2. Przegląd ważniejszych klas funkcji.

2.1. Funkcje elementarne.

Podstawowe funkcje elementarne obejmują funkcje: stałe, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne i cyklometryczne.

Funkcje, które można otrzymać z podstawowych funkcji elementarnych za pomocą skończonej ilości działań arytmetycznych oraz operacji złożenia funkcji nazywamy funkcjami elementarnymi.

2.1.1. Wielomian i funkcja wymierna.

Wielomianem stopnia $n \in N \cup \{0\}$ nazywamy funkcję $W : R \to R$ postaci

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_i \in R$, $0 \leq i \leq n$, $a_n \neq 0$.

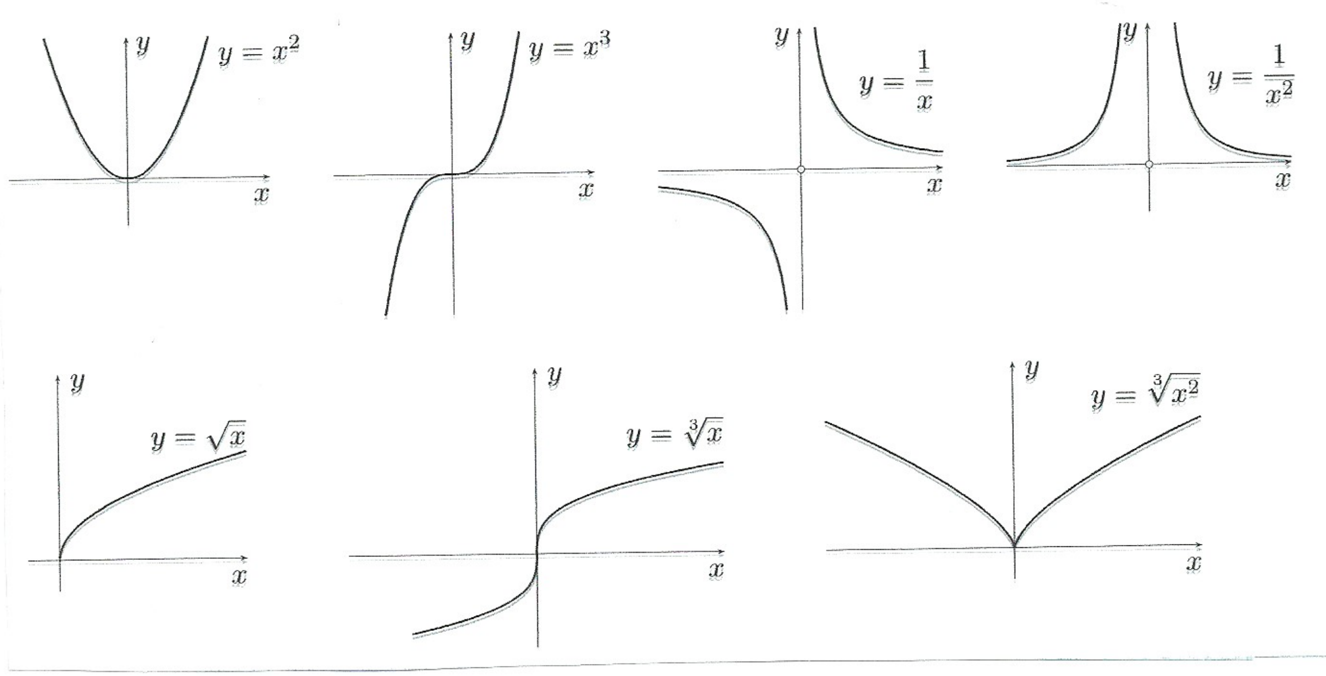
Funkcję, którą można zapisać w postaci ilorazu dwóch wielomianów nazywamy funkcją wymierną. Dziedzina funkcji wymiernej to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z wyłączeniem miejsc zerowych mianowanika.

2.1.2. Funkcja potęgowa.

Funkcją potęgową nazywamy funkcję postaci $f(x) = x^r$, gdzie $r \in R$. Dziedzina funkcji potęgowej zależy od wykładnika r, np.

- $r \in N \cup \{0\} \quad \Rightarrow \quad D_f = R$,
- $r \in Z \setminus (N \cup \{0\}) \quad \Rightarrow \quad D_f = R \setminus \{0\}$,
- $(r \in R \setminus Z \;\wedge\; r > 0) \quad \Rightarrow \quad D_f = R_+ \cup \{0\}$,
- $(r \in R \setminus Z \;\wedge\; r < 0) \quad \Rightarrow \quad D_f = R_+$.

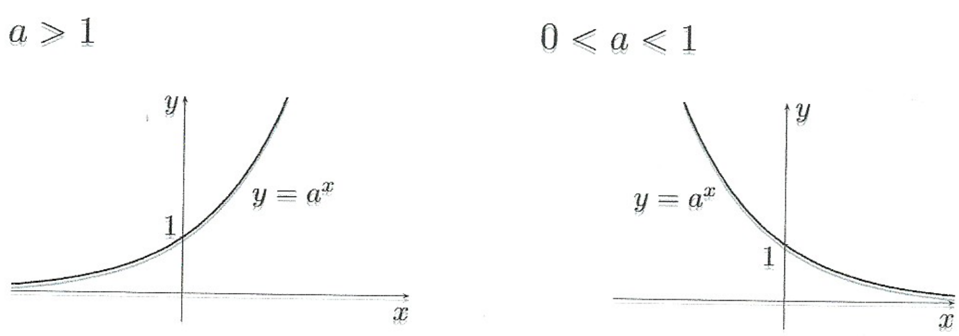
Funkcje $y = x^n$ i $y = x^{\frac{1}{n}}$ są w przedziale $[0, \infty)$ wzajemnie odwrotne.



2.1.3. Funkcja wykładnicza.

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję $f : R \to (0, \infty)$ postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$.

Zatem $D_f = R, \quad W_f = (0, \infty)$.



2.1.4. Funkcja logarytmiczna.

Logarytm liczby dodatniej $b > 0$ przy podstawie a, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, jest wykładnikiem potęgi, do której należy podnieść a, aby otrzymać liczbę logarytmowaną b, tj.

$$z = \log_a b \quad \Leftrightarrow \quad a^z = b.$$

Z definicji logarytmu wynika

- $\log_a 1 = 0$,
- $\log_a a = 1$.

Oznaczamy

- $\log_{10} b = \log b$ - logarytm dziesiętny,
- $\log_e b = \ln b$ - logarytm naturalny, $e \approx 2,7182$.

Własności logarytmów:

Niech $a, b, c > 0$, $a \neq 1$, $r \in R$.

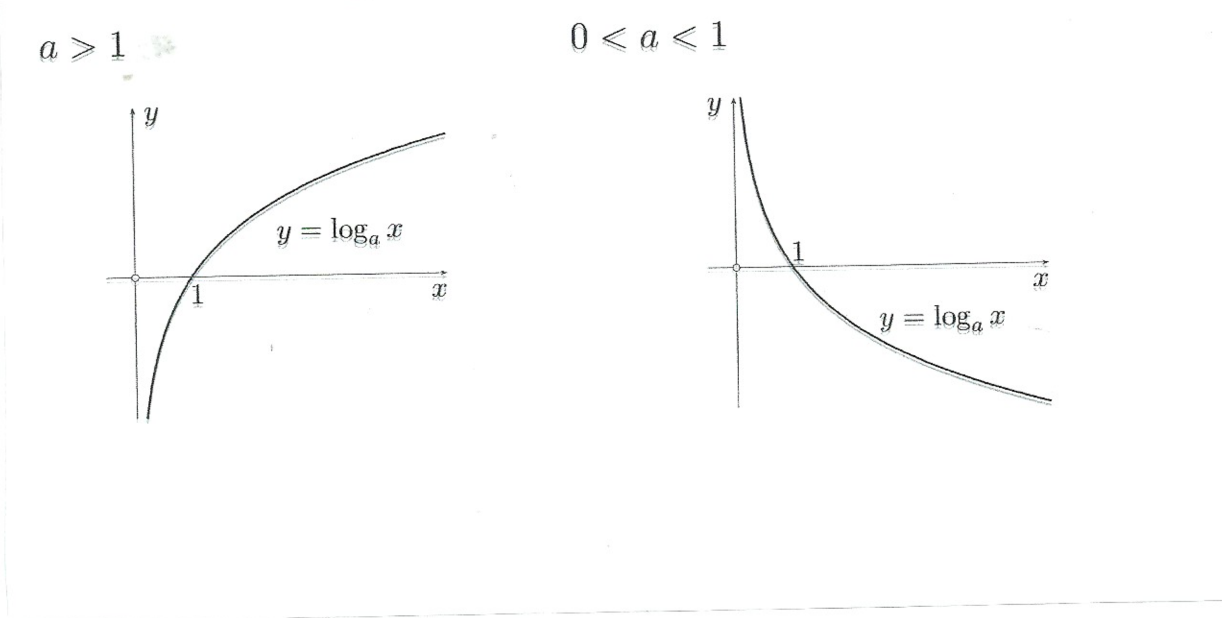
- $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$,
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$,
- $r \log_a b = \log_a b^r$,
- $\log_b c = \log_b a \cdot \log_a c$, czyli $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$, przy $b \neq 1$.

Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję $f : (0, \infty) \to R$ postaci

$f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$.

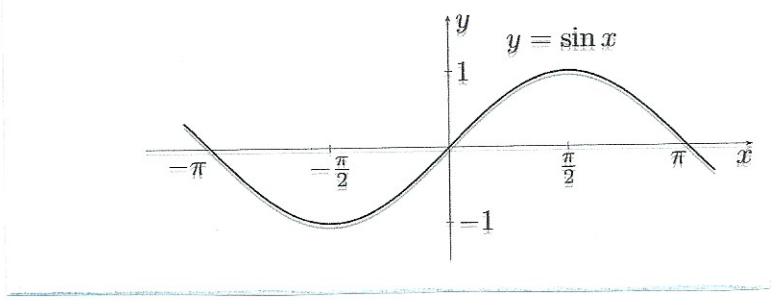
Zatem $D_f = (0, \infty)$, $\quad W_f = R$.

Funkcje $y = a^x$ i $y = \log_a x$ są wzajemnie odwrotne.

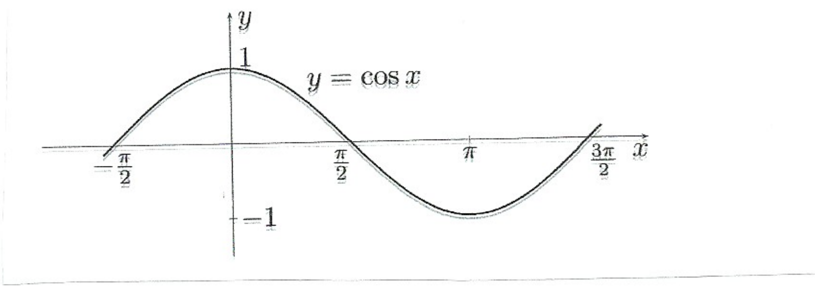


2.1.5. Funkcje trygonometryczne.

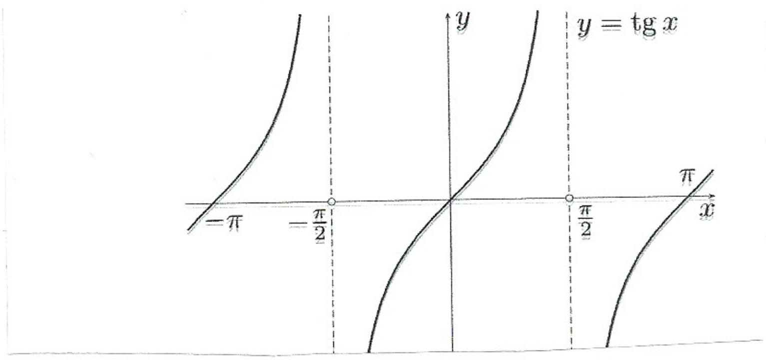
$y = \sin x, \quad D_f = R, \quad W_f = [-1, 1];$



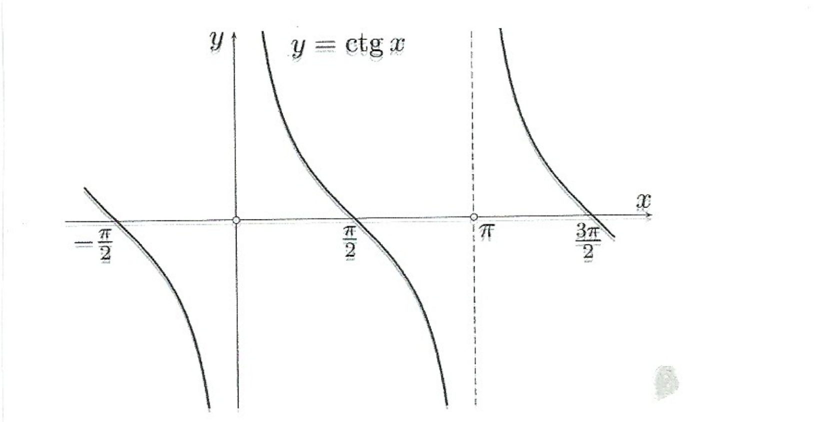
$y = \cos x, \quad D_f = R, \quad W_f = [-1, 1];$



$y = \operatorname{tg} x, \quad D_f = R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,:\, k \in Z\}, \quad W_f = R;$



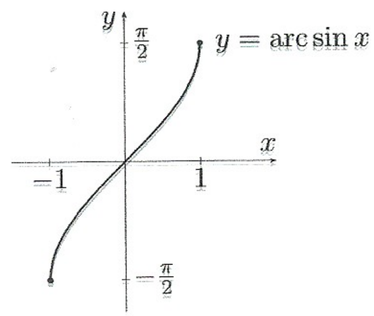
$y = \operatorname{ctg} x, \quad D_f = R \setminus \{k\pi \,:\, k \in Z\}, \quad W_f = R.$



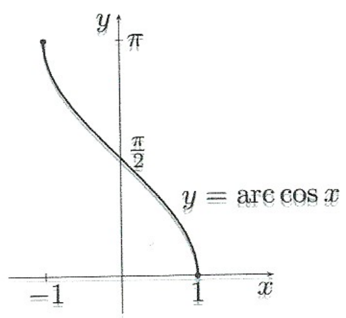
2.1.6. Funkcje cyklometryczne (kołowe).

Funkcje cyklometryczne to funckcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych.

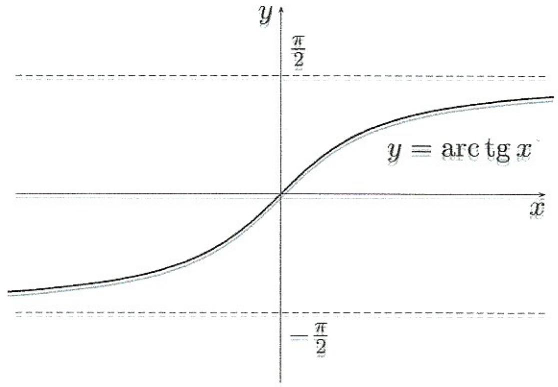
- $f(x) = \arcsin x$ (arcussinus) to funkcja odwrotna do funkcji sinus obciętej do przedziału $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $D_f = [-1, 1]$, $W_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;



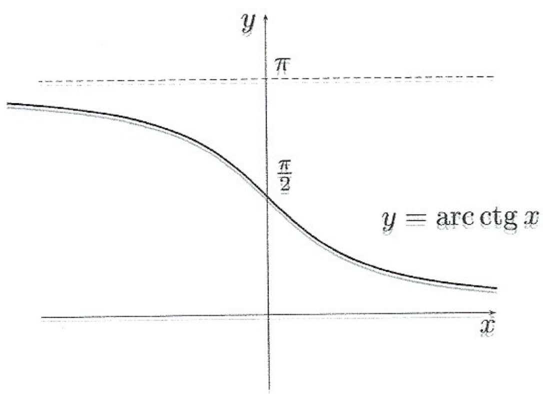
- $f(x) = \arccos x$ (arcuscosinus) to funkcja odwrotna do funkcji cosinus obciętej do przedziału $[0, \pi]$, $D_f = [-1, 1]$, $W_f = [0, \pi]$;



- $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ (arcustangens) to funkcja odwrotna do funkcji tangens obciętej do przedziału $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $D_f = R$, $W_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;



- $f(x) = \operatorname{arc\,ctg} x$ (arcuscotangens) to funkcja odwrotna do funkcji cotangens obciętej do przedziału $(0, \pi)$, $D_f = R$, $W_f = (0, \pi)$.



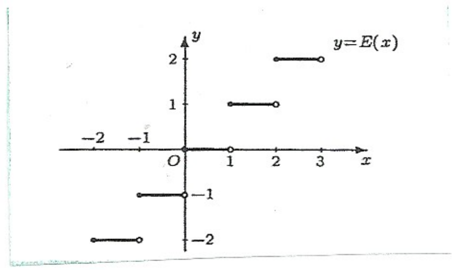
2.2. Funkcje nieelementarne.

2.2.1. Część całkowita.

Funkcją część całkowita nazywamy funkcję $E : R \to Z$ zadaną wzorem

$$E(x) = k \quad dla \quad k \leq x < k+1, \quad k \in Z.$$

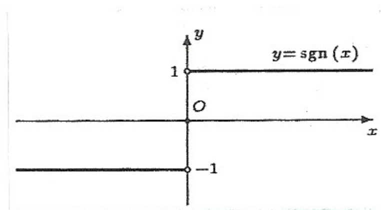
Część całkowita liczby x jest największą liczbą całkowitą nie większą od x.



2.2.2. Funkcja signum.

Funkcją signum nazywamy funkcję $sgn : R \to \{-1, 0, 1\}$ określoną następująco:

- $sgn(x) = -1$ dla $x < 0$,
- $sgn(x) = 0$ dla $x = 0$,
- $sgn(x) = 1$ dla $x > 0$.



2.2.3. Funkcja Dirichleta.

Funkcją Dirichleta nazywamy funkcję $D : R \to \{0, 1\}$ określoną następująco:

- $D(x) = 1$ dla $x \in Q$,
- $D(x) = 0$ dla $x \notin Q$.