

2024년 11월 9일 (오전), 제한시간 3시간, 문항당 7점

1. 중심이 O 인 원 위에 서로 다른 세 점 A, B, X 가 있고 세 점 A, B, O 는 한 직선 위에 있지 않다. 삼각형 ABO 의 외접원을 Ω 라 할 때, 선분 AX, BX 는 원 Ω 와 각각 점 $C(\neq A), D(\neq B)$ 에서 만난다. 점 O 가 삼각형 CXD 의 수심임을 보여라.

2. 양의 정수의 수열 $\{x_n\}$ 에 대하여 $x_1 = 2$ 이고 각각의 양의 정수 n 에 대하여 $x_{n+1} - x_n \in \{0, 3\}$ 이면 $\{x_n\}$ 을 ‘개구리 수열’이라 하자. 다음 조건을 만족하는 실수 d 를 모두 구하여라.

(조건) 두 개구리 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여, $a_n = 1000 b_n$ 인 양의 정수 n 이 존재하면 $a_m = d \cdot b_m$ 인 양의 정수 m 이 존재한다.

3. 집합 S 는 평면 상의 2024개의 점들로 구성되어 있고, 이 점들 중 어떤 세 점도 한 직선 위에 있지 않다. 집합 S 에 속하는 두 점을 지나는 직선 ℓ 이 다음 조건을 만족하면 ℓ 을 ‘약한 균등 직선’이라 하자.

(조건) 직선 ℓ 이 평면을 두 개의 부분으로 나눌 때, 한 부분은 S 의 원소 중 정확히 1010개의 점을 포함하고 다른 부분은 정확히 1012개를 포함한다. (단, 각 부분은 ℓ 위의 어떤 점도 포함하지 않는다고 하자.)

집합 S 의 두 점을 지나는 직선들 중 약한 균등 직선의 개수를 $w(S)$ 라 하자. $w(S)$ 가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

4. 다음 조건을 만족하는 최고차항의 계수가 1인 k 차 정수 계수 다항식 $f(x)$ 가 존재하는 가장 작은 양의 정수 $k(\geq 2)$ 를 구하여라.

(조건) 임의의 두 정수 m, n 에 대하여, $f(m) - f(n)$ 이 31의 배수이면 $m - n$ 은 31의 배수이다.

2024년 11월 9일 (오후), 제한시간 3시간, 문항당 7점

5. 임의의 양의 실수 a_1, a_2, \dots, a_{99} 에 대하여 부등식

$$\sum_{k=1}^{99} \frac{a_{k+1}}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} < M$$

을 만족하는 가장 작은 실수 M 을 구하여라. (단, $a_{100} = a_1, a_{101} = a_2$)

6. 양의 정수 n 에 대하여 $f(n)$ 을 n 이하의 양의 정수 중 n 과 서로소인 것의 개수라 하자. 예를 들어, 10과 서로소인 10 이하의 양의 정수는 1, 3, 7, 9 이므로 $f(10) = 4$ 이다. 양의 정수 n 에 대하여 $g(n) = \left\lfloor \frac{2024}{n} \right\rfloor$ 라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $[a]$ 는 a 를 넘지 않는 최대정수)

$$\sum_{n=1}^{2024} \left(1 - (-1)^{g(n)} \right) f(n)$$

7. 예각삼각형 ABC 의 수심을 지나고 점 A 를 지나지 않는 직선 ℓ 이 직선 BC 와 점 $P (\neq B, C)$ 에서 만나고, 점 A 를 지나고 ℓ 과 수직인 직선이 삼각형 ABC 의 외접원과 점 $R (\neq A)$ 에서 만난다. 점 A, B 에서 ℓ 에 내린 수선의 발을 각각 A', B' 이라 하고, 점 A' 을 지나고 직선 BC 와 수직인 직선을 ℓ_1 , 점 B' 을 지나고 직선 CA 와 수직인 직선을 ℓ_2 라 하자. 두 직선 ℓ_1 과 ℓ_2 의 교점을 ℓ 에 대하여 대칭시킨 점을 Q 라 할 때, $\angle PQR = 90^\circ$ 임을 보여라.

8. 칠판에 10개의 수 $1, 2, \dots, 10$ 이 적혀있고, 나현이는 다음과 같은 시행을 반복한다.

(시행) 칠판에 적혀있는 10개의 수 중 서로 약수와 배수의 관계가 아닌 두 수를 골라 지우고 이 두 수의 최대공약수와 최소공배수를 칠판에 적는다.

칠판에 적혀있는 10개의 수 중 임의의 두 수가 약수와 배수의 관계를 이루면 이 시행은 그만둔다. 나현이는 위의 시행을 최대 몇 번 할 수 있겠는가?