PRZYKŁADY DO WYKŁADU (Części 5-6)

V. Granica funkcji jednej zmiennej.

Przykład 5.1.

Wykażemy, że $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

Niech $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Weźmy dowolny ciąg $\{x_n\}$ punktów leżących w $S(1)$ taki, że $x_n \to 1$, gdy $n \to \infty$. Wtedy otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2-1}{x_n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_n-1)(x_n+1)}{x_n-1} = \lim_{n\to\infty}(x_n+1) = 1+1 = 2.$$

Zatem wobec definicji 1.2 (i) mamy $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

Przykład 5.2.

Wykażemy, że $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ nie istnieje.

Niech $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Weźmy dwa konkretne ciągi $x_n = \frac{1}{n\pi}$ oraz $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$.

Oczywiście $x_n, y_n \subset S(0)$ oraz $x_n \to 0$ i $y_n \to 0$, gdy $n \to \infty$. Otrzymujemy natomiast

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sin n\pi = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Zatem ponieważ ciągi $\{f(x_n)\}$, $\{f(y_n)\}$ dążą do dwóch różnych granic, więc zgodnie z definicją 1.2 (i) nie istnieje granica $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Przykład 5.3.

Wykażemy, że $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$.

Niech $f(x) = \frac{1}{x-2}$. Weźmy dowolny ciąg $\{x_n\}$ punktów leżących w $S(2^+)$ taki, że $x_n \to 2$, gdy $n \to \infty$. Wtedy otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n - 2} = +\infty.$$

Zatem wobec definicji 1.3 (iii) mamy $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$.

Przykład 5.4.

Wykażemy, że $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x+2} = 0$.

Niech $f(x) = \frac{2}{x+2}$.

Weźmy dowolny ciąg $\{x_n\}$ punktów leżących w $S(\infty)$ taki, że $x_n \to \infty$, gdy $n \to \infty$.

Wtedy otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{x_n + 2} = 0.$$

Zatem wobec definicji 1.4 (i) mamy $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x+2} = 0$.

Przykład 5.5.

Sprawdzimy, czy istnieje granica funkcji $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ w punkcie $x_0 = 0$.

Należy obliczyć granice jdnostronne

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \quad oraz \quad \lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \left(-\frac{1}{x}\right) = \infty,$$

oraz

$$\lim_{u\to -\infty} e^u = 0, \quad \lim_{u\to\infty} e^u = \infty.$$

Stąd

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \quad oraz \quad \lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = \infty.$$

Zatem $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x}}$ nie istnieje, ponieważ

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \neq \lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Przykłady 5.6.

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^5-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)} = \frac{3}{5}$

2. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{-1}{1} = -1$

3. $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} \cdot \frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2} = \lim_{x\to 5} \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x\to 5} \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} =$

$= \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x\to 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$

4. $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)\sqrt{1-x}}{1-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)\sqrt{1-x}}{-(x-1)} =$
$= \lim_{x\to 1^-} -(x+1)\sqrt{1-x} = 0$

5. $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x^2+1-x^2)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} =$
$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}$

6. $\lim_{x\to 0} \frac{25^x-9^x}{5^x-3^x} = \lim_{x\to 0} \frac{(5^x)^2-(3^x)^2}{5^x-3^x} = \lim_{x\to 0} \frac{(5^x-3^x)(5^x+3^x)}{5^x-3^x} = \lim_{x\to 0}(5^x+3^x) = 2$

Przykład 5.7.
Obliczymy $\lim_{x\to 0} x^2(2+\cos\frac{1}{x})$.

Dla $x \neq 0$ mamy nierówności

$$x^2\left(2+\cos\frac{1}{x}\right) \leq x^2(2+1) = 3x^2 \quad oraz \quad x^2\left(2+\cos\frac{1}{x}\right) \geq x^2(2-1) = x^2,$$

czyli

$$x^2 \leq x^2\left(2+\cos\frac{1}{x}\right) \leq 3x^2.$$

Ponadto $\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0} 3x^2 = 0$.

Zatem na mocy twierdzenia o trzech funkcjach $\lim_{x\to 0} x^2(2+\cos\frac{1}{x}) = 0$.

Przykład 5.8.

1. $\lim_{x\to 1}(x^4-1)^2 \underbrace{=}_{u=x^4-1} \lim_{u\to 0} u^2 = 0.$

2. $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} \underbrace{=}_{u=\frac{1}{x}} \lim_{u\to\infty} \operatorname{arc\,tg} u = \frac{\pi}{2}.$

Przykład 5.9.
Obliczymy $\lim_{x\to 0^+} \frac{2+\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}$.

Zauważmy, że dla $x > 0$ mamy nierówność

$$g(x) := \frac{2+\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \geq \frac{2-1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} =: f(x).$$

Ponadto $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$.

Zatem na mocy twierdzenia o dwóch funkcjach $\lim_{x\to 0^+} \frac{2+\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = \infty$.

Przykłady 5.10.

1. $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2x+1}{2}\right)^{\ln x} \underbrace{=}_{[(\frac{1}{2})^{-\infty}=2^{\infty}]} \infty$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} \underbrace{=}_{[\frac{1}{0+}]} \infty$

Przykład 5.11.

1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x}{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7}{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5}=\frac{7}{5},$$

ponieważ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=1$.

2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}\cdot x}{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2}=\frac{1}{2},$$

ponieważ $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ oraz $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1$.

3.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2-2}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{(-2)}{x^2}}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{5}{x^2}\right)^{x^2}}{\left(1+\frac{(-2)}{x^2}\right)^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{5}}\right)^{\frac{x^2}{5}}\right]^5}{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{(-2)}}\right)^{\frac{x^2}{(-2)}}\right]^{-2}}=\frac{e^5}{e^{-2}}=e^7,$$

ponieważ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{5}}\right)^{\frac{x^2}{5}}=e$ oraz $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{(-2)}}\right)^{\frac{x^2}{(-2)}}=e$.

Przykład 5.12.
Sprawdzimy, czy prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową funkcji $f(x) = \frac{e^{-x}-1}{e^x-1}$.

Obliczamy granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{e^x(1-e^{-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{-(e^{-x}-1)}{e^x(e^{-x}-1)} = \lim_{x\to 0} -e^{-x} = -1.$$

Zatem prosta $x = 0$ nie jest asymptotą pionową funkcji f.

Przykład 5.13.
Sprawdzimy, czy prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową funkcji $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Obliczamy granice

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Zatem prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową prawostronną funkcji $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Przykład 5.14.
Znajdziemy asymptoty funkcji $f(x) = \frac{x}{1-x}$.

Wyznaczamy dziedzinę funkcji $f : D_f = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.
W celu ustalenia asymptoty pionowej obliczamy granice

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{1-x} = \infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{1-x} = -\infty.$$

Zatem prosta $x = 1$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji $f(x) = \frac{x}{1-x}$.
W celu ustalenia asymptoty ukośnej (poziomej) w $-\infty$ obliczamy granice

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{x}{1-x}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{1-x} = 0, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{1-x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}-1} = -1,$$

Zatem prosta $y = -1$ jest asymptotą poziomą funkcji $f(x) = \frac{x}{1-x}$ w $-\infty$.
W celu ustalenia asymptoty ukośnej (poziomej) w ∞ obliczamy granice

$$\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{\frac{x}{1-x}}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{1-x} = 0, \qquad \lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{x}{1-x} = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}-1} = -1,$$

Zatem prosta $y = -1$ jest asymptotą poziomą funkcji $f(x) = \frac{x}{1-x}$ w ∞.

VI. Ciągłość funkcji jednej zmiennej.

Przykład 6.1.

Zbadać ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & dla \quad x > 0 \\ 0 & dla \quad x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & dla \quad x < 0, \end{cases}$$

w punkcie $x_0 = 0$.

Obliczamy wartość funkcji f oraz granice jednostronne funkcji f w punkcie $x_0 = 0$. Otrzymujemy

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = \infty, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{x^2}_{\searrow 0} \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{ogr.} = 0.$$

Zatem $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ jest niewłaściwa, co oznacza, że funkcja f ma w punkcie $x_0 = 0$ nieciągłość II-go rodzaju (lewostronną).

Ponadto $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$, więc funkcja f jest prawostronnie ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

Przykład 6.2.

Dobrać tak parametry $a, b \in R$, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{ax} & dla \quad x < 0 \\ 2x + b & dla \quad x \geq 0 \end{cases}$$

była ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

Obliczamy wartość funkcji f oraz granice jednostronne funkcji f w punkcie $x_0 = 0$. Otrzymujemy

$$f(0) = b, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{ax} = \frac{1}{a}, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (2x + b) = b.$$

Zauważmy, że

f jest ciągła w punkcie $x_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} = b$.

Zatem f jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, jeżeli $a \cdot b = 1$.

Przykład 6.3.

Określić rodzaj nieciągłości funkcji f w punkcie $x_0 = 0$, jeśli

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & dla \quad x < 0 \\ 0 & dla \quad x = 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} & dla \quad x > 0. \end{cases}$$

Obliczamy wartość funkcji f oraz granice jednostronne funkcji f w punkcie $x_0 = 0$. Otrzymujemy

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Zatem $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, czyli $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, ale $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.

Stąd w punkcie $x_0 = 0$ funkcja f ma nieciągłość I-go rodzaju typu 'luka'.

Przykład 6.5.

Uzasadnimy, że równanie

$$\ln x = 2 - x$$

ma jedno rozwiązanie w przedziale $[1, 2]$.

Definiujemy funkcję

$$f(x) := \ln x + x - 2.$$

Pytanie o istnienie rozwiązania rozważanego równania sprowadza się do pytania o istnienie miejsca zerowego funkcji f w przedziale $[1, 2]$.

Zauważmy, że

- funkcja f jest ciągła w $[1, 2]$,
- $f(1) = -1, \quad f(2) = \ln 2, \quad$ czyli $f(1) \cdot f(2) < 0$.

Zatem funkcja f spełnia założenia twierdzenia Darboux 2.7 na przedziale $[1, 2]$. Stąd istnieje taki punkt $c \in (1, 2)$, że $f(c) = 0$. Ponadto funkcja f jest rosnąca na przedziale $(1, 2)$ i stąd punkt c jest wyznaczony w sposób jednoznaczny.