



제 26 회 최종시험 첫째날
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2013년 3월 23일 (오후); 제한시간 4시간 30분; 문항당 7점

1. 삼각형 ABC 가 $\angle B > \angle C$ 를 만족하고, 변 AC 위의 점 D 는 $\angle ABD = \angle C$ 를 만족한다. 삼각형 ABC 의 내심을 I 라고 할 때, 삼각형 CDI 의 외접원과 직선 AI 의 교점 $E(\neq I)$ 를 지나고 AB 에 평행한 직선이 직선 BD 와 만나는 점을 P 라 하자. 삼각형 ABD 의 내심을 J , A 의 I 에 대한 대칭점을 A' 이라 하고 직선 JP 와 직선 $A'C$ 가 점 Q 에서 만날 때, $QJ = QA'$ 임을 보여라.

2. 다음 두 조건을 만족하는 함수 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 를 모두 구하여라.

(i) 임의의 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이다.

(ii) 식 $ab + bc + cd = 0$ 을 만족하는 실수 a, b, c, d 에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$f(a - b) + f(c - d) = f(a) + f(b + c) + f(d)$$

3. 양의 정수 $n(\geq 2)$ 에 대하여, $1 \leq i < j \leq n$ 이고, i 가 j 의 약수인 모든 정수의 순서쌍 (i, j) 들의 집합을 T 라 하자. 음 아닌 실수 x_1, x_2, \dots, x_n 이 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ 을 만족할 때 다음 식의 최댓값을 n 에 대한 함수로 나타내어라.

$$\sum_{(i,j) \in T} x_i x_j$$