제 28 회 2차시험 (고등부) 고등부

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2014년 11월 2일 (오전) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7점

1. 정수 x, y에 대하여 $x^2 - 4y + 1$이 $(x-2y)(1-2y)$의 배수일 때, $|x-2y|$가 완전제곱수임을 보여라.

2. 다음 조건을 만족하는 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 모두 구하여라. 단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.

모든 실수 x, y에 대하여 $f(xf(x) + f(x)f(y) + y - 1) = f(xf(x) + xy) + y - 1$ 이다.

3. 원 O의 지름이 아닌 현 AB가 있다. 점 A와 B에서의 원 O의 접선의 교점을 C라 하고 선분 AC와 BC의 중점을 각각 M, N이라 하자. 점 C를 지나고 원 O와 외접하는 원이 직선 MN과 두 점 P, Q에서 만날 때, $\angle PCQ = \angle CAB$임을 보여라.

4. 총 n개의 지하철역의 위치가 정n각형을 이루고 있는 도시가 있다. 지하철 1호선은 이 정n각형에서 이웃하지 않은 두 지하철역 A와 B만을 직선으로 연결한 노선이다. 지하철 2호선은 정n각형 형태로 이 도시의 지하철역을 모두 지나는 순환형 노선이다. 지하철은 각 노선에서 양방향으로 모두 운행되며, A와 B는 다른 노선으로 갈아탈 수 있는 역이다. 지하철 각 노선에서 이웃한 두 지하철역 사이를 하나의 지하철 구간이라 하자. 각 지하철역의 역장은 1명이며 여자가 역장인 지하철역도 있고 남자가 역장인 지하철역도 있다고 하자.
이때 n이 홀수이면, 모든 정수 k $(0 < k < n)$에 대하여, 정확히 k개의 지하철 구간을 이용하여 남자가 역장인 어느 지하철역에서 여자가 역장인 지하철역으로 같은 역을 두 번 들르지 않고 이동할 수 있음을 보여라.

제28회 2차시험 (고등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2014년 11월 2일 (오후) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7점

5. 볼록사각형 $ABCD$에서 $\angle A = \angle D$이다. 두 대각선의 교점을 E라 하고 변 AB, CD, DA의 중점을 각각 L, M, N이라 하자. 점 A에서 직선 AD에 접하고 점 E를 지나는 원이 직선 EN과 점 $F(\neq E)$에서 만난다고 할 때, $\angle NFL = \angle MFN$임을 보여라.

6. 다음 조건을 모두 만족하는 일대일함수 $f : \{1, 2, \dots, 9\} \to \{1, 2, \dots, 9\}$의 개수를 구하여라.

(i) $f(1) > f(2)$이고 $f(9) < 9$이다.

(ii) $f(1), f(2), \dots, f(i-1)$이 모두 $f(i)$보다 작으면, $f(i+1)$도 $f(i)$보다 작다. (단, $i = 3, 4, \dots, 8$)

7. 다음 조건을 모두 만족하는 실수 x, y, z에 대하여 $x^4 + y^4 + z^4$의 최솟값을 구하여라.

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 8, \quad x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

8. 다음 조건을 모두 만족하는 함수 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$이 존재함을 보여라. 단, $\mathbb{N}$은 양의 정수 전체의 집합이다.

(i) $\{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$은 유한집합이다.

(ii) 0이 아닌 정수 $x_1, x_2, \dots, x_{1000}$이 $f(|x_1|) = f(|x_2|) = \cdots = f(|x_{1000}|)$을 만족하면

$$x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_4 + 2^4x_5 + \cdots + 2^{999}x_{1000} \neq 0$$

이다.