제 2 교시

수학 영역 (가형)

5지 선다형(1 ~ 21)

1. $(\sqrt[3]{8})^2$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 전체집합 U의 두 부분집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{4, 5, 6\}$에 대하여 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

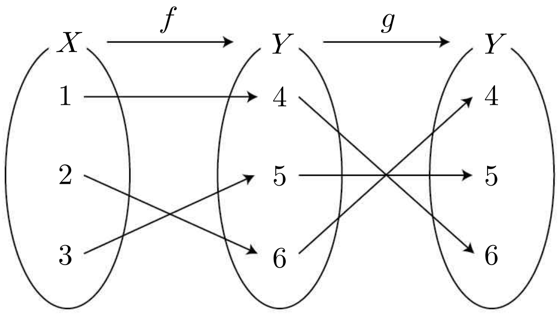
3. $\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2}{(n+1)(n+2)}$의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

4. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 7$, $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+b_k)=38$일 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$의 값은? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

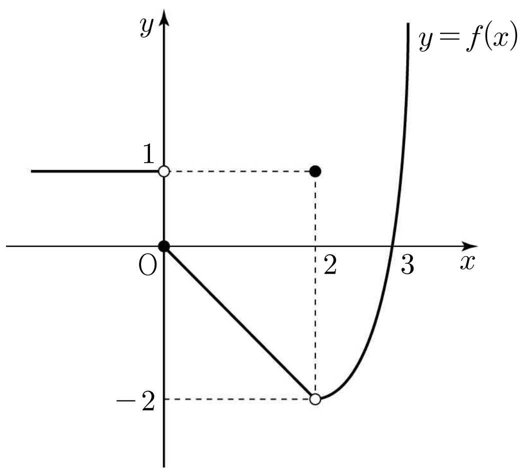
5. 그림은 두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to Y$를 나타낸 것이다.



$(f^{-1} \circ g)(4)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 2} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

7. 함수 $y=\frac{ax}{2x-1}$ $(a \neq 0)$의 그래프의 두 점근선이 만나는 점의 좌표가 $\left(b, \frac{1}{2}\right)$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

8. 실수 x에 대한 두 조건

$p : x^2 - 7x + 10 \le 0,$

$q : (x+1)(x-a) \le 0$

에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 자연수 a의 최솟값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

9. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$의 부분집합 A에 대하여

$\{1, 2\} \cap A \ne \varnothing$

을 만족시키는 모든 집합 A의 개수는? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

10. 좌표평면에서 실수 a에 대하여 곡선 $y = \sqrt{x+a}$가 두 점 $(2, 3)$, $(3, 2)$를 이은 선분과 만나기 위한 a의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

11. 어느 학급 전체 학생 30명이 있다. 이 학급의 학생들 중 방과후 수업으로 수학을 신청한 학생이 24명, 영어를 신청한 학생이 15명이라 하자. 이 학급의 학생 중에서 수학과 영어를 모두 신청한 학생의 수의 최댓값과 최솟값의 합은? [3점]

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

12. 함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x-2)}{x-2} = 15$를 만족시킬 때, $\lim_{x \to 2} \frac{2xf(x-2)}{x^2+x-6}$의 값은? [3점]

① 12 ② 10 ③ 8 ④ 6 ⑤ 4

13. $k<0$인 실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^2-2x+k\ (x \geq 1)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 만나는 점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 POH의 넓이가 8일 때, k의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

14. 다음은 상용로그표의 일부이다.

수	···	7	8	9
⋮		⋮	⋮	⋮
5.9	···	.7760	.7767	.7774
6.0	···	.7832	.7839	.7846
6.1	···	.7903	.7910	.7917

이 표를 이용하여 구한 $\log 607+\log 0.607$의 값은? [4점]

① 1.5664 ② 2.0664 ③ 2.5664 ④ 3.0664 ⑤ 3.5664

15. 수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = n(n+1)(n+2)$$

를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [4점]

① 185 ② 195 ③ 205 ④ 215 ⑤ 225

16. 1보다 큰 실수 a에 대하여 직선 $x=a$가 두 함수 $y=\frac{1}{x-1}$, $y=-4x$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 선분 PQ의 길이의 최솟값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

17. $a_1=1,\ a_2=-1,\ a_3=4$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$n(n-2)a_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}a_i$$

를 만족시킨다. 다음은

$$a_n=\frac{8}{(n-1)(n-2)}\quad (n\geq 3)$$

임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(ⅰ) $n=3$일 때, $a_3=4=\dfrac{8}{(3-1)(3-2)}$이므로 성립한다.

(ⅱ) $n=k\ (k\geq 3)$일 때, 성립한다고 가정하면

$$a_k=\frac{8}{(k-1)(k-2)}$$

이다.

$$\begin{aligned}k(k-2)a_{k+1}&=\sum_{i=1}^{k}a_i=a_k+\sum_{i=1}^{k-1}a_i\\&=a_k+(k-1)(k-3)a_k\\&=a_k\times\boxed{\text{(가)}}\\&=\frac{8}{(k-1)(k-2)}\times\boxed{\text{(가)}}\\&=\frac{\boxed{\text{(나)}}}{k-1}\end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$a_{k+1}=\frac{1}{k(k-2)}\times\frac{\boxed{\text{(나)}}}{k-1}=\frac{8}{\boxed{\text{(다)}}}$$

이다. 따라서 $n=k+1$일 때 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n\geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=\dfrac{8}{(n-1)(n-2)}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k),\ g(k),\ h(k)$라 할 때, $\dfrac{f(13)\times g(14)}{h(12)}$의 값은? [4점]

① 88 ② 96 ③ 104 ④ 112 ⑤ 120

18. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여

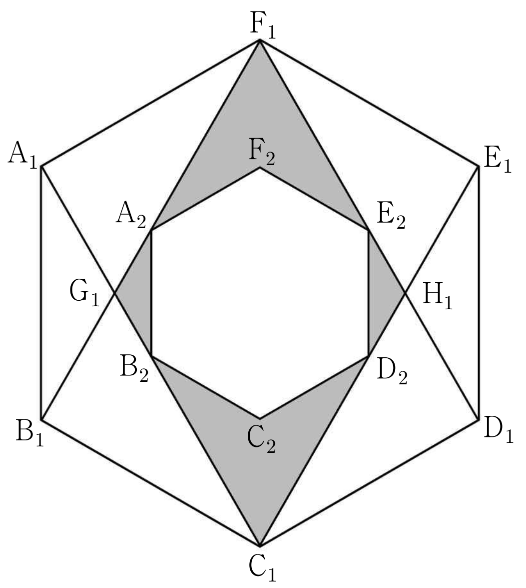
직선 $3x-4y+4^n=0$과 x축, y축에 동시에 접하면서 원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있는 두 원의 반지름의 길이의 합을

a_n이라 하자. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n+1}$의 값은? [4점]

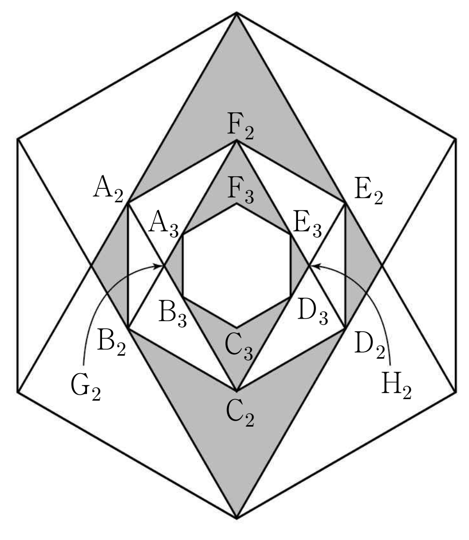
① $\dfrac{5}{12}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{7}{12}$ ④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{3}{4}$

19. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$이 있다. 선분 A_1C_1과 선분 B_1F_1의 교점을 G_1, 선분 C_1E_1과 선분 D_1F_1의 교점을 H_1이라 하고, 선분 B_1F_1과 선분 A_1C_1의 중점을 각각 A_2, B_2라 하자. 사각형 $F_1G_1C_1H_1$의 내부에 선분 A_2B_2를 한 변으로 하는 정육각형을 그리고, 이 정육각형의 나머지 네 꼭짓점을 C_2, D_2, E_2, F_2라 하자.
사각형 $F_1G_1C_1H_1$의 내부와 정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 A_2C_2와 선분 B_2F_2의 교점을 G_2, 선분 C_2E_2와 선분 D_2F_2의 교점을 H_2라 하고, 선분 B_2F_2와 선분 A_2C_2의 중점을 각각 A_3, B_3이라 하자.
사각형 $F_2G_2C_2H_2$의 내부에 선분 A_3B_3을 한 변으로 하는 정육각형을 그리고, 이 정육각형의 나머지 네 꼭짓점을 C_3, D_3, E_3, F_3이라 하자. 사각형 $F_2G_2C_2H_2$의 내부와 정육각형 $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{53}{9}\sqrt{3}$ ② $\frac{56}{9}\sqrt{3}$ ③ $\frac{59}{9}\sqrt{3}$
④ $\frac{62}{9}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{65}{9}\sqrt{3}$

20. 자연수 n에 대하여 $n+m-1$이 소수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 m을 $f(n)$이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(10)=2$
ㄴ. $f(n)=5$이면 $f(n+4)=1$이다.
ㄷ. 5 이상의 자연수 n에 대하여
$f(n)=1$이고 $f(n-1)<f(n-2)$이면 $f(n-3)=4$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 함수 $f(x)=\dfrac{x-1}{2x-6}$ 과 3 이상의 자연수 k에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|f(3-a)|^{n+1}}{2^n+|1-f(3+a)|^n}=k$$

를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 $g(k)$라 하자. $\sum_{k=3}^{17} g(k)$의 값은? [4점]

① $-\dfrac{2}{7}$ ② $-\dfrac{12}{35}$ ③ $-\dfrac{2}{5}$ ④ $-\dfrac{16}{35}$ ⑤ $-\dfrac{18}{35}$

단답형(22 ~ 30)

22. $\lim_{x\to 1}(x^2+3x+1)$의 값을 구하시오. [3점]

23. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=4,\ a_4-a_2=6$$

일 때, a_5의 값을 구하시오. [3점]

24. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{5n}{n+2}\right) = 6$일 때, $\lim_{n\to\infty}(4a_n+3)$의 값을 구하시오. [3점]

25. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$a_n = $(자연수 n을 3으로 나누었을 때의 몫),

$b_n = (-1)^{n-1} \times 5^{a_n}$

일 때, $\sum_{k=1}^{9} b_k$의 값을 구하시오. [3점]

26. 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4) = f(x)$를 만족시키고,

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & (-2 \le x < -1) \\ x & (-1 \le x < 1) \\ -x+2 & (1 \le x < 2) \end{cases}$$

이다. 방정식 $f(x) = \frac{1}{n}x$의 서로 다른 실근의 개수가 11이 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

27. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x(x-2) & (x \le 1) \\ x(x-2)+16 & (x>1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)\{f(x)-a\}$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오. [4점]

28. 좌표평면에서 2 이상의 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$이 함수 $y=(x+2)^2\ (x \ge -2)$의 그래프와 만나는 점의 x좌표를 a_n이라 하자. a_n의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $F(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{20} F(n)$의 값을 구하시오. [4점]

29. 자연수 k에 대하여 집합 A_k를

$$A_k = \left\{ \frac{b}{a} \,\middle|\, \log_a b = \frac{k}{2},\ a\text{와 } b\text{는 2 이상 100 이하의 자연수} \right\}$$

라 할 때, $n(A_3)+n(A_4)$의 값을 구하시오. [4점]

30. 양의 실수 k와 함수 $f(x)=ax(x-b)$ (a, b는 자연수)에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<b) \\ kf(x-b) & (x \ge b) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(6)=-8$
(나) 방정식 $|g(x)|=b$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

실수 m에 대하여 직선 $y=mx-1$이 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $h(m)$이라 하자.
함수 $h(m)$에 대하여 $\lim_{m \to t-} h(m) + \lim_{m \to t+} h(m) = 6$을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은 $p+q\sqrt{14}$이다.
$12(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.