1 Macierze

Definicja 1 *Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem. Prostokątną tablicę*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, nazywamy macierzą o wymiarach $m \times n$. Jeżeli $m = n$, to tablicę A nazywamy macierzą kwadratową stopnia n. Macierz A oznaczamy także symbolem (a_{ij}).

Elementy a_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, nazywamy współrzędnymi macierzy $A = (a_{ij})$. Współrzędna a_{ij} stoi w i-tym wierszu oraz j-tej kolumnie macierzy $A = (a_{ij})$. Dalej i-ty wiersz macierzy $A = (a_{ij})$ będziemy oznaczać przez $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, a j-tą kolumnę - $A^j = [a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}]$.

Jeżeli $A = (a_{ij})$ jest macierzą kwadratową stopnia n, to główna przekątna tej macierzy składa się z elementów $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. Macierz kwadratową $A = (a_{ij})$, której wszystkie elementy poza główną przekątną są zerami nazywamy macierzą diagonalną i oznaczamy symbolem

$$\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

Jeżeli $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = a$, to zamiast $\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ piszemy $\mathrm{diag}_n(a)$ i macierz tę nazywamy macierzą skalarną.

Macierz $\mathrm{diag}_n(1)$ nazywamy macierzą jednostkową i oznaczamy symbolem I_n lub I, jeżeli wymiar macierzy jest ustalony, tzn.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Zbiór wszystkich macierzy o wymiarach $m \times n$ o wyrazach z ciała $\mathbb{K}$ oznaczamy symbolem $M_{m\times n}(\mathbb{K})$. W zbiorze $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ określamy operacje dodawania i mnożenia przez skalary w następujący sposób: dla $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ i $\alpha \in \mathbb{K}$

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}),$$

$$\alpha A = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}).$$

Niech $A = (a_{ik}) \in M_{r\times m}(\mathbb{K})$ i niech $B = (b_{kj}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Wtedy iloczyn macierzy A i B określamy wzorem

$$AB = (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right).$$

Zauważmy, że $AB \in M_{r\times n}(\mathbb{K})$.

Np. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Wtedy $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $B \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}).$$

Niech A, B, C, D będą macierzami odpowiednich wymiarów. Wtedy

- na ogół $AB \neq BA$;
- $A(BC) = (AB)C$;
- $(A + B)C = AC + BC$, $D(A + B) = DA + DB$.

Definicja 2 *Niech $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Macierz $(a_{ji}) \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ nazywamy transponowaną macierzą A i oznaczamy symbolem A^T.*

Np. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -2 & 7 & -5 \end{bmatrix}.$$

Niech $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ i niech $\alpha \in \mathbb{K}$. Wtedy

- $(A^T)^T = A$;
- $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

Niech $A = (a_{ik}) \in M_{m\times s}(\mathbb{K})$ i $B = (b_{kj}) \in M_{s\times n}(\mathbb{K})$. Wtedy

$$C = AB = (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj} \right)$$

oraz

$$D = B^T A^T = (d_{ji}) = \left(\sum_{k=1}^{s} b_{jk} a_{ki} \right).$$

Stąd

$$c_{ji} = d_{ji} \ \text{ dla} j = 1, \dots, n, \ i = 1, \dots, m,$$

tzn. $C^T = D$.

Wykazaliśmy w ten sposób, że

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Można wykazać, że jeżeli iloczyn macierzy $A_1, \ldots, A_r$ jest określony, to

$$(A_1 \cdot \ \cdots \ \cdot A_r)^T = A_r^T \cdot \ \cdots \ \cdot A_1^T.$$

2 Rząd macierzy

Na wierszach macierzy $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ określamy operacje elementarne:

(I) zamiana miejscami k-tego wiersza z l-tym;

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \xmapsto{A_k \leftrightarrow A_l} A' = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}.$$

(II) dodanie do k-tego wiersza wiersza l-tego pomnożonego przez skalar $\alpha \in \mathbb{K}$;

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \xmapsto{A_k + \alpha A_l} A' = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k + \alpha A_l \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}.$$

Liczba l może być mniejsza niż liczba k.

Definicja 3 *Niech $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ i niech $V_k = lin\{A^1, \ldots, A^n\}$. Wymiar przestrzeni V_k nazywamy rzędem kolumnowym macierzy A i oznaczamy przez $r_k(A)$.*

Definicja 4 *Niech $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ i niech $V_w = lin\{A_1, \ldots, A_m\}$. Wymiar przestrzeni V_w nazywamy rzędem wierszowym macierzy A i oznaczamy przez $r_w(A)$.*

Zauważmy, że $V_k < \mathbb{R}^m$, $V_w < \mathbb{R}^n$ oraz $r_k(A) \le n$ i $r_w(A) \le m$. Ponadto, operacje elementarne typu (I) i (II) na wierszach macierzy są odwracalne, tzn. jeżeli macierz A' można otrzymać z macierzy A za pomocą jednej operacji elementarnej, to macierz A można otrzymać z A' stosując jedną operację elementarną tego samego typu.

Lemat 1 *Niech $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Jeżeli macierz $A' \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ powstaje z macierzy A przez zastosowanie skończonej liczby operacji elementarnych na wierszach, to*

(i) $r_w(A') = r_w(A)$;

(ii) $r_k(A') = r_k(A)$.

, **Dowód.** Wystarczy rozpatrzyć przypadek, gdy macierz A' powstaje z macierzy A w wyniku zastosowania jednej operacji elementarnej.

(i) Ponieważ

$$\mathrm{lin}\{A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_l, \ldots, A_m\} = \mathrm{lin}\{A_1, \ldots, A_l, \ldots, A_k, \ldots, A_m\},$$

więc operacja elementarna typu (I) na wierszach macierzy A nie zmienia jej rzędu wierszowego.

Załóżmy teraz, że $A'_k = A_k + \alpha A_l$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Wtedy $A_k = A'_k - \alpha A_l$ i w konsekwencji

$$\mathrm{lin}\{A_1, \ldots, A_k + \alpha A_l, \ldots, A_l, \ldots, A_m\} = \mathrm{lin}\{A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_l, \ldots, A_m\},$$

co oznacza, że rząd wierszowy macierzy A nie ulega zmianie również w wyniku operacji typu (II).

(ii) Wykażemy, że

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j A^j = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A'^j = 0.$$

Rozważmy dwa układy równań

$$U\colon\ \sum_{j=1}^{n} x_j A^j = 0, \quad U'\colon\ \sum_{j=1}^{n} x_j A'^j = 0.$$

Ponieważ układ równań U' powstaje z układu U w wyniku operacji elementarnej typu (I) lub (II) na równaniach, więc łatwo sprawdzić, że układy te są równoważne. W rezultacie każde rozwiązanie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jednego z tych układów, jest też rozwiązaniem drugiego.

W konsekwencji, każdemu, w szczególności maksymalnemu, liniowo niezależnemu układowi kolumn jednej macierzy odpowiada liniowo niezależny układ kolumn drugiej macierzy (o tych samych numerach), tzn. $r_k(A') = r_k(A)$. □

Twierdzenie 1 *Niech $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Wtedy $r_w(A) = r_k(A)$.*

Dowód. Jeżeli A jest macierzą zerową, tzn. $a_{ij} = 0$ dla $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, to twierdzenie jest oczywiste.

Załóżmy, że A nie jest macierzą zerową. Wtedy po skończonej liczbie operacji elementarnych na wierszach macierzy A otrzymamy macierz

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2k} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & b_{kk} & \dots & b_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie $b_{11} \cdot \dots \cdot b_{kk} \neq 0$.

Z lematu wynika, że

$$r_w(B) = r_w(A) \text{ oraz } r_k(B) = r_k(A).$$

Wystarczy więc wykazać, że $r_w(B) = r_k(B)$.

Załóżmy, że

$$\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \dots + \alpha_k B_k = 0.$$

Wtedy

$$(\alpha_1 b_{11}, \alpha_1 b_{12} + \alpha_2 b_{22}, \dots, \alpha_1 b_{1n} + \alpha_2 b_{2n} + \dots + \alpha_k b_{kn}) = 0.$$

Stąd

$$\begin{cases} \alpha_1 b_{11} = 0, \\ \alpha_1 b_{12} + \alpha_2 b_{22} = 0, \\ \vdots \\ \alpha_1 b_{1n} + \alpha_2 b_{2n} + \dots + \alpha_k b_{kn} = 0. \end{cases}$$

W rezultacie $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, co oznacza, że $r_w(B) = k$ i $r_k(B) \leq k$.

Analogicznie wykazujemy, że wektory kolumnowe $B^1, \dots, B^k$ macierzy B są liniowo niezależne, tzn. $r_k(B) = k$. □

Definicja 5 *Niech $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Liczbę $r_w(A) = r_k(A)$ nazywamy rzędem macierzy A i oznaczamy symbolem rank$A$.*

Np. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \overset{w_1 \leftrightarrow w_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \overset{w_3 - 2w_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

W rezultacie rank$A = 3$.

Ponieważ rząd macierzy A jest równy maksymalnej liczbie wektorów wierszowych lub kolumnowych macierzy A, które są liniowo niezależne, więc

$$\text{rank}A^T = \text{rank}A.$$

Twierdzenie 2 *Niech $A \in M_{m\times s}(\mathbb{K})$ i niech $B \in M_{s\times n}(\mathbb{K})$. Wtedy*

$$rankAB \leq min(rankA, rankB).$$

Dowód. Niech $C = AB$. Wtedy

$$C_i = A_iB \ \text{ oraz } \ C^j = AB^j \ \text{ dla } i = 1,\dots,m, \ j = 1,\dots,n.$$

Ponieważ

$$\text{rank}A = \dim \text{lin}\{A_1,\dots,A_m\}$$

oraz odpowiednie przestawienie wierszy w macierzy A powoduje takie samo przestawienie wierszy w macierzy C i operacja ta nie zmienia rzędu macierzy, więc możemy założyć, że bazę przestrzeni $\text{lin}\{A_1,\dots,A_m\}$ stanowią wektory $A_1,\dots,A_{r_1}$. Wtedy $\text{rank}A = r_1$ i dla $r_1 < k \leq m$

$$A_k = \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_{ki}A_i.$$

Stąd

$$C_k = A_kB = \left(\sum_{i=1}^{r_1} \alpha_{ki}A_i\right)B =$$

$$= \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_{ki}(A_iB) = \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_{ki}C_i.$$

Wynika stąd, że

$$\text{lin}\{C_1,\dots,C_m\} = \text{lin}\{C_1,\dots,C_{r_1}\}.$$

W konsekwencji

$$\text{rank}C = \dim \text{lin}\{C_1,\dots,C_m\} \leq r_1 = \text{rank}A.$$

Ponieważ $\text{rank}A^T = \text{rank}A$ i $\text{rank}AB \leq \text{rank}A$, więc

$$\text{rank}AB = \text{rank}\left((AB)^T\right) = \text{rank}(B^TA^T) \leq \text{rank}B^T = \text{rank}B.$$

$\square$

Zbiór wszystkich macierzy kwadratowych stopnia n o wyrazach z ciała $\mathbb{K}$ oznaczamy symbolem $M_n(\mathbb{K})$. Zbiór $M_n(\mathbb{K})$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$. Ponadto, iloczyn dwóch macierzy ze zbioru $M_n(\mathbb{K})$ należy do zbioru $M_n(\mathbb{K})$ oraz w zbiorze $M_n(\mathbb{K})$ zachodzą prawa łączności i rozdzielności mnożenia względem dodawania.

Definicja 6 *Zbiór $M_n(\mathbb{K})$ macierzy kwadratowych ustalonego stopnia n z działaniami dodawania i mnożenia macierzy nazywamy łącznym pierścieniem macierzowym. Jeżeli uwzględnimy mnożenie macierzy przez skalary $\alpha \in \mathbb{K}$, (które spełnia warunek $\alpha AB = (\alpha A)B = A(\alpha B)$) to zbiór $M_n(\mathbb{K})$ nazywamy algebrą macierzy nad ciałem $\mathbb{K}$.*

Niech I będzie macierzą jednostkową stopnia n. Wtedy $I = (\delta_{kj})$, gdzie

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } k = j, \\ 0, & \text{jeżeli } k \neq j. \end{cases}$$

Symbol δ_{kj} nazywamy symbolem Kroneckera.

Niech $A \in M_n(\mathbb{K})$ i niech $\mathrm{diag}_n(\alpha) = \alpha I = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{bmatrix}$ będzie macierzą skalarną. Wtedy, łatwo sprawdzić, że

$$IA = A = AI$$

oraz

$$\mathrm{diag}_n(\alpha)A = \alpha A = A\mathrm{diag}_n(\alpha).$$

Oznacza to, że iloczyn macierzy skalarnej $\mathrm{diag}_n(\alpha)$ i dowolnej macierzy $A \in M_n(\mathbb{K})$ jest przemienny.

Twierdzenie 3 *Jeżeli iloczyn macierzy $B \in M_n(\mathbb{K})$ i dowolnej macierzy $A \in M_n(\mathbb{K})$ jest przemienny, to macierz B jest skalarna.*

Dowód. Niech $E_{ij} \in M_n(\mathbb{K})$ będzie macierzą, w której na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny stoi jedynka, a pozostałe elementy są zerami. Ponieważ iloczyn macierzy $B \in M_n(\mathbb{K})$ i dowolnej macierzy $A \in M_n(\mathbb{K})$ jest przemienny, więc w szczególności

$$BE_{ij} = E_{ij}B, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Wykonując mnożenie w powyższej równości, otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & b_{1i} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & b_{2i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_{ni} & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierze te mają odpowiednio jedną niezerową kolumnę (j-tą) i jeden niezerowy wiersz (i-ty). Z ich równości wynika, że $b_{ki} = 0$ dla $k \neq i$ oraz $b_{ii} = b_{jj}$ dla wszystkich par $i, j = 1, \ldots, n$. $\square$

Definicja 7 *Niech $A \in M_n(\mathbb{K})$. Jeżeli istnieje taka macierz $B \in M_n(\mathbb{K})$, że*

$$AB = I = BA,$$

to macierz A nazywamy odwracalną, a macierz B nazywamy macierzą odwrotną do A i oznaczamy A^{-1}.

Zauważmy, że jeżeli macierz odwrotna A^{-1} istnieje, to jest ona wyznaczona jednoznacznie.

Istotnie, załóżmy, że A^{-1} i A'^{-1} są macierzami odwrotnymi do A. Wtedy

$$A'^{-1} = A'^{-1}I = A'^{-1}(AA^{-1}) = (A'^{-1}A)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}.$$

Definicja 8 *Macierz $A \in M_n(\mathbb{K})$ nazywamy nieosobliwą, jeżeli $rankA = n$. Jeżeli $rankA < n$, to macierz A nazywamy osobliwą.*

Twierdzenie 4 *Macierz $A \in M_n(\mathbb{K})$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa.*

Dowód. Jeżeli $AB = I$ (lub $BA = I$), to

$$n = \mathrm{rank}I = \mathrm{rank}AB \leq \min(\mathrm{rank}A, \mathrm{rank}B) \leq n.$$

Stąd $\mathrm{rank}A = n$.

Jeżeli $\mathrm{rank}A = n$, to

$$\mathrm{lin}\{I^1, \ldots, I^n\} = \mathbb{R}^n = \mathrm{lin}\{A^1, \ldots, A^n\}.$$

Stąd

$$E^j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}A^i \text{ dla } j = 1, \ldots, n,$$

przy czym współczynniki b_{ij} tworzące macierz $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ są wyznaczone jednoznacznie.

Z równości tej wynika, że

$$\delta_{kj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_{ki} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ij} \text{ dla } j, k = 1, \ldots, n.$$

W konsekwencji $I = AB$.

Zauważmy, że jeżeli macierz A jest nieosobliwa, to macierz A^T również jest nieosobliwa. Z pierwszej części dowodu wynika, że istnieje taka macierz $C \in M_n(\mathbb{K})$, że $A^TC = I$. Wtedy

$$I = I^T = \left(A^TC\right)^T = C^T(A^T)^T = C^TA.$$

W rezultacie

$$AB = I = C^TA.$$

Stąd $B = C^T = A^{-1}$. □

Wniosek 1 *Jeżeli $B \in M_m(\mathbb{K})$ i $C \in M_n(\mathbb{K})$ są macierzami nieosobliwymi i $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, to*

$$rankBAC = rankA.$$

Dowód. Ponieważ

$$\mathrm{rank}BAC \leq \mathrm{rank}BA = \mathrm{rank}BA(CC^{-1}) =$$

$$= \mathrm{rank}(BAC)C^{-1} \leq \mathrm{rank}BAC,$$

więc $\mathrm{rank}BAC = \mathrm{rank}BA$.

Analogicznie wykazujemy, że $\mathrm{rank}BA = \mathrm{rank}A$. □

Wniosek 2 *Jeżeli $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ i $AB = I$ lub $BA = I$, to $B = A^{-1}$.*

Dowód. Jeżeli $AB = I$, to $\mathrm{rank}A = n$, co oznacza, że macierz A jest odwracalna. □

Wniosek 3 *Jeżeli $A, B, \ldots, C, D \in M_n(\mathbb{K})$ są macierzami nieosobliwymi, to iloczyn $AB \cdots CD$ jest macierzą nieosobliwą oraz*

$$(AB \cdots CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1} \cdots B^{-1}A^{-1}.$$

Dowód. Nieosobliwość macierzy $AB \cdots CD$ jest oczywista (na mocy pierwszego wniosku). Niech $G = AB \cdots CD$. Wtedy

$$G(D^{-1}C^{-1} \cdots B^{-1}A^{-1}) = AB \cdots C(DD^{-1})C^{-1} \cdots B^{-1}A^{-1} =$$

$$= AB \cdots (CC^{-1}) \cdots B^{-1}A^{-1} = \ldots = I.$$

□

Niech $E_{st} \in M_m(\mathbb{K})$ będzie macierzą, w której na przecięciu s-tego wiersza i t-tej kolumny stoi jedynka, a pozostałe elementy są zerami. W zbiorze $M_n(\mathbb{K})$ definiujemy macierze elementarne dla $s \neq t$:

- $F_{st} = I - E_{ss} - E_{tt} + E_{st} + E_{ts} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix};$$

- $F_{st}(\lambda) = I + \lambda E_{st} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \lambda & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix};$$

- $F_s(\lambda) = I + (\lambda - 1)E_{ss} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \lambda, 1, \ldots, 1), \quad \lambda \neq 0.$

Niech $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Można łatwo sprawdzić, że macierz $B = FA$ powstaje z macierzy A w wyniku operacji elementarnej typu (I) na wierszach macierzy A, gdy $F = F_{st}$ lub operacji typu (II), gdy $F = F_{st}(\lambda)$. Jeżeli $F = F_s(\lambda)$, to mówimy, że macierz B powstała z macierzy A w wyniku operacji typu (III) na jej wierszach. (Pomnożenie s-tego wiersza macierzy A przez λ.) Podobnie, macierz $C = AF$, gdzie $F \in M_n(\mathbb{K})$ jest macierzą elementarną, powstaje z macierzy A w wyniku operacji elementarnych na jej kolumnach. Ponieważ w wyniku operacji elementarnych typu (I) i (II) na wierszach macierzy A możemy otrzymać macierz, w której w lewym górnym rogu stoi nieosobliwa macierz diagonalna wymiarów $r \times r$, gdzie $r = \mathrm{rank}A$ (jeżeli $r = 0$, to A jest macierzą zerową) oraz

$$\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_r, 0, \ldots, 0) =$$

$$= F_1(a_1)F_2(a_2)\ldots F_r(a_r) \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

więc zastosowanie operacji elementarnych typu (III) umożliwia doprowadzenie macierzy A do postaci

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie I_r jest macierzą jednostkową stopnia r, a 0 oznaczają macierze zerowe stopni $r \times (n-r)$, $(m-r) \times r$, $(m-r) \times (n-r)$, odpowiednio.

W rezultacie

$$P_k P_{k-1} \cdots P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_l = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie P_i i Q_j są pewnymi macierzami elementarnymi stopni m i n, odpowiednio.

Ponieważ operacje elementarne są odwracalne, więc istnieją macierze odwrotne

$$F_{st}^{-1} = F_{st}, \quad F_{st}(\lambda)^{-1} = F_{st}(-\lambda), \quad F_s(\lambda)^{-1} = F_s(\lambda^{-1})$$

oraz macierze $P = P_k P_{k-1} \cdots P_1$ i $Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_l$ są odwracalne. Ponadto,

$$P^{-1} = P_1^{-1} \cdots P_k^{-1}, \quad Q^{-1} = Q_l^{-1} \cdots Q_1^{-1}.$$

Zauważmy, że macierze P_i^{-1} i Q_j^{-1} są również elementarne.

Definicja 9 *Niech $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Mówimy, że macierze A i B są równoważne (ozn. $A \sim B$), jeżeli istnieją takie nieosobliwe macierze $P \in M_m(\mathbb{K})$ i $Q \in M_n(\mathbb{K})$, że $B = PAQ$.*

Ponieważ relacja $\sim$ jest relacją równoważności, więc zbiór $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ dzieli się na rozłączne klasy macierzy równoważnych. Macierze należące do tej samej klasy mają taki sam rząd.

Twierdzenie 5 *Zbiór $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ dzieli się na $p = min(m, n) + 1$ klas macierzy równoważnych. Do jednej klasy należą wszystkie macierze o tym samym rzędzie.*

Wniosek 4 *Każda nieosobliwa macierz kwadratowa jest iloczynem pewnej liczby macierzy elementarnych.*

Dowód. Niech $A \in M_n(\mathbb{K})$ będzie macierzą nieosobliwą. Ponieważ $\mathrm{rank} I = \mathrm{rank} A = n$, więc macierz A leży w tej samej klasie równoważności co macierz I. Wtedy

$$P_k P_{k-1} \cdots P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_l = I,$$

gdzie P_i i Q_j są macierzami elementarnymi.

Stąd

$$A = P_1^{-1} \cdots P_k^{-1} Q_l^{-1} \cdots Q_1^{-1}. \tag{$*$}$$

$\square$

Zauważmy, że z równości $(*)$ wynika

$$A^{-1} = Q_1 Q_2 \cdots Q_l P_k P_{k-1} \cdots P_1.$$

Ponadto, gdybyśmy rozpatrzyli macierz rozszerzoną $A|I$ i ograniczyli się do operacji elementarnych na jej wierszach, to w przypadku nieosobliwej macierzy $A \in M_n(\mathbb{K})$ otrzymalibyśmy ciąg

$$A|I \xrightarrow{P_1} P_1 A|P_1 I \xrightarrow{P_2} \cdots \xrightarrow{P_k} P_k \cdots P_1 A|P_k \cdots P_1 I = I|B.$$

Ciąg ten kończymy w k-tym kroku, gdy po lewej stronie w miejscu macierzy A otrzymamy macierz I. Wtedy po prawej stronie otrzymujemy macierz odwrotną do A, tzn. $B = A^{-1}$. Jeżeli macierz A jest osobliwa, to w wyniku tych operacji po lewej stronie otrzymamy macierz schodkową pozwalającą wyznaczyć rząd $r < n$ macierzy A.

Przykład

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$A|I = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} w_1 \leftrightarrow w_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} w_3 - 2w_1 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{1}{2}w_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} w_1 - w_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} w_3 + w_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} w_3 + w_1 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Stąd

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3 Wyznaczniki

Definicja 10 *Niech $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Zbiór*

$$R(x, y) = \{z \in \mathbb{R}^2 : \ \exists \lambda, \gamma \in [0, 1] \ \ z = \lambda x + \gamma y\}$$

nazywamy równoległobokiem rozpiętym na wektorach x i y.

Równoległobok $R(x, y)$ ma wierzchołki w punktach 0, x, y, $x + y$. Można wykazać, że pole powierzchni równoległoboku $R(x, y)$ jest równe

$$|x_1 y_2 - x_2 y_1|.$$

Liczbę $x_1y_2 - x_2y_1$ nazywamy wyznacznikiem macierzy $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$ i oznaczamy symbolem

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Definicja 11 *Niech* $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$. *Zbiór*

$$R(x, y, z) = \{u \in \mathbb{R}^3 \colon \ \exists \lambda, \gamma, \delta \in [0, 1] \ \ z = \lambda x + \gamma y + \delta z\}$$

nazywamy równoległościanem rozpiętym na wektorach x, y, z.

Można wykazać, że objętość równoległościanu $R(x, y, z)$ wynosi

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix} \right\| =$$

$$= |x_1y_2z_3 + x_3y_1z_2 + x_2y_3z_1 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3|. \tag{$*$}$$

Liczba $(*)$ jest równa wartości bezwzględnej wyznacznika macierzy $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$.

Wzory te można uogólnić do n-wymiarowych równoległościanów.

Definicja 12 *Niech* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. *Wyznacznikiem macierzy* A *nazywamy liczbę*

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} sgn\sigma \, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Innymi słowy, wyznacznik macierzy A to suma algebraiczna wszystkich możliwych iloczynów po n wyrazów macierzy, przy czym w każdym iloczynie występuje dokładnie jeden wyraz z każdego wiersza i z każdej kolumny. Łącznie suma ta zawiera $n!$ składników. Składniki odpowiadające permutacjom σ, które są parzyste występują ze znakiem $+$, a składniki odpowiadające permutacjom nieparzystym - ze znakiem $-$.

Np. dla $n = 2$ mamy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

oraz

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}\sigma \, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} a_{11}a_{22} +$$

$$+ \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Podobnie, dla $n = 3$ mamy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

oraz

$$\mathrm{det}A = \sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}\sigma a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Do obliczania wyznacznika macierzy stopnia 3 stosujemy schemat Sarrusa: Z prawej strony macierzy A dopisujemy dwie pierwsze kolumny tej macierzy, a następnie wyznacznik obliczamy zgodnie z poniższym schematem. Strzałki skierowane w dół wskazują iloczyny występujące ze znakiem $+$, a strzałki skierowane w górę wskazują iloczyny występujące ze znakiem $-$.

$$\mathrm{det}A = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right. =$$

$$= \left| \begin{array}{cccccc|ccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \searrow & & \searrow\nearrow & & \searrow\nearrow & & \nearrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \nearrow & & \searrow\nearrow & & \searrow\nearrow & & \searrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \end{array} \right. =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ponieważ macierz kwadratową $A \in M_n(\mathbb{K})$ możemy rozpatrywać jako kolumnę wierszy

$$A = [A_1, \ldots, A_n]$$

lub wiersz kolumn

$$A = (A^1, \ldots, A^n),$$

więc wyznacznik macierzy A możemy rozpatrywać jako funkcję kolumn lub wierszy tej macierzy:

$$\mathrm{det}A = |A^1, \ldots, A^n| = |A_1, \ldots, A_n|.$$

Twierdzenie 6 *Niech $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ i niech $\tau \in S_n$. Jeżeli macierz $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ powstaje z macierzy A przez przestawienie kolumn zgodnie z permutacją τ (tzn. $B^i = A^{\tau(i)}$), to*

$$detB = sgn\tau \, detA.$$

Dowód. Wprost z definicji

$$\mathrm{det}B = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma a_{1\tau\sigma(1)}a_{2\tau\sigma(2)} \cdots a_{n\tau\sigma(n)}.$$

Ponieważ $(\mathrm{sgn}\tau)^2 = 1$, więc

$$\det B = \sum_{\sigma\in S_n} (\mathrm{sgn}\tau)^2 \mathrm{sgn}\sigma a_{1\tau\sigma(1)}a_{2\tau\sigma(2)}\cdots a_{n\tau\sigma(n)} =$$

$$= \mathrm{sgn}\tau \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}\tau\mathrm{sgn}\sigma a_{1\tau\sigma(1)}a_{2\tau\sigma(2)}\cdots a_{n\tau\sigma(n)}.$$

Niech $\kappa = \tau\sigma$. Ponieważ σ przebiega zbiór S_n, więc permutacja κ także przebiega zbiór S_n. Ponadto, $\mathrm{sgn}\tau\mathrm{sgn}\sigma = \mathrm{sgn}\tau\sigma$. W rezultacie

$$\det B = \mathrm{sgn}\tau \sum_{\kappa\in S_n} \mathrm{sgn}\kappa a_{1\kappa(1)}a_{2\kappa(2)}\cdots a_{n\kappa(n)} = \mathrm{sgn}\tau \det A.$$

$\square$

Twierdzenie 7 *Niech $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Wtedy*

$$detA^T = detA.$$

Dowód. Oznaczmy elementy macierzy A^T przez a_{ij}^T, tzn. $a_{ij}^T = a_{ji}$. Zauważmy, że dla dowolnej liczby $k \in \{1,\ldots,n\}$ i dla dowolnej permutacji $\sigma \in S_n$ mamy

$$k = (\sigma^{-1}\sigma)(k) = \sigma^{-1}(\sigma(k)).$$

Ponadto, w każdym iloczynie $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ możemy dowolnie przestawić czynniki. Stąd

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1)\sigma^{-1}(\sigma(1))}a_{\sigma^{-1}(2)\sigma^{-1}(\sigma(2))}\cdots a_{\sigma^{-1}(n)\sigma^{-1}(\sigma(n))} =$$

$$= a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}\cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} = a^T_{1\sigma^{-1}(1)}a^T_{2\sigma^{-1}(2)}\cdots a^T_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

Ponieważ $(\mathrm{sgn}\sigma)^2 = 1$ oraz

$$\mathrm{sgn}\sigma^{-1} = \mathrm{sgn}\sigma^{-1}(\mathrm{sgn}\sigma)^2 = (\mathrm{sgn}\sigma^{-1}\mathrm{sgn}\sigma)\mathrm{sgn}\sigma = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}\sigma)\mathrm{sgn}\sigma = \mathrm{sgn}\sigma,$$

więc

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}\sigma a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}\sigma^{-1} a^T_{1\sigma^{-1}(1)}a^T_{2\sigma^{-1}(2)}\cdots a^T_{n\sigma^{-1}(n)} =$$

$$= \sum_{tau\in S_n} \mathrm{sgn}\tau a^T_{1\tau(1)}a^T_{2\tau(2)}\cdots a^T_{n\tau(n)} = \det A^T.$$

$\square$

Uwaga

Ostatnie twierdzenie głosi, że każda własność wyznaczników dotycząca kolumn macierzy jest słuszna również dla wierszy i każda własność wyznaczników dotycząca wierszy macierzy jest słuszna również dla kolumn.

Wniosek 5 *Niech $A \in M_n(\mathbb{K})$ i niech $\chi(\mathbb{K}) \neq 2$. Jeżeli $A^i = A^j$ dla pewnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, to $detA = 0$.*

Dowód. Niech $A = (A^1, \ldots, A^i, \ldots, A^j, \ldots, A^n)$, $A^i = A^j$, i niech $\tau = (i\ j)$. Wtedy macierz B otrzymana z macierzy A przez przestawienie jej kolumn zgodnie z permutacją τ jest równa macierzy A. W rezultacie

$$\det A = \det B = \mathrm{sgn}\tau \det A = -\det A.$$

Stąd

$$2\det A = 0.$$

Ponieważ $\chi(\mathbb{K}) \neq 2$, więc $\det A = 0$. □

Twierdzenie 8 *Niech $A \in M_n(\mathbb{K})$, $A_k = \beta B_k + \gamma C_k$ i niech $B = [A_1, \ldots, A_{k-1}, B_k, A_{k+1}, \ldots, A_n]$, $C = [A_1, \ldots, A_{k-1}, C_k, A_{k+1}, \ldots, A_n]$. Wtedy*

$$detA = \beta\, detB + \gamma\, detC.$$

Dowód. Ponieważ

$$\det A = \det[A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n] =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} p_\sigma a_{k\sigma(k)},$$

gdzie współczynniki p_σ nie zależą od elementów wiersza A_k, więc grupując odpowiednio wyrazy i przyjmując oznaczenie $\sum_{\sigma(k)=j} p_\sigma = \alpha_j$ otrzymamy

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{kj}.$$

W rezultacie

$$\det A = \det[A_1, \ldots, \beta B_k + \gamma C_k, \ldots, A_n] = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\beta b_{kj} + \gamma c_{kj}) =$$

$$= \beta \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_{kj} + \gamma \sum_{j=1}^{n} \alpha_j c_{kj} = \beta \det B + \gamma \det C.$$

□

Twierdzenie 9 *Niech $I \in M_n(\mathbb{K})$ będzie macierzą jednostkową. Wtedy*

$$detI = 1.$$

Dowód. Zauważmy, że $I = (\delta_{ij})$, gdzie

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } i = j, \\ 0, & \text{jeżeli } i \neq j. \end{cases}$$

W konsekwencji

$$\det I = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \delta_{1\sigma(1)} \delta_{2\sigma(2)} \cdots \delta_{n\sigma(n)}.$$

Ponadto,

$$\delta_{1\sigma(1)} \delta_{2\sigma(2)} \cdots \delta_{n\sigma(n)} \neq 0 \iff \sigma = \varepsilon$$

oraz

$$\operatorname{sgn}\varepsilon \delta_{1\varepsilon(1)} \delta_{2\varepsilon(2)} \cdots \varepsilon_{n\sigma(n)} = 1.$$

W rezultacie

$$\det I = 1.$$

$\square$

Twierdzenie 10 *Niech $A \in M_n(\mathbb{K})$ i niech $\lambda \in \mathbb{K}$. Wtedy*

$$det \lambda A = \lambda^n det A.$$

Dowód.

$$\det \lambda A = \det[\lambda A_1, \lambda A_2, \ldots, \lambda A_n] =$$
$$= \lambda \det[A_1, \lambda A_2, \ldots, \lambda A_n] = \lambda^2 \det[A_1, A_2, \ldots, \lambda A_n] =$$
$$= \cdots = \lambda^n \det[A_1, A_2, \ldots, A_n] = \lambda^n \det A.$$

$\square$

Twierdzenie 11 *Niech $A \in M_n(\mathbb{K})$ i niech $A_k = (0, \ldots, 0)$ dla pewnego $k \in \{1, \ldots, n\}$. Wtedy $det A = 0$.*

Dowód.

$$\det A = \det[A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n] =$$
$$= \det[A_1, \ldots, 2A_k, \ldots, A_n] =$$
$$= 2\det[A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n] = 2\det A.$$

Stąd $\det A = 0$. $\square$

Twierdzenie 12 *Niech $A \in M_n(\mathbb{K})$ i niech $B \in M_n(\mathbb{K})$ będzie macierzą otrzymaną w wyniku stosowania operacji elementarnych typu (II) na wierszach macierzy A. Wtedy $det A = det B$.*

Dowód. Załóżmy, że macierz B powstaje przez dodanie do wiersza A_s wiersza A_t pomnożonego przez λ. Wtedy

$$\det B = \det[A_1, \ldots, A_s + \lambda A_t, \ldots, A_t, \ldots, A_n] =$$
$$= \det[A_1, \ldots, A_s, \ldots, A_t, \ldots, A_n] + \det[A_1, \ldots, \lambda A_t, \ldots, A_t, \ldots, A_n] =$$
$$= \det[A_1, \ldots, A_s, \ldots, A_t, \ldots, A_n] + \lambda \det[A_1, \ldots, A_t, \ldots, A_t, \ldots, A_n] =$$
$$= \det[A_1, \ldots, A_s, \ldots, A_t, \ldots, A_n] = \det A.$$

□

Definicja 13 *Macierz $A \in M_n(\mathbb{K})$ nazywamy macierzą górnotrójkątną, jeżeli*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Analogicznie definiujemy macierz dolnotrójkątną.

Twierdzenie 13 *Niech $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ będzie macierzą górnotrójkątną. Wtedy*

$$detA = a_{11}a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}.$$

Dowód.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1 - a_{1n}w_n \\ w_2 - a_{2n}w_n \\ \vdots \\ w_{n-1} - a_{n-1n}w_n \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

W konsekwencji

$$\det A = a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Powtarzając tę procedurę kolejno na wierszach $A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_1$, otrzymamy

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn} \det I = a_{11}a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}.$$

□

Definicja 14 *Niech $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Wyznacznik macierzy otrzymanej z macierzy A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny oznaczamy symbolem M_{ij} i nazywamy minorem macierzy A odpowiadającym elementowi a_{ij}. Liczbę $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ nazywamy dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij}.*

Twierdzenie 14 *Niech $A \in M_n(\mathbb{K})$. Jeżeli*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

to

$$detA = a_{11}M_{11} = a_{11}A_{11}.$$

Dowód. Ponieważ $\det A = \det A^T$ oraz a_{11} jest jedynym niezerowym elementem pierwszej kolumny macierzy A, więc $a_{\sigma(1)1} = 0$ dla każdej takiej permutacji $\sigma \in S_n$, że $\sigma(1) \neq 1$ oraz

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n,\ \sigma(1)=1} \mathrm{sgn}\sigma a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Ponieważ zbiór wszystkich permutacji $\sigma \in S_n$ pozostawiających element 1 na miejscu można utożsamić ze zbiorem S_{n-1} wszystkich permutacji zbioru $\{2, \ldots, n\}$, więc

$$\det A = a_{11} \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \mathrm{sgn}\sigma a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} = a_{11}A_{11}.$$

□

Udowodnione własności pozwalają dość łatwo obliczać wyznaczniki macierzy dowolnego stopnia. Wystarczy macierz $A \in M_n(\mathbb{K})$ sprowadzić za pomocą operacji elementarnych do macierzy górnotrójkątnej $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Przypuśćmy, że macierz B otrzymaliśmy w wyniku k operacji elementarnych typu (I) i pewnej liczby operacji elementarnych typu drugiego. Ponieważ operacje elementarne typu (II) nie zmieniają wyznacznika, a operacje typu (I) zmieniają znak wyznacznika, więc

$$\det A = (-1)^k \det B = (-1)^k b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}.$$

Twierdzenie 15 *Niech $A \in M_n(\mathbb{K})$. Wtedy dla każdego $j = 1, \ldots, n$*

$$detA = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

(rozwinięcie wyznacznika względem j-tej kolumny) oraz dla każdego $i = 1, \ldots, n$

$$detA = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

(rozwinięcie wyznacznika względem i-tego wiersza).

Twierdzenie głosi, że wyznacznik macierzy A jest równy sumie iloczynów elementów ustalonego wiersza (lub ustalonej kolumny) przez ich dopełnienia algebraiczne.

Dowód. Korzystając z własności wyznaczników, otrzymujemy

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ij} & a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(j-1)+(i-1)} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(j-1)+(i-1)} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Niech $A^T = (a'_{ji})$, gdzie $a'_{ji} = a_{ij}$. Ponieważ minorem M'_{ji} odpowiadającym elementowi a'_{ji} jest M_{ij}, więc

$$\det A = \det A^T = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} a'_{ji} M'_{ji} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

□

Twierdzenie 16 (Twierdzenie Cauchy'ego) *Niech $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Wtedy*

$$detAB = detAdetB.$$

Dowód. Niech $[n] = \{1, \ldots, n\}$, $X = [n]^{[n]}$ i niech $f \in X$. Wtedy

$$\det AB = |b_{11}A^1 + \cdots + b_{n1}A^n, b_{12}A^1 + \cdots + b_{n2}A^n, \ldots, b_{1n}A^1 + \cdots + b_{nn}A^n| =$$

$$= \sum_{f \in X} b_{f(1)1} \cdots b_{f(n)n} |A^{f(1)}, \ldots, A^{f(n)}|.$$

Gdyby funkcja f nie była bijekcją, to istniałyby takie wskaźniki k i l, dla których $f(k) = f(l)$. Wtedy macierz $[A^{f(1)}, \ldots, A^{f(n)}]$ miałaby dwie kolumny identyczne i jej wyznacznik byłby równy 0. Wystarczy zatem rozpatrzyć te funkcje f, które są permutacjami.

W konsekwencji

$$\det AB = \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(n)n} |A^{\sigma(1)}, \ldots, A^{\sigma(n)}| =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma b_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(n)n} \det A =$$

$$= \det A \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma b^T_{1\sigma(1)} \cdots b^T_{n\sigma(n)} =$$

$$= \det A \det B^T = \det A \det B.$$

□

Niech $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ będzie macierzą odwracalną. Wtedy

$$1 = \det I = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}.$$

Stąd

$$\det A \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Definicja 15 *Niech $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Macierz $D^T = (D_{ij})^T \in M(\mathbb{K})$, w której element D_{ij} jest równy dopełnieniu algebraicznemu elementu a_{ij}, nazywamy macierzą dopełnień algebraicznych odpowiadającą macierzy A.*

Lemat 2 *Niech* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. *Wtedy*

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \delta_{ij}\, detA,$$

oraz

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \delta_{ij}\, detA.$$

Dowód. Dla $i = j$ twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy, że $i \neq j$. Wtedy $\delta_{ij} = 0$. Oznaczmy przez B macierz otrzymaną z macierzy $A = [A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n]$ przez zastąpienie wiersza A_j wierszem A_i, tzn.

$$B = [A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_i, \ldots, A_n].$$

Ponieważ macierz B ma dwa jednakowe wiersze, więc $\det B = 0$.

Z drugiej strony dopełnienie algebraiczne B_{jk} jest równe dopełnieniu A_{jk}. Rozwijając wyznacznik $\det B$ względem j-tego wiersza, otrzymamy

$$0 = \det B = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}B_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}.$$

Drugi wzór wykazujemy analogicznie. □

Twierdzenie 17 *Niech* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. *Wtedy*

$$A \cdot D^T = (detA)I.$$

W szczególności, jeżeli $detA \neq 0$, *to macierz* A *jest odwracalna oraz*

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} D^T.$$

Dowód. Zauważmy, że

$$AD^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Niech $C = (c_{ij}) = AD^T$. Wtedy, zgodnie z lematem, $C = (\delta_{ij}\det A) = (\det A)I$. W rezultacie

$$AD^T = (\det A)I.$$

Jeżeli $\det A \neq 0$, to

$$\frac{1}{\det A} AD^T = A \frac{1}{\det A} D^T = I.$$

Stąd

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} D^T.$$

□

Wniosek 6 *Niech* $A \in M_n(\mathbb{K})$*. Macierz* A *jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy* $detA \neq 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $rankA = n$*.*

Wniosek 7 *Jeżeli macierz* $B \in M_n(\mathbb{K})$ *jest odwracalna, to dla dowolnej macierzy* $A \in M_n(\mathbb{K})$

$$detA = det(B^{-1}AB).$$

Uwaga

Zbiór wszystkich macierzy odwracalnych stopnia n nad ciałem $\mathbb{K}$ oznaczamy symbolem $GL_n(\mathbb{K})$ i nazywamy pełną grupą liniową macierzy stopnia n nad ciałem $\mathbb{K}$.