이건 아주 핵심적인 통찰이에요. 핵심은 "**1.98은 유리수이고**", $(6+\sqrt{37})$은 **대수적 수**(algebraic number)이자 **이차수체의 단위**(unit) 라는 점입니다. 이 두 세계는 완전히 다른 구조를 가집니다.

아래에서 단계적으로 설명할게요.

1. $(6+\sqrt{37})$은 "이차수체 단위(unit of quadratic field)"

이 수는 $\mathbb{Q}(\sqrt{37})$ 라는 **이차수체**에 속해요. 그 켤레는 $(6-\sqrt{37})$이고, 둘의 곱은

$$(6+\sqrt{37})(6-\sqrt{37}) = 36 - 37 = -1.$$

즉,

$$\alpha = 6+\sqrt{37}, \quad \beta = 6-\sqrt{37}, \quad \alpha\beta = -1.$$

이 성질 때문에 α는 **Pell 방정식** $x^2 - 37y^2 = -1$의 근과 관련된 수입니다. 이 수의 거듭제곱은 다음 꼴로 전개됩니다:

$$\alpha^n = A_n + B_n\sqrt{37}, \quad \beta^n = A_n - B_n\sqrt{37},$$

여기서 A_n, B_n은 **모두 정수**입니다.

그리고 $\alpha^n + \beta^n = 2A_n \in \mathbb{Z}$, β^n의 절댓값은 $|6-\sqrt{37}| \approx 0.0827 < 1$.

즉,

$$\alpha^n = \underbrace{(\text{정수})}_{k_n} - \underbrace{\beta^n}_{\text{매우 작음}},$$

그래서 항상 정수에 **엄청 가깝습니다**. 이걸 "**almost integer**" 현상이라고 부릅니다.

2. 1.98은 유리수, 켤레가 없다

$1.98 = \dfrac{99}{50}$은 유리수라서, 어떤 "켤레"나 "대수적 구조"가 없습니다. 즉, 1.98의 거듭제곱은 단순히

$$(1.98)^n = \frac{99^n}{50^n}$$

이고, 이건 **정수/정수** 꼴이지만 분모 50^n이 절대 약분되지 않으므로 정수가 되지 않습니다.

게다가, 소수부를 보면

$$(1.98)^n \bmod 1$$

은 규칙성을 잃고 **거의 균등분포 (equidistributed)** 상태가 됩니다. 즉, 어떤 n에서는 우연히 정수 근처에 갈 수 있지만, 그런 일이 반복적이거나 구조적으로 일어나지 않습니다.

3. 왜 이렇게 다를까? – "켤레 구조 vs 단순 거듭제곱"

구분	구조	켤레 존재	곱	almost integer	예시
$(6+\sqrt{37})$	이차수체 단위	O: $(6-\sqrt{37})$	1	매우 높음 (항상 정수 근처)	$(6+\sqrt{37})$, $(3+2\sqrt{2})$
$(1.98 = 99/50)$	유리수	X: 없음	–	낮음 (우연적)	$1.5, 1.98, 1.01$

이차수체 단위는 "켤레의 절댓값이 1보다 작음"을 이용해 큰 항 α^n과 작은 항 β^n의 차이로 **정수 근접 구조**를 형성합니다. 유리수는 그런 켤레항이 없기 때문에 그런 구조가 전혀 생기지 않습니다.

4. 일반화된 관점

이 현상은 Pell 방정식과 직접 연결됩니다:

$$x^2 - Dy^2 = \pm 1.$$

그 해 (x_1, y_1)가 있으면, $\alpha = x_1 + y_1\sqrt{D}$의 거듭제곱은 항상

$$\alpha^n = A_n + B_n\sqrt{D}, \quad A_n, B_n \in \mathbb{Z}.$$

따라서 α^n의 정수 부분은 언제나 A_n이고, 오차는 $|B_n\sqrt{D} - (\text{정수})|$ 형태로 작아집니다.
이게 바로 "정수에 점점 가까워지는 대수적 수"의 수학적 구조입니다.

요약하면:

- $(6+\sqrt{37})$은 **Pell 방정식으로부터 오는 대수적 단위**라서 α^n이 정수에 지수적으로 가까워집니다.
- 1.98은 **단순 유리수**라서 그런 대칭적 구조가 전혀 없고, 정수 근접은 우연적입니다.

원하시면 제가 "almost integer"를 만드는 수들의 일반형 $(a+b\sqrt{d})$의 조건을 수식으로 정리하고, a, b, d가 어떤 관계를 가져야 하는지도 단계적으로 보여드릴까요? (이건 Pell 이론과 Diophantine 근사에 바로 연결됩니다.)