"거의 정수(almost integer)"가 되는 $(a+b\sqrt{d})$의 조건

1 문제 설정

우리가 찾고 싶은 건 다음과 같은 수입니다.

$$\alpha = a + b\sqrt{d}, \qquad \beta = a - b\sqrt{d}$$

이때 α^n이 어떤 정수에 **지수적으로 가까워지는지** 알고 싶어요. 핵심은 다음 관계식입니다:

$$k_n = \alpha^n + \beta^n \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha^n = k_n - \beta^n, \quad |\alpha^n - k_n| = |\beta|^n$$

즉, 만약 $|\beta| < 1$이고 k_n이 항상 정수라면, α^n은 정수에 지수적으로 가까워집니다.

2 핵심 조건

(1) α는 대수적 정수이자 단위(unit)이다: $N(\alpha) = \alpha\beta = \pm 1$.

(2) $\alpha > 1, \ |\beta| < 1$.

이 두 조건이 성립하면,

$$k_n = \alpha^n + \beta^n \in \mathbb{Z}, \quad |\alpha^n - k_n| = |\beta|^n.$$

또한 $|\beta| < \frac{1}{2}$이면 **모든** n에서 α^n의 반올림이 정확히 k_n이 됩니다. ($|\beta|^n < \frac{1}{2}$일 때마다 반올림이 정확해지기 때문이에요.)

3 왜 k_n이 정수인가?

α, β가 이차방정식

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$$

의 근이므로, $\alpha+\beta = 2a,\ \alpha\beta = a^2 - db^2$.

α가 **대수적 정수**이면,

$$\mathrm{Tr}(\alpha) = \alpha+\beta, \quad N(\alpha) = \alpha\beta$$

가 항상 정수입니다.

따라서 $\mathrm{Tr}(\alpha^n) = \alpha^n + \beta^n = k_n$도 정수입니다.

4 점화식으로 k_n 만들기

$$k_0 = 2, \quad k_1 = 2a, \quad k_{n+2} = (2a)k_{n+1} - (a^2 - db^2)k_n.$$

이 점화식으로 정수만 써서 k_n을 구할 수 있고, α^n의 근접 정수는 바로 이 k_n입니다.

5 Pell 방정식과의 연결

Pell 방정식

$$x^2 - dy^2 = \pm 1$$

에 정수해 (x_1, y_1)가 있으면,

$$\alpha = x_1 + y_1\sqrt{d}$$

는 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$의 단위입니다.

그 켤레는 $\beta = x_1 - y_1\sqrt{d}$, $|\beta| = \frac{1}{\alpha} < 1$ 이므로, $\alpha^n + \beta^n \in \mathbb{Z}$, $|\alpha^n - k_n| = |\beta|^n$.

이게 바로 **거의 정수(almost integer)** 현상이에요.

6 왜 1.98은 안 되는가?

- $1.98 = \frac{99}{50}$은 **유리수**, 즉 어떤 $\sqrt{d}$와의 켤레 구조가 없음.
- $\alpha^n = (99/50)^n = 99^n/50^n$ 은 단순한 분수 형태이고 분모가 절대 약분되지 않으므로 정수화될 수 없음.

- 소수부 $(1.98)^n \bmod 1$은 **거의 균등분포(equidistributed)** 로 퍼짐. 정수 근접은 단지 "우연"일 뿐 구조적 이유가 없습니다.

7 요약

1. $\alpha = a + b\sqrt{d}$가 정수에 근접하려면 $\alpha\beta = \pm 1,\ \alpha > 1,\ |\beta| < 1.$
2. 이 조건을 만족하면 $\alpha^n + \beta^n$은 항상 정수이고, α^n은 그 정수에 지수적으로 가까움.
3. 특히 $|\beta| < 1/2$이면 **모든 n**에서 반올림이 정확함.
4. 유리수(예: 1.98)는 이런 구조가 없으므로 "almost integer"가 될 수 없음.

8 예시

예시	d	$N(\alpha)$	$\lvert\beta\rvert$	**almost integer 성질**
$3 + 2\sqrt{2}$	2	1	0.1716	항상 정수 근접
$2 + \sqrt{3}$	3	1	0.2679	항상 정수 근접
$5 + 2\sqrt{6}$	6	1	0.1010	항상 정수 근접
$6 + \sqrt{37}$	37	-1	0.0828	항상 정수 근접
$1.98 = \frac{99}{50}$	–	–	–	유리수, 구조 없음

예시 $d \in \{2, 3, 6, 37\}$에 대해

$$\alpha = a + b\sqrt{d}, \quad \beta = a - b\sqrt{d}, \quad k_n = \alpha^n + \beta^n \in \mathbb{Z}, \quad \alpha^n = k_n - \beta^n, \quad |\alpha^n - k_n| = |\beta|^n$$

을 실제로 "보여줄"게. 아래 수들 모두 $|\beta| < \frac{1}{2}$라서 **모든** $n \geq 1$에서 $\mathrm{round}(\alpha^n) = k_n$가 성립한다.

예시 1) $d = 2,\ \alpha = 3 + 2\sqrt{2}$

$$a = 3,\ b = 2,\ \beta = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.17157288, \quad k_{n+2} = 6k_{n+1} - k_n,\ k_0 = 2,\ k_1 = 6.$$

n	k_n	$\lvert\beta\rvert^n$
1	6	1.7157×10^{-1}
2	34	2.944×10^{-2}
3	198	5.05×10^{-3}
4	1154	8.67×10^{-4}
5	6726	1.49×10^{-4}

예시 2) $d = 3,\ \alpha = 2 + \sqrt{3}$

$$a = 2,\ b = 1,\ \beta = 2 - \sqrt{3} \approx 0.26794919, \quad k_{n+2} = 4k_{n+1} - k_n,\ k_0 = 2,\ k_1 = 4.$$

n	k_n	$\lvert\beta\rvert^n$
1	4	2.6795×10^{-1}
2	14	7.18×10^{-2}
3	52	1.92×10^{-2}
4	194	5.16×10^{-3}
5	724	1.39×10^{-3}

예시 3) $d = 6,\ \alpha = 5 + 2\sqrt{6}$

$$a = 5,\ b = 2,\ \beta = 5 - 2\sqrt{6} \approx 0.10102051, \quad k_{n+2} = 10k_{n+1} - k_n,\ k_0 = 2,\ k_1 = 10.$$

n	k_n	$\|\beta\|^n$
1	10	1.0102×10^{-1}
2	98	1.020×10^{-2}
3	970	1.03×10^{-3}
4	9602	1.05×10^{-4}
5	95150	1.06×10^{-5}

예시 4) $d = 37,\ \alpha = 6 + \sqrt{37}$

$a = 6,\ b = 1,\ \beta = 6 - \sqrt{37} \approx -0.08276253\ (\ |\beta| = 0.08276253), \quad k_{n+2} = 12k_{n+1} + k_n,\ k_0 = 2,\ k_1 = 12.$

n	k_n	$\|\beta\|^n$
1	12	8.276×10^{-2}
2	146	6.85×10^{-3}
3	1764	5.67×10^{-4}
4	21314	4.69×10^{-5}
5	257532	3.87×10^{-6}

해설 요약

- 위 네 케이스는 모두 $N(\alpha) = a^2 - db^2 = \pm 1$ (단위)이고 $\alpha > 1 \Rightarrow |\beta| < 1$.
- 따라서 $k_n = \alpha^n + \beta^n \in \mathbb{Z}$이며, α^n의 최근접 정수는 k_n.
- 오차는 정확히 $|\beta|^n$로 **지수적**으로 감소. 위 표의 $|\beta|^n$ 열이 그 수치다.

원하면 특정 d를 지정해서, 그 d의 **기본 단위**(Pell 해)부터 잡고 k_n과 $|\beta|^n$을 더 길게 n까지 전개해 줄게.