



제 26 회 최종시험 둘째날

## 한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2013년 3월 24일 (오전); 제한시간 4시간 30분; 문항당 7점

4. 삼각형  $ABC$ 의 꼭지점  $B, C$ 에 마주 보는 방심을 각각  $B_1, C_1$ 이라 하자. 직선  $B_1C_1$ 이 삼각형  $ABC$ 의 외접원과  $D(\neq A)$ 에서 만난다고 하자.  $B_1$ 에서  $CA$ 에 내린 수선과  $C_1$ 에서  $AB$ 에 내린 수선의 교점을  $E$ 라 하자. 삼각형  $ADE$ 의 외접원  $w$ 의 점  $D$ 에서의 접선과 직선  $AE$ 가 점  $F$ 에서 만난다고 하자.  $D$ 에서  $AE$ 에 내린 수선의 발을  $G$ , 이 수선이  $w$ 와 만나는 점을  $H(\neq D)$ 라 하자. 삼각형  $HGF$ 의 외접원과  $w$ 의 교점을  $I(\neq H)$ 라 하고,  $D$ 에서 직선  $AH$ 에 내린 수선의 발을  $J$ 라 할 때,  $AI$ 가 선분  $DJ$ 의 중점을 지남을 보여라.

5. 서로 소인 양의 정수  $a, b$ 가 주어져 있다. 정수 수열  $(a_n)$ 과  $(b_n)$ 은

$$(a + b\sqrt{2})^{2n} = a_n + b_n\sqrt{2}$$

를 만족하는 수열이라고 하자. 다음 조건을 만족하는 소수  $p$ 를 모두 구하여라:

(조건): 정수  $b_n$ 이  $p$ 의 배수가 되는  $p$ 이하의 양의 정수  $n$ 이 존재한다.

6. 임의의 일대일대응  $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  ( $n$ 은 양의 정수)에 대하여, 네 집합  $A, B, C, D$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$A = \{i \mid i > f(i)\}$$

$$B = \{(i, j) \mid i < j \leq f(j) < f(i) \text{ 또는 } f(j) < f(i) < i < j\}$$

$$C = \{(i, j) \mid i < j \leq f(i) < f(j) \text{ 또는 } f(i) < f(j) < i < j\}$$

$$D = \{(i, j) \mid i < j \text{ 그리고 } f(i) > f(j)\}$$

다음 등식이 성립함을 보여라. (단,  $|X|$ 는 집합  $X$ 의 원소의 개수이다.)

$$|A| + 2|B| + |C| = |D|$$