1 Przestrzenie liniowe

Definicja 1 *Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ i niech V będzie zbiorem niepustym, w którym określone jest działanie dodawania $+$ i operacja mnożenia przez elementy z ciała $\mathbb{K}$. Zbiór V nazywamy przestrzenia liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, jeżeli dla dowolnych $x, y, z \in V$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:*

- $x + y = y + x$;
- $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- $\exists \mathbf{0} \in V \quad \forall x \in V \quad x + \mathbf{0} = x$;
- $\forall x \in V \quad \exists u \in V \quad x + u = 0$;
- $\mathbf{1} \cdot x = x$;
- $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Elementy zbioru V nazywamy wektorami, a elementy ciała $\mathbb{K}$ - skalarami. Na ogół wektory oznaczamy małymi rzymskimi literami, a skalary - małymi literami alfabetu greckiego. O zbiorze V zamiast przestrzeń liniowa mówimy również przestrzeń wektorowa.

Przykłady:

- Niech $\mathbb{K}$ będzie podciałem ciała $\mathbb{F}$. Wtedy ciało $\mathbb{F}$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$. W szczególności ciało $\mathbb{K}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{K}$. Np. ciało $\mathbb{R}$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{Q}$, a także nad ciałem $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$; ciało liczb zespolonych $\mathbb{C}$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$.

- Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem, niech $n \in \mathbb{N}$ i niech $\mathbb{K}^n$ będzie zbiorem ciągów postaci $(x_1, \ldots, x_n)$, gdzie $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}^n$. Określmy w zbiorze $\mathbb{K}^n$ dodawanie i mnożenie przez skalary w następujący sposób:

$$x + y = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\alpha x = \alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

  dla $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ i $\alpha \in \mathbb{K}$. Wtedy zbiór $\mathbb{K}^n$ z tak określonymi działaniami jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$.

- Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem, niech $x \in \mathbb{K}$ i niech $V = \{x\}$. Określmy w zbiorze V operacje dodawania i mnożenia przez skalary wzorami: $x + x = x$, $\alpha x = x$ dla $\alpha in \mathbb{K}$. Wtedy zbiór V jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$. Przestrzeń ta zawiera tylko jeden wektor (wektor zerowy). Przestrzenie o tej własności nazywamy przestrzeniami zerowymi.

- Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem, niech X będzie zbiorem niepustym i niech $\mathbb{K}^X$ oznacza zbiór wszystkich funkcji działających ze zbioru X w ciało $\mathbb{K}$. Określmy w zbiorze $\mathbb{K}^X$ operacje dodawania i mnożenia przez skalary w następujący sposób:

$$(f+g)(x) = (f(x) + g(x),$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

dla $f, g \in \mathbb{K}^X$ i $\alpha \in \mathbb{K}$. Wtedy zbiór $\mathbb{K}^n$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$.

Zauważmy, że dla każdego wektora x przestrzeni liniowej V istnieje dokładnie jeden taki wektor u, że $x + u = 0$. Istotnie, przypuśćmy, że $x + u_1 = x + u_2 = 0$ dla $x, u_1, u_2 \in V$. Wtedy

$$u_2 = u_2 + 0 = u_2 + x + u_1 = u_1 + x + u_2 = u_1 + 0 = u_1.$$

Jedyny wektor u spełniający równanie $x + u = 0$ oznaczamy symbolem $-x$ i nazywamy wektorem przeciwnym do wektora x.

Twierdzenie 1 *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech $x, y \in V$. Wtedy istnieje jedyny taki wektor $z \in V$, że $x + z = y$. W szczególności, jeżeli dla $x \in V$ zachodzi równość $x + z = x$, to $z = 0$.*

Łatwo wykazać, że wektor z, o którym mowa w twierdzeniu ma postać $z = y + (-x)$. Dalej dla wektorów $x, y \in V$ wektor $x + (-y)$ będziemy nazywać różnicą wektorów x i y i oznaczać $x - y$. Działanie $-$ będziemy nazywać odejmowaniem wektorów.

Twierdzenie 2 *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, niech $x \in V$ i niech $\alpha \in \mathbb{K}$. Wtedy $\alpha x = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = 0$ lub $x = 0$.*

Dowód. Ponieważ

$$\alpha 0 + \alpha 0 = \alpha(0 + 0) = \alpha 0,$$

więc $\alpha 0 = 0$ dla każdego elementu $\alpha \in \mathbb{K}$.

Zauważmy, że dla dowolnego wektora $x \in V$ mamy

$$x + 0 \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = (1 + 0)x = 1 \cdot x = x,$$

co oznacza, że $0 \cdot x = 0$.

Załóżmy teraz, że $\alpha x = 0$ i $\alpha \neq 0$. Mnożąc równość $\alpha x = 0$ przez element α^{-1}, otrzymamy

$$\alpha^{-1}(\alpha x) = \alpha^{-1} 0 = 0.$$

Ponadto,

$$\alpha^{-1}(\alpha x) = (\alpha^{-1}\alpha)x = 1 \cdot x = x.$$

Stąd $x = 0$. □

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, niech $x, y, z \in V$ i niech $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Wtedy

- $x - (y + z) = (x - y) - z$;

- $x - (y - z) = (x - y) + z$;
- $-(x + y) = (-x) - y = (-x) + (-y)$;
- $-(x - y) = (-x) + y$;
- $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$;
- $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$;
- $\alpha(-x) = -\alpha x = (-\alpha)x$;
- $(-\alpha)(-x) = \alpha x$.

Definicja 2 *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$. Niepusty podzbiór W przestrzeni V nazywamy podprzestrzenią liniową przestrzeni V (ozn. $W < V$), jeżeli:*

- $\forall x, y \in W \quad x + y \in W$;
- $x \in W$ *i* $\alpha \in \mathbb{K} \ \Rightarrow \ \alpha x \in W$.

Przykład

Niech $P(\mathbb{K})$ będzie zbiorem wszystkich funkcji $f \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, które mają przedstawienie wielomianowe, tzn.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

gdzie $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Wtedy $P(\mathbb{K}) < \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$.

Uwaga

Jeżeli W jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{K}$, to W jest przestrzenią liniową.

Każda przestrzeń liniowa V zawiera co najmniej dwie podprzestrzenie: zbiór V (podprzestrzeń liniowa niewłaściwa) i zbiór $\{0\}$ zawierający tylko wektor zerowy (podprzestrzeń liniowa zerowa).

Definicja 3 *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, niech $m \in \mathbb{N}$ i niech $x_1, \ldots, x_m \in V$. Kombinacją liniową wektorów $x_1, \ldots, x_m$ nazywamy każdy wektor postaci*

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m,$$

gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$.

Definicja 4 *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech M będzie podzbiorem zbioru V. Podprzestrzeń liniową przestrzeni V złożoną ze wszystkich kombinacji liniowych wektorów zbioru M nazywamy podprzestrzenią liniową rozpiętą na zbiorze M lub powłoką liniową zbioru M. (ozn. $\langle M \rangle$ lub $\mathrm{lin} M$)*

Np. $P(\mathbb{K}) = \mathrm{lin}\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$.

Definicja 5 *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech M będzie podzbiorem zbioru V. Wektory zbioru M nazywamy liniowo niezależnymi, jeżeli dla każdego układu $x_1, \ldots, x_m \in M$*

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m \;\Rightarrow\; \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_m = \beta_m.$$

Wektory, które nie są liniowo niezależne nazywamy liniowo zależnymi.

Innymi słowy, przedstawienie każdego wektora $x \in \mathrm{lin}M$, $x \neq 0$, w postaci kombinacji liniowej elementów zbioru M

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m,$$

gdzie $\alpha_i \neq 0$, dla każdego $i = 1, \ldots, m$, jest jedyne.

Twierdzenie 3 *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech M będzie podzbiorem zbioru V. Wektory zbioru M są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall x_1, \ldots, x_m \in M \quad \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0.$$

Dowód.
($\Rightarrow$) Ponieważ

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = 0 = 0x_1 + \cdots + 0x_m,$$

więc, na mocy liniowej niezależności wektorów $x_1, \ldots, x_m$, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$.
($\Leftarrow$) Załóżmy, że

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m.$$

Wtedy

$$(\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \cdots + (\alpha_m - \beta_m)x_m = 0.$$

Na mocy założenia

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \ldots, \alpha_m - \beta_m = 0.$$

Stąd

$$\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_m = \beta_m.$$

□

Twierdzenie 4 *Zbiór wektorów $x_1, \ldots, x_m$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych.*

Dowód. Wektory $x_1, \ldots, x_m$ są liniowo zależne, jeżeli istnieją takie skalary $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, nie wszystkie równe zeru, że

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = 0.$$

Zmieniając numerację, jeśli to konieczne, możemy założyć, że $\alpha_1 \neq 0$. Wtedy mnożąc obustronnie powyższe równanie przez element $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}$, otrzymujemy

$$x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}x_2 + \cdots + \frac{\alpha_m}{\alpha_1}x_m = 0.$$

Stąd

$$x_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)x_2 + \cdots + \left(-\frac{\alpha_m}{\alpha_1}\right)x_m,$$

tzn. wektor x_1 jest kombinacją liniową pozostałych wektorów.

Załóżmy teraz, że pewien wektor x_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, jest kombinacją liniową pozostałych wektorów. Bez straty ogólności możemy założyć, że to wektor x_1 jest kombinacją liniową pozostałych wektorów. Wtedy istnieją takie skalary $\beta_2, \ldots, \beta_m$, że

$$x_1 = \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_m x_m.$$

Stąd

$$1 \cdot x_1 + (-\beta_2)x_2 + \cdots + (-\beta_m)x_m = 0.$$

Ponieważ współczynnik przy wektorze x_1 jest różny od 0, więc zbiór wektorów $x_1, \ldots, x_m$ jest liniowo zależny. $\square$

Uwaga

Każdy podzbiór skończonego zbioru liniowo niezależnego jest liniowo niezależny. Każdy skończony zbiór wektorów zawierający podzbiór liniowo zależny jest też liniowo zależny.

Definicja 6 *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$. Podzbiór $M \subseteq V$ nazywamy bazą przestrzeni V, jeżeli*

- *wektory zbioru M są liniowo niezależne;*
- *jeżeli $M \subsetneq M' \subseteq V$, to wektory zbioru M' są liniowo zależne.*

Innymi słowy, maksymalny (w sensie inkluzji) zbiór wektorów liniowo niezależnych przestrzeni V jest bazą przestrzeni V.

Twierdzenie 5 *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech $M \subseteq V$. Zbiór M jest bazą przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy wektory zbioru M są liniowo niezależne i $linM = V$.*

Dowód.

($\Rightarrow$) Niech $y_1, \ldots, y_s \in M$. Załóżmy, że istnieje wektor $x \in V \setminus \mathrm{lin}M$ i

$$\alpha_0 x + \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_s y_s = 0.$$

Gdyby $\alpha_0 \neq 0$, to mielibyśmy

$$x = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)y_1 + \cdots + \left(-\frac{\alpha_s}{\alpha_0}\right)y_s,$$

co oznaczałoby, że $x \in \text{lin}M$, wbrew założeniu. W rezultacie $\alpha_0 = 0$. Wtedy

$$\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_s y_s = 0.$$

Ponieważ wektory zbioru M są liniowo niezależne, więc $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0$. W konsekwencji wektory zbioru $M \cup \{x\}$ są liniowo niezależne, co jest sprzeczne z definicją bazy.

($\Leftarrow$) Niech $M \nsubseteq M' \subseteq V$, niech $x \in M' \setminus M$ i niech $y_1, \ldots, y_s \in M$. Ponieważ $V = \text{lin}M$, więc wektor x można przedstawić w postaci

$$x = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_s y_s.$$

Stąd

$$1 \cdot x + (-\alpha_1) y_1 + \cdots + (-\alpha_s) y_s = 0.$$

W konsekwencji, wektory $x, y_1, \ldots, y_s$ są liniowo zależne. Ponieważ $\{x, y_1, \ldots, y_s\} \subseteq M'$, więc wektory zbioru M' są liniowo zależne. □

Przykłady.

- W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ bazę stanowią wektory

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1);$$

- W przestrzeni $\mathbb{C}$ nad ciałem liczb rzeczywistych bazę stanowi zbiór $\{1, i\}$;
- Bazą przestrzeni zerowej jest zbiór pusty.

Lemat 1 *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, niech zbiór $\{x_1, \ldots, x_n\}$ będzie bazą przestrzeni V i niech $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$, gdzie $\alpha_i \neq 0$ dla $i = 1, \ldots, n$. Wtedy zbiór*

$$\{x_1, \ldots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_n\}$$

jest bazą przestrzeni V.

Dowód. Ponieważ $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ i $\alpha_i \neq 0$ dla $i = 1, \ldots, n$, więc

$$x_j = \frac{1}{\alpha_j} x + \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_j}\right) x_1 + \cdots + \left(-\frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}\right) x_{j-1} +$$

$$+ \left(-\frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}\right) x_{j+1} + \cdots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_j}\right) x_n,$$

co oznacza, że wektor x_j jest kombinacją liniową wektorów $x_1, \ldots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_n$. Ponieważ każdy wektor przestrzeni V jest kombinacją liniową wektorów $x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n$, więc jest także kombinacją liniową wektorów $x_1, \ldots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_n$. Pozostaje zatem wykazać, że wektory $x_1, \ldots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_n$ są liniowo niezależne.

Załóżmy, że

$$\beta_0 x + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{j-1} x_{j-1} + \beta_{j+1} x_{j+1} + \cdots + \beta_n x_n = 0.$$

Wtedy

$$\beta_0(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{j-1}x_{j-1} + \beta_{j+1}x_{j+1} + \cdots + \beta_n x_n = 0.$$

Stąd

$$(\beta_0\alpha_1 + \beta_1)x_1 + \cdots + (\beta_0\alpha_{j-1}\beta_{j-1})x_{j-1} + \beta_0\alpha_j x_j +$$
$$+(\beta_0\alpha_{j+1}\beta_{j+1})x_{j+1} + \cdots + (\beta_0\alpha_n + \beta_n)x_n = 0.$$

Ponieważ wektory $x_1, \ldots, x_n$ są liniowo niezależne, więc wszystkie współczynniki w powyższej równości są równe 0. W szczególności $\beta_0\alpha_j = 0$ i ponieważ $\alpha_j \neq 0$, więc $\beta_0 = 0$. Wtedy $\beta_i = 0$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n\}$. □

Twierdzenie 6 (Twierdzenie Steinitza o wymianie) *Jeżeli wektory $e_1, \ldots, e_s$ stanowią bazę przestrzeni liniowej V oraz wektory $f_1, \ldots, f_r \in V$ są liniowo niezależne, to $r \leq s$ oraz istnieje $s-r$ wektorów pośród $e_1, \ldots, e_s$, które w połączeniu z $f_1, \ldots, f_r$ stanowią bazę przestrzeni V.*

Dowód. Dowód indukcyjny ze względu na r. Dla $r = 0$ twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla liczb mniejszych niż r i rozpatrzmy r wektorów $f_1, \ldots, f_r$ liniowo niezależnych. Ponieważ wektory $f_1, \ldots, f_{r-1}$ są liniowo niezależne, więc zgodnie z założeniem indukcyjnym, $r-1 \leq s$ i istnieje $s-r+1$ wektorów pośród $e_1, \ldots, e_s$, które łącznie z $f_1, \ldots, f_{r-1}$ tworzą bazę przestrzeni V. Bez straty ogólności możemy założyć, że są to wektory $e_1, \ldots, e_{s-r+1}$.

Gdyby $r-1 = s$, to wektory $f_1, \ldots, f_{r-1}$ tworzyłyby bazę przestrzeni V, co oznaczałoby, że wektor f_r byłby kombinacją liniową wektorów $f_1, \ldots, f_{r-1}$ wbrew założeniu, że wektory $f_1, \ldots, f_r$ są liniowo niezależne. W rezultacie $r-1 < s$ lub równoważnie $r \leq s$.

Ponieważ wektory $f_1, \ldots, f_{r-1}, e_1, \ldots, e_{s-r+1}$ tworzą bazę przestrzeni V, więc wektor f_r jest ich kombinacją liniową. Z liniowej niezależności wektorów $f_1, \ldots, f_r$ wynika, że w kombinacji liniowej przedstawiającej wektor f_r co najmniej jeden z wektorów $e_1, \ldots, e_{s-r+1}$ występuje ze współczynnikiem różnym od 0. Możemy przyjąć, że jest to wektor e_{s-r+1}. Na mocy poprzedniego lematu, możemy utworzyć nową bazę zastępując wektor e_{s-r+1} wektorem f_r. W konsekwencji wektory $f_1, \ldots, f_r, e_1, \ldots, e_{s-r}$ tworzą bazę przestrzeni V. □

Wniosek 1 *Jeżeli zbiory $\{e_1, \ldots, e_s\}$ i $\{f_1, \ldots, f_r\}$ są bazami przestrzeni liniowej V, to $s = r$.*

Dowód. Jeżeli zbiory $\{e_1, \ldots, e_s\}$ i $\{f_1, \ldots, f_r\}$ są bazami przestrzeni liniowej V, to z twierdzenia Steinitza o wymianie wynika, że $s \leq r$. Zamieniając bazy $\{e_1, \ldots, e_s\}$ i $\{f_1, \ldots, f_r\}$ rolami, otrzymamy $r \leq s$. W rezultacie $r = s$. □

Definicja 7 *Wymiarem przestrzeni liniowej V nazywamy liczbę $dimV$ elementów dowolnej bazy tej przestrzeni. Jeżeli liczba ta nie jest skończona, to piszemy $dimV = \infty$ i mówimy, że przestrzeń V ma wymiar nieskończony. W przeciwnym razie mówimy, że przestrzeń V jest skończonego wymiaru.*

Twierdzenie 7 *Niech V będzie przestrzenią liniową. Jeżeli $W < V$, to $dimW \leq dimV$.*

Dowód. Z twierdzenia Steinitza o wymianie wynika, że każdy liniowo niezależny podzbiór przestrzeni V zawiera co najwyżej $\dim V$ wektorów. Ponieważ każdy liniowo niezależny podzbiór przestrzeni W jest liniowo niezależnym podzbiorem przestrzeni V, więc może zawierać co najwyżej $\dim V$ wektorów. W konsekwencji, zbiór W zawiera zbiór liniowo niezależny o maksymalnej liczbie elementów (nieprzekraczającej $\dim V$) co oznacza, że $\dim W \leq \dim V$. □

Wniosek 2 *Niech V będzie przestrzenią liniową skończonego wymiaru i niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V. Wtedy, $W = V$ wtedy i tylko wtedy, gdy $dimW = dimV$.*

Dowód. Jeżeli $W = V$, to oczywiście $\dim W = \dim V$.

Jeżeli zbiór $\{e_1, \dots, e_r\}$ jest bazą przestrzeni W, to można ją uzupełnić do bazy przestrzeni V przez dodanie $\dim V - \dim W$ elementów. Ponieważ $\dim W = \dim V$, więc baza uzupełniona jest identyczna z bazą $\{e_1, \dots, e_r\}$ co oznacza, że $W = V$. □

Przykłady

- Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem i niech $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{K}^n$ będą wektorami postaci

  $$e_1 = (1, 0, \dots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),\ \dots,\ e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

  Wtedy każdy wektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów $e_1, \dots, e_n$:

  $$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

  Ponadto,

  $$x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = 0 \ \Leftrightarrow\ x_1 = \cdots = x_n = 0.$$

  Wynika stąd, że zbiór $\{e_1, \dots, e_n\}$ stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{K}^n$ oraz $\dim \mathbb{K}^n = n$. Bazę tę nazywamy bazą standardową, a jej elementy - wersorami. (e_i - i-ty wersor)

- Niech $P(\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń wielomianów nad ciałem liczb rzeczywistych. Załóżmy, że

  $$\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n = 0.$$

  Przypuśćmy, że nie wszystkie współczynniki w tym przedstawieniu są równe 0. Możemy założyć, że $\alpha_n \neq 0$. Wtedy z zasadniczego twierdzenia algebry wynikałoby, że wielomian $\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ ma skończenie wiele pierwiastków. Oznaczałoby to, że istnieje taka liczba rzeczywista m, dla której

  $$\alpha_0 + \alpha_1 m + \cdots + \alpha_n m^n \neq 0$$

  co jest sprzeczne z założeniem. W rezultacie zbiór $\{1, x, x^2, \dots\}$ jest bazą przestrzeni $P(\mathbb{R})$ i $\dim P(\mathbb{R}) = \infty$.

- Niech $P_n(\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń wielomianów nad ciałem liczb rzeczywistych stopnia co najwyżej n. Wtedy zbiór $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ stanowi bazę tej przestrzeni oraz $\dim P_n(\mathbb{R}) = n + 1$.

Zauważmy, że jeżeli U i W są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V, to przekrój $U \cap W$ jest również podprzestrzenią przestrzeni V.

Definicja 8 *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech U i W będą podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni V. Sumą algebraiczną przestrzeni U i W nazywamy zbiór*

$$U + W = \{u + w\colon\ u \in U,\ w \in W\}.$$

Suma algebraiczna przestrzeni U i W jest najmniejszą podprzestrzenią liniową przestrzeni V zawierającą zbiory U i W. Każdy wektor $v \in U + W$ można przedstawić w postaci $v = u + w$, gdzie $u \in U$, $w \in W$, ale przedstawienie to nie jest na ogół jednoznaczne.

Analogicznie definiujemy sumę algebraiczną dowolnej skończonej liczby podprzestrzeni liniowych $U_1, \dots, U_m$ przestrzeni liniowej V.

Twierdzenie 8 *Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech U i W będą podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni V. Wtedy*

$$dim(U + W) = dimU + dimW - dim(U \cap W).$$

Dowód. Niech

$$\dim U = k, \quad \dim W = l, \quad \dim(U \cap W) = m.$$

Ponieważ $U \cap W \subseteq U$ i $U \cap W \subseteq W$, więc $m \leq k$ i $m \leq l$. Niech $\{e_1, \dots, e_m\}$ będzie bazą przestrzeni $U \cap W$. Z twierdzenia Steinitza o wymianie wynika, że bazę $\{e_1, \dots, e_m\}$ możemy uzupełnić do bazy $\{e_1, \dots, e_m, a_1, \dots, a_{k-m}\}$ przestrzeni U oraz do bazy $\{e_1, \dots, e_m, b_1, \dots, b_{l-m}\}$ przestrzeni W.

Ponieważ każdy wektor sumy $U + W$ jest postaci $u + w$, gdzie $u \in U$ i $w \in W$, więc

$$U + W = \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{l-m}\}.$$

Jeżeli wektory $e_1, \dots, e_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{l-m}$ są liniowo niezależne, to

$$\dim(U + W) = m + (k - m) + (l - m) = k + l - m.$$

Przypuśćmy, że wektory $e_1, \dots, e_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{l-m}$ są liniowo zależne. Wtedy istniałyby takie skalary $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-m}$, $\beta_1, \dots, \beta_{l-m}$, nie wszystkie równe 0, że

$$\sum_{s=1}^{m} \gamma_s e_s + \sum_{i=1}^{k-m} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{l-m} \beta_j b_j = 0. \qquad (*)$$

Stąd

$$\sum_{s=1}^{m} \gamma_s e_s + \sum_{i=1}^{k-m} \alpha_i a_i = -\sum_{j=1}^{l-m} \beta_j b_j,$$

gdzie lewa strona równości jest elementem przestrzeni U, a prawa - W. Oznacza to, że wektor ten należy do przestrzeni $U \cap W$. Możemy więc przyjąć

$$-\sum_{j=1}^{l-m} \beta_j b_j = \sum_{s=1}^{m} \delta_s e_s.$$

Stąd

$$\sum_{s=1}^{m} \delta_s e_s + \sum_{j=1}^{l-m} \beta_j b_j = 0.$$

Ponieważ wektory $e_1, \ldots, e_m, b_1, \ldots, b_{l-m}$ są liniowo niezależne, więc, w szczególności, $\beta_1 = \cdots = \beta_{l-m} = 0$.

W konsekwencji, równość $(*)$ jest kombinacją liniową wektorów $e_1, \ldots, e_m, a_1, \ldots, a_{k-m}$, które są liniowo niezależne. Stąd wynika, że $\gamma_1 = \cdots = \gamma_m = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-m} = 0$, co jest sprzeczne z założeniem. $\square$

Definicja 9 *Niech V będzie przestrzenią liniową i niech $U_1, \ldots, U_m$ będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Jeżeli każdy wektor $u \in U_1 + \cdots + U_m$ można jednoznacznie przedstawić w postaci*

$$u = u_1 + \cdots + u_m, \quad u_i \in U_i,\ i = 1, \ldots, m,$$

to sumę $U_1 + \cdots + U_m$ nazywamy sumą prostą przestrzeni $U_1, \ldots, U_m$ i piszemy $U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$.

Zauważmy, że na to aby suma $U_1 + \cdots + U_m$ była prosta wystarczy jednoznaczność zapisu wektora zerowego.

Istotnie, jeżeli

$$0 = u_1 + \cdots + u_m \ \Rightarrow\ u_1 = \cdots = u_m = 0,$$

to z równości

$$w_1 + \cdots + w_m = w_1' + \cdots + w_m'$$

wynika, że

$$0 = (w_1 - w_1') + \cdots + (w_m - w_m'), \quad w_i - w_i' \in U_i,\ i = 1, \ldots, m.$$

Stąd

$$w_i - w_i' = 0 \ \text{ dla } i = 1, \ldots, m.$$

$$w_i = w_i' \ \text{ dla } i = 1, \ldots, m.$$

Przyjmijmy oznaczenie

$$U_1 + \cdots + \hat{U}_i + \cdots + U_m = U_1 + \cdots + U_{i-1} + U_{i+1} + \cdots + U_m.$$

Twierdzenie 9 *Niech V będzie przestrzenią liniową i niech $U_1, \ldots, U_m$ będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Suma algebraiczna $U_1 + \cdots + U_m$ jest sumą prostą wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$U_i \cap (U_1 + \cdots + \hat{U}_i + \cdots + U_m) = \{0\} \quad \text{dla } i = 1, \ldots, m.$$

Dowód. Załóżmy, że suma $U_1 + \cdots + U_m$ jest prosta. Ustalmy wskaźnik $i \in \{1, \ldots, m\}$. Niech

$$x \in U_i \cap (U_1 + \cdots + \hat{U}_i + \cdots + U_m)$$

Wtedy

$$x = u_1 + \cdots + \hat{u}_i + \cdots + u_m, \quad u_j \in U_j.$$

Stąd

$$0 + \cdots + 0 = 0 = u_1 + \cdots + u_{i-1} + (-x) + u_{i+1} + \cdots + u_m.$$

Ponieważ suma $U_1 + \cdots + U_m$ jest prosta, więc $-x = 0$.

Załóżmy teraz, że

$$U_i \cap (U_1 + \cdots + \hat{U}_i + \cdots + U_m) = \{0\} \text{ dla } i = 1, \ldots, m.$$

Niech

$$0 = a_1 + \cdots + a_i + \cdots + a_m.$$

Wtedy

$$-a_i = a_1 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_m \in U_i \cap (U_1 + \cdots + \hat{U}_i + \cdots + U_m) = \{0\}.$$

W rezultacie $a_i = 0$ dla $i = 1, \ldots, m$. □

Zauważmy, że dla $m = 2$ otrzymujemy: Suma $U_1 + U_2$ jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. W szczególności, jeżeli $\dim U_1 < \infty$ i $\dim U_2 < \infty$, to $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

Twierdzenie 10 *Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową i niech $U_1, \ldots, U_m$ będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Suma algebraiczna $U = U_1 + \cdots + U_m$ jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$dimU = \sum_{i=1}^{m} dimU_i.$$

Dowód. Dowód indukcyjny ze względu na m. Dla $m = 2$ twierdzenie jest prawdziwe. Zauważmy, że jeżeli U jest sumą prostą, to suma $U_1 + \cdots + \hat{U}_i + \cdots + U_m$ także jest prosta. Wtedy

$$\begin{gathered} \dim U = \dim U_i + \dim(U_1 + \cdots + \hat{U}_i + \cdots + U_m) - \\ -\dim(U_i \cap (U_1 + \cdots + \hat{U}_i + \cdots + U_m)) = \\ = \dim U_i + (\dim U_1 + \cdots + \dim \hat{U}_i + \cdots + \dim U_m) - 0 = \\ = \sum_{i=1}^{m} \dim U_i. \end{gathered}$$

Załóżmy teraz, że

$$\dim U = \sum_{i=1}^{m} \dim U_i.$$

Wtedy suma baz podprzestrzeni U_i, $i = 1, \ldots, m$, stanowi bazę przestrzeni U, co oznacza, że suma U jest prosta. □

Twierdzenie 11 *Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią liniową i niech U będzie m-wymiarową podprzestrzenią przestrzeni V. Wtedy istnieje taka $(n-m)$-wymiarowa podprzestrzeń W przestrzeni V, że $V = U \oplus W$.*

Podprzestrzenie U i W nazywamy dopełniającymi.

Dowód. Niech $\{a_1, \ldots, a_m\}$ będzie bazą przestrzeni U. Z twierdzenia Steinitza o wymianie wynika, że bazę tę możemy uzupełnić do bazy $\{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_{n-m}\}$ przestrzeni V. Wtedy

$$W = \operatorname{lin}\{b_1, \ldots, b_{n-m}\}.$$

□

Rozpatrywaliśmy sumy proste podprzestrzeni tej samej przestrzeni liniowej. Sumy proste tego typu nazywamy wewnętrznymi. Czasami rozpatrujemy zewnętrzne sumy proste, tzn. sumy $U \oplus W$ przestrzeni liniowych nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$, nawet jeśli nie są one podprzestrzeniami tej samej przestrzeni liniowej. W tym przypadku przez $U \oplus W$ rozumiemy zbiór $U \times W$ wszystkich par uporządkowanych (u, w), $u \in U$, $w \in W$ z działaniami określonymi wzorem

$$\alpha(u, w) + \beta(u', w') = (\alpha u + \beta u', \alpha w + \beta w').$$

2 Izomorfizm przestrzeni liniowych

Definicja 10 *Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$. Odwzorowanie $\varphi\colon V \to W$ nazywamy izomorfizmem, jeżeli:*

1. *φ jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym;*
2. *$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ dla $x, y \in V$;*
3. *$\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$ dla $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in V$.*

Stwierdzenie 1 *Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$. Jeżeli odwzorowanie $\varphi\colon V \to W$ jest izomorfizmem, to $\varphi(0) = 0$.*

Dowód. Wprost z definicji

$$\varphi(0) = \varphi(0 \cdot 0) = 0 \cdot \varphi(0) = 0.$$

□

Zauważmy, że w definicji izomorfizmu własności 2 i 3 są równoważne własności

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) \text{ dla } \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ x, y \in V.$$

Ponadto, z własności tych wynika, że

$$\varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y) \text{ dla } x, y \in V.$$

Zauważmy, że przekształcenie tożsamościowe dowolnej przestrzeni liniowej V w siebie jest izomorfizmem, przekształcenie odwrotne do izomorfizmu jest izomorfizmem oraz złożenie dwóch izomorfizmów jest izomorfizmem.

Twierdzenie 12 *Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$ i niech odwzorowanie $\varphi\colon V \to W$ będzie izomorfizmem. Wtedy*

- *jeżeli zbiór $X \subseteq V$ jest liniowo niezależny (liniowo zależny lub bazą), to $\varphi(X)$ jest zbiorem liniowo niezależnym (liniowo zależnym lub bazą, odpowiednio);*
- *jeżeli $x, y_1, \ldots, y_n \in V$ i wektor x jest kombinacją liniową wektorów $y_1, \ldots, y_n$, to wektor $\varphi(x)$ jest kombinacją liniową wektorów $\varphi(y_1), \ldots, \varphi(y_n)$;*
- *jeżeli zbiór U jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V, to zbiór $\varphi(U)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni W;*
- *$dimV = dimW$.*

Definicja 11 *Dwie przestrzenie liniowe V i W nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy izomorficznymi, jeżeli istnieje izomorfizm $\varphi\colon V \to W$.*

Twierdzenie 13 *Niech V i W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$. Jeżeli $dimV = dimW$, to przestrzenie V i W są izomorficzne.*

Dowód. Wykażemy, że jeżeli wektory $e_1, \ldots, e_n$ tworzą bazę przestrzeni V, a wektory $f_1, \ldots, f_n$ tworzą bazę przestrzeni W, to istnieje dokładnie jeden taki izomorfizm $\varphi\colon V \to W$, że $\varphi(e_i) = f_i$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Niech $\dim V = \dim W = n$ i niech $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $\{f_1, \ldots, f_n\}$ będą bazami przestrzeni V i W, odpowiednio. Wtedy każdy wektor x przestrzeni V można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Określmy odwzorowanie $\varphi\colon V \to W$ wzorem

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \ \text{ dla } x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Ponieważ każdy wektor y przestrzeni W można przedstawić w postaci

$$y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i,$$

więc

$$y = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i\right),$$

co oznacza, że odwzorowanie φ przekształca przestrzeń V na W.

Niech

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,\ x' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' e_i \ \text{ i } \ \varphi(x) = \varphi(x').$$

Wtedy
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = \varphi(x) = \varphi(x') = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i f_i.$$
Z jednoznaczności przedstawienia wektorów przestrzeni W w postaci kombinacji liniowej wektorów bazy $\{f_1, \ldots, f_n\}$ wynika, że $\alpha_i = \alpha'_i$ dla $i = 1, \ldots, n$, tzn. $x = x'$.

Niech
$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad x' = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i e_i, \quad \beta \in \mathbb{K}.$$
Wtedy
$$\varphi(x + x') = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha'_i) e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha'_i) f_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i f_i = \varphi(x) + \varphi(x').$$
Ponadto,
$$\varphi(\beta x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} (\beta\alpha_i) e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\beta\alpha_i) f_i = \beta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = \beta\varphi(x).$$
Wykazaliśmy więc, że odwzorowanie φ jest izomorfizmem.

Zauważmy, że $\varphi(e_i) = f_i$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Niech $\psi\colon V \to W$ będzie takim izomorfizmem, że $\psi(e_i) = f_i$ dla $i = 1, \ldots, n$, i niech $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in V$. Wtedy
$$\psi(x) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = \varphi(x).$$
□

Wniosek 3 *Niech V będzie przestrzenią liniową skończonego wymiaru. Jeżeli $x, y \in V$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, to istnieje taki izomorfizm $\varphi\colon V \to V$, że $\varphi(x) = y$.*

Dowód. Ponieważ $x \neq 0$ i $y \neq 0$, więc zbiory $\{x\}$ i $\{y\}$ są liniowo niezależne. Z twierdzenia Steinitza o wymianie wynika, że zbiory te można uzupełnić do baz $\{x, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$, $\{y, f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ przestrzeni V. Z poprzedniego twierdzenia wynika, że istnieje izomorfizm $\varphi\colon V \to V$ o żądanych własnościach. □

Wniosek 4 *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech $dimV = n$. Wtedy przestrzeń V jest izomorficzna z przestrzenią $\mathbb{K}^n$.*

Dowód. Niech zbiór $\{e_1, \ldots, e_n\}$ będzie bazą w przestrzeni V i niech $x \in V$. Wtedy wektor x można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Izomorfizm $\varphi \colon V \to \mathbb{K}^n$ określamy wzorem

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

$\square$

Uwaga
Jeżeli w przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{K}$ ustalimy bazę B i jej elementy ustawimy w określonej kolejności $B = (f_1, \ldots, f_n)$, to każdy wektor $x \in V$ może zostać zapisany w postaci ciągu swoich współczynników $\varphi(x) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Innymi słowy, znając bazę B i mając zadany ciąg $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ można odtworzyć wektor x. Ciąg $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ nazywamy współrzędnymi wektora x w bazie B. Mówimy, że izomorfizm $\varphi \colon V \to \mathbb{K}^n$ zadaje układ współrzędnych w przestrzeni V.

Uwaga
Niech V będzie przestrzenią liniową. Izomorfizm $\varphi \colon V \to V$ nazywamy automorfizmem przestrzeni V. Zbiór wszystkich automorfizmów przestrzeni V oznaczamy symbolem $\mathrm{Aut}V$. Zbiór $\mathrm{Aut}V$ z operacją składania odwzorowań jest grupą. (Na ogół nie jest to grupa przemienna.)