

제 2 교시

수학 영역 [가형]

1

5지 선다형(1 ~ 21)

1. 전체집합  $U$ 의 두 부분집합  $A = \{1, 2, 5, 7\}$ ,  $B = \{3, 5, 7\}$ 에 대하여 집합  $A \cap B$ 의 모든 원소의 합은? [2점]

① 10      ② 12      ③ 14      ④ 16      ⑤ 18

2.  $\log_6 2 + \log_6 3$ 의 값은? [2점]

① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

3.  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 5)$ 의 값은? [2점]

① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

4.  $\sum_{k=1}^{30} a_k = 5$ ,  $\sum_{k=1}^{30} b_k = 20$ 일 때,  $\sum_{k=1}^{30} (a_k + 2b_k)$ 의 값은? [3점]

① 25      ② 30      ③ 35      ④ 40      ⑤ 45

5. 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 4$  일 때,  $a_6$ 의 값은?

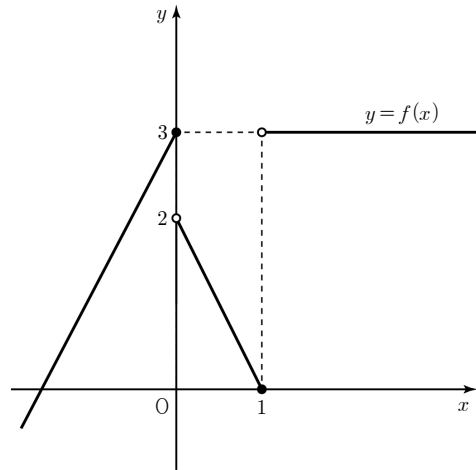
[3점]

- ① 26      ② 28      ③ 30      ④ 32      ⑤ 34

6. 정의역이  $\{x \mid -3 \leq x \leq 5\}$ 인 무리함수  $y = \sqrt{x+4} + 5$ 의 최솟값은? [3점]

- ① 5      ② 6      ③ 7      ④ 8      ⑤ 9

7. 함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① 2      ② 3      ③ 4      ④ 5      ⑤ 6

8. 전체집합  $U = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합  $A, B$ 에 대하여  $A = \{2, 3, 5, 6\}$ 일 때,  $A \cap B = \emptyset$ 을 만족시키는 집합  $B$ 의 개수는? [3점]

① 8      ② 16      ③ 32      ④ 64      ⑤ 128

10. 유리함수  $f(x) = \frac{2x+5}{x+3}$ 의 역함수  $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는

점  $(p, q)$ 에 대하여 대칭이다.  $p - q$ 의 값은? [3점]

① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

9. 실수  $x$ 에 대하여 두 조건  $p, q$ 가

$$p : 1 \leq x \leq 3 \text{ 또는 } x \geq 5,$$

$$q : x \geq \alpha$$

일 때,  $p$ 가  $q$ 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 실수  $\alpha$ 의 최솟값은? [3점]

① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

11. 집합  $X = \{-2, -1, 3\}$ 에 대하여 함수  $f: X \rightarrow X$ 가

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 2 & (x < 0) \\ 3 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 함수  $f(x)$ 가 항등함수가 되도록 하는 두 상수  $a, b$ 에 대하여  $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① -5      ② -4      ③ -3      ④ -2      ⑤ -1

12. 수강생이 35명인 어느 학원에서 모든 수강생을 대상으로 세 종류의 자격증 A, B, C의 취득 여부를 조사하였다. 자격증 A, B, C를 취득한 수강생이 각각 21명, 18명, 15명이고, 어느 자격증도 취득하지 못한 수강생이 3명이다. 이 학원의 수강생 중에서 세 자격증 A, B, C를 모두 취득한 수강생이 없을 때, 자격증 A, B, C 중에서 두 종류의 자격증만 취득한 수강생의 수는? [3점]

- ① 21      ② 22      ③ 23      ④ 24      ⑤ 25

13. 폭약에 의한 수중 폭발이 일어나면 폭발 지점에서 가스버블이 생긴다. 수면으로부터 폭발 지점까지의 깊이가  $D(\text{m})$  인 지점에서 무게가  $W(\text{kg})$  인 폭약이 폭발했을 때의 가스버블의 최대반경을  $R(\text{m})$  라고 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

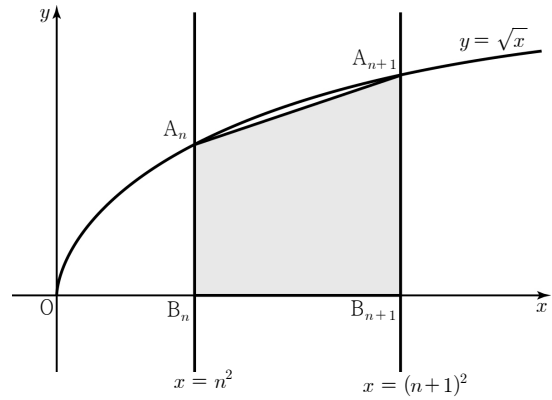
$$R = k \left( \frac{W}{D+10} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{단, } k \text{ 는 양의 상수이다.})$$

수면으로부터 깊이가  $d(\text{m})$  인 지점에서 무게가  $160\text{kg}$  인 폭약이 폭발했을 때의 가스버블의 최대반경을  $R_1(\text{m})$  이라 하고, 같은 폭발 지점에서 무게가  $p(\text{kg})$  인 폭약이 폭발했을 때의 가스버블의 최대반경을  $R_2(\text{m})$  라 하자.

$\frac{R_1}{R_2} = 2$  일 때,  $p$  의 값은? (단, 폭약의 종류는 같다.) [3점]

- ① 8                      ② 12                      ③ 16                      ④ 20                      ⑤ 24

14. 그림과 같이 자연수  $n$  에 대하여 직선  $x = n^2$  이 곡선  $y = \sqrt{x}$  와 만나는 점을  $A_n$ ,  $x$  축과 만나는 점을  $B_n$  이라 하고, 직선  $x = (n+1)^2$  이 곡선  $y = \sqrt{x}$  와 만나는 점을  $A_{n+1}$ ,  $x$  축과 만나는 점을  $B_{n+1}$  이라 하자. 사각형  $A_n B_n B_{n+1} A_{n+1}$  의 넓이를  $S_n$  이라 할 때,  $\sum_{n=1}^{10} S_n$  의 값은? [4점]

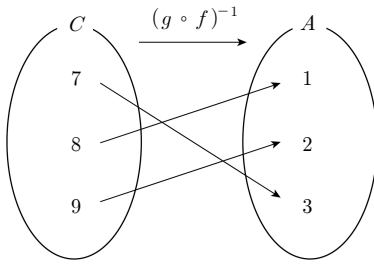


- ① 885                      ② 890                      ③ 895                      ④ 900                      ⑤ 905

## 15. 세 집합

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6\}, C = \{7, 8, 9\}$$

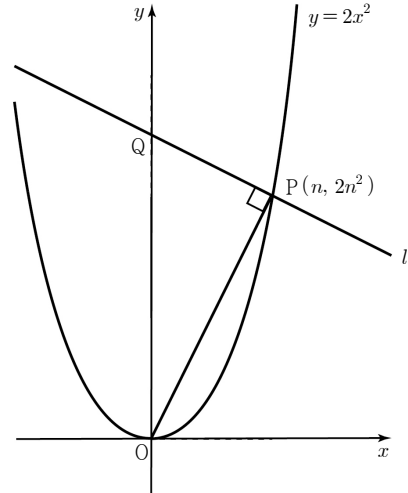
에 대하여 두 함수  $f: A \rightarrow B$ 와  $g: B \rightarrow C$ 가 일대일 대응이다.  
 함수  $(g \circ f)^{-1}: C \rightarrow A$ 가 그림과 같고  $f(1)=4$ ,  $g(6)=9$ 일 때,  
 $f(2)+g(5)$ 의 값은? [4점]



- ① 11      ② 12      ③ 13      ④ 14      ⑤ 15

16. 그림과 같이 자연수  $n$ 에 대하여 곡선  $y = 2x^2$  위의 점

$P(n, 2n^2)$ 을 지나고 선분  $OP$ 에 수직인 직선  $l$ 이  $y$  축과  
 만나는 점을  $Q$ 라고 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{OP} - \overline{OQ})$ 의 값은? (단,  $O$ 는  
 원점이다.) [4점]



- ①  $-\frac{1}{6}$       ②  $-\frac{1}{5}$       ③  $-\frac{1}{4}$       ④  $-\frac{1}{3}$       ⑤  $-\frac{1}{2}$

17. 두 집합  $A = \{3, 4\}$ ,  $B = \{-9, -3, 3, 9\}$ 에 대하여 집합  $X$ 를  $X = \{x | x^a = b, a \in A, b \in B, x \text{는 실수}\}$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점]

- <보 기>
- ㄱ.  $\sqrt[3]{-9} \in X$
- ㄴ. 집합  $X$ 의 원소의 개수는 8이다.
- ㄷ. 집합  $X$ 의 원소 중 양수인 모든 원소의 곱은  $\sqrt[3]{3^7}$ 이다.

- ① ㄱ                      ② ㄱ, ㄴ                      ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 수열  $\{a_n\}$ 의 일반항은  $a_n = \frac{1}{n}$ 일 때, 다음은 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (a_k a_{k+1})^2 = \sum_{k=1}^n (a_k)^2 + \sum_{k=1}^n (a_{k+1})^2 + 2(a_{n+1} - 1) \cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정의 일부이다.

<증명>

(i)  $n=1$ 일 때,

(좌변) = (가) = (우변)이므로 (\*)이 성립한다.

(ii)  $n=m$  ( $m \geq 1$ )일 때, (\*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m (a_k a_{k+1})^2 = \sum_{k=1}^m (a_k)^2 + \sum_{k=1}^m (a_{k+1})^2 + 2(a_{m+1} - 1) \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} (a_k a_{k+1})^2 = \sum_{k=1}^m (a_k a_{k+1})^2 + (a_{m+1} a_{m+2})^2$$

$$= \sum_{k=1}^m (a_k)^2 + \sum_{k=1}^m (a_{k+1})^2 + 2(a_{m+1} - 1) + (a_{m+1} a_{m+2})^2$$

$$= \sum_{k=1}^m (a_k)^2 + \sum_{k=1}^m (a_{k+1})^2 + 2\left(\frac{1}{m+1} - 1\right) + \left\{\frac{1}{(m+1)(m+2)}\right\}^2$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} (a_k)^2 + \sum_{k=1}^{m+1} (a_{k+1})^2 + 2\left(\frac{1}{m+1} - 1 - \text{(나)}\right)$$

⋮

따라서  $n=m+1$ 일 때도 (\*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수  $n$ 에 대하여 (\*)이 성립한다.

위의 과정에서 (가)에 알맞은 수를  $p$ , (나)에 알맞은 식을

$f(m)$ 이라 할 때,  $\frac{p}{f(14)}$ 의 값은? [4점]

- ① 60                      ② 62                      ③ 64                      ④ 66                      ⑤ 68

19. 자연수  $k$ 에 대하여

$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{k}{10}\right)^{2n+1} + \left(\frac{k}{10}\right)^n}{\left(\frac{k}{10}\right)^{2n} + \left(\frac{k}{10}\right)^n + 1}$$

이라 할 때,  $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은? [4점]

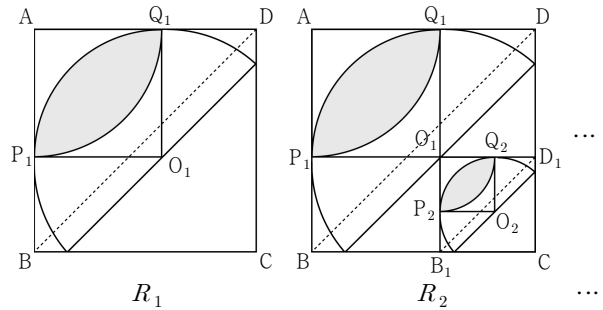
- ① 26      ② 28      ③ 30      ④ 32      ⑤ 34

20. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD의 내부에 지름의 양 끝점이 각각 변 BC, 변 CD 위에 있고, 지름이 선분 BD와 평행한 반원을 내접하게 그린다. 이 반원의 중심을  $O_1$ 이라 하고 반원이 두 변 AB, AD와 만나는 점을 각각  $P_1, Q_1$ 이라 하자. 중심이 A, 반지름이 선분  $AP_1$ , 중심각이  $\angle P_1AQ_1$ 인

부채꼴의 내부와 이 반원의 내부의 공통부분인  $\cap$  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을  $R_1$ 이라 하자.

그림  $R_1$ 에 있는 점  $O_1$ 에서 두 변 BC, CD 위에 내린 수선의 발을 각각  $B_1, D_1$ 이라 하고 네 점  $O_1, B_1, C, D_1$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형  $O_1B_1CD_1$ 을 그린다. 정사각형  $O_1B_1CD_1$ 에 그림  $R_1$ 을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는  $\cap$  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을  $R_2$ 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여  $n$ 번째 얻은 그림  $R_n$ 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를  $S_n$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = (p\sqrt{2} - q)(\pi - 2)$ 이다.

두 유리수  $p, q$ 에 대하여  $p+q$ 의 값은? [4점]



- ① 15      ② 16      ③ 17      ④ 18      ⑤ 19



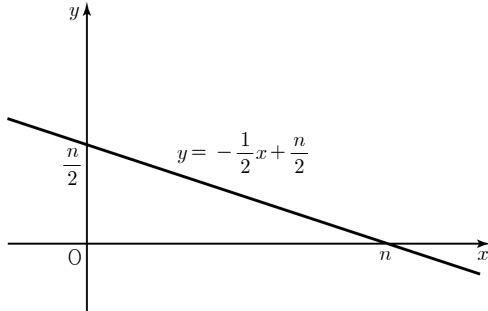
21. 좌표평면에서 자연수  $n$ 에 대하여 연립부등식

$$x \geq 0, y \geq 0, y \leq -\frac{1}{2}x + \frac{n}{2}$$

의 영역의 점 중에서  $x$ 좌표와  $y$ 좌표가 모두 정수인 점의

개수를  $a_n$ 이라 하자.  $\sum_{n=1}^{20} a_n$ 의 값은? [4점]

- ① 945    ② 946    ③ 947    ④ 948    ⑤ 949



단답형(22 ~ 30)

22. 함수  $f(x) = 2x + 3$ 에 대하여  $(f \circ f)(2)$ 의 값을 구하시오.

[3점]

23.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 8n + 10} - n)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 5) = 2$  일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 3)$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 1이 아닌 두 양수  $a, b$ 에 대하여  $x = \log_2 a, y = \log_2 b$ 라 하면  $x^2 - 4xy + y^2 = 0$ 이 성립한다.  $\log_8 a^{\frac{1}{y}} + \log_8 b^{\frac{1}{x}}$ 의 값을  $k$ 라 할 때,  $27k$ 의 값을 구하시오. [4점]

25.  $a > 1$  일 때,  $9a + \frac{1}{a-1}$ 의 최솟값을 구하시오. [3점]

27. 세 실수  $a, b, c$ 에 대하여  $3^a = 4^b = 5^c$  이고  $ac=2$  일 때,  
 $4^{ab+bc}$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 다항함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수  $a$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-5x}{x^2-4}$ 의 값이 존재한다.  
 (나)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{f(x)}-3x+1)$ 의 값이 존재한다.

$f(3)$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 일반항이  $a_n = 2n + 1$  인 등차수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  
 집합  $A_k (k = 1, 2, 3, \dots)$ 는  $A_1 = \{3, 5, 7, 9, 11\}$  이고  
 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 집합  $A_k$ 는 수열  $\{a_n\}$ 의 항들 중  $(2k+3)$ 개의 연속한 항들을 원소로 하는 집합이다.  
 (나) 집합  $A_{k+1}$ 의 가장 작은 원소는 집합  $A_k$ 의 가장 작은 원소보다 크다.  
 (다)  $n(A_k - A_{k+1}) = 3$

예를 들어  $A_2 = \{9, 11, 13, \dots, 21\}$ 이다.  $A_{15} \cap A_p = \emptyset$ 을 만족하는 15보다 큰 자연수  $p$ 의 최솟값을 구하시오. [4점]

30. 실수  $t$ 에 대하여 정의역이  $\{x \mid 8 \leq x \leq 10\}$ 인 함수

$$f(x) = x^2 - 18x + 2|x - t| + 80$$

의 최솟값을  $g(t)$ 라 하자. 함수  $h(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \{g(t)\}^{2n}}$ 이라 할 때, 함수  $h(t)$ 가  $t = a$ 에서 불연속이 되는 모든 실수  $a$ 의 값의 합을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.