Hadwiger–Nelson 문제와 모저 스핀들

다음 명제를 보이겠습니다.

> 평면의 모든 점을 빨강–하양–파랑 3색 중 하나로 칠한다고 하자. 그러면 반드시 거리가 1인 같은 색 점쌍이 존재한다.

핵심 아이디어는 **3색으로는 절대 색칠될 수 없는 "단위거리 그래프"를 평면 위에 유한 개의 점만으로 만들어** 모순을 내는 것입니다. 가장 유명한 예가 7개의 꼭짓점으로 이루어진 **모저 스핀들(Moser spindle)** 입니다. 이 그래프의 모든 변 길이는 1이며, 어떤 3색 칠도 허용하지 않습니다. (즉, 이 그래프의 색수는 4 이상입니다.)

구성(기하적 배치)

1. 한 변의 길이가 1이고 예각이 60° 인 **마름모**(모든 변=1)를 두 개 준비합니다. 마름모의 짧은 대각선 길이도 1입니다(계산: $d = \sqrt{2 - 2\cos 60^\circ} = 1$).
2. 두 마름모가 **꼭짓점 하나를 공유**하도록 배치합니다(이 점을 O라 하자). 각 마름모의 네 꼭짓점들은 모두 서로 단위거리 간선들로 연결됩니다(변 4개 + 짧은 대각선 1개씩).
3. 두 마름모의 "바깥쪽" 꼭짓점 두 개(각각을 A, B)가 **서로도 거리가 1**이 되도록 배치합니다. 이로써 꼭짓점은 총 7개, 단위거리 간선은 11개인 모저 스핀들이 완성됩니다.

색 강제(chasing) 논증

이제 "거리가 1인 같은 색 쌍이 없다"고 가정하고 모순을 이끌어냅니다.

- 공유 꼭짓점 O의 색을 $c(O)$라 하자.

- $60°$ 마름모 하나를 보십시오. 마름모의 성질상 **짧은 대각선의 양 끝**도 서로 거리가 1입니다. 따라서 그 두 끝점은 서로 다른 색이어야 하고, 또 각각은 O와도 거리가 1이므로 $c(O)$가 될 수 없습니다.

  이 구조는 마름모 안에서 **대칭을 따라 색이 "강제"**되는 효과를 냅니다:

  - O의 이웃 둘은 $c(O)$와 다른 두 색을 하나씩 가져야 하고,
  - 그 결과 마름모의 "바깥쪽 끝"은 다시 $c(O)$로 **강제**됩니다.

- 같은 논리를 공유 꼭짓점 O를 기준으로 **두 번째 마름모**에도 적용하면, 그 마름모의 바깥쪽 끝도 역시 $c(O)$로 강제됩니다.

- 그런데 구성에서 두 마름모의 바깥쪽 끝점 A와 B는 **서로의 거리도** 1이었습니다.

  위 강제 결과로 $c(A) = c(B) = c(O)$가 되어 **거리가 1인 같은 색 쌍** (A, B)가 생깁니다. 이는 "단위거리 동일색 쌍이 없다"는 가정과 모순입니다.

따라서 어떤 3색 칠을 하더라도 평면에는 **반드시** 거리가 1인 같은 색 점쌍이 존재합니다.
□

코멘트 (배경과 응용)

- 위 사실은 유명한 Hadwiger–Nelson 문제("평면의 단위거리 그래프 색수는 몇인가?")에서 **3색은 불가능**함을 보여 주는 표준적인 유한 증거(모저 스핀들)에 해당합니다. 즉, 평면을 단위거리 충돌 없이 칠하려면 **최소 4색**이 필요합니다.

- 수업/세미나 활용 시에는 좌표로 스핀들을 한 번 배치해 보고(예: 한 변 1의 정삼각형 격자 위에서 두 마름모를 공유 꼭짓점으로 붙인 뒤, 바깥 꼭짓점 간 거리가 1이 되게 회전□이동) 위의 **색 강제(chasing) 규칙**을 도식으로 확인시키면 이해가 빠릅니다.