제26회 고등부 수행평가

# 한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

유형 가

**2012년 6월 23일; 제한시간 4시간**

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
   예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1 ∼ 4번은 각 4점, 문제 17 ∼ 20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

**1.** 집합 $\{1, 2, \ldots, 23\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 11이고 원소의 합이 194인 것의 개수를 구하여라.

**2.** 방정식 $4x^3 - 5x^2y + 10xy^2 + 12y^3 - 108x - 81y = 0$을 만족하고 각각의 절댓값이 1000 이하인 정수 $x, y$의 순서쌍 $(x, y)$의 개수를 구하여라.

**3.** 양의 정수 $n$ 중 다음 조건을 만족하는 함수 $f : \{1, 2, \ldots, 20\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$가 존재하게 하는 가장 작은 정수를 구하여라.

$$f(k+1) < \frac{f(k) + f(k+2)}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots, 18$$

**4.** 원 $O$에 내접하는 삼각형 $ABCD$가 다음 조건을 만족한다.

$$\overline{AB} = 24, \quad \overline{AD} = 16, \quad \angle BAC = \angle DAC$$

또 직선 $AC$와 $BD$의 교점을 $E$라 할 때, $\overline{BE} = 18$이다. 점 $D$를 지나고 $AC$에 수직인 직선이 원 $O$와 만나는 점을 $F(\neq D)$, 직선 $FC$와 $AB$의 교점을 $K$, $AC$와 $DF$의 교점을 $L$이라 할 때, 선분 $KL$의 길이를 구하여라.

**5.** 일대일함수 $f : \{1, 2, \ldots, 8\} \to \{1, 2, \ldots, 8\}$ 중에서 $f(i) > f(i+1)$을 만족하는 양의 정수 $i$ $(1 \leq i \leq 7)$가 정확히 한 개인 함수의 개수를 구하여라.

**6.** 수열 $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ 중에 1이 4개, 2가 3개, 3이 3개 있다. $z_1 = x_1$이고

$$z_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{z_n x_{n+1}}{z_n + x_{n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots, 9$$

일 때, $z_{10}$의 값이 될 수 있는 수 중에서 가장 큰 것을 $\frac{p}{q}$ ($p, q$는 서로 소인 양의 정수)라 하자. $p+q$의 값을 구하여라.

**7.** 집합 $X = \{1, 2, \ldots, 13\}$이고, 함수 $g : X \to X$는 다음과 같이 정의된다.

$$g(x) = 14 - x, \quad x \in X$$

함수 $f : X \to X$ 중 $f$를 합성한 함수 $f \circ f \circ f$가 $g$가 되는 $f$의 개수를 구하여라.

**8.** 원 $O$위의 점 $A, B, C$가 다음 조건을 만족한다.

$$\overline{AB} = 18, \quad \angle ABC = 59^\circ, \quad \angle CAB = 3^\circ$$

점 $A$에서 원 $O$에 접하는 직선 위에 점 $D, E$가

$$\angle DAC < 90^\circ, \quad \overline{DA} = 12, \quad \overline{AE} = 18, \quad \overline{DE} = 30$$

가 되도록 놓여 있다. 원 $O$와 직선 $BD, CE$의 교점을 각각 $K, L$이라 하고, 직선 $KL$과 $DE$의 교점을 $P$라 할 때, $P$는 $E$를 중심으로 $A$의 반대편에 놓인다. 선분 $AP$의 길이를 구하여라.



(뒷면에 계속)

**9.** 실수 $x$를 넘지 않는 최대 정수를 $[x]$라 하고, $\{x\} = x-[x]$라 하자. 2012 이하이고 2012와 서로 소인 모든 양의 정수 $t_1, \ldots, t_{1004}$에 대해 $\displaystyle\sum_{i=1}^{1004} \left\{\frac{523t_i}{2012}\right\}$의 값을 구하여라.

**10.** $f(x) = x^2 - 10x + \dfrac{p}{2}$라 할 때, $f \circ f \circ f(x) = f(x)$를 만족하는 서로 다른 실수 $x$의 개수가 정확히 4개가 되도록 하는 양의 정수 $p$를 구하여라.

**11.** 삼각형 $ABC$의 외접원 $O$가 점 $A$에서 원 $O'$에 내접한다. 직선 $AB$와 원 $O'$의 교점 $D(\neq A)$에 대하여, 직선 $BC$와 원 $O'$의 교점 중 직선 $AD$를 기준으로 $C$의 반대편에 있는 점을 $E$, $C$와 같은 쪽에 있는 점을 $F$라 하자. 또, 점 $B$에서의 원 $O$의 접선이 선분 $DF$와 점 $K$에서 만나고, 직선 $CD$와 원 $O'$은 점 $L(\neq D)$에서 만난다. $\angle CFA = 38°$, $\angle DKB = 47°$, $\angle CLA = 60°$, $\angle CAB = x°$일 때, $x$를 구하여라.

**12.** 양의 정수 $k$에 대하여

$$a_k = \frac{361984!}{k!(361984-k)!}$$

라 할 때, $a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{361983}$ 의 최대공약수를 구하여라.

**13.** 학생 16명이 문제가 30개인 시험을 치뤘다. 모든 학생이 각각 15개 이하의 문제를 맞혔고, 각 문제를 맞힌 학생은 8명 이상이다. 어떤 두 학생 $A$와 $B$를 뽑더라도, $A$도 맞히고 $B$도 맞힌 문제의 수는 항상 $n$으로 일정하였다고 한다. $n$을 구하여라.

**14.** 삼각형 $ABC$가 다음 조건을 만족한다.

$$\angle ABC < 90°, \quad \overline{AB} = 15, \quad \overline{BC} = 27$$

변 $AC$의 중점 $M$을 지나고 $BC$에 수직인 직선 $\ell$이 점 $A$가 중심이고 $M$을 지나는 원과 만나는 점을 $P(\neq M)$라 하자. 직선 $BC$로부터의 거리가 3인 점 $O$가 중심이고 두 점 $B$와 $M$을 지나는 원이 $\ell$과 $BC$를 기준으로 $P$의 반대편에 있는 점 $Q$에서 만난다. $\overline{PQ} = 30$일 때, 삼각형 $OPM$의 넓이를 구하여라.

**15.** 다음 수가 정수가 되는 가장 작은 양의 정수 $m$을 구하여라.

$$180!\left(\frac{1}{181} + \frac{(-1)^m m!}{m+181}\right) + \frac{1}{181} + \frac{1}{m+181}$$

**16.** $a_1 = 1$, $a_2 = 2$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음을 만족하는 양의 정수 $k$가 존재한다.

$$a_{n+k} = a_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$b_n = a_{n+2} - a_{n+1} + a_n$이라 할 때

$$b_{n+1} = \frac{1 + b_n^2}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

을 만족한다. $\displaystyle\sum_{n=1}^{60} a_n$의 값을 구하여라.

**17.** 양의 정수 $a, b, c$가 식

$$\frac{a^3}{(b+3)(c+3)} + \frac{b^3}{(c+3)(a+3)} + \frac{c^3}{(a+3)(b+3)} = 7$$

을 만족할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

**18.** 다음 조건을 만족하는 일대일함수 $f : \{1, 2, \ldots, 7\} \to \{1, 2, \ldots, 9\}$ 의 개수를 구하여라.

$1 \leq i < j \leq 7$이면 $f(i)$ 와 $f(j)+1$ 이 서로 다르다.

**19.** 중심이 $O$인 원 $\omega$의 외부의 점 $P$에 대하여 직선 $PO$와 원 $\omega$의 교점 중 $P$에서 먼 점을 $A$라 할 때, $\overline{AP} = 200$이다. 점 $P$를 지나는 직선 중 점 $O$를 지나지 않는 직선 $\ell$이 원 $\omega$와 두 점에서 만난다. 이 두 점 중 $P$에서 가까운 점을 $B$, 먼 점을 $C$라 하자. 직선 $\ell$이 삼각형 $ABO$의 외접원과 만나는 점을 $D(\neq B)$라 하고 삼각형 $ACO$의 외접원과 만나는 점을 $E(\neq C)$라 할 때, $E$는 $B$와 $C$ 사이에 있고 $\overline{AD} = 250$, $\overline{AE} = 90$이다. 원 $\omega$의 반지름의 길이를 구하여라.

**20.** 다음 조건을 만족하는 양의 정수 $a$ 중 가장 큰 것을 구하여라.

$a^{b+2a} = b^{4a}$를 만족하는 양의 정수 $b$가 존재한다.