PRZYKŁADY DO WYKŁADU (Części I-IV)

I. Podstawowe pojęcia i oznaczenia logiczne i mnogościowe. Elementy teorii liczb rzeczywistych.

1. Elementy logiki matematycznej.

1.1. Rachunek zdań.

Wartości logiczne poszczególnych zdań w zależności od wartości zdań je tworzących:

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Przykład 1.2.
Wyznaczymy wartość logiczną formuły

$$P \ : \quad p \vee (q \Rightarrow p \wedge q)$$

przy podstawieniu $p = \mathbf{1}$, $q = \mathbf{0}$.

p	q	$p \wedge q$	$q \Rightarrow p \wedge q$	$p \vee (q \Rightarrow p \wedge q)$
1	0	0	1	1

Wartość formuły P wynosi **1**.

Przykład 1.3.
Sprawdzimy czy formuła

$$P \ : \quad p \Rightarrow q \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow p \wedge q)$$

jest tautologią.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge q$	$p \Leftrightarrow p \wedge q$	$p \Rightarrow q \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow p \wedge q)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1

Niezależnie jakie zdania prawdziwe czy fałszywe podstawiamy w miejsce p i q otrzymujemy zawsze zdanie prawdziwe, tj. o wartości logicznej **1**. Zatem P jest tautologią.

Przykład 1.4.

Sprawdzimy czy formuła

$$P \ : \quad (p \wedge q \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (r \Rightarrow p) \vee (r \Rightarrow q)$$

jest tautologią.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge q \Leftrightarrow r$	$r \Rightarrow p$	$r \Rightarrow q$	$(r \Rightarrow p) \vee (r \Rightarrow q)$	$(p \wedge q \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (r \Rightarrow p) \vee (r \Rightarrow q)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

Formuła P nie jest tautologią.

3. Kresy zbiorów.

Przykłady 3.1
Wskazać kresy dla zbiorów $A = [2, 8]$, $B = (-1, \infty)$, $C = (1, 2)$,

$D = (\infty, 100]$, $E = \{x^2 : x \in R\} = [0, \infty)$, $F = \{\sin x : x \in R\} = [-1, 1]$.

$infA = minA = 2, \quad supA = maxA = 8,$

$infB = -1,$

$infC = 1, \quad supC = 2,$

$supD = maxD = 100,$

$infE = minE = 0,$

$infF = minF = -1, \quad supF = maxF = 1.$

II. Funkcje. Pojęcia podstawowe.

Przykład 2.1.
Dane są funkcje $f(x) = x^2$ i $g(x) = \sqrt{x}$. Określić:

(a) dziedziny funkcji f i g,

(b) zbiory wartości funkcji f i g,

(c) złożenia $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ oraz określić ich dziedziny,

(d) parzystość funkcji f,

(e) monotoniczność funkcji f i g,

(f) ograniczoność funkcji f i g.

(a) $D_f = R, \quad D_g = [0, \infty);$

(b) $W_f = [0, \infty), \quad D_g = [0, \infty);$

(c)

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x, \quad D_{f \circ g} = [0, \infty),$

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x^2)^2 = x^4, \quad D_{f \circ f} = R,$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x|, \quad D_{g \circ f} = R,$

$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}, \quad D_{g \circ g} = [0, \infty);$

(d) Dla $x \in R$ mamy $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, zatem funkcja f jest parzysta.

(e) Niech $x_1, x_2 \in R$ i $x_1 \neq x_2$. Wtedy

$$Q = \frac{f(x_2) - f(x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1.$$

Zauważmy, że dla wszystkich $x_1, x_2 > 0$ otrzymujemy $Q > 0$, zaś dla wszystkich $x_1, x_2 < 0$ otrzymujemy $Q < 0$. Zatem funkcja f jest rosnąca na przedziale $(0, \infty)$, a malejąca na przedziale $(-\infty, 0)$.

(e) Mamy

$$\forall x \in R \; x^2 \geq 0 \quad oraz \quad \forall x \in [0, \infty) \; \sqrt{x} \geq 0.$$

Zatem funkcje f i g są ograniczone z dołu przez liczbę $m = 0$. Funkcje te nie są ograniczone z góry, więc nie są ograniczone.

Przykład 2.2.
Wyznaczymy funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = 1 - \sqrt{x-2}$.

Mamy $D_f = [2, \infty)$ oraz $W_f = (-\infty, 1]$. Funkcja f jest malejąca na D_f, więc jest różnowartościowa na D_f. Zatem istnieje funkcja odwrotna do funkcji f. Z równości

$$y = 1 - \sqrt{x-2}$$

otrzymujemy

$$\sqrt{x-2} = 1 - y \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 = (1-y)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 + (1-y)^2.$$

Zatem wzór funkcji odwrotnej do funkcji f ma postać

$$f^{-1}(y) = 2 + (1-y)^2, \quad gdzie \;\; y \in (-\infty, 1].$$

III. Ciągi liczbowe.

Przykład.
Sprawdzimy, że ciąg $a_n = n^2 - n$ jest rosnący. Otrzymujemy

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - (n+1) - (n^2 - n) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n = 2n > 0$$

dla wszystkich $n \in N$. Zatem $a_n < a_{n+1}$ dla $n \in N$.

Przykład.
Sprawdzimy, że ciąg $b_n = \frac{n!}{n^n}$ jest malejący. Ponieważ $b_n > 0$ dla wszystkich $n \in N$ badamy iloraz $\frac{b_{n+1}}{b_n}$. Otrzymujemy

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < 1,$$

dla wszystkich $n \in N$. Zatem $b_{n+1} < b_n$ dla $n \in N$.

Przykład.
Obliczymy $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n} \cdot \frac{n^4+5n-1}{3n^4-2n^2} + \frac{4^n+3^n}{8^n+7^n}\right)$.

Korzystamy z granic $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ oraz $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ dla $|q| < 1$. Otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n} \cdot \frac{n^4+5n-1}{3n^4-2n^2} + \frac{4^n+3^n}{8^n+7^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \frac{n^4+5n-1}{3n^4-2n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{4^n+3^n}{8^n+7^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+5n-1}{3n^4-2n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{4^n+3^n}{8^n+7^n} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{5}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{3-\frac{2}{n^2}} + \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{4}{8})^n+(\frac{3}{8})^n}{1+(\frac{7}{8})^n} = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$$

Przykład.
Obliczymy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n+5^n}$.

Korzystamy z twierdzenia o trzech ciągach oraz z granicy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 0$. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{2^n+3^n+5^n} \leq \sqrt[n]{5^n+5^n+5^n} = \sqrt[n]{3\cdot 5^n} = 5\sqrt[n]{3} \to_{n\to\infty} 5\cdot 1 = 5,$$

oraz

$$\sqrt[n]{2^n+3^n+5^n} \geq \sqrt[n]{5^n} = 5 \to_{n\to\infty} 5,$$

Zatem

$$5 \leftarrow_{n\to\infty} 5 = \sqrt[n]{5^n} \leq \sqrt[n]{2^n+3^n+5^n} \leq 5\sqrt[n]{3} \to_{n\to\infty} 5.$$

Stąd $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n+5^n} = 5$ na mocy twierdzenia o trzech ciągach.

Przykład.
Obliczymy $\lim_{n\to\infty} \frac{n \sin n}{n^2+1}$.

Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sin n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} \cdot \sin n.$$

Niech

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} \quad oraz \quad b_n = \sin n.$$

Otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0$$

oraz

$$-1 \leq \sin n \leq 1,$$

czyli ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony. Zatem na mocy twierdzenia 4.6 dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} \cdot \sin n = 0.$$

Przykład.
Obliczymy $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$.

Zauważmy, że mamy nieoznaczoność typu $[\infty-\infty]$.
Korzystając ze wzoru $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, przekształcamy

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Przykład.
Wykażemy, że $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=+\infty$.

Otrzymujemy

$$b_n:=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}=:a_n.$$

Mamy $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$.

Zatem na mocy twierdzenia o dwóch ciągach wynika, że $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$.

Przykład.
Obliczymy $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^n$.

Wykorzystamy twierdzenie 5.4, tj. granicę $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$, o ile $a_n>0$ dla $n\in N$ i $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

Otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{3n}}{1+\frac{4}{3n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{3n})^n}{(1+\frac{4}{3n})^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[(1+\frac{1}{3n})^{3n}\right]^{\frac{1}{3}}}{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{4}}\right)^{\frac{3n}{4}}\right]^{\frac{4}{3}}}=\frac{e^{\frac{1}{3}}}{e^{\frac{4}{3}}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

IV. Szeregi liczbowe.

Przykład 4.1.
Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n+200}$. Obliczamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+200}=1\neq 0.$$

Zatem nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu i stąd szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n+200}$ jest rozbieżny.

Przykład 4.2.
Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

Obliczamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}=\frac{2^n\cdot 2\cdot(n+1)\cdot n!\cdot n^n}{(n+1)^n\cdot(n+1)\cdot 2^n\cdot n!}=$$
$$=\frac{2\cdot n^n}{(n+1)^n}=2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=2\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}<1.$$

Zatem na mocy kryterium d'Alamberta szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ jest zbieżny.

Przykład 4.3.
Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty}\ln^n(4+\frac{1}{n})$.

Obliczamy $\sqrt[n]{a_n}=\ln\left(4+\frac{1}{n}\right)$, a stąd

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(4+\frac{1}{n}\right)=\ln 4>1.$$

Zatem na mocy kryterium Cauchy'ego szereg $\sum_{n=2}^{\infty}\ln^n(4+\frac{1}{n})$ jest rozbieżny.

Przykład 4.4.
Zbadamy zbieżność szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-n}$.

Dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n}$ otrzymujemy

$$a_n := \frac{2}{n^2+n} \leq \frac{2}{n^2} =: b_n.$$

Zauważmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny jako harmoniczny rzędu $\alpha = 2 > 1$.

Zatem na mocy kryterium porównawczego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n}$ jest zbieżny.

Dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-n}$ otrzymujemy

$$b_n := \frac{n+1}{n^2-n} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} =: a_n.$$

Zauważmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny jako szereg harmoniczny.

Zatem na mocy kryterium porównawczego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-n}$ jest rozbieżny.

Przykład 4.5.
Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$.

Oznaczmy $a_n = \frac{1}{n}$.

Zauważmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny, jako harmoniczny, więc szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ nie jest bezwzględnie zbieżny.

Mamy natomiast $a_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz ciąg $\{a_n\}$ jest malejący, zatem są spełnione warunki twierdzenia 3.2.

Stąd na mocy kryterium Leibniza szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ jest zbieżny. Szereg ten jest więc zbieżny warunkowo.

Przykład 4.6.
Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$.
Oznaczmy $a_n = (-1)^n\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$. Sprawdzimy zbieżność bezwzględną szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, czyli zbadamy zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n|\left|\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n.$$

Korzystamy z kryterium Cauchy'ego. Obliczamy granicę

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Zatem na mocy kryterium Cauchy'ego szereg $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ jest zbieżny, czyli z definicji szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, a więc wobec twierdzenia 3.4 szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Stąd szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$ jest zbieżny.