

제 23회 한국수학올림피아드 1차시험(중등부)

유형 가

2009년 5월 23일; 제한시간 4시간

1. 답안지에 수험번호와 성명, 지원분야, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 “7” 일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1~4 번은 각 4 점, 문제 17~20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 방정식 $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여

$$xy(x-y)(x-2y)$$

의 최댓값을 구하여라.

2. 직사각형 $ABCD$ 에서 $AD = 400, AB = 222$ 이다. 두 변 AD 와 BC 의 중점을 각각 E, F 라 하고 BF 의 중점을 G 라 하자. 선분 EG 와 AF 의 교점을 X 라 하고 EF 와 XD 의 교점을 H 라고 할 때, HF 의 길이를 구하여라.

3. 연립방정식

$$\frac{x(y-1)}{2x+y-1} = 3, \quad \frac{x(z+1)}{x+2z+2} = 3, \quad \frac{(y-1)(z+1)}{2y+z-1} = 3$$

을 만족하는 x, y, z 에 대하여 xyz 의 값을 구하여라.

4. 외심이 O 인 예각삼각형 ABC 가 있다. 점 B 에서 변 AC 에 내린 수선의 연장선 위에 점 D 를 $BC = CD$ 가 되도록 잡고 직선 AO 와 CD 의 교점을 E 라 하자.
 $\angle AED = 35^\circ, \angle BDE = 30^\circ, \angle ABC = x^\circ$ 일 때, x 를 구하여라.

5. 다섯 개의 수 1, 2, 3, 4, 5를 모두 한번씩 사용하여 만든 다섯 자리 양의 정수 중, 만의 자리 수가 1, 2가 아니고 일의 자리 수가 1, 5가 아닌 것의 개수를 구하여라.
6. 정30각형의 꼭짓점 중에서 서로 다른 세 점을 택하여 이 점들을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 만들고자 한다. 이런 삼각형 중 내각의 크기가 모두 120° 이하인 삼각형의 개수를 구하여라.
7. 각 자리의 수가 모두 1 또는 2 또는 3인 6자리 양의 정수 중, 1도 이웃한 자리에 연속하여 나타나지 않고 2도 이웃한 자리에 연속하여 나타나지 않는 것의 개수를 구하여라.
8. 소수 p, r ($p > r$)에 대하여 $p^r + 9r^6$ 이 정수의 제곱일 때, $p + r$ 의 값을 구하여라.
9. 다음 수를 넘지 않는 가장 큰 정수를 구하여라.

$$\sqrt{900+1} + \sqrt{900+3} + \sqrt{900+5} + \cdots + \sqrt{900+59}$$

10. 분수 $\frac{a}{b}$ (a, b 는 서로 소인 양의 정수)는 $\frac{10}{57}$ 보다 크고 $\frac{5}{28}$ 보다 작은 분수 중 분모가 가장 작은 것이다. ab 의 값을 구하여라.

11. 양의 정수 m 과 홀수 n 이 방정식 $m + \frac{1}{m} = 6 \left(\frac{n}{8} + \frac{8}{n} \right)$ 을 만족할 때, mn 의 값을 구하여라.
12. 볼록오각형 $ABCDE$ 에서 BE 와 BC 가 각각 CD 와 AD 에 평행하고 $BC = ED$, $AB = CD$ 이다. $\angle BCD = 130^\circ$ 이고 $\angle ACE = x^\circ$ 일 때, x 를 구하여라.
13. 정삼각형 ABC 의 변 BC 위의 점 D 에 대하여, 직선 AD 가 이 정삼각형의 외접원과 만나는 점을 P 라 하자. $BP = 25$, $PC = 100$ 일 때, AD 의 길이를 구하여라.
14. 넓이가 48 인 정삼각형 ABC 에서 변 AC 의 중점을 D 라 하고 수심을 H 라 하자. 선분 AD 위의 점 P 를 $\angle DPH = 60^\circ$ 가 되도록 잡고, 삼각형 APH 의 외접원이 변 AB 와 만나는 점을 $Q(Q \neq A)$, 삼각형 BQH 의 외접원이 변 BC 와 만나는 점을 $R(R \neq B)$ 라고 할 때, 삼각형 PQR 의 넓이를 구하여라.
15. 양의 정수 n 은 두 자리 수이고 n^2 의 각 자릿수의 합이 n 의 각 자릿수의 합의 제곱과 같다. 이러한 수 n 의 개수를 구하여라.
16. 양의 정수 x, y 에 대하여, $x^3 + y^2$ 이 7의 배수인 세 자리 수가 되도록 하는 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

17. 두 조건

$$(a^2 + 1)(x^2 + 1) + (b^2 + 1)(y^2 + 1) + (c^2 + 1)(z^2 + 1) = 4(ax + by + cz),$$

$$1 < (a+1)(x+1) + (b+1)(y+1) + (c+1)(z+1) < 9$$

을 모두 만족하는 실수 a, b, c, x, y, z 대하여

$$(a+1)^2(x+1)^2 + (b+1)^2(y+1)^2 + (c+1)^2(z+1)^2$$

의 값이 될 수 있는 모든 수의 합을 구하여라.

- 18.** 방정식 $x(x+5) = y(y+2)$ 를 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

- 19.** 한 원 위에 시계반대방향으로 점 A, B, C, D, E, F 가 순서대로 놓여있다. 점 A 에서 점 F 로 향한 반직선 AF 와 점 C 에서 점 E 로 향한 반직선 CE 와의 교점을 G , 점 B 에서 점 F 로 향한 반직선 BF 와 점 D 에서 점 E 로 향한 반직선 DE 와의 교점을 H 라고 하자. $AB = CD, AF = 1, DE = 2, AD = 4EF$ 일 때, $\frac{100HF}{GE}$ 의 값을 구하여라.

- 20.** 일정한 간격으로 가로로 m 개, 세로로 n 개의 줄이 그어져 있는 판 위의 mn 개의 교차점 위에 빠짐없이 검은 돌 혹은 흰 돌을 1개씩 놓기로 한다. 가로줄의 일부와 세로줄의 일부를 변으로 하는 임의의 직사각형의 네 개의 꼭짓점 위에 놓인 돌 중에 검은 돌도 있고 흰 돌도 있도록 돌을 놓는 방법의 수를 $P(m, n)$ 이라고 하자. 다음 값을 1000 으로 나눈 나머지를 구하여라.

$$P(2, 7) + P(3, 7) + P(4, 7)$$