



## 제 22회 한국수학올림피아드 최종시험

2009년 3월 28일 - 제 1 일

1. 삼각형의 세 변의 길이  $a, b, c$ 에 대하여

$$A = \frac{a^2 + bc}{b+c} + \frac{b^2 + ca}{c+a} + \frac{c^2 + ab}{a+b},$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}} + \frac{1}{\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}} + \frac{1}{\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}}$$

이라 할 때,  $AB \geq 9$ 임을 보여라.

2. 각  $B$ 가 둔각인 삼각형  $ABC$ 의 외접원  $O$ 에 대하여, 점  $C$ 에서 원  $O$ 에 접하는 접선과 직선  $AB$ 의 교점을  $B_1$ , 삼각형  $AB_1C$ 의 외접원의 중심을  $O_1$ 이라 하자. 선분  $BB_1$ 의 내부의 점  $B_2$ 에서 원  $O$ 에 그은 두 접선의 접점 중에서 점  $C$ 에 가까운 점을  $C_1$ , 삼각형  $AB_2C_1$ 의 외접원의 중심을  $O_2$ 라 하자. 두 직선  $OO_2$ 와  $AO_1$ 이 직교할 때, 다섯 개의 점  $O, O_2, O_1, C_1, C$ 가 한 원 위에 있음을 보여라.

3. 탁자 위에 흰 돌과 검은 돌이 일렬로 놓여 있다 (단, 흰 돌과 검은 돌은 각각 적어도 한 개 이상이다). 이때 다음의 행위를 “작업”이라 하자:

검은 돌을 하나 선택하여, 그 검은 돌의 양 옆에 있는 두 개의 돌(선택한 검은 돌이 양 끝에 있는 경우에는 한 개의 돌)을, 흰 돌은 검은 돌로 검은 돌은 흰 돌로 바꾼다.

이제 탁자 위에 2008 개의 흰 돌과 한 개의 검은 돌이 일렬로 놓여 있을 때, 위의 “작업”을 유한 번 시행하여 2009 개의 돌이 모두 검은 돌이 되도록 만들 수 있는 검은 돌의 처음 위치를 모두 구하여라.

\* 문항당 7점 ; 제한시간 4시간 30분 \*