

2014년 5월 24일. 제한시간 4시간

- 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
- 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
- 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 “7” 일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
- 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.
- 문제 1~4 번은 각 4 점, 문제 17~20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 카드 여섯 장이 있다. 이 중 다섯 장의 카드를 나열하여 만들 수 있는 다섯 자리 수 중 6의 배수의 개수를 구하여라.

2. 소수 p 와 정수 x, y 가 $4xy = p(p + 2x + 2y)$ 를 만족할 때, $p^2 + x^2 + y^2$ 의 값이 될 수 있는 수 중 가장 큰 것을 구하여라.

3. 실수 a, b, c 가 다음 부등식을 만족할 때, $\frac{1}{abc}$ 의 값을 구하여라.

$$a^2 + 2b^2 + 2c^2 + b^2c^2 + 1 \leq 2(abc + b + c)$$

4. 각 C 가 90° 인 직각삼각형 ABC 가 있다. 변 AB 위의 점 M 을 중심으로 하고 두 변 AC, BC 와 모두 접하는 원의 반지름이 12이다. 변 AB 의 B 쪽으로의 연장선 위의 점 N 을 중심으로 하고 점 B 를 지나며 직선 AC 와 접하는 원이 직선 AB 와 만나는 점을 D ($\neq B$)라 하자. $\overline{AM} = 15$ 일 때, 선분 BD 의 길이를 구하여라.

5. 집합 $\{1, 2, 3, \dots, 7\}$ 의 부분집합 중에서 연속한 4 개의 수를 포함한 것의 개수를 구하여라.

6. 양의 정수 a, b, c 가 $a + b + c + 9 = ab + bc + ca$ 를 만족할 때, abc 의 값이 될 수 있는 수 중 가장 큰 것을 구하여라.

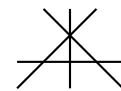
7. 다음 등식을 만족하는 정수의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하여라.

$$(a^2 + b^4 + c^6)(a^4 + b^6 + c^2)(a^6 + b^2 + c^4) = 27a^4b^4c^4$$

8. 볼록사각형 $ABCD$ 가 $\overline{AB} = 15, \overline{BC} = 16, \overline{CD} = 17, \overline{DA} = 18$ 을 만족한다. 삼각형 ABC, BCD, CDA, DAB 의 무게중심을 각각 I, J, K, L 이라 할 때, 사각형 $IJKL$ 의 둘레의 길이를 구하여라.

9. 삼각형 ABC 의 각 B 는 둔각이고 $\overline{BC} = 90$ 이다. 변 AC 의 중점을 M 이라 할 때, 선분 BM 을 지름으로 하는 원이 직선 AB, BC 와 각각 점 K ($\neq B$), L ($\neq B$)에서 만난다. $\overline{BL} = 30, \overline{ML} = 20$ 일 때, 선분 AK 의 길이를 구하여라. (단, L 은 선분 BC 위에 있다.)

10. 평면 위에 평행한 서로 다른 10개의 직선이 주어져 있다. 10개의 직선을 더 그려서 만들 수 있는 삼각형의 최대 개수를 구하여라. (예를 들어, 아래 그림에서 삼각형의 갯수는 3이다.)



11. 다음 정수를 107로 나눈 나머지를 구하여라.

$$106! \times \left(\frac{1}{3 \times 104} + \frac{1}{4 \times 103} + \frac{1}{5 \times 102} + \cdots + \frac{1}{102 \times 5} + \frac{1}{103 \times 4} + \frac{1}{104 \times 3} \right)$$

(단, $106! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 106$)

12. 총 합이 80인 10개의 실수 a_1, a_2, \dots, a_{10} 중 5보다 큰 수들의 합이 60일 때

$$a_1 + 2a_2 + \cdots + 10a_{10}$$

의 최댓값과 최솟값의 차를 구하여라.

13. 내심이 I 인 삼각형 ABC 의 내접원이 변 BC, AC 와 접하는 점을 각각 D, E 라 하고, 삼각형 IBC 와 IAC 의 외심을 각각 U, V 라 하자. 점 D 가 선분 UV 위에 있고 선분 BV 와 변 AC 가 점 K 에서 만난다. $\overline{BD} = 32$, $\overline{KE} = 18$ 일 때, 삼각형 ABC 의 내접원의 반지름을 구하여라.

14. 갑과 을이 게임을 반복해서 한다. 어느 한 사람의 이긴 횟수가 진 횟수보다 3만큼 크면 그 사람이 우승하고 더 이상 게임을 하지 않는다. 예를 들어 을이 4승 2패인 상태에서 을이 다음 게임을 이기면 을이 우승한다. 0승 0패에서 게임을 시작하여 7승 4패로 을이 우승하는 경우의 수를 구하여라. 단, 각 게임에서 비기는 경우는 없다.

15. 양의 정수 m, n 에 대하여 $2m^2 + mn + 3n^2$ 이 1017의 배수일 때, $m + n$ 의 값이 될 수 있는 수 중 가장 작은 것을 구하여라.

16. 실수 x, y, z 가 $0 \leq x, y, z \leq 30$ 을 만족할 때,

$$xy - 3y^2 - xz + 5yz - 2z^2$$

의 값이 될 수 있는 수 중 가장 큰 것을 구하여라.

17. 정수 $(m+4 \times 41)(m^2+4^2 \times 41^2)$ 이 어떤 정수의 제곱이 되도록 하는 양의 홀수 m 중 가장 작은 것을 구하여라.

18. 실수 a, b, c 가 $a + b + c = 0$, $abc \neq 0$ 을 만족할 때,

$$-8abc \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^3$$

의 값이 될 수 있는 수 중 가장 작은 것을 구하여라.

19. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6으로 만들 수 있는 7자리 양의 정수 중 $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 에 대해 왼쪽에서 i 번째 자리의 숫자는 $i+1$ 이하이면서, 숫자 1은 항상 짹수 개씩 연이어 나타나는 것의 개수를 구하여라. 예를 들어 2323232, 2111133, 1111211은 세지만, 6543222, 2111113, 1113114는 세지 않는다.

20. 삼각형 ABC 에서 변 BC 의 점 B 쪽으로의 연장선 위에 점 D 를 $\overline{AB} = \overline{BD}$ 가 되도록 잡자. 각 C 의 외각의 이등분선이 직선 AD 와 점 K 에서 만나고, $\overline{AK} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$ 이다. 변 AC 의 점 C 쪽으로의 연장선 위에 점 E 를 $\overline{BC} = \overline{CE}$ 가 되도록 잡자. 직선 AD 와 삼각형 ABC 의 외접원의 교점을 $L(\neq A)$ 이라 할 때, 세 점 B, E, L 이 일직선 위에 있다. $\angle CAB = x^\circ$ ($0 < x < 180$)라 할 때, x 를 넘지 않는 가장 큰 정수를 구하여라.