# PRZYKŁADY DO WYKŁADU (Części III-IV)

## III. Ciągi liczbowe.

**Przykład.**
Sprawdzimy, że ciąg $a_n = n^2 - n$ jest rosnący. Otrzymujemy

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - (n+1) - (n^2 - n) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n = 2n > 0$$

dla wszystkich $n \in N$. Zatem $a_n < a_{n+1}$ dla $n \in N$.

**Przykład.**
Sprawdzimy, że ciąg $b_n = \frac{n!}{n^n}$ jest malejący. Ponieważ $b_n > 0$ dla wszystkich $n \in N$ badamy iloraz $\frac{b_{n+1}}{b_n}$. Otrzymujemy

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < 1,$$

dla wszystkich $n \in N$. Zatem $b_{n+1} < b_n$ dla $n \in N$.

**Przykład.**
Obliczymy $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n} \cdot \frac{n^4+5n-1}{3n^4-2n^2} + \frac{4^n+3^n}{8^n+7^n}\right)$.

Korzystamy z granic $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ oraz $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ dla $|q| < 1$. Otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n} \cdot \frac{n^4+5n-1}{3n^4-2n^2} + \frac{4^n+3^n}{8^n+7^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \frac{n^4+5n-1}{3n^4-2n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{4^n+3^n}{8^n+7^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+5n-1}{3n^4-2n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{4^n+3^n}{8^n+7^n} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{5}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{3-\frac{2}{n^2}} + \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{4}{8})^n + (\frac{3}{8})^n}{1+(\frac{7}{8})^n} = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$$

**Przykład.**
Obliczymy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}$.

Korzystamy z twierdzenia o trzech ciągach oraz z granicy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 0$. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n} \leq \sqrt[n]{5^n + 5^n + 5^n} = \sqrt[n]{3 \cdot 5^n} = 5\sqrt[n]{3} \to_{n\to\infty} 5 \cdot 1 = 5,$$

oraz

$$\sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n} \geq \sqrt[n]{5^n} = 5 \to_{n\to\infty} 5,$$

Zatem

$$5 \leftarrow_{n\to\infty} 5 = \sqrt[n]{5^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n} \leq 5\sqrt[n]{3} \to_{n\to\infty} 5.$$

Stąd $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n} = 5$ na mocy twierdzenia o trzech ciągach.

**Przykład.**
Obliczymy $\lim_{n\to\infty} \frac{n \sin n}{n^2+1}$.

Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \sin n}{n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2 + 1} \cdot \sin n.$$

Niech

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 1} \quad oraz \quad b_n = \sin n.$$

Otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 0$$

oraz

$$-1 \leq \sin n \leq 1,$$

czyli ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony. Zatem na mocy twierdzenia 4.6 dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2 + 1} \cdot \sin n = 0.$$

**Przykład.**
Obliczymy $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$.

Zauważmy, że mamy nieoznaczoność typu $[\infty-\infty]$.
Korzystając ze wzoru $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, przekształcamy

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

**Przykład.**
Wykażemy, że $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=+\infty$.

Otrzymujemy

$$b_n:=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}=:a_n.$$

Mamy $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$.

Zatem na mocy twierdzenia o dwóch ciągach wynika, że $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$.

**Przykład.**
Obliczymy $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^n$.

Wykorzystamy twierdzenie 5.4, tj. granicę $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$, o ile $a_n>0$ dla $n\in N$ i $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

Otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{3n}}{1+\frac{4}{3n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{3n})^n}{(1+\frac{4}{3n})^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[(1+\frac{1}{3n})^{3n}\right]^{\frac{1}{3}}}{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{4}}\right)^{\frac{3n}{4}}\right]^{\frac{4}{3}}}=\frac{e^{\frac{1}{3}}}{e^{\frac{4}{3}}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

## IV. Szeregi liczbowe.

**Przykład 4.1.**
Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n+200}$. Obliczamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+200}=1\neq 0.$$

Zatem nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu i stąd szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n+200}$ jest rozbieżny.

**Przykład 4.2.**
Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

Obliczamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}=\frac{2^n\cdot 2\cdot(n+1)\cdot n!\cdot n^n}{(n+1)^n\cdot(n+1)\cdot 2^n\cdot n!}=$$
$$=\frac{2\cdot n^n}{(n+1)^n}=2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=2\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}<1.$$

Zatem na mocy kryterium d'Alamberta szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ jest zbieżny.

**Przykład 4.3.**
Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty}\ln^n(4+\frac{1}{n})$.

Obliczamy $\sqrt[n]{a_n}=\ln\left(4+\frac{1}{n}\right)$, a stąd

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(4+\frac{1}{n}\right)=\ln 4>1.$$

Zatem na mocy kryterium Cauchy'ego szereg $\sum_{n=2}^{\infty}\ln^n(4+\frac{1}{n})$ jest rozbieżny.

**Przykład 4.4.**
Zbadamy zbieżność szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-n}$.

Dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n}$ otrzymujemy

$$a_n := \frac{2}{n^2+n} \leq \frac{2}{n^2} =: b_n.$$

Zauważmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny jako harmoniczny rzędu $\alpha = 2 > 1$.

Zatem na mocy kryterium porównawczego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n}$ jest zbieżny.

Dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-n}$ otrzymujemy

$$b_n := \frac{n+1}{n^2-n} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} =: a_n.$$

Zauważmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny jako szereg harmoniczny.

Zatem na mocy kryterium porównawczego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-n}$ jest rozbieżny.

**Przykład 4.5.**
Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$.

Oznaczmy $a_n = \frac{1}{n}$.

Zauważmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, jako harmoniczny, więc szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ nie jest bezwzględnie zbieżny.

Mamy natomiast $a_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz ciąg $\{a_n\}$ jest malejący, zatem są spełnione warunki twierdzenia 3.2.

Stąd na mocy kryterium Leibniza szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ jest zbieżny. Szereg ten jest więc zbieżny warunkowo.

**Przykład 4.6.**
Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$.
Oznaczmy $a_n = (-1)^n \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$. Sprawdzimy zbieżność bezwzględną szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, czyli zbadamy zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n|\left|\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n.$$

Korzystamy z kryterium Cauchy'ego. Obliczamy granicę

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Zatem na mocy kryterium Cauchy'ego szereg $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ jest zbieżny, czyli z definicji szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, a więc wobec twierdzenia 3.4 szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Stąd szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$ jest zbieżny.