、

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

と表せる。ここで上の式の第二項を 0 として、抵抗率 $\rho = 1/\sigma = RS/L$ を考慮すると、中学校でのオームの法則の式 $V = RI$ が導出される。

問題 1 [ケプラーの第 3 法則]

金星の公転周期 T_v 、地球の公転周期 T_e である。今金星と地球とが最接近した時にレーザーを照射したとき、跳ね返るのに時間 T かかった。このとき地球の公転半径 r_e を求めよ。(○)

金星の公転半径を r_v 、光速 c とすると、光の往復にかかる時間は以下のように表せる。

$$cT = 2(r_e - r_v)$$

ケプラーの第3法則によると、

$$\left(\frac{T_v}{T_e}\right)^2 = \left(\frac{r_v}{r_e}\right)^3$$

これらより、

$$r_e = \frac{(1/2)cT}{1 - (T_v/T_e)}$$

これを実際に計算してみると、 $T = 300 \text{ s}$ のとき $r_e = 1.6 \times 10^9 \text{ km}$ となる。

問題 2 [地衡風平衡]

いま、北半球上のとある場所にある原点に高気圧の中心がある。点 $A(1,0,z)$ に吹く風について考察する。

ただし、高気圧は z 軸対称であるものとする。

(1) 点 A では、気圧傾度力は正か負か。(○)

ここで、簡単のため、 $|\partial p / \partial x| = 1$ とする。

(2) z が十分に大きい場合の風の速度を求め、図示せよ。(○)

(3) z が十分に小さい場合の風の速度を求め、図示せよ。(○)

(1) 負である。

(2) ナヴィエ・ストークス方程式の x 成分と y 成分は、

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + fv + F_u$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - fu + F_v$$

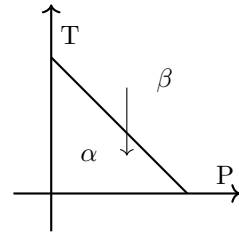
$\partial p / \partial x = -1$ であることと、粘性項を無視できることから、 $\mathbf{v} = (0, -f/\rho)$ を得る。南に風が吹く。

(3) (2) で粘性項を無視せず計算することで、 $\mathbf{v} = (F_v/f, -(1/\rho - F_u)/f)$ を得る。南東方向に風が吹く。

問題 3 [プレートの相転移]

次の文章を埋めなさい。(○)

プレートから岩石が沈み込むが、外気によって周囲よりも **ア** いる。一般に圧力が高くなると、相転移したときに岩石の密度は **イ** なる。図のように、相転移曲線の傾きが負のとき、圧力が同じでも温度が低いと相転移せず、密度が **ウ** 岩石のままでいることがある。地下 660km 付近では、それによって岩石の相の境目より下に沈み込んでも相転移せず、浮力が生じて岩石が溜まった状態になる。



ア：温度が低く イ：高く ウ：低い

注：660km 付近では実際には化学変化しており、 $\text{Mg}_2\text{SiO}_4 \longrightarrow \text{MgSiO}_3 + \text{MgO}$

問題 4 [磁気張力]

半径 R の円を半時計周りに一周するように大きさ B の磁場が発生している。

- (1) ∇ を 3 次元極座標系で表せ。(×)
- (2) $\partial \mathbf{e}_\phi / \partial \phi = -\mathbf{e}_r$ を示せ。(×)
- (3) この状況で発生する磁気張力を求めよ。(△)

(1)

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

(2) 略.

(3) 磁気張力は、 $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_\phi$ であるから、(1)(2) より、

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \frac{B}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} B \mathbf{e}_\phi \\ &= -\frac{B^2}{\mu_0 R} \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

となり、(曲率) 半径に反比例する内側への張力が確認された。ここで、半径 $r = R$ 、 $\theta = \pi/2$ を用いた。

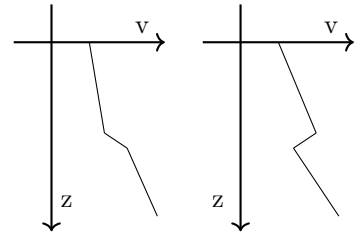
問題 5 [地震波のスネルの法則]

地震波の波線と走時曲線について考える。(○)

(1) 深度が深くなるにつれて地震波速度が一定の割合で増加するときの波線と走時曲線の概型を描け。

(2) 深度と地震波速度とは $v = az + b$ の関係があるとする。いま、震源の深さ 0 で地震が発生した。入射角 30 度の波は最大どの深さまで達するか求めよ。

(3) 深度と地震波速度との関係が右のグラフのようなときについても (1) と同様に考察せよ。



(2) スネルの法則より、最深部での入射角 $\pi/2$ より、

$$\frac{b}{\sin \pi/6} = \frac{az + b}{\sin \pi/2}$$

より、 $z = b/a$ を得る。