

# 제 23회 한국수학올림피아드 최종시험

2010년 3월 27일 - 제 1 일

- 임의의 삼각형  $ABC$ 의 내접원이 변  $BC, CA, AB$ 와 접하는 점을 각각  $P, Q, R$ 이라 하자. 삼각형  $ABC$ 의 넓이를  $T$ , 둘레의 길이를  $L$ 이라 할 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\left(\frac{AB}{PQ}\right)^3 + \left(\frac{BC}{QR}\right)^3 + \left(\frac{CA}{RP}\right)^3 \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{L^2}{T}$$

- 예각삼각형  $ABC$ 의 내심을  $I$ , 외심을  $O$ , 수심을  $H$ 라 하고, 내접원이 변  $BC$ 에 접하는 점을  $D$ 라 하자. 이때,  $\angle B < \angle C$ 이고, 두 선분  $AO$ 와  $HD$ 는 평행하다고 한다. 직선  $OD$ 와 직선  $AH$ 의 교점을  $E$ 라 하고 선분  $CI$ 의 중점을  $F$ 라 할 때, 네 점  $E, F, I, O$ 는 한 원 위에 있음을 보여라.
- $i$ 번 웹페이지에서  $j$ 번 웹페이지로 가는 링크가 있다면 이 링크를 사용하여  $i$ 번 웹페이지에서  $j$ 번 웹페이지로 바로 이동할 수 있다. 1번부터  $n$ 번까지 번호가 붙은  $n \geq 2$ 개의 웹페이지에, 모든  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ 에 대해  $i$ 번 웹페이지에서  $i+1$ 번 웹페이지로 가는 링크가 주어져 있다.

이때, 적절하게  $3(n-1) \log_2(\log_2 n)$  이하의 개수만큼 링크를 추가하면, 임의의 두 정수  $1 \leq i < j \leq n$ 에 대하여,  $i$ 번 웹페이지에서 시작해서 항상 숫자가 커지는 방향으로 링크 3개 이하를 사용하여  $j$ 번 웹페이지에 도달할 수 있도록 할 수 있음을 보여라.

\* 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점 \*