Logika obliczeniowa

Algebra Boolea i minimalizacja funkcji logicznych

Przygotował:

Dr inż. Jacek Tkacz

Agenda

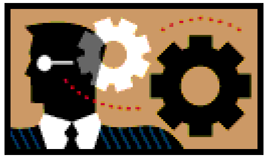
- Wprowadzenie
- Warunki zaliczenia
- Projekty
- Algebra Boole'a
- Minimalizacja funkcji logicznych

Warunki zaliczenia

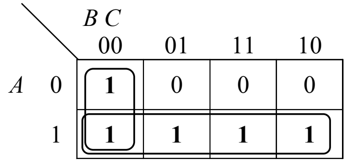
- Wykład
  - Uzyskanie pozytywnej oceny z kolokwium sprawdzającego
- Laboratorium
  - Warunkiem zaliczenia ćwiczenia jest uzyskanie pozytywnej oceny z wykonania zadań polecanych na zajęciach oraz pisemnego sprawdzenia wiadomości (tzw. „wejściówki”).
  - Obecność na zajęciach jest obowiązkowa. Student ma prawo do jednej nieobecności

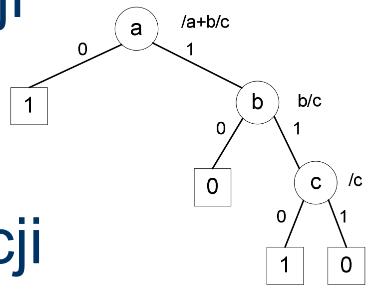
UWAGA: W nieustalonych przypadkach obowiązuje regulamin studiów

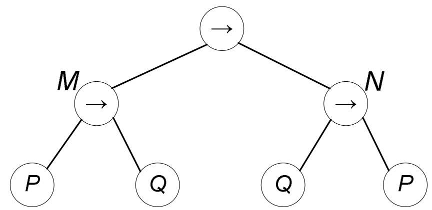
Plan przedmiotu?

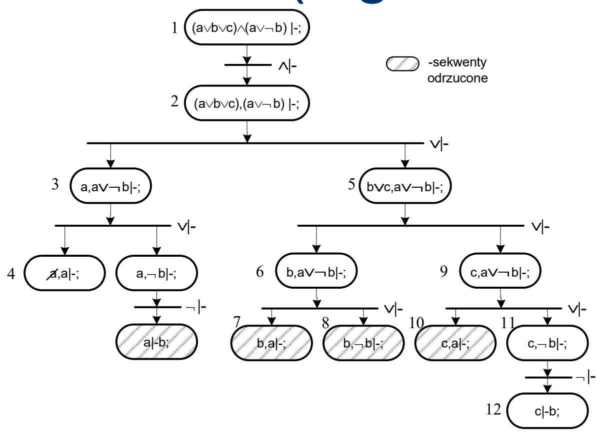


- Minimalizacja funkcji logicznych
- Diagramy Binarnych Decyzji
  - BDD
  - OBDD
- Badanie spełnialności funkcji
- Rachunek sekwentów Gentzena (logika symboliczna)

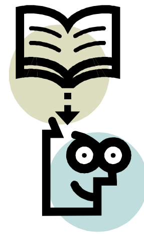








Literatura przedmiotu



- Huzar Z.: Elementy logiki i teorii mnogości dla informatyków, Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2007.
- Ross K.A., Wright Ch.R.B.: Matematyka dyskretna, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2006.
- Ławrow I. A, Maksimowa Ł.R: Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2004.
- Ben Ari M.: Logika matematyczna w informatyce, WNT, Warszawa, 2005.
- Papadimitriou H.: Złożoność obliczeniowa, WNT, Warszawa, 2002.
- Tiuryn J.: Wstęp do teorii mnogości i logiki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski, 1998 (podręcznik internetowy).
- Majewski W.: Układy logiczne, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, 2000.
- Indrzejczak A.: Wprowadzenie do rachunku sekwentów – zagadnienia metodologiczne, zastosowania. Publikacja internetowa: http://www.filozof.uni.lodz.pl/prac/ai/Gentzen.pdf

UWAGA: Podany zestaw literatury nie jest obowiązujący na zajęciach. Literaturą przedmiotu może być każda książka omawiająca zagadnienia poruszane na zajęciach.

Algebra Boole'a

Algebra Boole'a jest to struktura matematyczna złożona z trzech działań binarnych:

- $\vee$ (lub, or, alternatywa, +, ||)
- $\wedge$ (i, and, koniunkcja, *)
- $\neg$ (nie, not, przeczenie logiczne, ~, !)

oraz wyróżnionych elementów 0 (fałsz), 1 (prawda).

Własności algebry Boole’a

W algebrze Boole'a zmienne przyjmują jedną z dwóch możliwych wartości: 0 lub 1. Alternatywa i koniunkcja są przemienne i łączne oraz posiadają takie oto własności:

- $a \lor 0 = a$
- $a \lor 1 = 1$
- $a \lor a = a$
- $a \lor \neg a = 1$

- $a \land 0 = 0$
- $a \land 1 = a$
- $a \land a = a$
- $a \land \neg a = 0$

Prawa algebry Boole'a

- Podwójne zaprzeczenie

$$\neg(\neg a) = a$$

- De Morgana

$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$$
$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$$

- Rozdzielność

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

- Absorbcja

$$a \wedge (a \vee b) = a$$
$$a \vee (a \wedge b) = a$$

Wartości logiczne spójników

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \vee b$	$a \wedge b$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1

Dodatkowe operatory logiczne

- Równoważność ($\leftrightarrow$, $\equiv$, <->, XNOR, $\otimes$)

  $a \leftrightarrow b = (a \land b) \lor (\neg a \land \neg b)$

- Suma wyłączająca (XOR, <+>, $\oplus$)

  $a \oplus b = (\neg a \land b) \lor (a \land \neg b)$

  $a \oplus b = \neg(a \leftrightarrow b)$

- Implikacja ($\rightarrow$, ->)

  $a \rightarrow b = (\neg a \lor b)$

a	b	$a \leftrightarrow b$	$a \oplus b$	$a \rightarrow b$
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	0	1

Dwójkowy system liczbowy

Pozycyjny system liczbowy,
w którym podstawą pozycji są kolejne potęgi liczby 2

- Reprezentacja binarna liczb

$+\ 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

0 0 0 0

Najstarszy bit

Najmłodszy bit

- Przykład

$+\ 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

0 1 0 1

$= 0*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0$

$= 4 + 1 = 5$

Naturalny kod binarny (NKB)

- W NKB kolejne liczby binarne odpowiadają kolejnym liczbom naturalnym (0, 1, 2, 3, 4, 5, …)

Liczba naturalna	Reprezentacja binarna
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010

Kod Gray’a (refleksyjny)

- Jest dwójkowym kodem bezwagowym niepozycyjnym
- Charakteryzuje się tym, że dwa kolejne słowa kodowe różnią się tylko stanem jednego bitu
- Jest również kodem cyklicznym, bowiem ostatni i pierwszy wyraz tego kodu także spełniają w/w zasadę

Konstruowanie kodu Graya

0	00	000	0
1	01	001	1
	11	011	3
	10	010	2
		110	6
		111	7
		101	5
		100	4

Jednobitowy

Dwubitowy

Trzybitowy

Wartości

Reprezentacja tablicowa funkcji (tabela prawdy)

- Funkcję logiczną można przedstawić w postaci tabeli prawdy
- Przykładowa funkcja trzech zmiennych
  - kanoniczna postać sumy

$y_{(a,b,c)} = (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)$

  - kanoniczna postać iloczynu

$y_{(a,b,c)} = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c)$

	a	b	c	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

2^N kombinacji
N – liczba zmiennych logicznych

Minimalizacja funkcji logicznych

- Polega na znalezieniu dla danej funkcji formuły minimalnej, która jest jak najmniej skomplikowana
- Współczynnikiem skomplikowania funkcji nazywamy sumę liczby wyrażeń (pojedynczych liter lub ich kombinacji) podlegających mnożeniu i liczby wyrażeń podlegających dodawaniu
- Może istnieć więcej niż jedna postać minimalna funkcji boolowskiej.

Minimalizacja funkcji z wykorzystaniem przekształceń algebraicznych

$$y_{(a,b,c)} = (\neg a\wedge b\wedge\neg c) \vee (\neg a\wedge b\wedge c) \vee (a\wedge\neg b\wedge c) \vee (a\wedge b\wedge c) =$$

$$\neg a\wedge b\wedge(\underbrace{c\vee\neg c}_{1}) \vee a\wedge c\wedge(\underbrace{b\vee\neg b}_{1}) = \neg a\wedge b \vee a\wedge c$$

Zastosowane prawo rozdzielności

Własność algebry Boole'a:
$a\vee\neg a = 1$

Własność algebry Boole'a
Jeśli $\neg a\wedge b = \Phi$ to:
$\Phi \wedge 1 = \Phi$ więc:
$\neg a\wedge b\wedge 1 = \neg a\wedge b$

Metoda mało przydatna w praktyce

Algorytmiczne metody minimalizacji

- Bazują na generowaniu pokryć przy pomocy jak najmniejszej liczby implikantów prostych
- Przykładowe metody: Karnaugha, Quine'a-McCluskeya, iteracyjnego konsensusu, Espresso (oparta na algorytmie ekspansji)

Siatki Karnauha

- Sposób wynaleziony w 1950 roku przez Maurice Karnaugha
- Jeśli funkcja posiada do sześciu zmiennych i zostanie zapisana w specjalnej tablicy zwanej tablicą lub siatką Karnaugh, wówczas znalezienie minimalnej formuły odbywa się na drodze intuicyjnej
- W celu minimalizacji funkcji o większej liczbie wejść stosuje się z powodzeniem metody komputerowe, np. metodę Quine'a-McCluskeya

Indeksy w siatce Karnaugha

- W siatce Karnaugha część zmiennych binarnych przypisana jest wierszom, a część kolumnom. Wiersze i kolumny numerowane są przy pomocy kodu Graya.
- Wektorem odpowiadającym danej kratce jest wektor powstały po "sklejeniu" binarnego numeru wiersza z binarnym numerem kolumny.

- $Y_{(A,B,C,D)}$

AB \ CD	00	01	11	10
00	F(0,0,0,0)	F(0,0,0,1)	F(0,0,1,1)	F(0,0,1,0)
01	F(0,1,0,0)	F(0,1,0,1)	F(0,1,1,1)	F(0,1,1,0)
11	F(1,1,0,0)	F(1,1,0,1)	F(1,1,1,1)	F(1,1,1,0)
10	F(1,0,0,0)	F(1,0,0,1)	F(1,0,1,1)	F(1,0,1,0)

Minimalizacja z wykorzystaniem siatki Karnaugha - grupowanie

- W celu minimalizacji funkcji logicznych należy wypełnić siatkę Karnaugha wartościami (1 lub 0) odpowiadającymi wartościom funkcji
- Następnie grupuje się pola o wybranej wartości (1 aby uzyskać funkcję minimalną w postaci sumy, 0 dla postaci iloczynu)
- Grupy muszą mieć kształt prostokąta o długościach boków będących potęgami dwójki (mogą przechodzić przez krawędzie siatki)
- W celu uzyskania postaci minimalnej, grupy powinny być możliwe największe
- Jedno pole może należeć do wielu grup

Minimalizacja z wykorzystaniem siatki Karnaugha - wypisywanie

- W przypadku wypisywania zgrupowanych jedynek wypisywane są iloczyny zmiennych nie zmieniających swojej wartości w grupie
- Postać minimalna będzie sumą iloczynów poszczególnych grup

- W przypadku wypisywania zgrupowanych zer wypisywane są sumy zanegowanych zmiennych nie zmieniających swojej wartości w grupie
- Postać minimalna będzie iloczynem sum poszczególnych grup

Przykłady minimalizacji

- Przykład 1

$$X = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + A\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot B\cdot C$$

A \ BC	00	01	11	10
0	**1**	0	0	0
1	**1**	**1**	**1**	**1**

$$X = A + \overline{B}\cdot\overline{C}$$

- Przykład 2

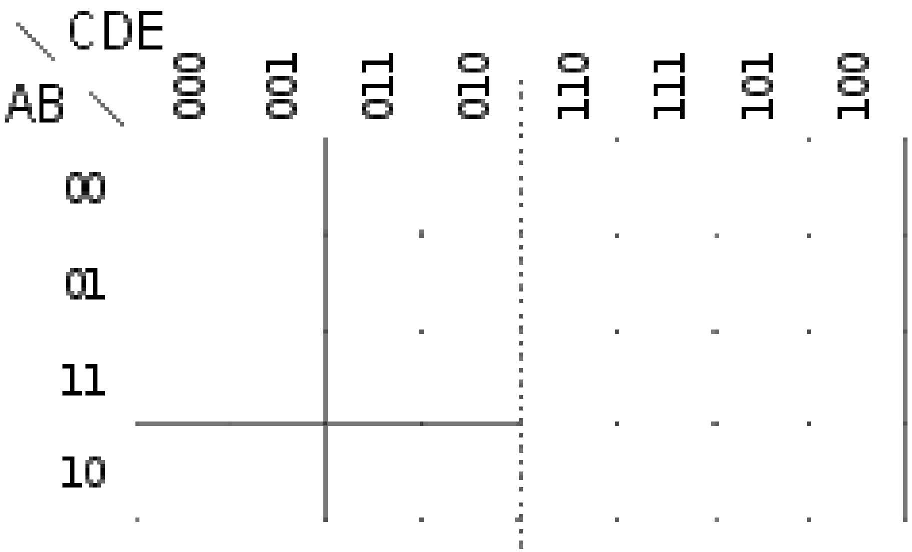
$$Y = \left(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}\right)\cdot\left(A+\overline{B}+\overline{C}\right)\cdot\left(A+\overline{B}+C\right)\cdot\left(A+B+\overline{C}\right)\cdot\left(A+B+C\right)$$

A \ BC	00	01	11	10
0	**0**	**0**	**0**	**0**
1	1	1	**0**	1

$$Y = A\cdot\left(\overline{B}+\overline{C}\right)$$

Relacje pomiędzy kolumnami przy więcej niż 4 zmiennych

Dzięki zastosowaniu kodu Graya, możliwe jest znalezienie w wizualny sposób pól sąsiednich logicznie, czyli różniących się wartością dokładnie jednej zmiennej. Przy większej liczbie zmiennych staje się to jednak trudniejsze.



Przykładowe zadanie

- Opracować tablicę prawdy dla systemu decyzyjnego wykrywającego 4-bitową liczbę pierwszą. Wyprowadzić funkcję logiczną w KPS a następnie ją zminimalizować wykorzystując siatkę Karnaugha

Koniec

http://willow.iie.uz.zgora.pl/~jtkacz

Dziękuję za uwagę!