제 28 회 최종시험 첫째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2015년 3월 21일 (오후) ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

1. 다음을 만족하는 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 모두 구하여라. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합)

모든 실수 x, y에 대하여 $f(x^{2015} + f(y)^{2015}) = f(x)^{2015} + y^{2015}$이다.

2. 내심이 I인 삼각형 ABC의 내접원이 변 BC, CA, AB와 각각 점 D, E, F에서 접한다. 삼각형 IAB, IAC의 외심을 각각 O_1, O_2라 하고, 삼각형 ABC의 외접원과 직선 EF의 두 교점을 P, Q라 하자. 삼각형 DPQ의 외심이 직선 O_1O_2 위에 있음을 보여라.

3. 지하철역이 3개 이상인 도시가 있다. 이 도시에서 같은 지하철역을 두 번 이상 지나지 않고도 총 $L+1$개 이상의 지하철역을 지나는 경로가 있다면 다음 중 하나는 반드시 성립함을 보여라. (단, 지하철은 양방향으로 모두 운행한다.)

(i) 서로 다른 세 개의 지하철역 A, B, C가 존재하여 C를 지나지 않고 A에서 B로 가는 경로가 없다.

(ii) 적당한 지하철역에서 출발하여 같은 지하철역을 두 번 이상 지나지 않고 출발했던 지하철역으로 되돌아오는 방법 중 지하철역 $\lceil \sqrt{2L} \rceil$개 이상을 지나는 방법이 있다. 단, $\lceil x \rceil$는 x보다 작지 않은 정수 중 가장 작은 것이다.

제 28 회 최종시험 둘째날
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2015년 3월 22일 (오전) ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

4. 예각삼각형 ABC의 수심 H와 꼭짓점 A, B를 모두 지나는 원 ω가 변 BC와 점 $D\ (\neq B)$에서 만난다고 하자. 직선 DH와 변 AC의 교점을 P라 하고, 삼각형 ADP의 외심을 Q라 할 때, 원 ω의 중심이 삼각형 BDQ의 외접원 위에 있음을 보여라.

5. 주어진 양의 정수 k에 대하여 다음 조건을 만족하는 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 있다.

$$a_1 = k, \qquad a_2 = k, \qquad a_{n+2} = a_n a_{n+1} \quad (n \geq 1)$$

$$b_1 = 1, \qquad b_2 = k, \qquad b_{n+2} = \frac{b_{n+1}^3 + 1}{b_n} \quad (n \geq 1)$$

모든 양의 정수 n에 대하여 $a_{2n}b_{n+3}$은 정수임을 보여라.

6. 반지름은 1이고 중심이 서로 다른 원 2015개가 평면에 있다. 이 중 27개의 원을 뽑아 다음 조건을 만족하는 모임 C를 만들 수 있음을 보여라.

> C의 임의의 두 원은 서로 만나거나 C의 어떤 두 원도 서로 만나지 않는다.