LISTA ZADAŃ 2
Przestrzenie liniowe

1. Wyznaczyć wektor x z równania:

   a) $v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4x = 0$, gdzie $v_1 = (5, -8, -1, 2)$, $v_2 = (2, -1, 4, -3)$, $v_3 = (-3, 2, -5, 4)$;

   b) $3(v_1 - x) + 2(v_2 + x) = 5(v_3 + x)$, gdzie $v_1 = (2, 5, 1, 3)$, $v_2 = (10, 1, 5, 10)$, $v_3 = (4, 1, -1, 1)$.

2. Sprawdzić, czy następujące układy wektorów są liniowo niezależne:

   a) $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (3, 6, 7)$;

   b) $v_1 = (4, -2, 6)$, $v_2 = (6, -3, 9)$;

   c) $v_1 = (5, 4, 3)$, $v_2 = (3, 3, 2)$, $v_3 = (8, 1, 3)$;

   d) $v_1 = (4, -5, 2, 6)$, $v_2 = (2, -2, 1, 3)$, $v_3 = (6, -3, 3, 9)$, $v_4 = (4, -1, 5, 6)$.

3. Wykazać, że jeśli wektory v_1, v_2, v_3 są liniowo zależne, a wektor v_3 nie jest liniową kombinacją wektorów v_1 i v_2, to wektory v_1 i v_2 różnią się tylko czynnikiem liczbowym.

4. Niech będzie dany układ $v_1, v_2, \ldots, v_k$ liniowo niezależny. Sprawdzić, czy następujące układy wektorów są liniowo zależne:

   a) $w_1 = 3v_1 + 2v_2 + v_3 + v_4$, $w_2 = 2v_1 + 5v_2 + 3v_3 + 2v_4$, $w_3 = 3v_1 + 4v_2 + 2v_3 + 3v_4$;

   b) $w_1 = 3v_1 + 4v_2 - 4v_3 - 2v_4 + 4v_5$, $w_2 = 8v_1 + 7v_2 - 2v_3 + 5v_4 - 10v_5$, $w_3 = 2v_1 - v_2 + 8v_3 - v_4 + 2v_5$;

   c) $w_1 = v_1 + v_2$, $w_2 = v_2 + v_3, \ldots$, $w_{k-1} = v_{k-1} + v_k$, $w_k = v_k + v_1$;

5. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru a, dla których wektor w jest kombinacją liniową wektorów v_1, v_2, v_3:

   a) $v_1 = (2, 3, 5)$, $v_2 = (3, 7, 8)$, $v_3 = (1, -6, 1)$, $w = (7, -2, a)$;

   b) $v_1 = (4, 4, 3)$, $v_2 = (7, 2, 1)$, $v_3 = (4, 1, 6)$, $w = (5, 9, a)$;

   c) $v_1 = (3, 2, 5)$, $v_2 = (2, 4, 7)$, $v_3 = (5, 6, a)$, $w = (1, 3, 5)$;

6. Wyznaczyć bazy i określić wymiar następujących przestrzeni:

   a) $\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$;

   b) $\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - 2x_3 = 0 \text{ i } 2x_2 + x_4 = 0\}$;

   c) $\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 - x_3 = 0 \text{ i } x_1 + 2x_4 - x_3 = 0 \text{ i } x_1 = 0\}$;

   d) $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon e^{x_1 + 2x_2} = 1\}$.

7. Znaleźć dowolną bazę układu wektorów, a następnie pozostałe wektory układu zapisać jako kombinacje liniowe wektorów tej bazy:

   a) $v_1 = (5, 2, -3, 1)$, $v_2 = (4, 1, -2, 3)$, $v_3 = (1, 1, -1, -2)$, $v_4 = (3, 4, -1, 2)$, $v_5 = (7, -6, -7, 0)$;

   b) $v_1 = (2, 1)$, $v_2 = (3, 2)$, $v_3 = (1, 1)$, $v_4 = (2, 3)$;

   c) $v_1 = (2, -1, 3, 5)$, $v_2 = (4, -3, 1, 3)$, $v_3 = (3, -2, 3, 4)$, $v_4 = (4, -1, -15, 17)$;

   d) $v_1 = (2, 3, -4, -1)$, $v_2 = (1, -2, 1, 3)$, $v_3 = (5, -3, -1, 8)$, $v_4 = (3, 8, -9, -5)$.

8. Wykazać, że podane układy wektorów są liniowo niezależne, a następnie uzupełnić je do bazy wskazanej przestrzeni:

   a) $v_1 = (1, 2)$ w $\mathbb{R}^2$;

   b) $v_1 = (2, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ w $\mathbb{R}^3$;

   c) $v_1 = (2, 2, 7, -1)$, $v_2 = (3, -1, 2, 4)$, $v_3 = (1, 1, 3, 1)$ w $\mathbb{R}^4$;

   d) $v_1 = (1, 3, 2, 1)$, $v_2 = (5, -4, 7, 1)$ w $\mathbb{R}^4$;

9. Niech $f_1, \ldots, f_n, x$ będą wektorami w przestrzeni liniowej $V(\mathbb{R})$. Wykazać, że zbiór $\{f_1, \ldots, f_n\}$ jest bazą przestrzeni V, a następnie wyznaczyć współrzędne wektora x w tej bazie:

   a) $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (1, 1, 2)$, $f_3 = (1, 2, 3)$, $x = (6, 9, 14)$;

   b) $f_1 = (2, 1, -3)$, $f_2 = (3, 2, -5)$, $f_3 = (1, -1, 1)$, $x = (6, 2, -7)$;

   c) $f_1 = (1, 2, -1, -2)$, $f_2 = (2, 3, 0, -1)$, $f_3 = (1, 2, 1, 4)$, $f_4 = (1, 3, -1, 0)$, $x = (7, 14, -1, 2)$.