1 Liczby zespolone

Ponieważ nie istnieje taka liczba rzeczywista x, dla której $x^2 = -1$, więc przyjmijmy oznaczenie $i^2 = -1$. (Innymi słowy, $i = \sqrt{-1}$.) Niech

$$\mathbb{C} = \{a + bi \colon a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Określmy w zbiorze $\mathbb{C}$ dodawanie $+$ i mnożenie $\cdot$ w następujący sposób:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

oraz

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Zbiór $\mathbb{C}$ z tak określonym dodawaniem i mnożeniem jest ciałem, które nazywamy ciałem liczb zespolonych.

Ponieważ

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i = (c + a) + (d + b)i = (c + di) + (a + bi)$$

oraz

$$\begin{aligned}((a + bi) + (c + di)) + (e + fi) &= (a + c) + (b + d)i + (e + fi) = \\ &= (a + c + e) + (b + d + f)i = (a + bi) + (c + e) + (d + f)i \\ &= (a + bi) + ((c + di) + (e + fi)),\end{aligned}$$

więc w zbiorze $\mathbb{C}$ dodawanie jest przemienne i łączne.

$0 = 0 + 0i$ jest elementem neutralnym dodawania, a element $-(a + bi) = -a - bi$ jest elementem przeciwnym do $a + bi$.

Ponieważ

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i = \\ &= (ca - db) + (da + cb)i = (c + di)(a + bi)\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}((a + bi)(c + di))(e + fi) &= ((ac - bd) + (ad + bc)i)(e + fi) = \\ &= (ace - bde - adf - bcf) + (acf - bdf + ade + bce)i = \\ &= a(ce - df) - b(de + cf) + a(de + cf)i + b(ce - df)i = \\ = (a + bi)(ce - df) + (ai - b)(cf + de) &= (a + bi)(ce - df) + (a + bi)(cf + de)i = \\ &= (a + bi)((ce - df) + (cf + de)i) = (a + bi)((c + di)(e + fi)),\end{aligned}$$

więc w zbiorze $\mathbb{C}$ mnożenie jest przemienne i łączne.

$1 = 1 + 0i$ jest elementem neutralnym mnożenia.

Załóżmy teraz, że $z = a + bi \neq 0$. Aby wyznaczyć element odwrotny do z, należy znaleźć takie liczby rzeczywiste c, d, że

$$(a + bi)(c + di) = 1.$$

Powyższe równanie możemy zapisać w równoważnej postaci

$$(ac - bd) + (ad + bc)i = 1 + 0i,$$

a następnie rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} ac - bd = 1 \\ ad + bc = 0. \end{cases}$$

Mnożąc pierwsze równanie układu przez a, a drugie - przez b, otrzymamy

$$\begin{cases} a^2c - abd = a \\ abd + b^2c = 0. \end{cases}$$

Stąd, po dodaniu stronami,

$$(a^2 + b^2)c = a$$

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Mnożąc teraz pierwsze równanie wyjściowego układu przez $-b$, a drugie - przez a, otrzymamy

$$\begin{cases} -abc + b^2d & = -b \\ a^2d + abc & = 0. \end{cases}$$

Stąd, po dodaniu stronami,

$$(a^2 + b^2)d = -b$$

$$d = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

W rezultacie, elementem odwrotnym do $z = a + bi$ jest

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Ponadto,

$$(a + bi)((c + di) + (e + fi)) = (a + bi)((c + e) + (d + f)i) =$$
$$= ac + ae - bd - bf + bci + bei + adi + afi =$$
$$= (ac - bd) + (ad + bc)i + (ae - bf) + (af + be)i =$$
$$= (a + bi)(c + di) + (a + bi)(e + fi).$$

W ten sposób wykazaliśmy, że w zbiorze $\mathbb{C}$ zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania.

Jeżeli $z = a + bi$ jest liczbą zespoloną, to a nazywamy częścią rzeczywistą liczby z i oznaczamy Rez, a b nazywamy częścią urojoną liczby z i oznaczamy Imz.

Definicja 1 *Definicja Niech $z = a + bi$ będzie liczbą zespoloną. Liczbę $\overline{z} = a - bi$ nazywamy liczbą sprzężoną z liczbą z.*

Z definicji sprzężenia otrzymujemy następujące własności:

- $\overline{\overline{z}} = z$,
- $\overline{z} = z \ \Leftrightarrow\ z \in \mathbb{R}$,
- $a = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $b = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$,
- $z\overline{z} = a^2 + b^2$.

Ponadto, dla dowolnych liczb zespolonych z, t

- $\overline{z \pm t} = \overline{z} \pm \overline{t}$,
- $\overline{zt} = \overline{z}\overline{t}$,
- $\overline{\frac{z}{t}} = \frac{\overline{z}}{\overline{t}}$ dla $t \neq 0$.

Definicja 2 *Niech $z = a + bi$ będzie liczbą zespoloną. Liczbę rzeczywistą $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nazywamy modułem liczby zespolonej z.*

Z definicji modułu i własności sprzężenia otrzymujemy:

- $|z| = |-z| = |\overline{z}|$,
- $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$,
- $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| \geq 0$,
- $|z| = 0 \ \Leftrightarrow\ z = 0$.

Stwierdzenie 1 *Jeżeli z i t są liczbami zespolonymi, to*

- $|zt| = |z| \cdot |t|$,
- $\left|\frac{z}{t}\right| = \frac{|z|}{|t|}$ *dla* $t \neq 0$.

Dowód. Niech $z, t \in \mathbb{C}$. Wtedy

$$|zt| = \sqrt{zt\overline{z}\overline{t}} = \sqrt{(z\overline{z})(t\overline{t})} =$$

$$= \sqrt{z\overline{z}} \cdot \sqrt{t\overline{t}} = |z| \cdot |t|.$$

Podobnie wykazujemy, że moduł ilorazu liczb zespolonych jest równy ilorazowi ich modułów. □

Uwaga
Korzystając z zasady indukcji, można wykazać, że $|z^n| = |z|^n$ dla dowolnej liczby zespolonej z i dla dowolnej liczby całkowitej n. (Jeżeli $n < 0$, to zakładamy $z \neq 0$.)

Twierdzenie 1 *Niech $z, t \in \mathbb{C}$. Wtedy*

$$||z| - |t|| \leq |z + t| \leq |z| + |t|.$$

Dowód. Jeżeli $|z + t| = 0$, to oczywiście $|z + t| \leq |z| + |t|$. Załóżmy, że $z + t \neq 0$ i oznaczmy przez a część rzeczywistą liczby $\frac{z}{z+t}$, a przez a' - część rzeczywistą liczby $\frac{t}{z+t}$. Wtedy

$$a \leq \left|\frac{z}{z+t}\right| = \frac{|z|}{|z+t|}$$

oraz

$$a' \leq \left|\frac{t}{z+t}\right| = \frac{|t|}{|z+t|}.$$

Dodając obie nierówności stronami, otrzymamy

$$a + a' \leq \frac{|z| + |t|}{|z+t|}.$$

Zauważmy, że liczba $a + a'$ jest częścią rzeczywistą liczby $\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t}$ oraz $\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t} = 1$. Stąd $a + a' = 1$. W rezultacie

$$1 \leq \frac{|z| + |t|}{|z+t|}$$

$$|z + t| \leq |z| + |t|.$$

Aby udowodnić drugą nierówność zauważmy, że $z = (z - t) + t$. Korzystając z udowodnionej już części twierdzenia, otrzymujemy

$$|z| \leq |z - t| + |t|$$

i stąd

$$|z| - |t| \leq |z - t|.$$

Powtarzając rozumowanie dla liczby $t = (t - z) + z$, otrzymamy

$$|t| - |z| \leq |t - z| = |z - t|.$$

Ponieważ liczba $|z| - |t|$ jest rzeczywista, więc jej moduł albo jest równy jej samej, albo jest równy $|t| - |z|$. W obu przypadkach jest on nie większy niż $|z + t|$. $\square$

2 Interpretacja geometryczna

Rozpatrzmy na płaszczyźnie euklidesowej prostokątny układ współrzędnych o początku w punkcie O. Wtedy punkt o współrzędnych (a, b) możemy utożsamiać z liczbą zespoloną $z = a + bi$.

Łatwo zauważyć, że dodawanie i odejmowanie liczb zespolonych z, t odpowiada dodawaniu i odejmowaniu wektorów $\vec{Oz}$ i $\vec{Ot}$.

Sprzężenie liczby zespolonej odpowiada symetrycznemu odbiciu względem osi Ox. Natomiast moduł liczby zespolonej z, to odległość punktu z od początku układu współrzędnych. Odległość dwóch punktów z i t jest równa $|z - t|$.

Tożsamość równoległoboku

Dla dowolnych liczb zespolonych z i t

$$|z + t|^2 + |z - t|^2 = 2(|z|^2 + |t|^2).$$

3 Postać trygonometryczna

Niech $z = a + bi$ będzie liczbą zespoloną i niech φ będzie kątem (podanym w mierze łukowej) pomiędzy osią Ox a wektorem $\vec{Oz}$. Wtedy

$$\frac{a}{|z|} = \cos\varphi \quad \text{oraz} \quad \frac{b}{|z|} = \sin\varphi.$$

Stąd

$$a = |z|\cos\varphi \quad \text{oraz} \quad b = |z|\sin\varphi.$$

W rezultacie

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \text{(Postać trygonometryczna liczby zespolonej } z.\text{)}$$

Kąt φ nie jest wyznaczony jednoznacznie, ponieważ jeżeli kąt φ zastąpimy przez $\varphi+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, to otrzymamy tę samą postać trygonometryczną liczby z.

Definicja 3 *Definicja Kąt φ pomiędzy osią Ox a wektorem $\vec{Oz}$ nazywamy argumentem liczby z. (Czasami oznaczamy argz.)*

Zauważmy, że jeżeli φ jest argumentem liczby z, to $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, jest także argumentem liczby z.

Twierdzenie 2 *Twierdzenie Niech $z \neq 0$, $t \neq 0$ będą liczbami zespolonymi, niech φ będzie argumentem liczby z i niech θ będzie argumentem liczby t. Wtedy $\varphi + \theta$ jest argumentem liczby $z \cdot t$, a $\varphi - \theta$ - argumentem liczby $\frac{z}{t}$.*

Dowód. Z założeń wynika, że

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

oraz

$$t = |t|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Korzystając ze znanych tożsamości trygonometrycznych, otrzymujemy

$$z \cdot t = |z| \cdot |t|(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\theta + i\sin\theta) =$$

$$= |z| \cdot |t|((\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta)+$$

$$+i(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta)) =$$

$$= |z| \cdot |t|(\cos(\varphi + \theta) + i\sin(\varphi + \theta)) =$$

$$= |z \cdot t|(\cos(\varphi + \theta) + i\sin(\varphi + \theta)).$$

Załóżmy teraz, że

$$\frac{z}{t} = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

gdzie $r = \frac{|z|}{|t|}$. Wtedy
$$z = t \cdot r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$
Na mocy udowodnionej części twierdzenia, liczba $\theta + \alpha$ jest argumentem liczby z. Ponieważ jednym z argumentów liczby z jest φ, więc $\varphi - (\theta + \alpha) = 2k\pi$ dla pewnej liczby całkowitej k. Stąd wynika, że $\alpha = \varphi - \theta - 2k\pi$ jest jednym z argumentów ilorazu $\frac{z}{t}$. Wtedy liczba $\varphi - \theta$ jest również argumentem ilorazu $\frac{z}{t}$. □

Uwaga
Jeżeli $z_1, \ldots, z_k$ są niezerowymi liczbami zespolonymi o argumentach $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, odpowiednio, to $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ jest argumentem iloczynu $z_1 \cdot \cdots \cdot z_k$. Ponadto, jeżeli z jest niezerową liczbą zespoloną o argumencie α, to $k\alpha$ jest argumentem liczby z^k dla dowolnej liczby całkowitej k.

W szczególności zachodzi
Wzór de Moivre'a
$$(|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Zauważmy, że ze wzoru Eulera
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$
wynika, że liczbę zespoloną z o argumencie φ możemy zapisać w postaci
$$z = |z|e^{i\varphi}.$$
Ponadto,
$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\theta} = e^{i(\varphi+\theta)}$$
oraz
$$\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\theta}} = e^{i(\varphi-\theta)}.$$

4 Pierwiastkowanie

Niech dana będzie niezerowa liczba zespolona $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Wyznaczmy taką liczbę $t = |t|(\cos\theta + i\sin\theta)$, że $t^n = z$. Korzystając ze wzoru de Moivre'a, a następnie porównując moduły i argumenty po obu stronach równości $t^n = z$, otrzymujemy $|t|^n = |z|$ i $n\theta = \varphi + 2k\pi$. W konsekwencji
$$|t| = \sqrt[n]{|z|} \quad \text{oraz} \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$
Oznacza to, że $\sqrt[n]{z}$ istnieje, ale nie jest wyznaczony jednoznacznie. Ponieważ dla $k = nq + r$, gdzie $0 \leq r \leq n-1$ mamy
$$\theta = \frac{\varphi + 2r\pi}{n} + 2\pi q,$$
więc wszystkie pierwiastki stopnia n z liczby z otrzymamy biorąc $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Twierdzenie 3 *Twierdzenie Dla każdej liczby zespolonej* $z = |z|(cos\varphi + isin\varphi)$ *istnieje pierwiastek* n*-tego stopnia,* $n \in \mathbb{N}$*, z liczby* z*. Jeżeli* $z \neq 0$*, to pierwiastki* n*-tego stopnia z liczby* z *są wierzchołkami* n*-kąta foremnego wpisanego w okrąg o środku w zerze i promieniu* $\sqrt[n]{|z|}$*:*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + isin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

5 Zasadnicze twierdzenie algebry

Definicja 4 *Definicja Ciało* $\mathbb{F}$ *nazywamy algebraicznie domkniętym, jeżeli każdy wielomian dodatniego stopnia o współczynnikach z ciała* $\mathbb{F}$ *rozkłada się nad ciałem* $\mathbb{F}$ *na czynniki liniowe.*

Uwaga
Jeżeli każdy wielomian dodatniego stopnia nad ciałem $\mathbb{F}$ ma w ciele $\mathbb{F}$ co najmniej jeden pierwiastek, to ciało $\mathbb{F}$ jest algebraicznie domknięte.

Istotnie, załóżmy, że każdy wielomian dodatniego stopnia nad ciałem $\mathbb{F}$ ma w ciele $\mathbb{F}$ co najmniej jeden pierwiastek. Niech f będzie wielomianem dodatniego stopnia nad ciałem $\mathbb{F}$. Wtedy $f(x) = (x-a)h(x)$, gdzie h jest wielomianem nad ciałem $\mathbb{F}$ i $a \in \mathbb{F}$. Jeżeli wielomian h jest dodatniego stopnia, to h ma również co najmniej jeden pierwiastek w ciele $\mathbb{F}$, tzn. $h(x) = (x-b)g(x)$, gdzie g jest wielomianem nad ciałem $\mathbb{F}$ i $b \in \mathbb{F}$. Kontynuując tę procedurę, otrzymamy rozkład wielomianu f na czynniki liniowe.

Twierdzenie 4 *Zasadnicze twierdzenie algebry Ciało liczb zespolonych* $\mathbb{C}$ *jest algebraicznie domknięte.*

Innymi słowy: Dowolny wielomian stopnia $n \geq 1$ o współczynnikach zespolonych ma dokładnie n pierwiastków zespolonych (liczonych z uwzględnieniem krotności).

Wniosek 1 *Wniosek Jeżeli* $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$*,* $a_n \neq 0$*,* $n \geq 1$*, jest wielomianem o współczynnikach zespolonych, to istnieją takie liczby zespolone* $z_1, \ldots, z_n$*, że*

$$f(x) = a_n(x - z_1) \cdot \ldots \cdot (x - z_n).$$

Wniosek 2 *Wniosek Jeżeli* $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$*,* $a_n \neq 0$*,* $n \geq 1$*, jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, to*

$$f(x) = a_nf_1(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x),$$

gdzie każdy z wielomianów $f_1, \ldots, f_n$ *ma jedną z dwu postaci:*

- $x - a$, $a \in \mathbb{R}$,
- $x^2 + px + q$, $\Delta = p^2 - 4q < 0$, $p, q \in \mathbb{R}$.

Definicja 5 *Definicja Niech f będzie niezerowym wielomianem o współczynnikach wymiernych. Liczbę zespoloną nazywamy liczbą algebraiczną, jeżeli jest ona pierwiastkiem wielomianu f.*

Zbiór wszystkich liczb algebraicznych jest podciałem ciała liczb zespolonych.

Definicja 6 *Definicja Liczbę zespoloną, która nie jest liczbą algebraiczną nazywamy liczbą przestępną.*