Logika obliczeniowa #2
- BDD -

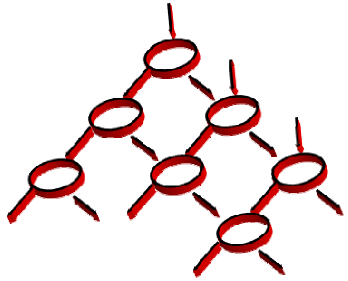
Przygotował:

Dr inż. Jacek Tkacz

Agenda

- Diagram BDD
- Rozwinięcie Shannona
- Redukcja diagramów BDD
- Uporządkowanie diagramów BDD
- Heurystyki w uporządkowaniu diagramów
- Analogia do techniki cyfrowej

BDD



- Acykliczny Graf Skierowany zbudowany z:
  - korzenia (węzeł wyróżniony)
  - węzłów nieterminalowych: dwoje potomków oraz zmienna
  - węzłów terminalowych 0 i 1
  - łuków łączących węzeł z jego lewym i prawym następnikiem (lewy oznacza wartość zero zmiennej decyzyjnej a prawy wartość jeden)
- Najczęściej do konstrukcji diagramu przedstawiającego zadaną funkcje boolowską, stosuje się tzw. rozwinięcie Shannona

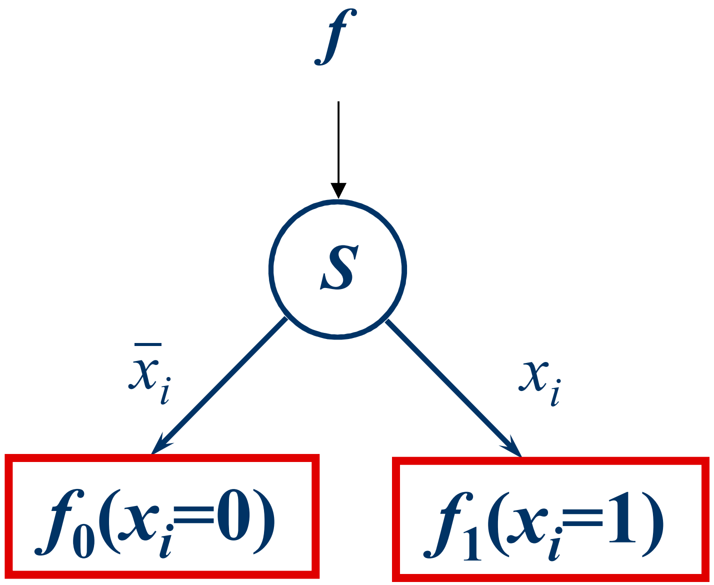
Rozwinięcie Shannona

Dana jest funkcja *f n*-zmiennych

$$f = \bar{x}_i f_{x_i=0} \vee x_i f_{x_i=1}$$

$$f_{x_i=0} = f(x_1,\dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1},\dots, x_n)$$
$$f_{x_i=1} = f(x_1,\dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1},\dots, x_n)$$

Dekompozycja Shannona w węźle



BDD - postać symboliczna

$$f = \overline{x_i} f_{x_i = 0} \vee x_i f_{x_i = 1}$$

$$f_{x_i = 0} = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

$$f_{x_i = 1} = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

$$f = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_3$$

$$f_{x1=0} = \bar{\mathbf{0}} x_2 \bar{x}_3 \vee \mathbf{0} \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \mathbf{0} \bar{x}_3 = x_2 \bar{x}_3$$

$$f_{x1=1} = \bar{\mathbf{1}} x_2 \bar{x}_3 \vee \mathbf{1} \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \mathbf{1} \bar{x}_3 = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_3$$

Przykład BDD

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3$$

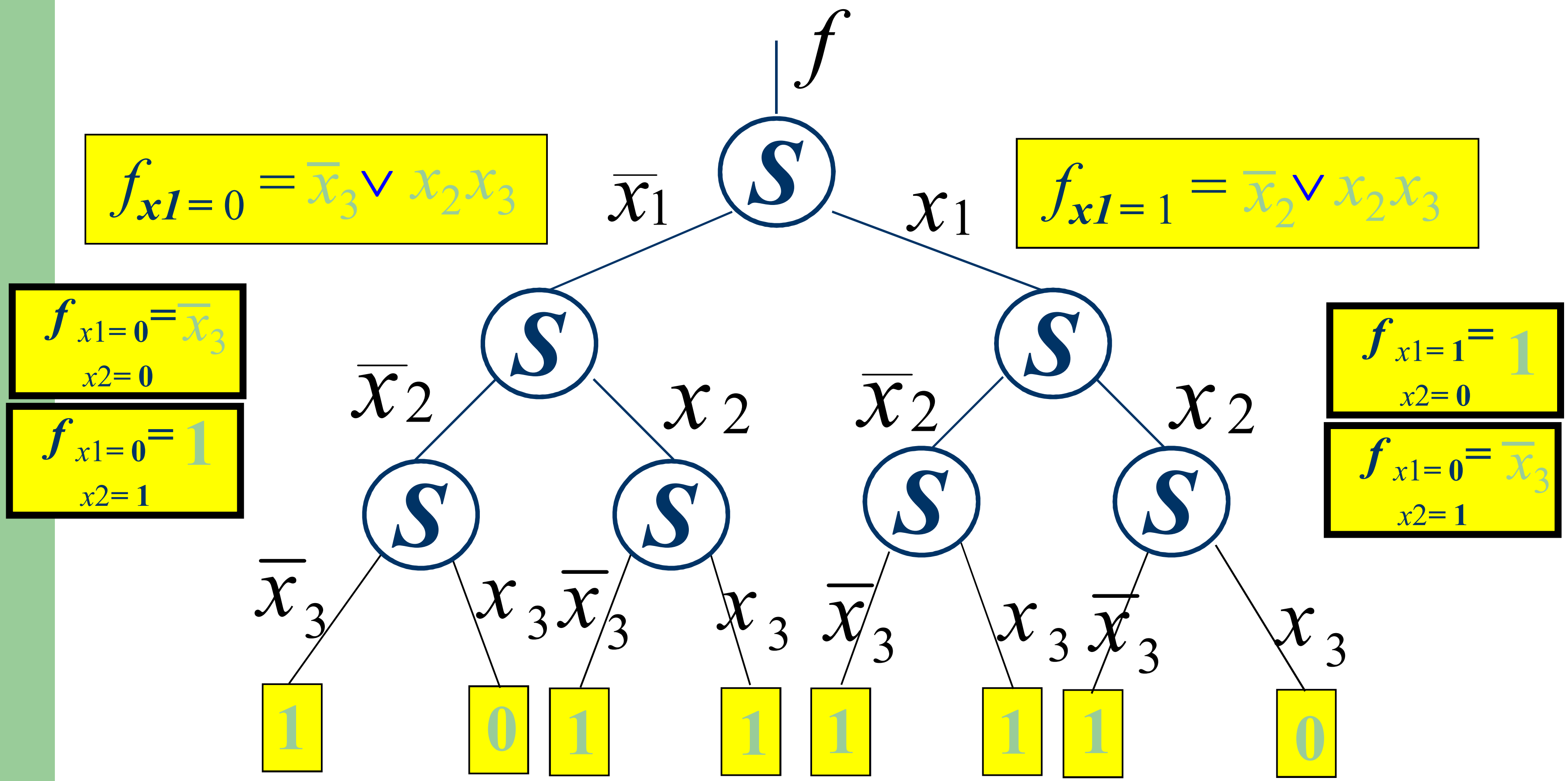


Tabela prawdy a rozkład Shannona

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

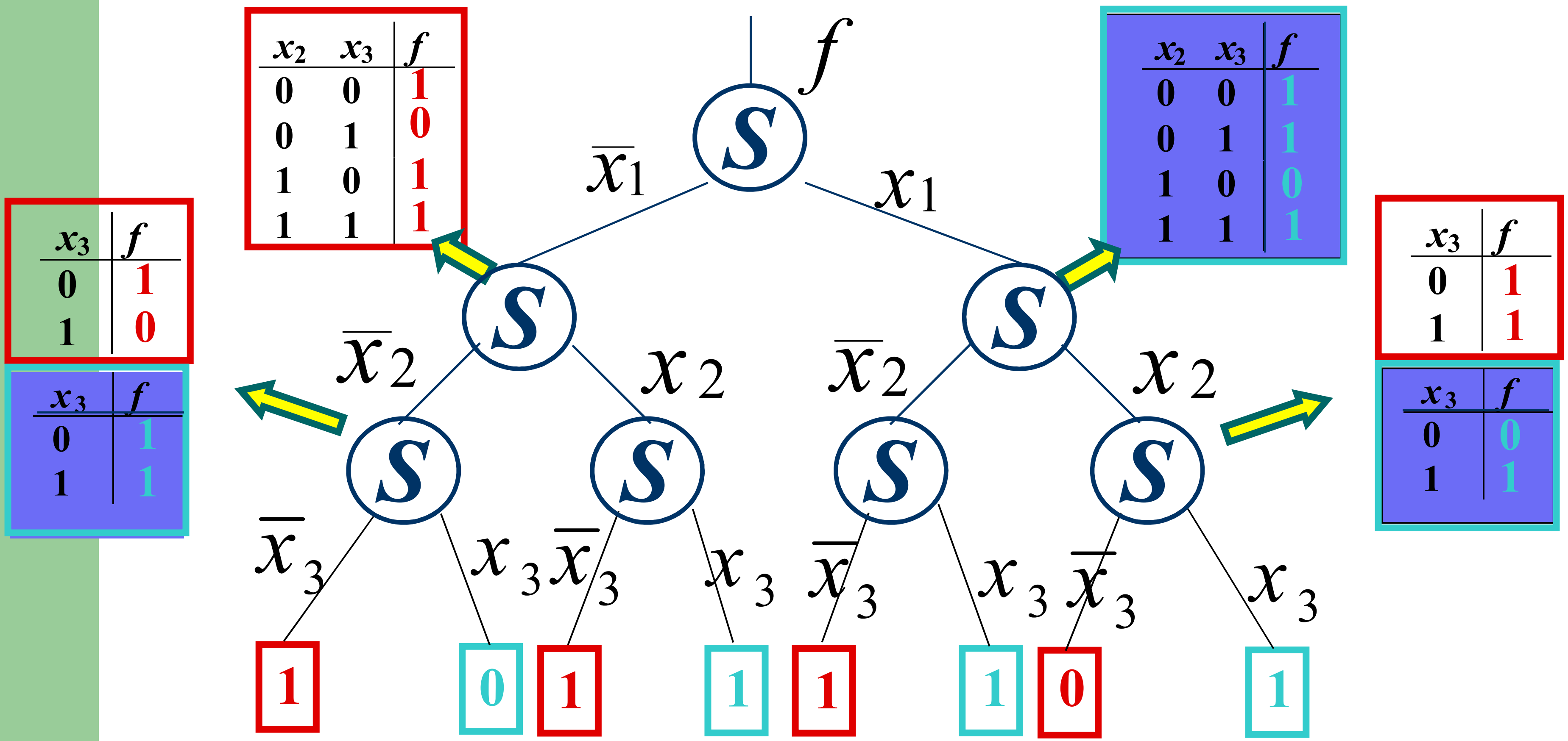
$x_1 = 0$

x_2	x_3	f
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$x_1 = 1$

x_2	x_3	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Diagram BDD i tabela prawdy



x_2	x_3	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

x_2	x_3	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

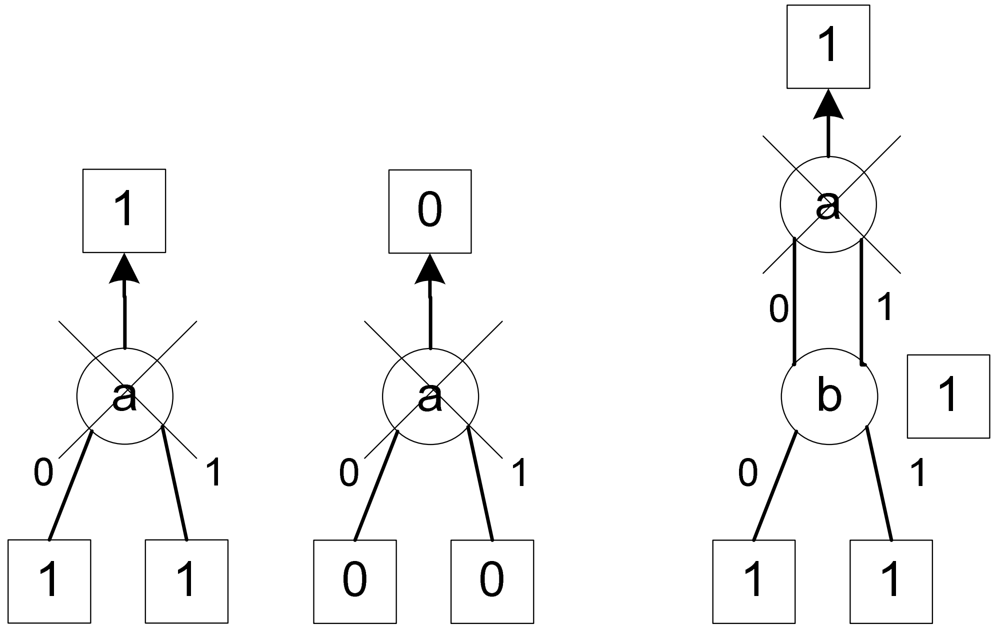
x_3	f
0	1
1	0

x_3	f
0	1
1	1

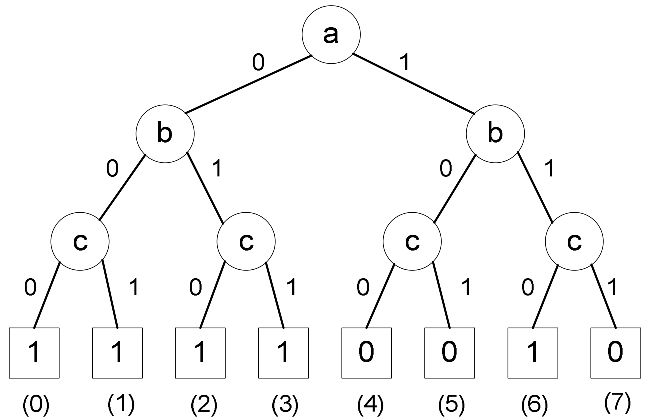
x_3	f
0	1
1	1

x_3	f
0	0
1	1

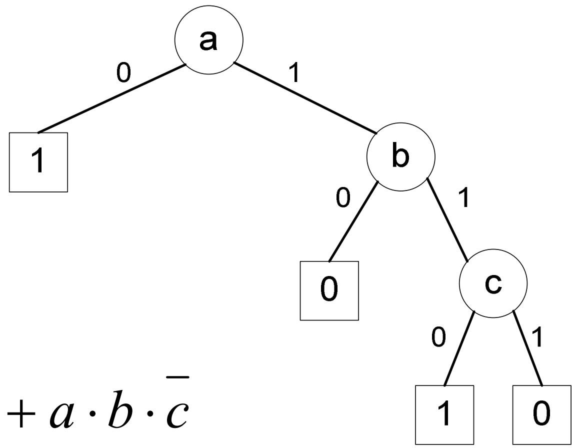
Redukcja

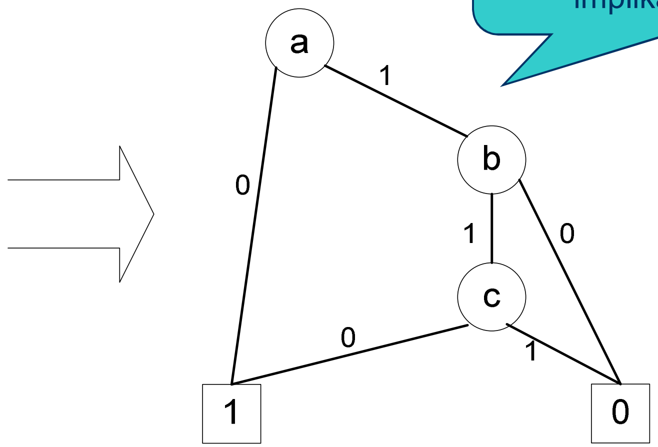


Przykład redukcji



Ścieżki kończące się w węźle terminalnym „1” - implikanty funkcji f.



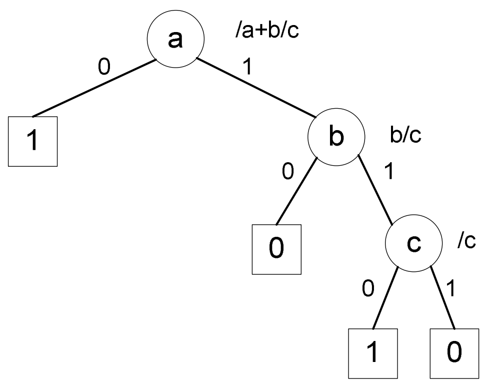


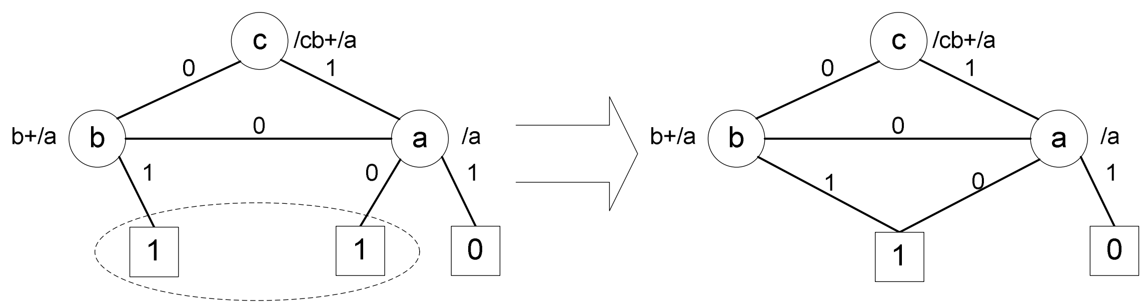
$$y = \overline{a} + a \cdot b \cdot \overline{c}$$

OBDD i ROBDD

- Uporządkowanie: kolejność węzłów na ścieżkach jest taka sama
- Dekomponowane zmienne są ustawione zawsze w tej samej kolejności: xi1 < xi2 < xi3 < … < xin
- Przykład: $y = \overline{a} + b \cdot \overline{c}$

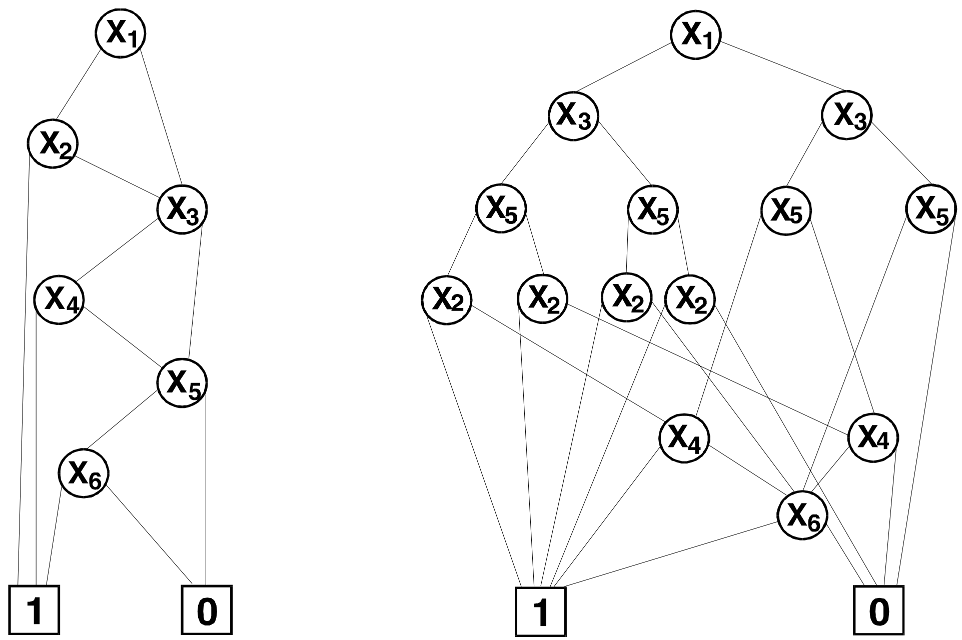
Porządek alfabetyczny rosnacy (a,b,c) Porządek alfabetyczny malejący (c,b,a)





Kolejność zmiennych a rozmiar diagramu

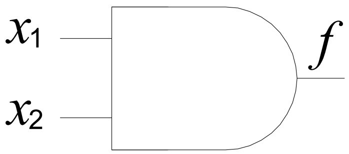
$$f = x_1x_2 \vee x_3x_4 \vee x_5x_6$$



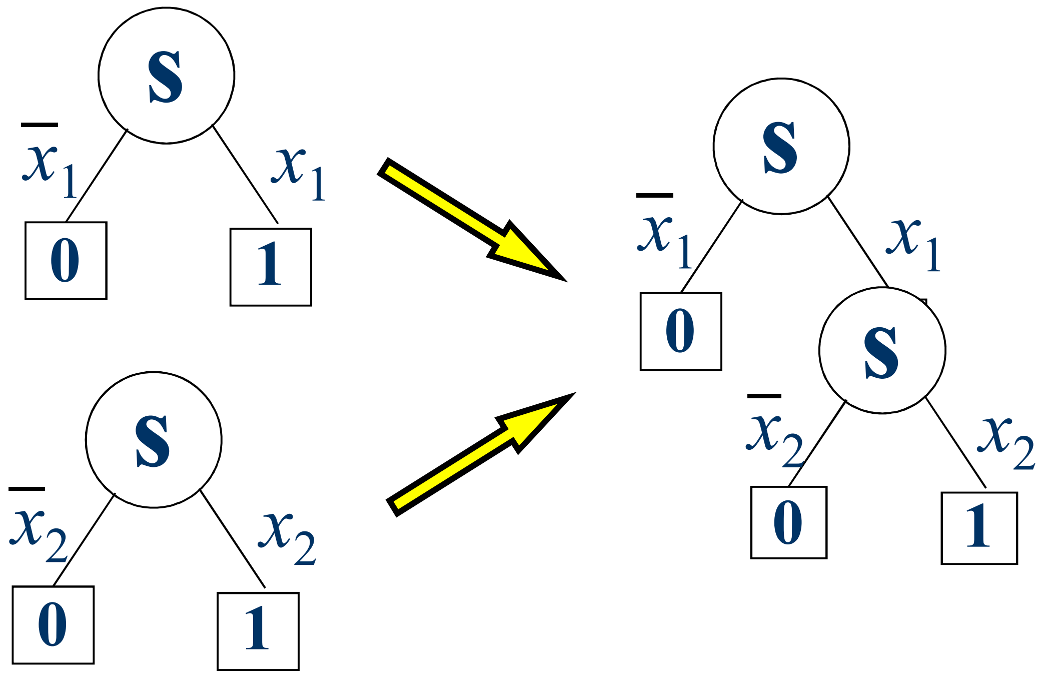
Zasady empiryczne (heurystyki) wyboru kolejności zmiennych

- Zmienne wpływające na wartość funkcji w dużym stopniu powinny znajdować się blisko korzenia
- grupy zmiennych powiązanych ze sobą powinny zostać umiejscowione obok siebie

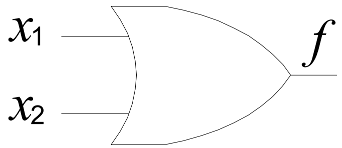
BDD z układu cyfrowego - AND



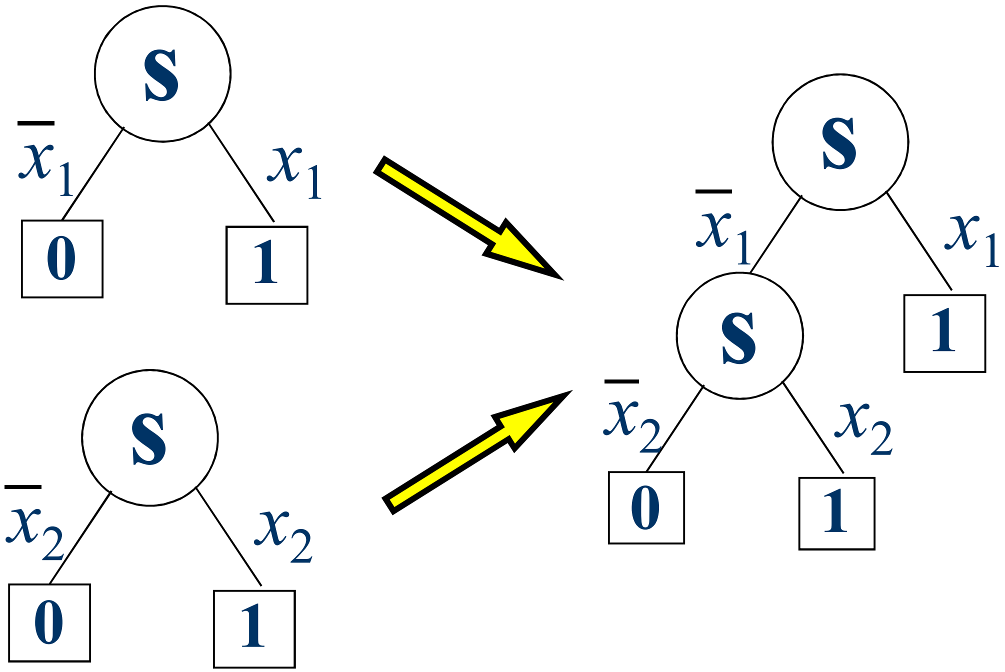
x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



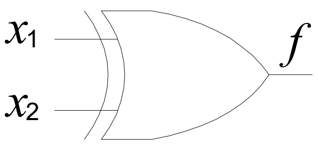
BDD z układu cyfrowego - OR



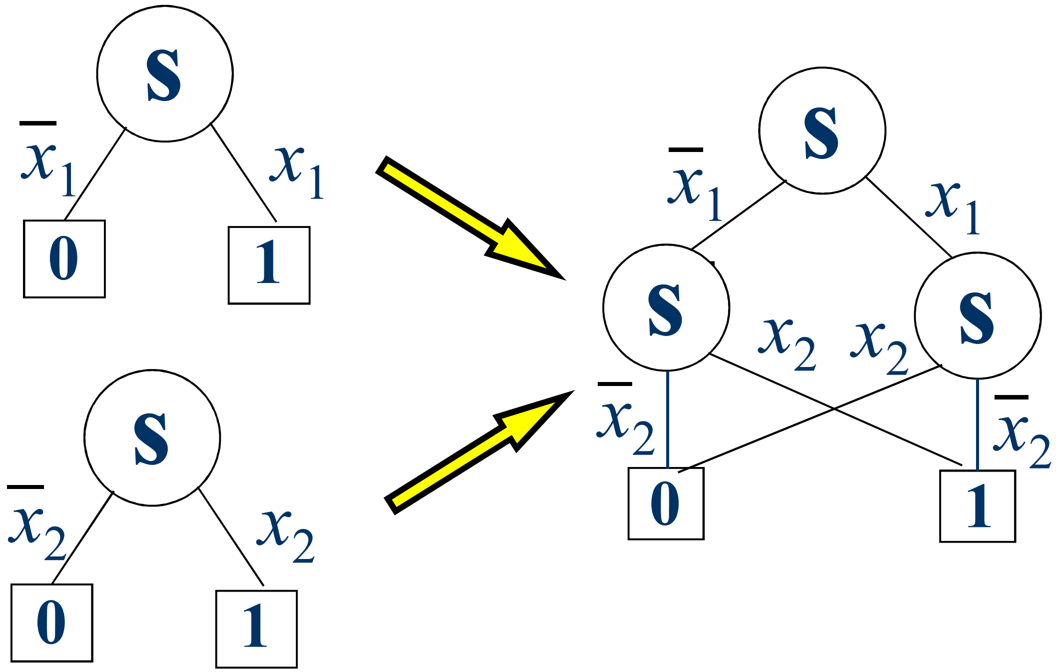
x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



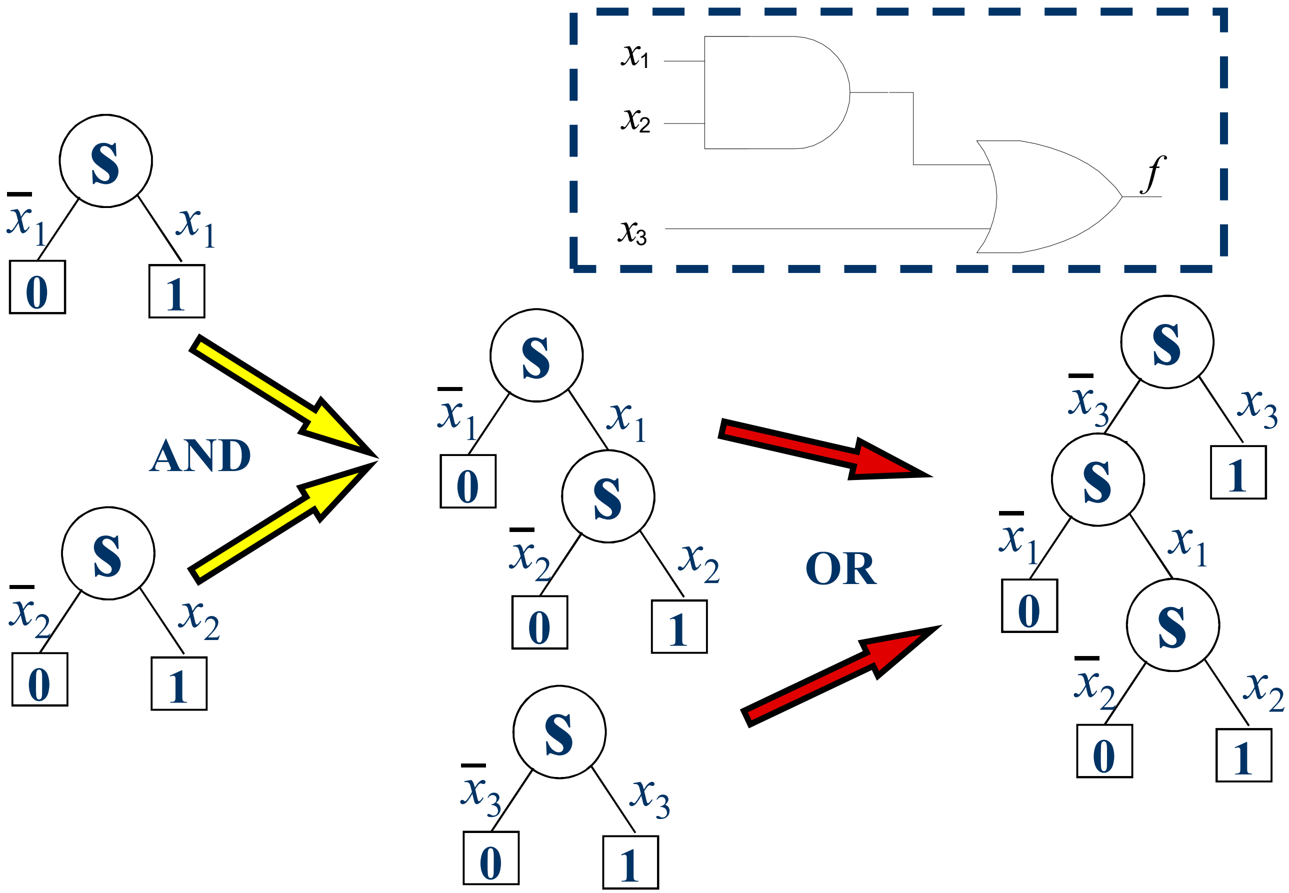
BDD z układu cyfrowego - XOR



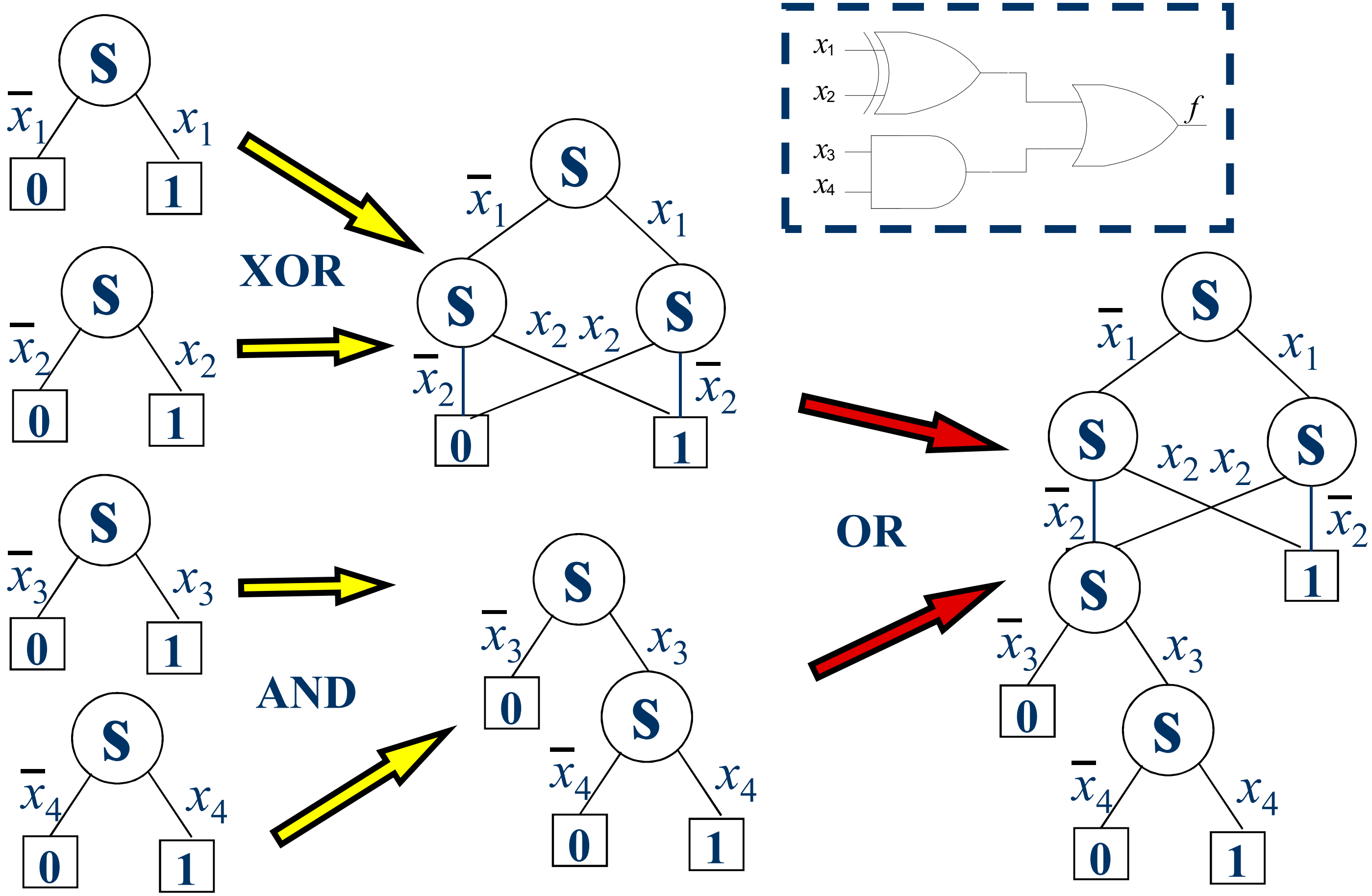
x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



BDD z układu cyfrowego – układ kombinacyjny



BDD z układu cyfrowego – układ kombinacyjny



Literatura

- R. Drechsler: Binary Decision Diagram. Theory and Implementation, Kluwer Academic Publishers, 1998
- R. E. Bryant: Symbolic Boolean Manipulation with Ordered Binary Decision Diagrams, ACM Computing Surveys, Vol. 24, No. 3 (September, 1992), pp. 293–318.
- Sheldon B. Akers: Binary Decision Diagrams, IEEE Transactions on Computers, C-27(6):509–516, June 1978.
- S. Minato: Binary Decision Diagrams and Applications for VLSI CAD, Kluwer Academic Publishers, 1996

Koniec

http://willow.iie.uz.zgora.pl/~jtkacz

Dziękuję za uwagę!