Logika obliczeniowa #4
- wnioskowanie symboliczne Gentzena -

Przygotował:

Dr inż. Jacek Tkacz

Agenda

- Podstawowe pojęcia
- Spójniki logiczne
- Reguły wnioskowania
- Tautologie
- Reguły dopuszczalne
- Drzewo dowodu
- Opracowane oprogramowanie

Podstawowe pojęcia

- Podstawowe pojęcia:
- Sekwent - relacja (Γ|-Θ) miedzy zbiorami formuł Γ i Θ w rachunku zdań
- Formuła - jest częścią sekwentu, w której skład wchodzą zmienne i spójniki logiczne
- Formuła elementarna (atomowa) – formuła składająca się z jednego symbolu zdaniowego

$$(\Gamma \rightarrow \Theta), (\Pi \vee \Phi) \wedge (\Psi \vee \Gamma) \vdash \Theta, (\Psi \equiv \Theta)$$

Spójniki logiczne

- Spójniki logiczne:
  - Negacja „/” („¬”)
  - Dysjunkcja „+” („∨”)
  - Koniunkcja „*” („∧”)
  - Implikacja „->” („→”)
  - Równoważność <-> („≡”)
- Dla każdego spójnika logicznego zostały podane dwie reguły jego eliminowania lub wprowadzania.
- Wyboru reguły dokonuje się poprzez lokalizację głównego spójnika względem znaku wynikania logicznego „|-”.

Przykład eliminacji spójnika dysjunkcji w poprzedniku i następniku #1, #2

- Jeżeli głównym spójnikiem sekwentu jest negacja w poprzedniku, to formułę będąca argumentem tej negacji przenosi się do następnika

$$\frac{\Theta, \neg\Psi, \Gamma \vdash \Pi, \Phi}{\Theta, \Gamma \vdash \Pi, \Phi, \Psi}$$

- Przykład:

$$p, \neg(p \vee q) \vdash (r \wedge s)$$

to:

$$p \vdash (r \wedge s), (p \vee q)$$

- Jeżeli głównym spójnikiem sekwentu jest negacja w następniku, to formułę będąca argumentem tej negacji przenosi się do poprzednika

$$\frac{\Theta, \Gamma \vdash \Pi, \Phi, \neg\Psi}{\Theta, \Gamma, \Psi \vdash \Pi, \Phi}$$

- Przykład:

$$p \vdash (r \wedge s), \neg(p \vee q)$$

to:

$$p, (p \vee q) \vdash (r \wedge s)$$

Przykład eliminacji spójnika dysjunkcji w poprzedniku #3

- Jeżeli głównym spójnikiem sekwentu jest dysjunkcja (alternatywa) w poprzedniku, to sekwent ten zastępuje się dwoma sekwentami, z których pierwszy będzie zawierał lewy argument alternatywy, a drugi prawy argument alternatywy:

$$\frac{\Theta,\ \Phi \vee \Psi,\ \Gamma \mid\!- \Pi}{\Theta,\ \Phi,\ \Gamma \mid\!- \Pi \qquad \Theta,\ \Psi,\ \Gamma \mid\!- \Pi}$$

- Przykład:

a+*b,c*d*|-*d+e* ⟹ *a,c*d*|-*d+e*

⟹ *b,c*d*|-*d+e*

„Odwracalność reguły”

Przykład eliminacji spójnika dysjunkcji w następniku #4

- Jeżeli głównym spójnikiem sekwentu jest dysjunkcja w następniku, to symbol dysjunkcji zastępowany jest przecinkiem:

$$\frac{\Gamma \mid\!- \Theta, \Phi \vee \Psi, \Pi}{\Gamma \mid\!- \Theta, \Phi, \Psi, \Pi}$$

- Przykłady:

  a) eliminacja klasyczna

  $a|\text{-}b+c,d+e \Rightarrow a|\text{-}b,c,d+e$

  b) eliminacja współbieżna

  $a|\text{-}b+c,d+e \Rightarrow a|\text{-}b,c,d,e$ — Sekwent znormalizowany

„Odwracalność reguły”

Przykład eliminacji spójnika koniunkcji w poprzedniku #5

- Jeżeli głównym spójnikiem sekwentu jest koniunkcja w poprzedniku, to symbol koniunkcji zastępowany jest przecinkiem :

$$\frac{\Theta,\ \Phi \wedge \Psi,\ \Gamma \mid\!\!-\ \Pi}{\Theta,\ \Phi\ ,\Psi,\ \Gamma \mid\!\!-\ \Pi}$$

- Przykład:

$a{*}b,c+d|-d+e \Rightarrow a,b,c+d|-d+e$

Przykład eliminacji spójnika koniunkcji w następniku #6

- Jeżeli głównym spójnikiem sekwentu jest koniunkcja w następniku, to sekwent ten zastępuje się dwoma sekwentami, z których pierwszy będzie zawierał lewy argument koniunkcji, a drugi prawy argument koniunkcji :

$$\frac{\Gamma \mid\!- \Theta, \Phi \wedge \Psi, \Pi}{\Gamma \mid\!- \Theta, \Phi, \Pi \qquad \Gamma \mid\!- \Theta, \Psi, \Pi}$$

- Przykład:

*a|-b*c,d+e* → *a|-b,d+e*

→ *a|-c,d+e*

Przykład eliminacji spójnika implikacji w poprzedniku #7

- Jeżeli głównym spójnikiem sekwentu jest implikacja w poprzedniku, to sekwent ten zastępuje się dwoma sekwentami, z których pierwszy zawiera drugi człon implikacji w poprzedniku, a drugi pierwszy człon implikacji w następniku

$$\frac{\Theta,\ \Phi \rightarrow \Psi,\ \Gamma \mid\!- \Pi}{\Theta,\ \Psi,\ \Gamma \mid\!- \Pi; \qquad \Theta,\ \Gamma \mid\!- \Pi,\ \Phi}$$

- Przykład:

$$p,p \text{ -> } q \mid\!- r \quad \Rightarrow \quad p,q \mid\!- r$$

$$\Rightarrow \quad p \mid\!- r,p$$

Przykład eliminacji spójnika implikacji w następniku #8

- Jeżeli głównym spójnikiem sekwentu jest implikacja w następniku, to pierwszy człon implikacji przenosi się do poprzednika

$$\frac{\Lambda \mid\!- \Theta,\ \Phi \rightarrow \Psi,\ \Gamma}{\Lambda,\ \Phi \mid\!- \Theta,\ \Psi,\ \Gamma}$$

- Przykład:

$p \mid\!- r, p \text{ -> } q, r \quad \Rightarrow \quad p, p \mid\!- r, q, r$

Przykład eliminacji spójnika równoważności w poprzedniku #9

- Jeżeli głównym spójnikiem sekwentu jest równoważność w poprzedniku, to sekwent ten zastępuje się dwoma sekwentami, z których pierwszy zawiera w poprzedniku obydwa argumenty równoważności, a drugi w następniku te argumenty równoważności

$$\frac{\Theta,\ \Phi \equiv \Psi,\ \Gamma \vdash \Pi}{\Theta,\ \Phi,\ \Psi,\ \Gamma \vdash \Pi; \qquad \Theta,\ \Gamma \vdash \Pi,\ \Phi,\ \Psi}$$

- Przykład:

$p,p \texttt{<->} q \vdash r \quad \Rightarrow \quad p,p,q \vdash r$

$\Rightarrow \quad p \vdash r,p,q$

Przykład eliminacji spójnika równoważności w następniku #10

- Jeżeli głównym spójnikiem sekwentu jest równoważność w następniku, to sekwent ten zastępuje się dwoma sekwentami, z których pierwszy zawiera w poprzedniku drugi człon równoważności i w następniku pierwszy człon równoważności, a drugi zawiera w poprzedniku pierwszy człon równoważności i w następniku drugi człon równoważności

$$\frac{\Lambda \vdash \Theta,\ \Phi \equiv \Psi,\ \Gamma}{\Lambda,\ \Psi \vdash \Theta,\ \Phi,\ \Gamma; \qquad \Lambda,\ \Phi \vdash \Theta,\ \Psi,\ \Gamma}$$

- Przykład:

$p \vdash p \leftrightarrow q,r \quad \Rightarrow \quad p,q \vdash p,r$

$ \quad \Rightarrow \quad p,p \vdash q,r$

Tautologie

- Jeżeli po lewej i po prawej stronie rozpatrywanego sekwentu występuje taka sama formuła, to całe wyrażenie jest tautologią (można przerwać proces jego normalizacji):

$$\Theta, \Phi, \Psi \vdash \Pi, \Phi$$

- Przykład:

$$p, (r * s) \vdash p, q$$

Reguły dopuszczalne

- Sklejanie
  - Jeżeli po lewej lub po prawej stronie rozpatrywanego sekwentu występuje kilka takich samych formuł, to wszystkie wystąpienia danej formuły zostaną zastąpione jedną formułą:

$$\frac{\Theta,\ \Phi,\ \Psi,\ \Phi \vdash \Pi,\ \Pi}{\Theta,\ \Phi,\ \Psi \vdash \Pi}$$

- Dominacja

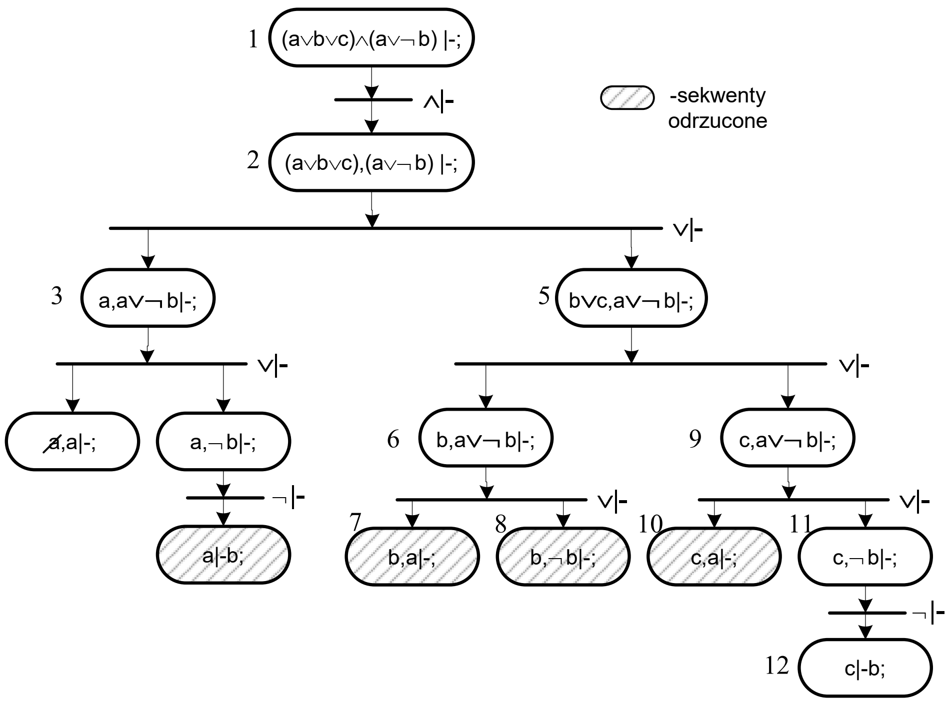
$$\frac{\Theta,\ \Phi,\ \Psi,\ \Gamma \vdash \Pi \qquad \Phi,\ \Gamma \vdash \Pi}{\Phi,\ \Gamma \vdash \Pi}$$

- Cięcie

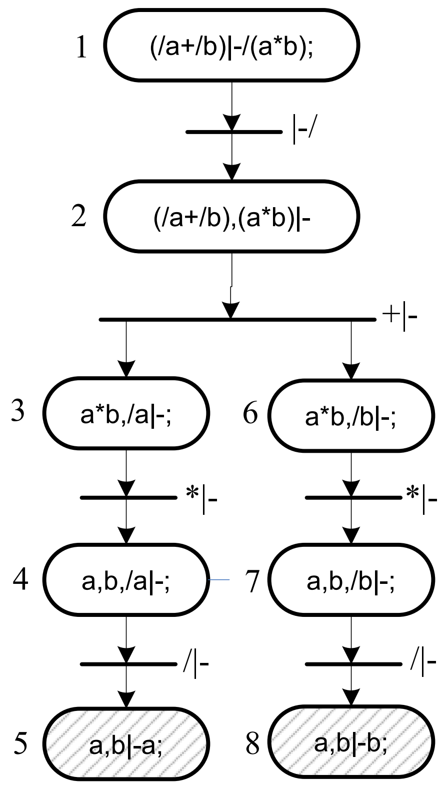
$$\frac{\Gamma 1,\ \Phi \vdash \Theta 1 \qquad \Gamma 2 \vdash \Phi,\ \Theta 2}{\Gamma 1,\ \Gamma 2 \vdash \Theta 1,\ \Theta 2}$$

Uporządkowana eliminacja spójników logicznych

- Eliminacja spójników logicznych w systemie wnioskującym metodą Gentzena realizowana jest w porządku DFS
- W każdym przypadku, gdy w wyniku eliminacji spójnika logicznego powstają dwa nowe sekwenty, to pierwszy sekwent będzie analizowany dalej, a drugi zostanie odłożony na stos i będzie oczekiwał tak długo, aż pierwszy zostanie całkowicie znormalizowany lub rozpatrywana gałąź zostanie odcięta



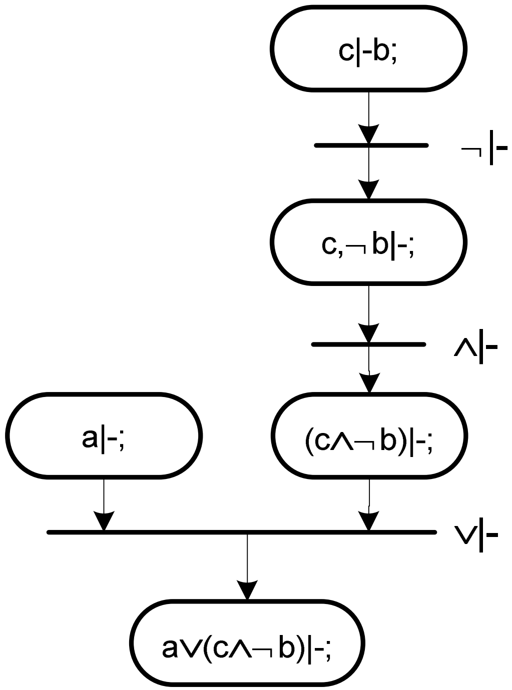
Drzewo dowodu



- Dowód prawa DeMorgana
- Lewa strona rozpatrywanego sekwentu zawiera założenie, a prawa oczekiwany wynik
- Wszystkie liście drzewa dowodu są tautologiami (zawsze prawdziwe), wiec badane wyrażenie też jest prawdziwe

Odwracalność reguł wnioskowania

- System Gentzena rozpatruje się także w ujęciu przeciwnym do eliminacji, czyli w ujęciu wprowadzania spójników logicznych
- Takie zastosowanie umożliwia przejście z postaci znormalizowanej (aksjomatów) do postaci złożonej (wniosku).
- Wprowadzanie spójników logicznych wykonuje się poprzez odwrotne zastosowanie reguł eliminacji



Literatura

- Ławrow I. A, Maksimowa Ł.R: Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2004.
- Ben Ari M.: Logika matematyczna w informatyce, WNT, Warszawa, 2005.
- Indrzejczak A.: Wprowadzenie do rachunku sekwentów – zagadnienia metodologiczne, zastosowania. Publikacja internetowa: http://www.filozof.uni.lodz.pl/prac/ai/Gentzen.pdf

UWAGA: Podany zestaw literatury nie jest obowiązujący na zajęciach. Literaturą przedmiotu może być każda książka omawiająca zagadnienia poruszane na zajęciach.

Przykładowe oprogramowanie wnioskujące

- **Naoyuki Tamura** Professor, Ph.D

  http://bach.istc.kobe-u.ac.jp/seqprover/

- Autorski system wnioskujący „**Gentzen**”

http://willow.iie.uz.zgora.pl/~jtkacz/infusions/pro_download_panel/download.php?did=9

Koniec

http://willow.iie.uz.zgora.pl/~jtkacz

Dziękuję za uwagę!