



제 33회 중등부 1차시험
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2019년 5월 11일 ; 제한시간 4시간

- A. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
- B. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
- C. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 “7”일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
- D. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.
- E. 문제 1 – 4번은 각 4점, 문제 17 – 20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. 다음 식을 만족하는 모든 실수 x 들의 합을 구하여라.

$$|x - 3| - 2 = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x$$

6. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 m, n ($m < n$)의 순서쌍 (m, n) 의 개수를 구하여라.

m 이상 n 이하의 모든 정수의 합이 1111이다.

2. 여섯자리 양의 정수 $m = \overline{abcdef}$, $n = \overline{fabcde}$ 에 대하여, $4m = n$ 을 만족하는 m 중에서 가장 큰 수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(단, $0 \leq a, b, c, d, e, f \leq 9$ 인 정수에 대하여,
 $\overline{abcdef} = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f$ 이다.)

7. 예각삼각형 ABC 에서 $\overline{AB} = 96$, $\overline{AC} = 72$ 이다. 원 O 는 점 B 에서 직선 AB 에 접하고 점 C 를 지난다. 원 O 와 직선 AC 의 교점을 D ($\neq C$) 라 하자. 점 D 와 선분 AB 의 중점을 지나는 직선이 원 O 와 점 E ($\neq D$)에서 만난다. $\overline{AE} = 60$ 일 때, $10\overline{DE}$ 의 값을 구하여라.

3. 볼록사각형 $ABCD$ 가 있다. 삼각형 ABD 와 BCD 의 외접원을 각각 O_1 과 O_2 라 하자. 점 A 에서 원 O_1 의 접선과 점 C 에서 원 O_2 의 접선의 교점이 직선 BD 위에 있다. $\overline{AB} = 35$, $\overline{AD} = 20$, $\overline{CD} = 40$ 일 때, \overline{BC} 의 값을 구하여라.

8. 일의 자리의 수가 5인 다섯자리 양의 정수 중 17의 배수인 것의 개수를 구하여라.

9. 주어진 양의 정수 n 에 대하여 양의 정수 x 와 y 가 $x+2y = n$ 을 만족할 때, $x^2 + y^2$ 이 가질 수 있는 가장 작은 값을 a_n 이라 하자. 다음 식의 값을 구하여라.

$$a_5 + a_6 + a_7 + \cdots + a_{18} + a_{19}$$

4. 학생 A, B, C가 포함된 학생 10명을 2명씩 5개의 모둠으로 나눌 때, 학생 A, B, C가 모두 다른 모둠에 속하게 되는 경우의 수를 구하여라.

10. 다음 식의 값이 정수가 되도록 하는 양의 정수 n 중 가장 큰 것을 구하여라.

$$\frac{a^2 + 8b^2 + c^2}{ab + bc}$$

$$\frac{300}{2n+1} + \frac{935}{5n+1}$$



11. 삼각형 ABC 에서 $\overline{AB} = 180$ 와 $\overline{AC} = 132$ 이다. 점 D 는 변 BC 의 중점, 점 E 와 F 는 선분 AD 를 삼등분하는 점 ($\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FD}$)이고 $\overline{CF} = \overline{CD}$ 이다. 직선 CF 와 BE 의 교점을 X 라 할 때, \overline{EX} 의 값을 구하여라.

12. 빨간색 공 4개가 들어있는 상자, 노란색 공 3개가 들어있는 상자, 파란색 공 1개가 들어있는 상자가 있다. 한번에 한 상자에서 같은 색의 공을 1개 이상 꺼낸다. 훌수번 만에 세 상자에서 8개의 공을 모두 꺼내는 방법의 수를 구하여라. (단, 같은 색의 공들은 서로 구별하지 않는다.)

13. 다음 두 조건을 모두 만족하는 정수 x_1, x_2, \dots, x_n 이 존재하는 3 이상 2019 이하의 정수 n 의 개수를 구하여라.

$$(i) \text{ 모든 } i = 1, 2, \dots, n \text{ 에 대하여 } |x_i| = 1$$

$$(ii) x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = \frac{n}{2}$$

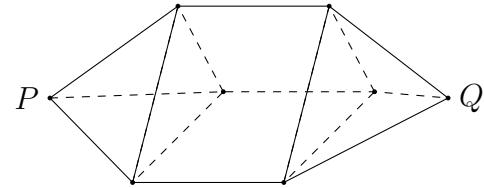
14. 60보다 작은 양의 정수 a, b, c, d, e 에 대하여

$$\frac{11^7}{60^5} = \frac{a}{60} + \frac{b}{60^2} + \frac{c}{60^3} + \frac{d}{60^4} + \frac{e}{60^5}$$

가 성립할 때, $a + b + c + d + e$ 의 값을 구하여라.

15. 각 A 가 90° 보다 큰 삼각형 ABC 의 외접원을 O 라 하자. 점 B 에서 원 O 에 접하는 직선과 점 C 에서 원 O 에 접하는 직선이 점 D 에서 만난다. 점 A 에서 원 O 에 접하는 직선과 평행하고 점 D 를 지나는 직선이 직선 AB, AC 와 만나는 점을 각각 E, F 라 하자. $\overline{EC} = 4, \overline{BD} = 5$ 일 때, \overline{CF}^2 의 값을 구하여라.

16. 다음과 같이 삼각기둥에 두 개의 정사면체를 붙여서 만든 입체가 있다. 이 입체의 꼭짓점 P 에서 꼭짓점 Q 로 모서리를 따라 이동할 때, 한번 지나간 꼭짓점은 다시 지나가지 않는다. 가능한 모든 경로의 수를 구하여라.

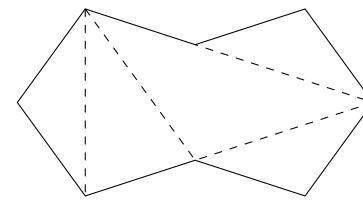


17. 두 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 = 200$ 을 만족할 때, 식 $2(x+y) - xy$ 가 가질 수 있는 최댓값과 최솟값의 차를 구하여라.

18. 세 자리 양의 정수 m, n 에 대하여 $m+n+10$ 과 $mn-1$ 이 모두 1000의 배수일 때, $|n-m|$ 의 값을 구하여라.

19. 삼각형 ABC 에서 $\overline{AC} = 440$ 이다. 점 D 는 변 AB 위의 점으로 $\overline{AD} = 1$ 이다. 삼각형 ABC 의 내심을 I 라 할 때, 직선 CI 가 삼각형 ADI 의 외접원에 접한다. 삼각형 ADI 의 외접원이 변 AC 와 점 $E(\neq A)$ 에서 만나고, 중심 I 이고 점 E 를 지나는 원이 변 AC 와 점 $F(\neq E)$ 에서 만난다. $\overline{IE} = 20$ 일 때, \overline{EF} 의 값을 구하여라.

20. 주어진 도형의 내부에 꼭짓점을 잇는 선분을 그어 도형을 몇 개의 영역으로 분할한다. 이때, 서로 다른 선분은 내부에서 만나지 않고 끝점에서만 만날 수 있다. 이렇게 나누어진 각각의 영역이 모두 삼각형이 되면 삼각분할이라 한다. 다음 그림은 합동인 정오각형 두 개를 붙인 도형의 삼각분할의 예이다.



이 도형의 삼각분할의 개수를 구하여라.



제 33회 중등부 1차시험
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2019년 5월 11일 ; 제한시간 4시간

- A. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
- B. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
- C. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 “7”일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
- D. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.
- E. 문제 1 – 4번은 각 4점, 문제 17 – 20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. 여섯자리 양의 정수 $m = \overline{abcdef}$, $n = \overline{fabcde}$ 에 대하여,
 $4m = n$ 을 만족하는 m 중에서 가장 큰 수를 1000으로
나눈 나머지를 구하여라.
(단, $0 \leq a, b, c, d, e, f \leq 9$ 인 정수에 대하여,
 $\overline{abcdef} = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f$ 이다.)

2. 다음 식을 만족하는 모든 실수 x 들의 합을 구하여라.

$$|x - 3| - 2 = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x$$

3. 학생 A, B, C가 포함된 학생 10명을 2명씩 5개의 모둠으로 나눌 때, 학생 A, B, C가 모두 다른 모둠에 속하게 되는 경우의 수를 구하여라.

4. 볼록사각형 $ABCD$ 가 있다. 삼각형 ABD 와 BCD 의 외접원을 각각 O_1 과 O_2 라 하자. 점 A 에서 원 O_1 의 접선과 점 C 에서 원 O_2 의 접선의 교점이 직선 BD 위에 있다. $\overline{AB} = 35$, $\overline{AD} = 20$, $\overline{CD} = 40$ 일 때, \overline{BC} 의 값을 구하여라.

5. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 m, n ($m < n$)의 순서쌍 (m, n) 의 개수를 구하여라.

m 이상 n 이하의 모든 정수의 합이 1111이다.

6. 양수 a, b, c 에 대하여, 다음 식의 최솟값을 구하여라.

$$\frac{a^2 + 8b^2 + c^2}{ab + bc}$$

7. 일의 자리의 수가 5인 다섯자리 양의 정수 중 17의 배수인 것의 개수를 구하여라.

8. 예각삼각형 ABC 에서 $\overline{AB} = 96$, $\overline{AC} = 72$ 이다. 원 O 는 점 B 에서 직선 AB 에 접하고 점 C 를 지난다. 원 O 와 직선 AC 의 교점을 $D(\neq C)$ 라 하자. 점 D 와 선분 AB 의 중점을 지나는 직선이 원 O 와 점 $E(\neq D)$ 에서 만난다. $\overline{AE} = 60$ 일 때, $10\overline{DE}$ 의 값을 구하여라.

9. 다음 식의 값이 정수가 되도록 하는 양의 정수 n 중 가장 큰 것을 구하여라.

$$\frac{300}{2n+1} + \frac{935}{5n+1}$$

10. 주어진 양의 정수 n 에 대하여 양의 정수 x 와 y 가 $x+2y = n$ 을 만족할 때, $x^2 + y^2$ 이 가질 수 있는 가장 작은 값을 a_n 이라 하자. 다음 식의 값을 구하여라.

$$a_5 + a_6 + a_7 + \cdots + a_{18} + a_{19}$$

11. 빨간색 공 4개가 들어있는 상자, 노란색 공 3개가 들어있는 상자, 파란색 공 1개가 들어있는 상자가 있다. 한번에 한 상자에서 같은 색의 공을 1개 이상 꺼낸다. 훌수번 만에 세 상자에서 8개의 공을 모두 꺼내는 방법의 수를 구하여라. (단, 같은 색의 공들은 서로 구별하지 않는다.)

12. 삼각형 ABC 에서 $\overline{AB} = 180$ 와 $\overline{AC} = 132$ 이다. 점 D 는 변 BC 의 중점, 점 E 와 F 는 선분 AD 를 삼등분하는 점 ($\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FD}$)이고 $\overline{CF} = \overline{CD}$ 이다. 직선 CF 와 BE 의 교점을 X 라 할 때, \overline{EX} 의 값을 구하여라.

13. 60보다 작은 양의 정수 a, b, c, d, e 에 대하여

$$\frac{11^7}{60^5} = \frac{a}{60} + \frac{b}{60^2} + \frac{c}{60^3} + \frac{d}{60^4} + \frac{e}{60^5}$$

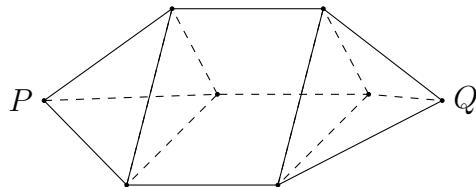
가 성립할 때, $a + b + c + d + e$ 의 값을 구하여라.

14. 다음 두 조건을 모두 만족하는 정수 x_1, x_2, \dots, x_n 이 존재하는 3 이상 2019 이하의 정수 n 의 개수를 구하여라.

(i) 모든 $i = 1, 2, \dots, n$ 에 대하여 $|x_i| = 1$

$$(ii) x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = \frac{n}{2}$$

15. 다음과 같이 삼각기둥에 두 개의 정사면체를 붙여서 만든 입체가 있다. 이 입체의 꼭짓점 P 에서 꼭짓점 Q 로 모서리를 따라 이동할 때, 한번 지나간 꼭짓점은 다시 지나가지 않는다. 가능한 모든 경로의 수를 구하여라.

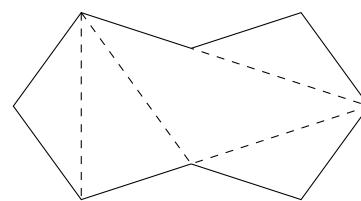


16. 각 A 가 90° 보다 큰 삼각형 ABC 의 외접원을 O 라 하자. 점 B 에서 원 O 에 접하는 직선과 점 C 에서 원 O 에 접하는 직선이 점 D 에서 만난다. 점 A 에서 원 O 에 접하는 직선과 평행하고 점 D 를 지나는 직선이 직선 AB, AC 와 만나는 점을 각각 E, F 라 하자. $\overline{EC} = 4, \overline{BD} = 5$ 일 때, \overline{CF}^2 의 값을 구하여라.

17. 세자리 양의 정수 m, n 에 대하여 $m+n+10$ 과 $mn-1$ 이 모두 1000의 배수일 때, $|n-m|$ 의 값을 구하여라.

18. 두 실수 x, y 가 $x^2+y^2=200$ 을 만족할 때, 식 $2(x+y)-xy$ 가 가질 수 있는 최댓값과 최솟값의 차를 구하여라.

19. 주어진 도형의 내부에 꼭짓점을 잇는 선분을 그어 도형을 몇 개의 영역으로 분할한다. 이때, 서로 다른 선분은 내부에서 만나지 않고 끝점에서만 만날 수 있다. 이렇게 나누어진 각각의 영역이 모두 삼각형이 되면 삼각분할이라 한다. 다음 그림은 합동인 정오각형 두 개를 붙인 도형의 삼각분할의 예이다.



이 도형의 삼각분할의 개수를 구하여라.

20. 삼각형 ABC 에서 $\overline{AC} = 440$ 이다. 점 D 는 변 AB 위의 점으로 $\overline{AD} = 1$ 이다. 삼각형 ABC 의 내심을 I 라 할 때, 직선 CI 가 삼각형 ADI 의 외접원에 접한다. 삼각형 ADI 의 외접원이 변 AC 와 점 $E(\neq A)$ 에서 만나고, 중심 I 이고 점 E 를 지나는 원이 변 AC 와 점 $F(\neq E)$ 에서 만난다. $\overline{IE} = 20$ 일 때, \overline{EF} 의 값을 구하여라.