Analiza matematyczna (Informatyka) Lista nr 4.

Ciągłość funkcji. Własność Darboux.

1. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + 1$. Czy nierówność $f(x) < 2$ zachodzi w pewnym otoczeniu punktu $x_0 = 0$? Jeśli tak, znaleźć największą liczbę δ taką, że warunek $f(x) < 2$ zachodzi dla $|x| < \delta$.

2. Dana jest funkcja $g(t) = \sqrt{t+1}$. Czy nierówność $g(t) < 1$ zachodzi w pewnym otoczeniu punktu $t_0 = 0$? Jeśli tak, znaleźć największą liczbę δ taką, że warunek $g(t) < 1$ zachodzi dla $|t| < \delta$.

3. Zbadać ciągłość następujących funkcji w danym punkcie:

a. $f(x) = 2x + 3, \quad x_0 = 1;$ b. $f(x) = x^2 - 4, \quad x_0 = 0.$

4. Zbadać ciągłość następującej funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x^2 & \text{dla } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

5. Zbadać ciągłość następującej funkcji:

$$g(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{dla } |x| \le 1 \\ |x - 1| & \text{dla } |x| > 1. \end{cases}$$

6. Niech funkcja $f : R \to R$ będzie określona następująco

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{ax} & \text{dla } x < 0 \\ x + b & \text{dla } x \ge 0. \end{cases}$$

Dobrać parametry a i b tak, aby funkcja f była ciągła na R.

7. Niech funkcja $f : R \to R$ będzie określona następująco

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{\sin 2x} & \text{dla } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ b & \text{dla } x = 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Dobrać parametry a i b tak, aby funkcja f była ciągła punkcie $x_0 = 0$.

8. Zbadać ciągłość podanej niżej funkcji w punkcie $x_0 = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{|x-2|} + x & \text{dla } x \neq 2 \\ 1 & \text{dla } x = 2. \end{cases}$$

9. Zbadać ciągłość podanej niżej funkcji w punkcie $x_0 = 0$:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0. \end{cases}$$

W przypadku stwierdzenia nieciągłości określić jej rodzaj.

10. Uzasadnić, że podane niżej równania mają rozwiązanie we wskazanym przedziale:

a. $x \cdot 2^x = 1, \quad (0, 5)$; b. $\ln x + 2x = 1, \quad (\frac{1}{2}, 1)$; c. $\frac{2x}{\pi} - \sin x = 0, \quad (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$.