Sprawy organizacyjne

Jak można się ze mną skontaktować

dr Barbara Przebieracz
Bankowa 14, p.568
barbara.przebieracz@us.edu.pl
www.math.us.edu.pl/bp

10 wykładów,
Zaliczenie wykładu:
ocena z wykładu jest średnią oceny z ćwiczeń(materiał wykładów 1-5) i z egzaminu (materiał wykładów 6-10)
obecność na wykładzie może podwyższyć ocenę z egzaminu (10 obecności (w tym ostatnie 5)- 40 punktów, 9 obecności (w tym ostatnie 5) - 30 punktów, 8 obecności (w tym ostatnie 5)- 20 punktów, 7 obecności (w tym ostatnie 5) - 10 punktów.
Skala: 0-50 ndst, 50-60 dst, 60-70 dst+, 70-80 db, 80-90 db+, 90-100 bdb.

Plan wykładu

1. Funkcje elementarne, własności funkcji, złożenia funkcji, funkcja odwrotna.
2. Ciągi i ich granice.
3. Granica funkcji, ciągłość funkcji.
4. Pochodna funkcji i jej zastosowania.
5. Całka nieoznaczona i oznaczona Riemanna.
6. Liczby zespolone i elementy algebry liniowej.
7. Rachunek różniczkowy i całka Riemanna w $\mathbb{R}^n$.
8. Równania różniczkowe zwyczajne.
9. Rachunek prawdopodobieństwa.
10. Statystyka.

Zacznijmy od powtórki...

Elelementy rachunku zdań. Alternatywa.

Zdanie ma wartość logiczną 1, gdy jest prawdziwe, a 0, gdy jest fałszywe.
Jeśli p i q są zdaniami, to
$p \vee q$ nazywamy **alternatywą** zdań p, q, czytamy: p lub q.
Wartość logiczna zdania $p \vee q$ zależy od wartości logicznych zdań p i q następująco:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Elelementy rachunku zdań. Koniunkcja.

Zdanie ma wartość logiczną 1, gdy jest prawdziwe, a 0, gdy jest fałszywe.
Jeśli p i q są zdaniami, to
$p \wedge q$ nazywamy **koniunkcją** zdań p, q, czytamy: p i q. Wartość logiczna zdania $p \wedge q$ zależy od wartości logicznych zdań p i q następująco:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Elelementy rachunku zdań. Implikacja.

Zdanie ma wartość logiczną 1, gdy jest prawdziwe, a 0, gdy jest fałszywe.
Jeśli p i q są zdaniami, to
$p \Rightarrow q$ nazywamy **implikacją** zdań p(poprzednik implikacji), q(następnik implikacji), czytamy: jeżeli p, to q. Wartość logiczna zdania $p \Rightarrow q$ zależy od wartości logicznych zdań p i q następująco:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Zdanie ma wartość logiczną 1, gdy jest prawdziwe, a 0, gdy jest fałszywe.
Jeśli p i q są zdaniami, to
$p \Leftrightarrow q$ nazywamy **równoważnością** zdań p, q, czytamy: p wtedy i tylko wtedy, gdy q. Wartość logiczna zdania $p \Leftrightarrow q$ zależy od wartości logicznych zdań p i q następująco:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Zdanie ma wartość logiczną 1, gdy jest prawdziwe, a 0, gdy jest fałszywe.
Jeśli p jest zdaniem, to
$\sim p$ nazywamy **negacją** zdania p, czytamy: nieprawda, że p.
Wartość logiczna zdania $\sim p$ zależy od wartości logicznej zdania p następująco:

p	$\sim p$
1	0
0	1

Tautologie, to zdania złożone, których wartość logiczna wynosi zawsze 1, niezależnie od wartości logicznych zdań, z których są złożone.

Przykłady tautologii

$[\sim (p \vee q)] \Leftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)]$
$[\sim (p \wedge q)] \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$
$[\sim (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [p \wedge \sim q]$
$[p \Leftrightarrow q] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
$[p \Rightarrow q] \Leftrightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)]$

Kwantyfikatory

$$\forall_{x\in X}\, \phi(x), \qquad \bigwedge_{x\in X} \phi(x)$$

czytamy: dla każdego x ze zbioru X zachodzi $\phi(x)$.

$$\exists_{x\in X}\, \phi(x), \qquad \bigvee_{x\in X} \phi(x)$$

czytamy: istnieje taki x ze zbioru X, że zachodzi $\phi(x)$.

Przykłady praw logicznych dotyczących kwantyfikatorów

$$\sim \forall_{x\in X}\, \phi(x) \Leftrightarrow \exists_{x\in X} \sim \phi(x)$$

$$\sim \exists_{x\in X}\, \phi(x) \Leftrightarrow \forall_{x\in X} \sim \phi(x)$$

Elementy rachunku zbiorów

$x \in A$ czytamy: x należy do zbioru A, x jest elementem zbioru A.
$\varnothing$- zbiór pusty.
$A \subset B$: A jest podzbiorem zbioru B, czyli $\forall_x x \in A \Rightarrow x \in B$.
Niech X będzie pewną przestrzenią, $A, B \subset X$,
suma zbiorów: $A \cup B = \{x \in X;\ x \in A \vee x \in B\}$,
iloczyn(przekrój, część wspólna) zbiorów:
$A \cap B = \{x \in X;\ x \in A \wedge x \in B\}$,
różnica zbiorów: $A \setminus B = \{x \in X;\ x \in A \wedge x \notin B\}$,
dopełnienie zbioru: $A' = X \setminus A$,
iloczyn kartezjański zbiorów: $A \times B = \{(x, y);\ x \in A \wedge y \in B\}$,
zbiór potęgowy: $\mathcal{P}(A) = 2^A = \{B \subset X;\ B \subset A\}$.

Oznaczenia

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$– zbiór liczb naturalnych,
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$– zbiór liczb naturalnych z zerem,
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$– zbiór liczb całkowitych,
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$– zbiór liczb wymiernych,
$\mathbb{R}$– zbiór liczb rzeczywistych,
$\mathbb{C}$– zbiór liczb zespolonych.

Funkcje. Podstawowe pojęcia.

$$f\colon X \to Y$$

$$\nearrow \qquad \nwarrow \qquad \nwarrow$$

nazwa funkcji dziedzina przeciwdziedzina

$f(X) = \{f(x) \in Y;\ x \in X\}$– zbiór wartości funkcji. ($f(X) \subset Y$).
Funkcja $f\colon X \to Y$ jest różnowartościowa (injekcją), gdy

$$\forall_{x,y \in X}\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Piszemy $f\colon X \xrightarrow{1-1} Y$.
Funkcja $f\colon X \to Y$ jest na (surjekcją), gdy

$$f(X) = Y.$$

Piszemy $f\colon X \xrightarrow{na} Y$.
Funkcja $f\colon X \to Y$ jest bijekcją, gdy jest różnowartościowa i na.

Monotoniczność

Niech $X \subset \mathbb{R}$. Funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$ jest (silnie) rosnąca w zbiorze $A \subset X$, gdy

$$\forall_{x,y \in A}\, x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Niech $X \subset \mathbb{R}$. Funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$ jest słabo rosnąca (niemalejąca) w zbiorze $A \subset X$, gdy

$$\forall_{x,y \in A}\, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Niech $X \subset \mathbb{R}$. Funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$ jest (silnie) malejąca w zbiorze $A \subset X$, gdy

$$\forall_{x,y \in A}\, x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

Niech $X \subset \mathbb{R}$. Funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$ jest słabo malejąca (nierosnąca) w zbiorze $A \subset X$, gdy

$$\forall_{x,y \in A}\, x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

Wypukłość/wklęsłość

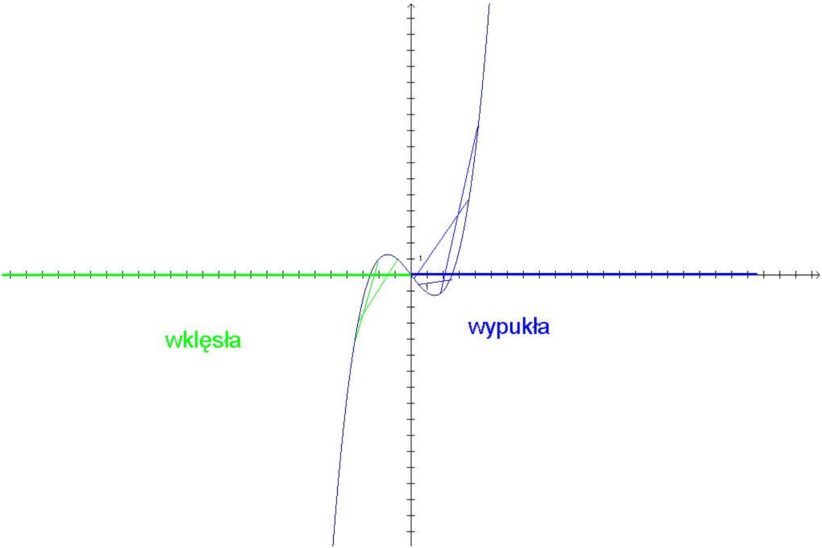
Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest wypukła, gdy

$$\forall_{x,y\in(a,b)}\forall_{\lambda\in[0,1]}\, f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$$

Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest wklęsła, gdy

$$\forall_{x,y\in(a,b)}\forall_{\lambda\in[0,1]}\, f((1-\lambda)x+\lambda y) \geq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$$

Funkcja wypukła/wklęsła



I jeszcze kilka własności

Niech $D \subset \mathbb{R}$ i niech $f \colon D \to \mathbb{R}$.

- Mówimy, że f jest **parzysta** , gdy

$$\forall_{x \in D} \; -x \in D \;\wedge\; f(x) = f(-x).$$

- Mówimy, że f jest **nieparzysta** , gdy

$$\forall_{x \in D} \; -x \in D \;\wedge\; f(-x) = -f(x).$$

- Mówimy, że f jest **okresowa o okresie** $T \neq 0$, gdy

$$\forall_{x \in D} \; x + T \in D \;\wedge\; f(x) = f(x + T).$$

I jeszcze kilka własności

Niech $D \subset \mathbb{R}$ i niech $f\colon D \to \mathbb{R}$.

- Mówimy, że f jest **parzysta** , gdy

$$\forall_{x \in D} \ -x \in D \ \wedge \ f(x) = f(-x).$$

- Mówimy, że f jest **nieparzysta** , gdy

$$\forall_{x \in D} \ -x \in D \ \wedge \ f(-x) = -f(x).$$

- Mówimy, że f jest **okresowa o okresie** $T \neq 0$, gdy

$$\forall_{x \in D} \ x + T \in D \ \wedge \ f(x) = f(x + T).$$

I jeszcze kilka własności

Niech $D \subset \mathbb{R}$ i niech $f\colon D \to \mathbb{R}$.

- Mówimy, że f jest **parzysta** , gdy

$$\forall_{x \in D} \; -x \in D \;\wedge\; f(x) = f(-x).$$

- Mówimy, że f jest **nieparzysta** , gdy

$$\forall_{x \in D} \; -x \in D \;\wedge\; f(-x) = -f(x).$$

- Mówimy, że f jest **okresowa o okresie** $T \neq 0$, gdy

$$\forall_{x \in D} \; x + T \in D \;\wedge\; f(x) = f(x + T).$$

I jeszcze kilka własności

Niech $D \subset \mathbb{R}$ i niech $f\colon D \to \mathbb{R}$.

- Mówimy, że f jest **parzysta** , gdy

$$\forall_{x \in D} \; -x \in D \;\wedge\; f(x) = f(-x).$$

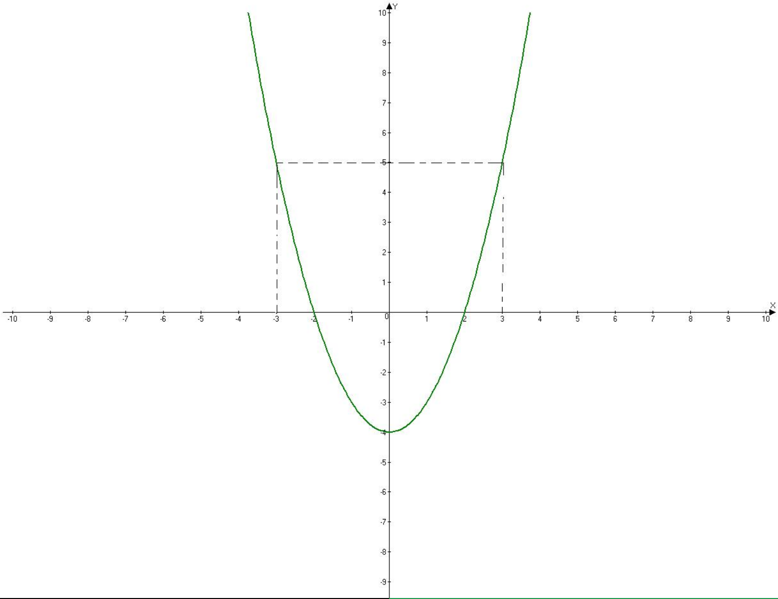
- Mówimy, że f jest **nieparzysta** , gdy

$$\forall_{x \in D} \; -x \in D \;\wedge\; f(-x) = -f(x).$$

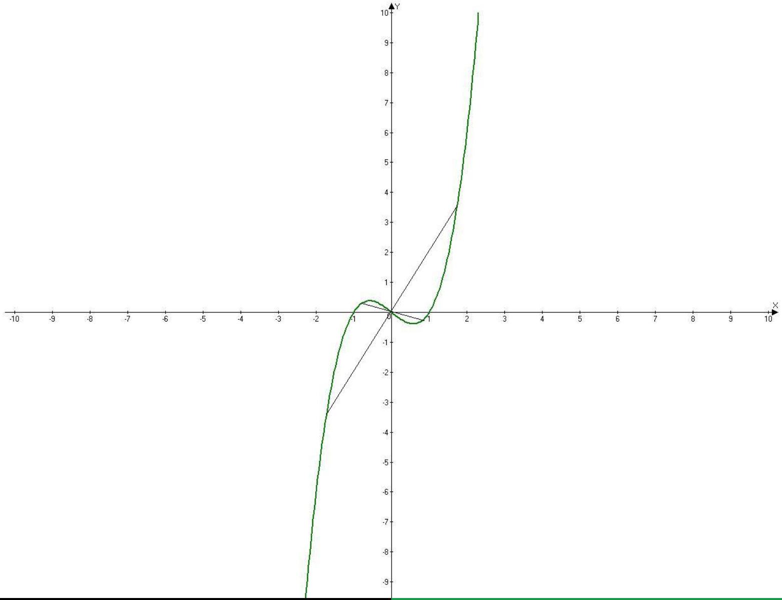
- Mówimy, że f jest **okresowa o okresie** $T \neq 0$, gdy

$$\forall_{x \in D} \, x + T \in D \;\wedge\; f(x) = f(x + T).$$

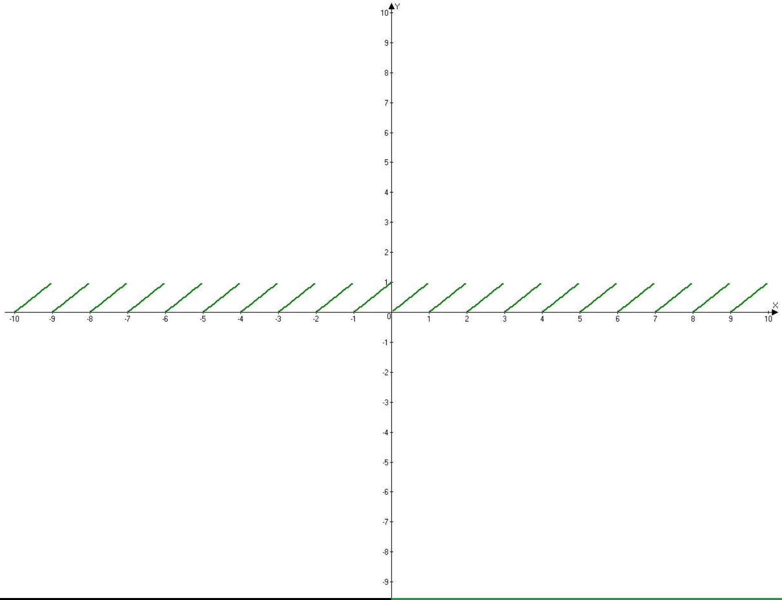
Funkcja parzysta



Funkcja nieparzysta



Funkcja okresowa



Złożenie funkcji

definicja złożenia funkcji

Niech dane będą odwzorowania $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$. Odwzorowanie $g \circ f\colon X \to Z$ dane wzorem $g \circ f(x) = g(f(x))$ nazywamy **złożeniem** (**superpozycją**) odwzorowań f i g. Funkcja f jest funkcją wewnętrzną, a g zewnętrzną tego złożenia.

Przykład 1

Niech $f(x) = \sin x$, a $g(x) = x^2 + 3x - 5$. Wtedy
$g \circ f(x) = g(\sin x) = \sin^2 x + 3\sin x - 5$,
$f \circ g(x) = f(x^2 + 3x - 5) = \sin(x^2 + 3x - 5)$.

Przykład 2

Funkcja $f(x) = \sqrt{3^x}$ jest złożeniem funkcji $g(x) = 3^x$ i $h(x) = \sqrt{x}$, tj. $f = h \circ g$.

Złożenie funkcji

definicja złożenia funkcji

Niech dane będą odwzorowania $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$. Odwzorowanie $g \circ f\colon X \to Z$ dane wzorem $g \circ f(x) = g(f(x))$ nazywamy **złożeniem** (**superpozycją**) odwzorowań f i g. Funkcja f jest funkcją wewnętrzną, a g zewnętrzną tego złożenia.

Przykład 1

Niech $f(x) = \sin x$, a $g(x) = x^2 + 3x - 5$. Wtedy
$g \circ f(x) = g(\sin x) = \sin^2 x + 3\sin x - 5$,
$f \circ g(x) = f(x^2 + 3x - 5) = \sin(x^2 + 3x - 5)$.

Przykład 2

Funkcja $f(x) = \sqrt{3^x}$ jest złożeniem funkcji $g(x) = 3^x$ i $h(x) = \sqrt{x}$, tj. $f = h \circ g$.

Złożenie funkcji

definicja złożenia funkcji

Niech dane będą odwzorowania $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$. Odwzorowanie $g \circ f\colon X \to Z$ dane wzorem $g \circ f(x) = g(f(x))$ nazywamy **złożeniem** (**superpozycją**) odwzorowań f i g. Funkcja f jest funkcją wewnętrzną, a g zewnętrzną tego złożenia.

Przykład 1

Niech $f(x) = \sin x$, a $g(x) = x^2 + 3x - 5$. Wtedy
$g \circ f(x) = g(\sin x) = \sin^2 x + 3\sin x - 5$,
$f \circ g(x) = f(x^2 + 3x - 5) = \sin(x^2 + 3x - 5)$.

Przykład 2

Funkcja $f(x) = \sqrt{3^x}$ jest złożeniem funkcji $g(x) = 3^x$ i $h(x) = \sqrt{x}$, tj. $f = h \circ g$.

Złożenie funkcji

definicja złożenia funkcji

Niech dane będą odwzorowania $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$. Odwzorowanie $g \circ f\colon X \to Z$ dane wzorem $g \circ f(x) = g(f(x))$ nazywamy **złożeniem** (**superpozycją**) odwzorowań f i g. Funkcja f jest funkcją wewnętrzną, a g zewnętrzną tego złożenia.

Przykład 1

Niech $f(x) = \sin x$, a $g(x) = x^2 + 3x - 5$. Wtedy
$g \circ f(x) = g(\sin x) = \sin^2 x + 3\sin x - 5$,
$f \circ g(x) = f(x^2 + 3x - 5) = \sin(x^2 + 3x - 5)$.

Przykład 2

Funkcja $f(x) = \sqrt{3^x}$ jest złożeniem funkcji $g(x) = 3^x$ i $h(x) = \sqrt{x}$, tj. $f = h \circ g$.

Złożenie funkcji

definicja złożenia funkcji

Niech dane będą odwzorowania $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$. Odwzorowanie $g \circ f\colon X \to Z$ dane wzorem $g \circ f(x) = g(f(x))$ nazywamy **złożeniem** (**superpozycją**) odwzorowań f i g. Funkcja f jest funkcją wewnętrzną, a g zewnętrzną tego złożenia.

Przykład 1

Niech $f(x) = \sin x$, a $g(x) = x^2 + 3x - 5$. Wtedy
$g \circ f(x) = g(\sin x) = \sin^2 x + 3\sin x - 5$,
$f \circ g(x) = f(x^2 + 3x - 5) = \sin(x^2 + 3x - 5)$.

Przykład 2

Funkcja $f(x) = \sqrt{3^x}$ jest złożeniem funkcji $g(x) = 3^x$ i $h(x) = \sqrt{x}$, tj. $f = h \circ g$.

Złożenie funkcji

definicja złożenia funkcji

Niech dane będą odwzorowania $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$. Odwzorowanie $g \circ f\colon X \to Z$ dane wzorem $g \circ f(x) = g(f(x))$ nazywamy **złożeniem** (**superpozycją**) odwzorowań f i g. Funkcja f jest funkcją wewnętrzną, a g zewnętrzną tego złożenia.

Przykład 1

Niech $f(x) = \sin x$, a $g(x) = x^2 + 3x - 5$. Wtedy
$g \circ f(x) = g(\sin x) = \sin^2 x + 3\sin x - 5$,
$f \circ g(x) = f(x^2 + 3x - 5) = \sin(x^2 + 3x - 5)$.

Przykład 2

Funkcja $f(x) = \sqrt{3^x}$ jest złożeniem funkcji $g(x) = 3^x$ i $h(x) = \sqrt{x}$, tj. $f = h \circ g$.

Złożenie funkcji

definicja złożenia funkcji

Niech dane będą odwzorowania $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$. Odwzorowanie $g \circ f\colon X \to Z$ dane wzorem $g \circ f(x) = g(f(x))$ nazywamy **złożeniem** (**superpozycją**) odwzorowań f i g. Funkcja f jest funkcją wewnętrzną, a g zewnętrzną tego złożenia.

Przykład 1

Niech $f(x) = \sin x$, a $g(x) = x^2 + 3x - 5$. Wtedy
$g \circ f(x) = g(\sin x) = \sin^2 x + 3\sin x - 5$,
$f \circ g(x) = f(x^2 + 3x - 5) = \sin(x^2 + 3x - 5)$.

Przykład 2

Funkcja $f(x) = \sqrt{3^x}$ jest złożeniem funkcji $g(x) = 3^x$ i $h(x) = \sqrt{x}$, tj. $f = h \circ g$.

Funkcja odwrotna

Niech $f\colon X \xrightarrow{1-1} Y$. Funkcję $f^{-1}\colon f(X) \to X$ określoną następująco:

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y,$$

nazywamy funkcją odwrotną do funkcji f.

Wielomianem stopnia n, $n \in \mathbb{N}_0$, nazywamy funkcję $W\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postaci $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$. Funkcję $W(x) = 0$ nazywamy wielomianem zerowym.

Przykłady

- wielomiany stopnia zero (funkcje stałe, niezerowe): $W(x) = a_0$, $a_0 \neq 0$
- wielomiany stopnia jeden (funkcje liniowe, niestałe): $W(x) = ax + b$, $a \neq 0$
- wielomiany stopnia dwa (funkcje kwadratowe): $W(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$
- wielomiany wyższych stopni, np. $W(x) = x^3 - x$, $W(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 3x^2 + x - 3)$

Funkcje elementarne. Wielomiany

Wielomianem stopnia n, $n \in \mathbb{N}_0$, nazywamy funkcję $W\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postaci $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$. Funkcję $W(x) = 0$ nazywamy wielomianem zerowym.

Przykłady

- wielomiany stopnia zero (funkcje stałe, niezerowe): $W(x) = a_0$, $a_0 \neq 0$
- wielomiany stopnia jeden (funkcje liniowe, niestałe): $W(x) = ax + b$, $a \neq 0$
- wielomiany stopnia dwa (funkcje kwadratowe): $W(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$
- wielomiany wyższych stopni, np. $W(x) = x^3 - x$, $W(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 3x^2 + x - 3)$

Wielomianem stopnia n, $n \in \mathbb{N}_0$, nazywamy funkcję $W\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postaci $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$. Funkcję $W(x) = 0$ nazywamy wielomianem zerowym.

Przykłady

- wielomiany stopnia zero (funkcje stałe, niezerowe): $W(x) = a_0$, $a_0 \neq 0$
- wielomiany stopnia jeden (funkcje liniowe, niestałe): $W(x) = ax + b$, $a \neq 0$
- wielomiany stopnia dwa (funkcje kwadratowe): $W(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$
- wielomiany wyższych stopni, np. $W(x) = x^3 - x$, $W(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 3x^2 + x - 3)$

Wielomianem stopnia n, $n \in \mathbb{N}_0$, nazywamy funkcję $W\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postaci $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$. Funkcję $W(x) = 0$ nazywamy wielomianem zerowym.

Przykłady

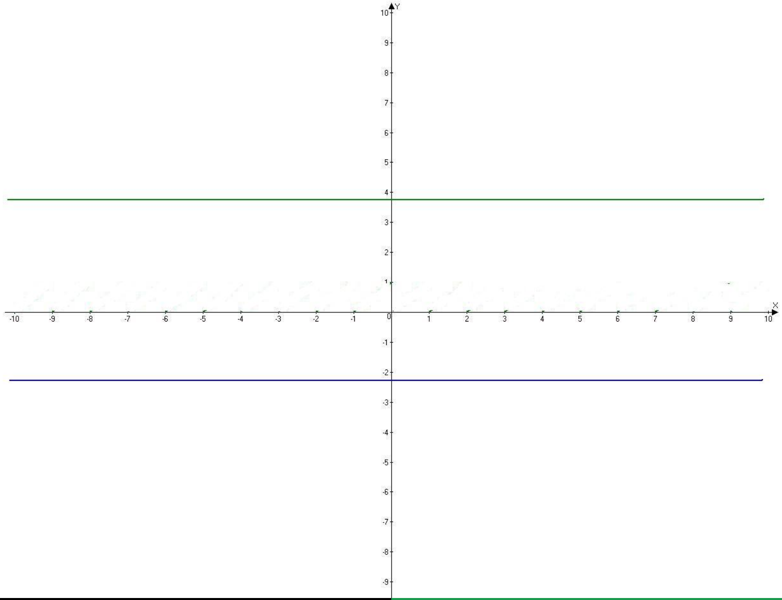
- wielomiany stopnia zero (funkcje stałe, niezerowe): $W(x) = a_0$, $a_0 \neq 0$
- wielomiany stopnia jeden (funkcje liniowe, niestałe): $W(x) = ax + b$, $a \neq 0$
- wielomiany stopnia dwa (funkcje kwadratowe): $W(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$
- wielomiany wyższych stopni, np. $W(x) = x^3 - x$, $W(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 3x^2 + x - 3)$

Wielomianem stopnia n, $n \in \mathbb{N}_0$, nazywamy funkcję $W\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postaci $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$. Funkcję $W(x) = 0$ nazywamy wielomianem zerowym.

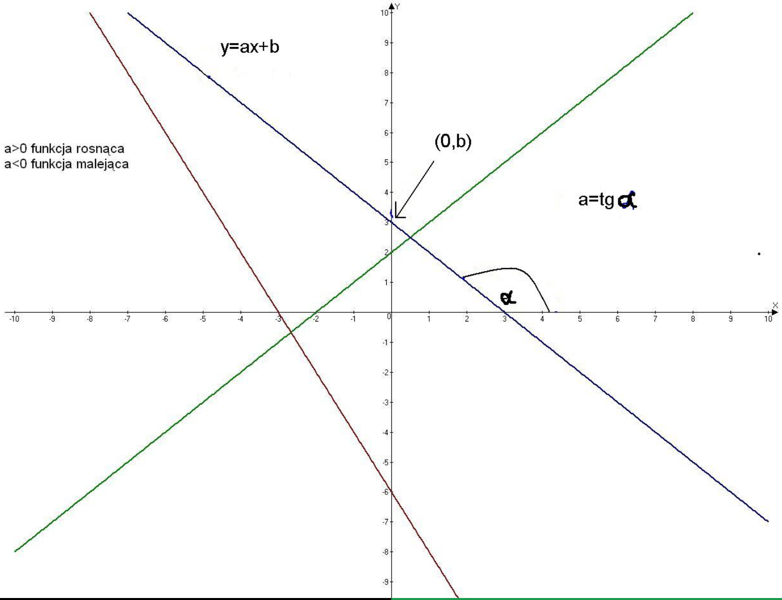
Przykłady

- wielomiany stopnia zero (funkcje stałe, niezerowe): $W(x) = a_0$, $a_0 \neq 0$
- wielomiany stopnia jeden (funkcje liniowe, niestałe): $W(x) = ax + b$, $a \neq 0$
- wielomiany stopnia dwa (funkcje kwadratowe): $W(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$
- wielomiany wyższych stopni, np. $W(x) = x^3 - x$, $W(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 3x^2 + x - 3)$

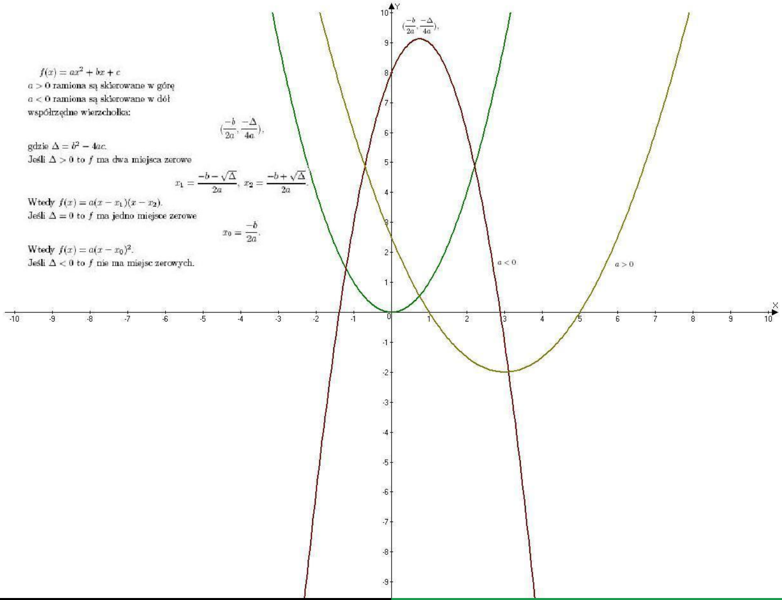
Funkcje stałe



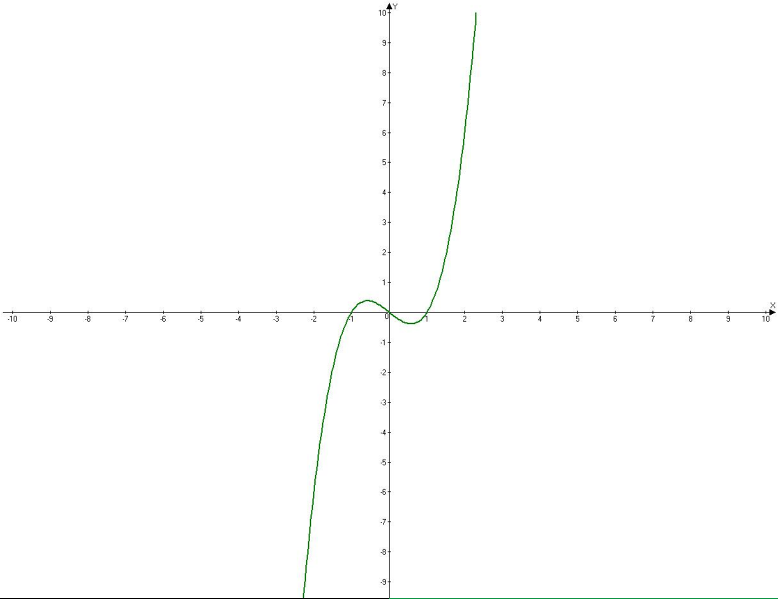
Funkcje liniowe



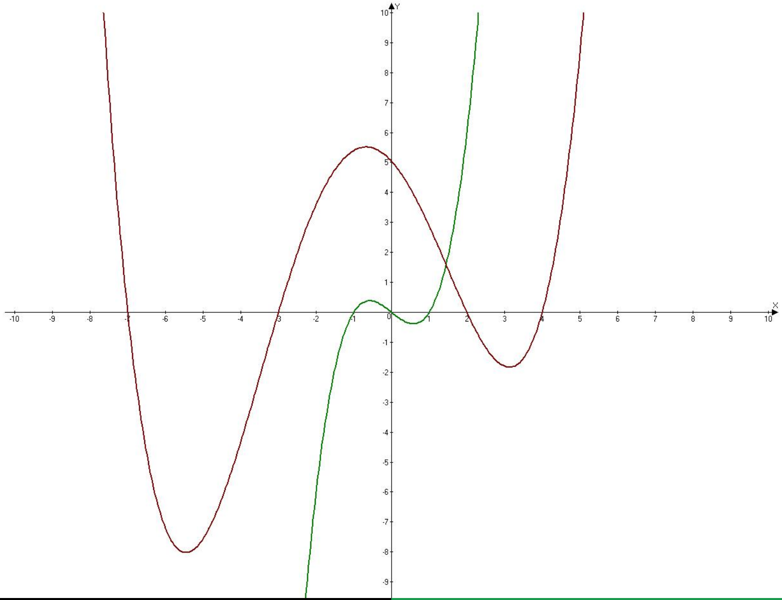
Funkcje kwadratowe



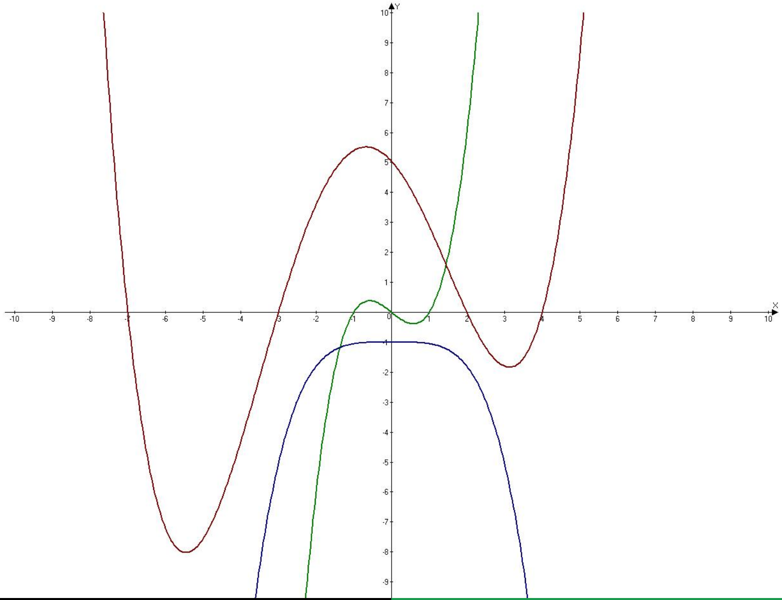
Wielomiany wyższych stopni



Wielomiany wyższych stopni



Wielomiany wyższych stopni



Funkcje elementarne. Funkcje wymierne.

Niech $P, Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, będą wielomianami, $Q \neq 0$. Oznaczmy $Z = \{x \in R:\ Q(x) = 0\}$.
Funkcję $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ określoną dla $x \in \mathbb{R} \setminus Z$, nazywamy funkcją wymierną.
W szczególności, gdy P i Q są funkcjami liniowymi, tj. $P(x) = ax + b$, $Q(x) = cx + d$, przy czym $ad - bc \neq 0$, taką funkcję wymierną nazywmy homografią. Wykresem funkcji homograficznej $R(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdy $c \neq 0$ jest hiperbola.

Niech $P, Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, będą wielomianami, $Q \neq 0$. Oznaczmy $Z = \{x \in R:\ Q(x) = 0\}$.
Funkcję $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ określoną dla $x \in \mathbb{R} \setminus Z$, nazywamy funkcją wymierną.
W szczególności, gdy P i Q są funkcjami liniowymi, tj. $P(x) = ax + b$, $Q(x) = cx + d$, przy czym $ad - bc \neq 0$, taką funkcję wymierną nazywmy homografią. Wykresem funkcji homograficznej $R(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdy $c \neq 0$ jest hiperbola.

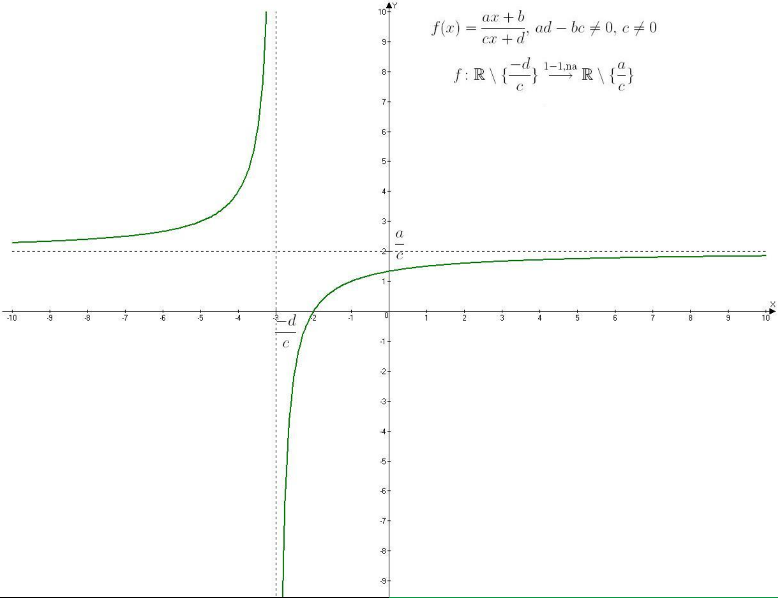
Niech $P, Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, będą wielomianami, $Q \neq 0$. Oznaczmy $Z = \{x \in R : \ Q(x) = 0\}$.
Funkcję $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ określoną dla $x \in \mathbb{R} \setminus Z$, nazywamy funkcją wymierną.
W szczególności, gdy P i Q są funkcjami liniowymi, tj. $P(x) = ax + b$, $Q(x) = cx + d$, przy czym $ad - bc \neq 0$, taką funkcję wymierną nazywmy homografią. Wykresem funkcji homograficznej $R(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdy $c \neq 0$ jest hiperbola.

Niech $P, Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, będą wielomianami, $Q \neq 0$. Oznaczmy $Z = \{x \in R : \ Q(x) = 0\}$.
Funkcję $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ określoną dla $x \in \mathbb{R} \setminus Z$, nazywamy funkcją wymierną.
W szczególności, gdy P i Q są funkcjami liniowymi, tj. $P(x) = ax + b$, $Q(x) = cx + d$, przy czym $ad - bc \neq 0$, taką funkcję wymierną nazywmy homografią. Wykresem funkcji homograficznej $R(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdy $c \neq 0$ jest hiperbola.

Funkcja homograficzna

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},\ ad - bc \neq 0,\ c \neq 0$$

$$f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{-d}{c}\} \xrightarrow{1-1,\text{na}} \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$$



Funkcje elementarne. Funkcja wykładnicza.

Definicja potęgi o wykładniku wymiernym.

Niech $a \in (0, \infty)$.

- $a^0 := 1$,
- $a^{n+1} := a^n \cdot a$, dla $n \in \mathbb{N}_0$,
- $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$, dla $n \in \mathbb{N}$,
- $a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}$, dla $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Własności

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $a^x : a^y = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

Funkcje elementarne. Funkcja wykładnicza.

Definicja potęgi o wykładniku wymiernym.

Niech $a \in (0, \infty)$.

- $a^0 := 1$,
- $a^{n+1} := a^n \cdot a$, dla $n \in \mathbb{N}_0$,
- $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$, dla $n \in \mathbb{N}$,
- $a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}$, dla $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Własności

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $a^x : a^y = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

Funkcje elementarne. Funkcja wykładnicza.

Definicja potęgi o wykładniku wymiernym.

Niech $a \in (0, \infty)$.

- $a^0 := 1$,
- $a^{n+1} := a^n \cdot a$, dla $n \in \mathbb{N}_0$,
- $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$, dla $n \in \mathbb{N}$,
- $a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}$, dla $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Własności

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $a^x : a^y = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

Definicja potęgi o wykładniku wymiernym.

Niech $a \in (0, \infty)$.

- $a^0 := 1$,
- $a^{n+1} := a^n \cdot a$, dla $n \in \mathbb{N}_0$,
- $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$, dla $n \in \mathbb{N}$,
- $a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}$, dla $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Własności

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $a^x : a^y = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

Funkcje elementarne. Funkcja wykładnicza.

Definicja potęgi o wykładniku wymiernym.

Niech $a \in (0, \infty)$.

- $a^0 := 1$,
- $a^{n+1} := a^n \cdot a$, dla $n \in \mathbb{N}_0$,
- $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$, dla $n \in \mathbb{N}$,
- $a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}$, dla $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Własności

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $a^x : a^y = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

Definicja potęgi o wykładniku wymiernym.

Niech $a \in (0, \infty)$.

- $a^0 := 1$,
- $a^{n+1} := a^n \cdot a$, dla $n \in \mathbb{N}_0$,
- $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$, dla $n \in \mathbb{N}$,
- $a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}$, dla $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Własności

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $a^x : a^y = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

Definicja potęgi o wykładniku wymiernym.

Niech $a \in (0, \infty)$.

- $a^0 := 1$,
- $a^{n+1} := a^n \cdot a$, dla $n \in \mathbb{N}_0$,
- $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$, dla $n \in \mathbb{N}$,
- $a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}$, dla $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Własności

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $a^x : a^y = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

Funkcja wykładnicza

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia równanie

$$f(x)f(y) = f(x+y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}$$

oraz $a := f(1) \neq 0$, to $f(r) = a^r$ dla $r \in \mathbb{Q}$.

Twierdzenie

- Dla dowolnego $a > 1$ istnieje dokładnie jedna funkcja rosnąca $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca równanie $f(x)f(y) = f(x+y)$ i taka, że $f_a(1) = a$.
- Dla dowolnego $a \in (0,1)$ istnieje dokładnie jedna funkcja malejąca $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca równanie $f(x)f(y) = f(x+y)$ i taka, że $f_a(1) = a$.

$a^x := f_a(x)$, dla $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$, $x \in \mathbb{R}$

Funkcja wykładnicza

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia równanie

$$f(x)f(y) = f(x+y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}$$

oraz $a := f(1) \neq 0$, to $f(r) = a^r$ dla $r \in \mathbb{Q}$.

Twierdzenie

- Dla dowolnego $a > 1$ istnieje dokładnie jedna funkcja rosnąca $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca równanie $f(x)f(y) = f(x+y)$ i taka, że $f_a(1) = a$.
- Dla dowolnego $a \in (0,1)$ istnieje dokładnie jedna funkcja malejąca $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca równanie $f(x)f(y) = f(x+y)$ i taka, że $f_a(1) = a$.

$a^x := f_a(x)$, dla $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$, $x \in \mathbb{R}$

Funkcja wykładnicza

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia równanie

$$f(x)f(y) = f(x+y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}$$

oraz $a := f(1) \neq 0$, to $f(r) = a^r$ dla $r \in \mathbb{Q}$.

Twierdzenie

- Dla dowolnego $a > 1$ istnieje dokładnie jedna funkcja rosnąca $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca równanie $f(x)f(y) = f(x+y)$ i taka, że $f_a(1) = a$.
- Dla dowolnego $a \in (0,1)$ istnieje dokładnie jedna funkcja malejąca $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca równanie $f(x)f(y) = f(x+y)$ i taka, że $f_a(1) = a$.

$a^x := f_a(x)$, dla $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$, $x \in \mathbb{R}$

Funkcja wykładnicza

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia równanie

$$f(x)f(y) = f(x+y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}$$

oraz $a := f(1) \neq 0$, to $f(r) = a^r$ dla $r \in \mathbb{Q}$.

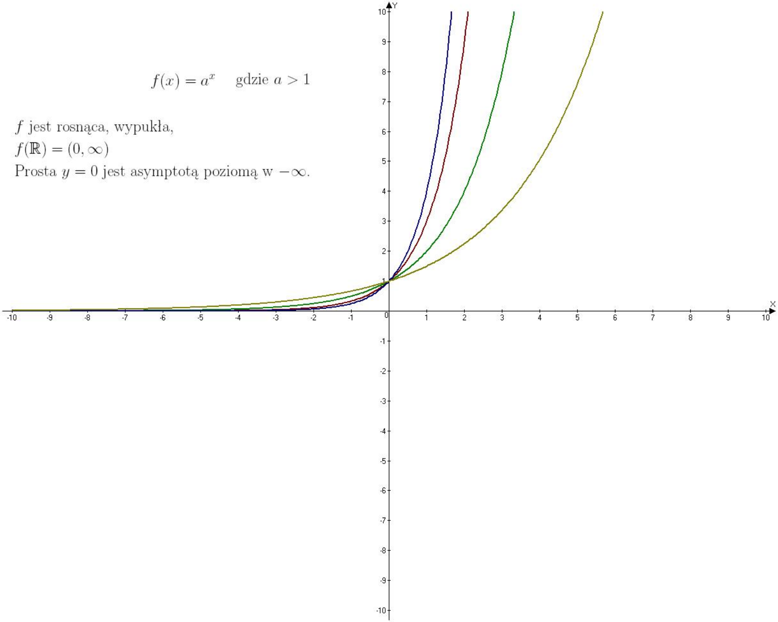
Twierdzenie

- Dla dowolnego $a > 1$ istnieje dokładnie jedna funkcja rosnąca $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca równanie $f(x)f(y) = f(x+y)$ i taka, że $f_a(1) = a$.
- Dla dowolnego $a \in (0,1)$ istnieje dokładnie jedna funkcja malejąca $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca równanie $f(x)f(y) = f(x+y)$ i taka, że $f_a(1) = a$.

$a^x := f_a(x)$, dla $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$, $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = a^x \quad \text{gdzie } a > 1$$

f jest rosnąca, wypukła,
$f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$
Prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą w $-\infty$.

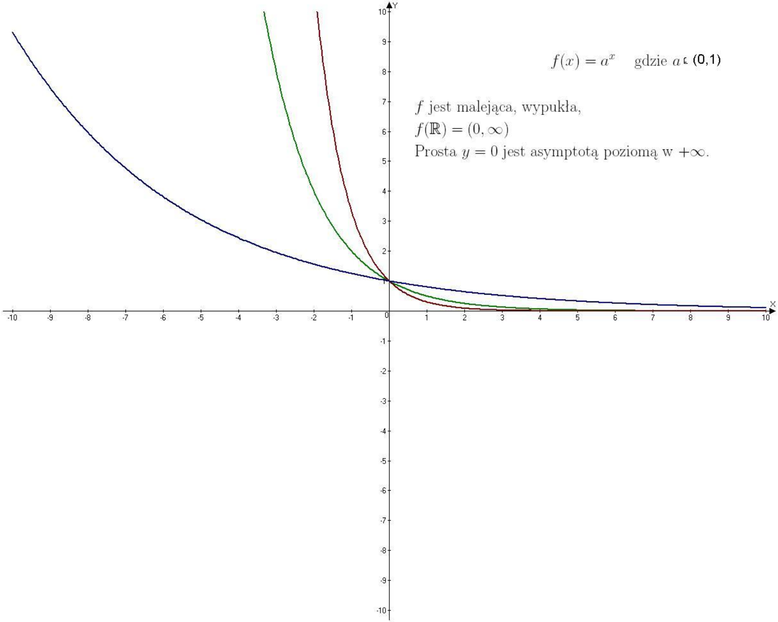


$f(x) = a^x$ gdzie $a \in (0,1)$

f jest malejąca, wypukła,

$f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$

Prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą w $+\infty$.



przypomnienie

Jeśli funkcja $f\colon X \to Y$ jest różnowartościowa, to funkcję $f^{-1}\colon f(X) \to X$ zdefiniowaną przez warunek

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

nazywamy funkcją odwrotną do funkcji f.

Funkcja logarytmiczna

Funkcję odwrotną do funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ nazywamy funkcją logarytmiczną o podstawie a i oznaczamy $\log_a$.
To znaczy

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y.$$

Bezpośrednio z definicji otrzymujemy też:

$$\log_a a^x = x, \text{ dla } x \in \mathbb{R}, \quad a^{\log_a x} = x, \text{ dla } x \in (0, \infty).$$

przypomnienie

Jeśli funkcja $f\colon X \to Y$ jest różnowartościowa, to funkcję $f^{-1}\colon f(X) \to X$ zdefiniowaną przez warunek

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

nazywamy funkcją odwrotną do funkcji f.

Funkcja logarytmiczna

Funkcję odwrotną do funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ nazywamy funkcją logarytmiczną o podstawie a i oznaczamy $\log_a$.
To znaczy

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y.$$

Bezpośrednio z definicji otrzymujemy też:

$$\log_a a^x = x, \text{ dla } x \in \mathbb{R}, \quad a^{\log_a x} = x, \text{ dla } x \in (0, \infty).$$

Funkcje elementarne. Funkcja logarytmiczna.

przypomnienie

Jeśli funkcja $f\colon X \to Y$ jest różnowartościowa, to funkcję $f^{-1}\colon f(X) \to X$ zdefiniowaną przez warunek

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

nazywamy funkcją odwrotną do funkcji f.

Funkcja logarytmiczna

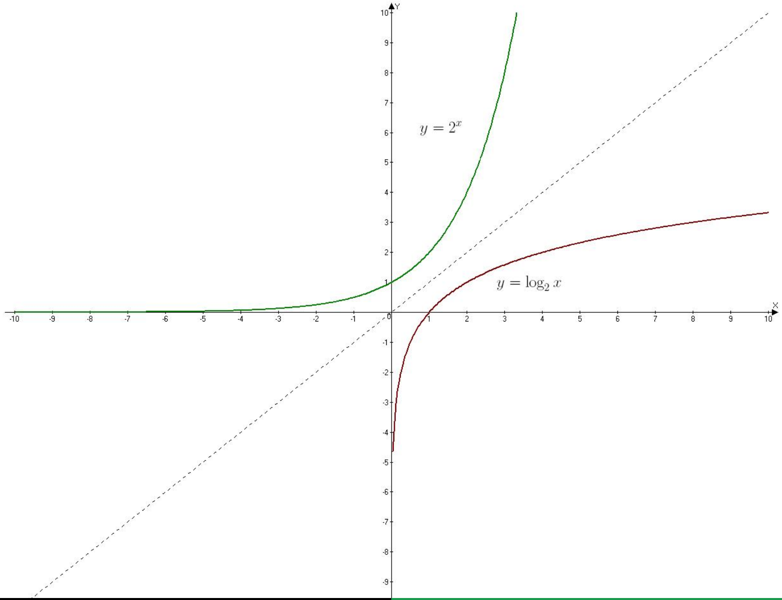
Funkcję odwrotną do funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ nazywamy funkcją logarytmiczną o podstawie a i oznaczamy $\log_a$.
To znaczy

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y.$$

Bezpośrednio z definicji otrzymujemy też:

$$\log_a a^x = x,\ \text{dla}\ x \in \mathbb{R}, \qquad a^{\log_a x} = x,\ \text{dla}\ x \in (0, \infty).$$

wykres funkcji logarytmicznej i wykładniczej



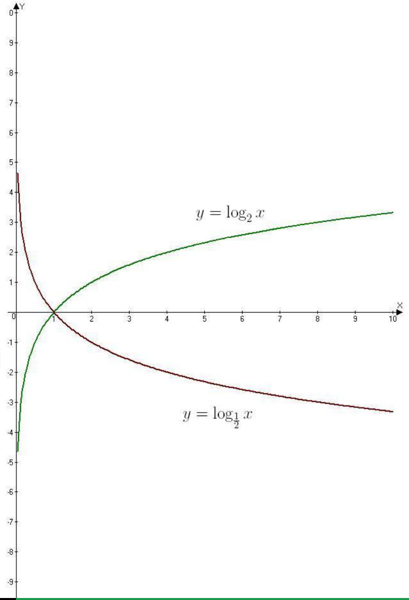
Własności funkcji logarytmicznej

$$f(x) = \log_a x$$

$$D_f = (0, \infty)$$

$$f(D_f) = \mathbb{R}$$

gdy $a > 0$: f jest rosnąca i wklęsła
gdy $a \in (0, 1)$: f jest malejąca i wypukła
prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową (prawostronną)



Oznaczenie: $\log x := \log_{10} x$, $\ln x := \log_e x$.

własności logarytmów

- $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$,
- $\log_a b - \log_a c = \log_a(b : c)$,
- $\log_a b^c = c \log_a b$,
- $\log_{a^b} c = \frac{1}{b} \log_a c$,
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$,
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Oznaczenie: $\log x := \log_{10} x$, $\ln x := \log_e x$.

własności logarytmów

- $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$,
- $\log_a b - \log_a c = \log_a(b : c)$,
- $\log_a b^c = c \log_a b$,
- $\log_{a^b} c = \frac{1}{b} \log_a c$,
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$,
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Oznaczenie: $\log x := \log_{10} x$, $\ln x := \log_e x$.

własności logarytmów

- $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$,
- $\log_a b - \log_a c = \log_a(b : c)$,
- $\log_a b^c = c \log_a b$,
- $\log_{a^b} c = \frac{1}{b} \log_a c$,
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$,
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Oznaczenie: $\log x := \log_{10} x$, $\ln x := \log_e x$.

własności logarytmów

- $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$,
- $\log_a b - \log_a c = \log_a(b : c)$,
- $\log_a b^c = c \log_a b$,
- $\log_{a^b} c = \frac{1}{b} \log_a c$,
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$,
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Oznaczenie: $\log x := \log_{10} x$, $\ln x := \log_e x$.

własności logarytmów

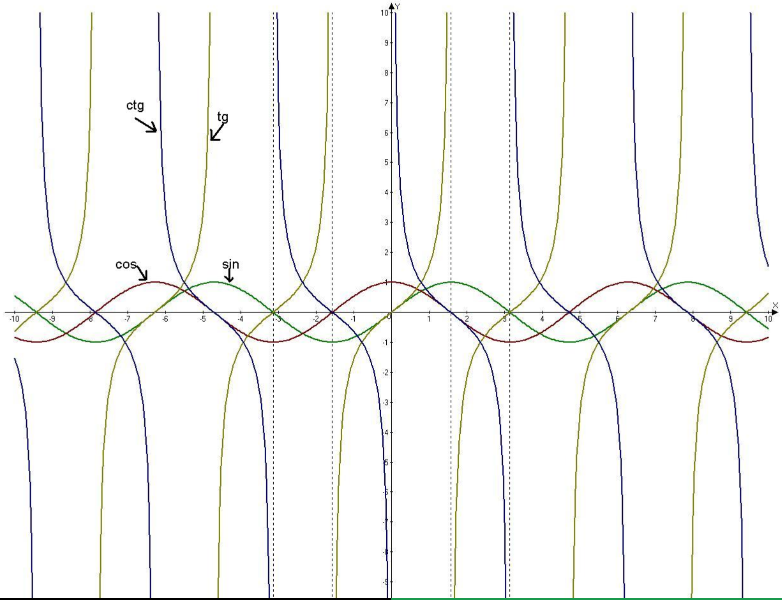
- $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$,
- $\log_a b - \log_a c = \log_a(b : c)$,
- $\log_a b^c = c \log_a b$,
- $\log_{a^b} c = \frac{1}{b} \log_a c$,
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$,
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Oznaczenie: $\log x := \log_{10} x$, $\ln x := \log_e x$.

własności logarytmów

- $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$,
- $\log_a b - \log_a c = \log_a (b : c)$,
- $\log_a b^c = c \log_a b$,
- $\log_{a^b} c = \frac{1}{b} \log_a c$,
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$,
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Funkcje elementarne. Funkcje trygonometryczne.



Definicja

$$\arcsin x := (\sin|_{[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})^{-1}(x)$$

$$\arccos x := (\cos|_{[0,\pi]})^{-1}(x)$$

$$\operatorname{arctg} x := (\operatorname{tg}|_{(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})})^{-1}(x)$$

$$\operatorname{arcctg} x := (\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)})^{-1}(x)$$

Funkcje elementarne. Funkcje cyklometryczne.

Definicja

$$\arcsin x := (\sin|_{[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})^{-1}(x)$$

$$\arccos x := (\cos|_{[0,\pi]})^{-1}(x)$$

$$\operatorname{arctg} x := (\operatorname{tg}|_{(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})})^{-1}(x)$$

$$\operatorname{arcctg} x := (\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)})^{-1}(x)$$

Definicja

$$\arcsin x := (\sin|_{[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})^{-1}(x)$$

$$\arccos x := (\cos|_{[0,\pi]})^{-1}(x)$$

$$\operatorname{arctg} x := (\operatorname{tg}|_{(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})})^{-1}(x)$$

$$\operatorname{arcctg} x := (\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)})^{-1}(x)$$

Definicja

$$\arcsin x := \left(\sin|_{[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}(x)$$

$$\arccos x := \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}(x)$$

$$\operatorname{arctg} x := \left(\operatorname{tg}|_{(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}(x)$$

$$\operatorname{arcctg} x := \left(\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}(x)$$

Definicja

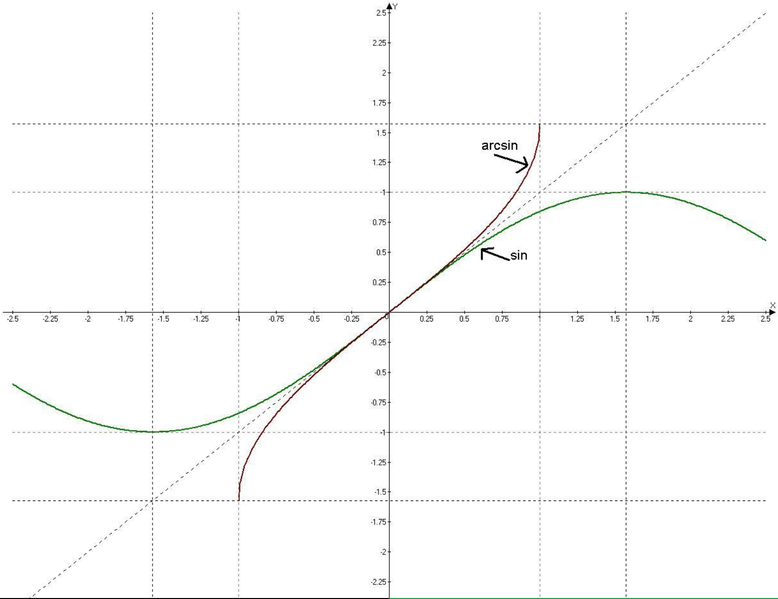
$$\arcsin x := \left(\sin|_{[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}(x)$$

$$\arccos x := \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}(x)$$

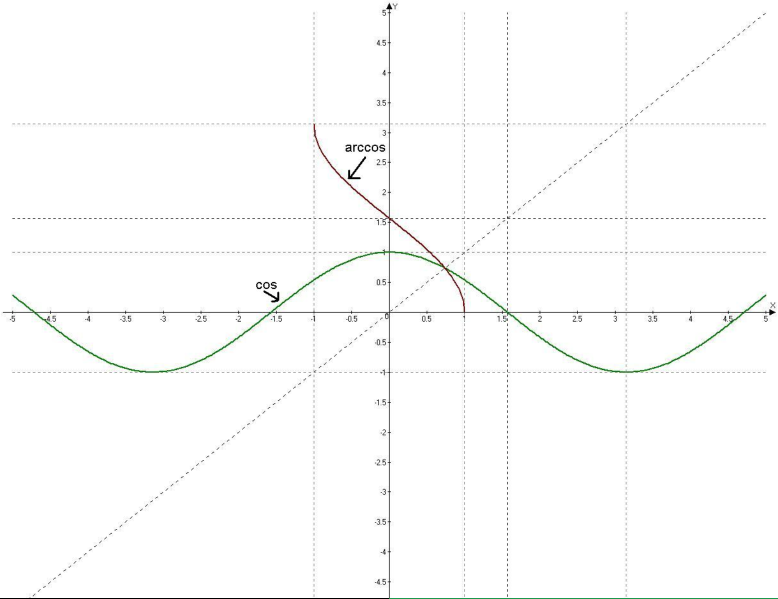
$$\operatorname{arctg} x := \left(\operatorname{tg}|_{(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}(x)$$

$$\operatorname{arcctg} x := \left(\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}(x)$$

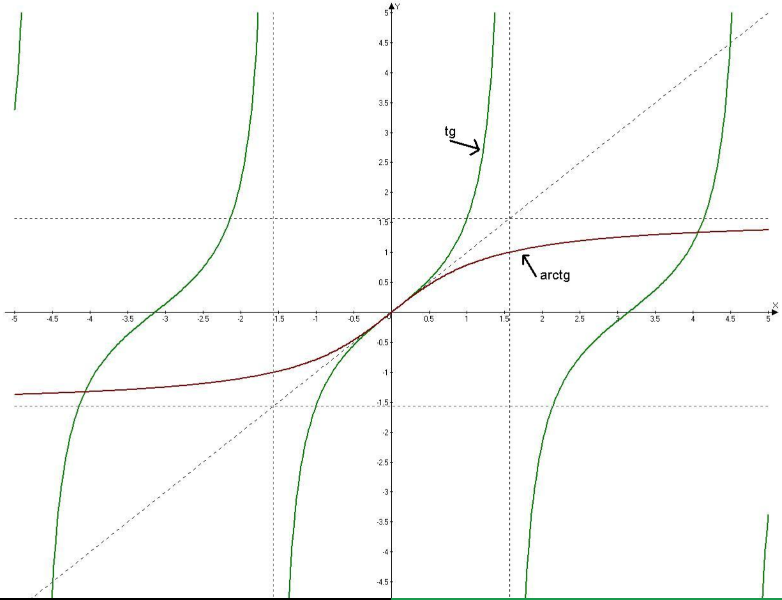
Funkcje cyklometryczne. Arcsin.



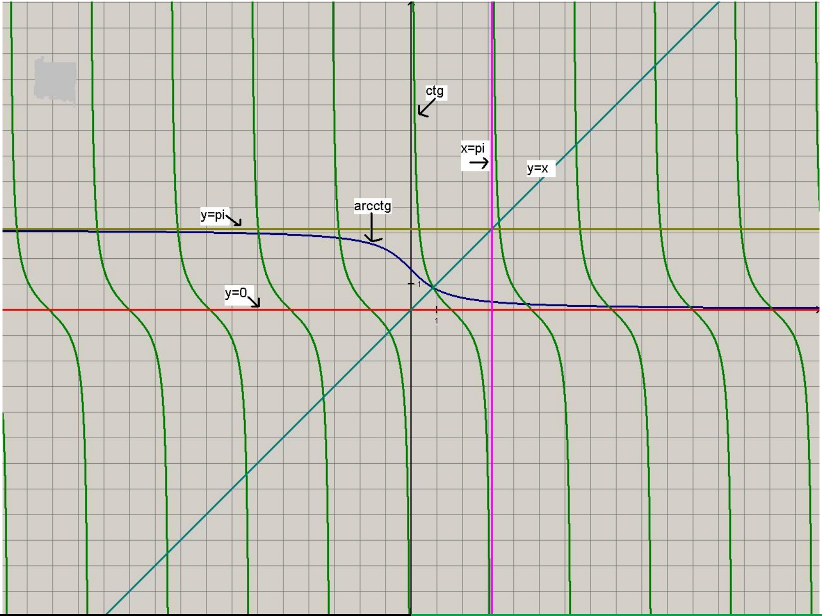
Funkcje cyklometryczne. Arccos.



Funkcje cyklometryczne. Arctg.



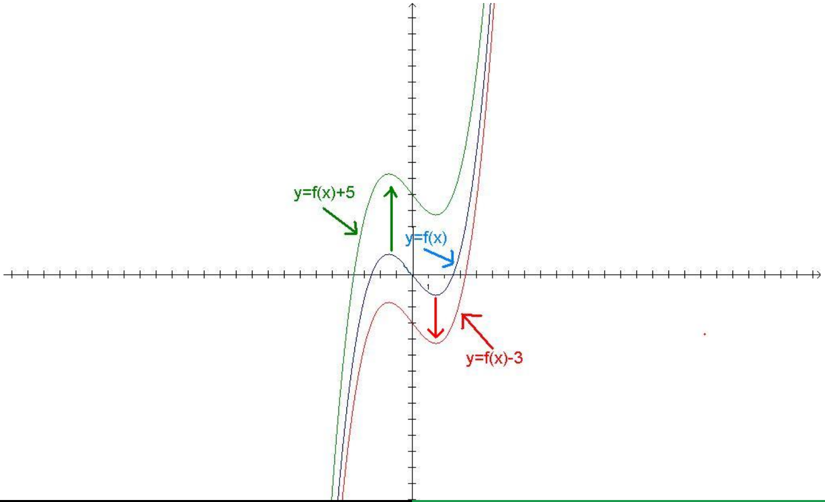
Funkcje cyklometryczne. Arcctg.



Przekształcenia wykresów funkcji

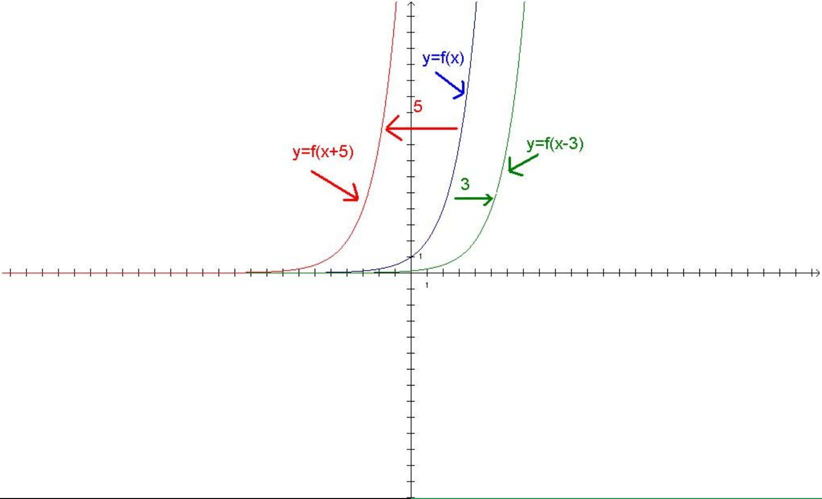
$g(x) = f(x) + b$

$(x, y) \in \mathbf{gr}f \Leftrightarrow (x, y + b) \in \mathbf{gr}g$



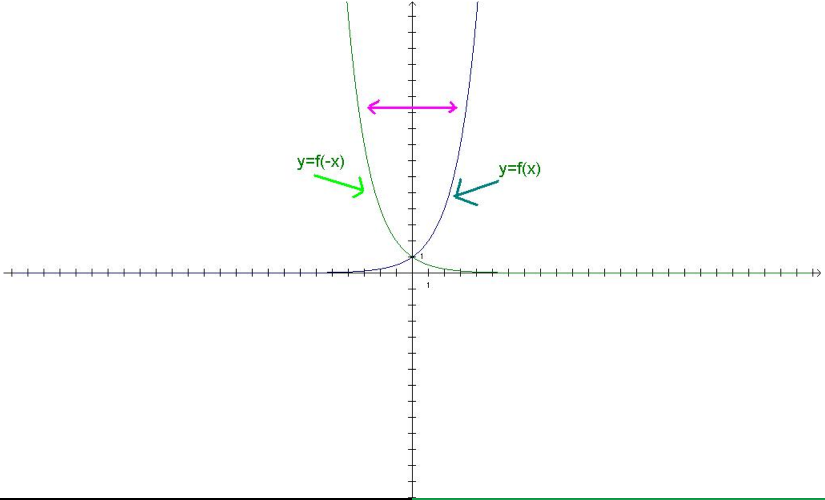
$g(x) = f(x - a)$

$(x, y) \in \mathbf{gr}f \Leftrightarrow (x + a, y) \in \mathbf{gr}g$



$g(x) = f(-x)$

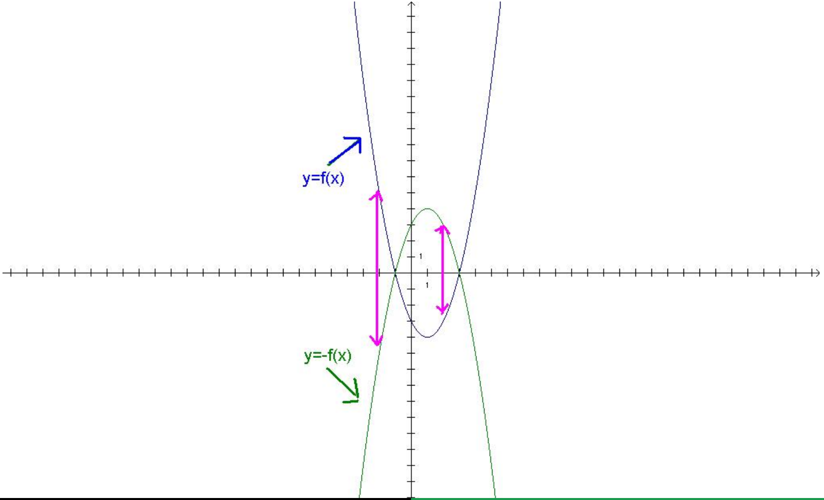
$(x, y) \in \mathbf{gr}f \Leftrightarrow (-x, y) \in \mathbf{gr}g$



Przekształcenia wykresów funkcji

$g(x) = -f(x)$

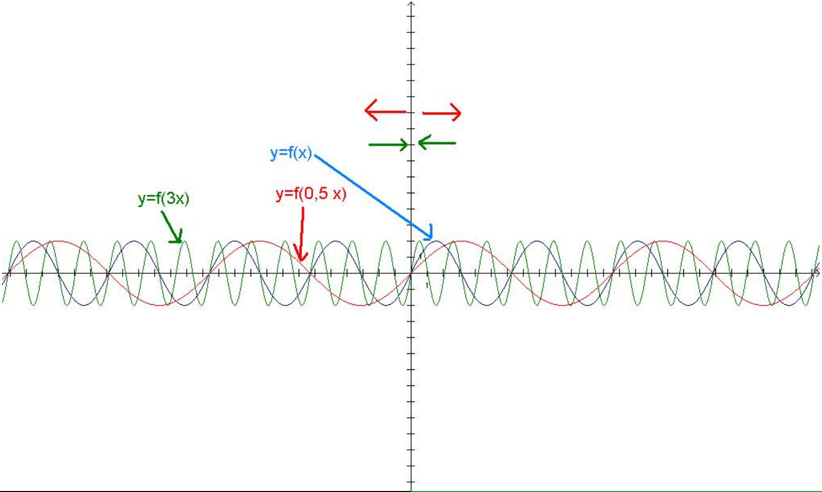
$(x, y) \in \mathbf{gr}f \Leftrightarrow (x, -y) \in \mathbf{gr}g$



Przekształcenia wykresów funkcji

$g(x) = f(kx)$

$(x, y) \in \mathbf{gr}f \Leftrightarrow (\frac{1}{k}x, y) \in \mathbf{gr}g$



Przekształcenia wykresów funkcji

$g(x) = kf(x)$

$(x, y) \in \mathbf{gr}f \Leftrightarrow (x, ky) \in \mathbf{gr}g$