피카르–린델뢰프 정리와 해의 유일성

좋아요. 지금 이야기한 “하나의 x에 두 개의 y”가 일어나지 않는다는 설명을 **피카르–린델뢰프 정리**의 논리와 수학적 근거를 포함해 조금 더 깊게 보강해보겠습니다.

1 피카르–린델뢰프(=유일성 정리)의 핵심 내용

미분방정식이

$$y' = F(x, y)$$

형태일 때, 어떤 점 (x_0, y_0) 근방에서

- $F(x, y)$가 연속이고
- F의 y에 대한 편도함수 $\frac{\partial F}{\partial y}$도 연속이면

→ 그 근방에 대해 다음이 보장됩니다.

(1) 초기조건 $y(x_0) = y_0$을 만족하는 해가 **존재**하고

(2) 그 해는 **유일**하며,

(3) 해는 $y(x)$ 형태의 **함수**로 표현된다.

2 “한 x”에 두 y”가 불가능한 이유 (기하적 관점)

정리를 기하적으로 보면,

- 어떤 점 (x_0, y_0)를 지나가는 **기울기장(slope field)** 상의 곡선은 **단 하나**뿐입니다.
- $F, \partial F/\partial y$가 연속이면, 해곡선이 **다른 해곡선과 교차할 수도, 자기 자신을 교차할 수도 없습니다.**

즉, 같은 x_0에 서로 다른 y 값을 주는 두 점은 있을 수 없고, 하나의 해곡선은 **그래프 형태로 표현 가능한 곡선**, 즉 **수직선 검사를 통과하는 함수**입니다.

3 "언제 두 y"가 생길 수 있는가 (예외 조건)

이 '함수성'이 깨지는 경우는 아래 두 가지입니다.

1. **정칙 조건이 깨지는 경우**

   예를 들어 $F(x,y)$나 $\frac{\partial F}{\partial y}$가 불연속이거나, y'가 무한대로 발산할 때

   (예: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y}$에서 $x = y$ 근처).

   → 이땐 해가 꺾이거나 수직 접선을 가져서 $x(y)$로 표현해야 할 수도 있습니다.

2. **해가 정의 영역의 경계(특이점)에 닿을 때**

   분모 0이나 정의 불가능한 점에 도달하면 $y'(x) \to \infty$, 이때 x에 대해 y가 다가값이 될 수 있습니다.

4 이 문제에 적용

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-3}{y^2+x^2}, \quad y(0) = 1$$

- $F(x,y) = \frac{y-3}{y^2+x^2}$는 $(x,y) \neq (0,0)$에서 C^1입니다.
- 초기값 $(0,1)$은 안전한 영역에 있으므로, **유일한** $y(x)$ 해가 존재하고, **그래프 형태**를 유지합니다.
- $(0,0)$은 유일한 특이점이지만 해가 그쪽으로 가지 않기 때문에, 해 전체에서 $y(x)$는 **단조감소하며 자기 교차 없이 연속**합니다.

따라서

$$\boxed{\text{이 미분방정식의 해는 } x\text{마다 정확히 하나의 } y\text{를 갖고, 자기 교차하지 않습니다.}}$$

조건	의미	결과
$F, \partial F/\partial y$ 연속	국소적 유일성	한 초기값에 대해 해는 1개
F 정의영역 내	수직선 기울기 유한	해는 함수형 $y(x)$
F 발산 또는 불연속	유일성 상실 가능	여러 y 가능 or 수직 접선
본 문제 $F = \frac{y-3}{y^2+x^2}$	정칙 ($(0,0)$ 제외)	유일, 단조, 함수 형태

5 요약 비교표

원하신다면 이 논리를 시각적으로 slope field (기울기장)과 solution curve를 함께 그려서 "왜 하나의 x에 두 y"가 생길 수 없는지를 시각적으로 보여드릴 수도 있습니다. 그렇게 해드릴까요?