



제 35 회 고등부 1차시험

한국수학올림피아드

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2021년 6월 12일 ; 제한시간 2시간 30분(1교시 1시간 15분, 2교시 1시간 15분)

- A. 답안지에 **수험번호와 성명, 문제유형**을 반드시 기입하십시오.
 B. 이 시험은 총 20개(오전 10개, 오후 10개)의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.

1. 최고차항의 계수가 1인 이차다항식 $p(x)$ 가 $p(1) = 1$ 을 만족한다. 다음 식이 가질 수 있는 모든 값들의 합을 구하여라.

$$\sum_{n=1}^{101} \left((-1)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1} \right) p(n)$$

(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 가장 큰 정수)

답: 101

6. 양의 정수 m 에 대하여 3^k 이 m 의 약수가 되는 가장 큰 정수 k 를 $v(m)$ 이라 하자. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하여라.

(i) $1 \leq a, b \leq 100$

(ii) $v(a^3 + b^3) - 3 = v(a + b) \geq 2$

답: 242

2. 함수 $f(x) = x^2 + x - q$ ($q > 1$)에 대하여 부등식

$$a < f(a) < f(f(a))$$

가 성립하지 않는 a 의 값 중 가장 작은 것을 m , 가장 큰 것을 M 이라 하자. $M - m = 11$ 일 때, q 의 값을 구하여라.

답: 25

3. 양의 실수 a, b, c, d 가 다음 등식을 모두 만족한다.

$$abcd = 7, \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 20$$

식 $ab + bc + cd + da$ 가 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

답: 16

4. 삼각형 ABC 에서 $\angle BAC = 60^\circ$ 이다. 점 P 는 변 BC 위의 점으로 삼각형 ABP 의 외접원 O_1 과 삼각형 ACP 의 외접원 O_2 의 반지름이 각각 48 과 32 이다. $\sin \angle ACB = \alpha$ 라 할 때, $560\alpha^2$ 의 값을 구하여라.

답: 540

5. 삼각형 ABC 에서 선분 AC 의 중점을 M 이라 하고, 직선 BM 이 삼각형 ABC 의 외접원과 만나는 점을 $D(\neq B)$ 라 하자. $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{CD} = 4$ 일 때, $4(\overline{AM} + \overline{BD})^2$ 의 값을 구하여라.

답: 490

7. 다음 조건을 만족하는 모든 양의 정수 n 의 합을 구하여라.

(조건) n^2 의 약수의 개수는 $\frac{n}{6}$ 이다.

답: 990

8. 1부터 100까지 양의 정수를 모두 더하는데 k 개의 홀수를 제외하고 더하였더니 그 값이 3775가 나왔다. 가능한 양의 정수 k 는 모두 몇 개인가?

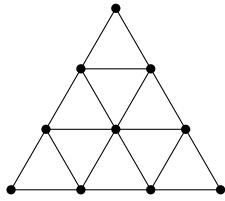
답: 11

9. 세 문자 A, B, C 를 사용하여 만든 6자리 문자열 $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ 중 다음 조건을 만족하는 것의 개수를 구하여라.

(조건) $x_i = A, x_j = B, x_k = C$ 를 만족하는 $1 \leq i < j < k \leq 6$ 인 양의 정수 i, j, k 는 존재하지 않는다.

답: 496

10. 아래 그림과 같이 한변의 길이가 1인 정삼각형 9개로 이루어진 도형이 있다.



이 도형 위의 10개의 점 각각에 1, 2, 3, 4 중 하나의 숫자를 적을 때, 다음 조건을 만족하는 경우의 수를 구하여라.

(조건) 각각의 한변의 길이가 1인 정삼각형의 세 꼭짓점에 적힌 숫자의 합은 3의 배수이다.

답: 1090

11. 수열 $\{x_n\}$ 이 다음을 만족한다.

$$x_1 = 1, \quad \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^k x_i x_j = 1 - 4 \sum_{i=1}^{k+1} x_i \quad (k \geq 1)$$

모든 양의 정수 n 에 대하여

$$N|x_{n+2}| \leq |x_{n+1}|$$

이 성립하는 양의 정수 N 의 최댓값을 구하여라.

답: 17

12. $(5 + 2\sqrt{6})^7$ 을 넘지 않는 가장 큰 정수를 99로 나눈 나머지를 구하여라.

답: 1

13. 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC 의 꼭짓점 A 를 중심으로 하고 점 B 를 지나는 원이 직선 AB 와 만나는 점을 D ($\neq B$) 라 하자. 변 CA 위의 점 E 에 대하여 직선 DE 와 변 BC 가 만나는 점을 F 라 할 때, 삼각형 AED 의 넓이와 삼각형 CEF 의 넓이가 같다. 삼각형 BFE 의 넓이를 a 라 할 때, $32a^2$ 의 값을 구하여라. 답: 54

14. 원 O 에 내접하는 육각형 $ABCDEF$ 가 있다. 선분 AD 가 원 O 의 지름이고 사각형 $BCEF$ 는 직사각형이다. $\overline{AC} = 5$, $\overline{CE} = 6$, $\overline{EA} = 4$ 일 때, 육각형 $ABCDEF$ 의 여섯 개의 변의 길이의 합을 K 라 하자. $7K^2$ 의 값을 구하여라. 답: 2116

15. 삼각형 ABC 에서 $\overline{AB} > \overline{AC}$ 이다. 각 A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D , 변 BC 의 중점을 M , 점 C 에서 직선 AD 에 내린 수선의 발을 H 라 하자. $\overline{MD} = 10$, $\overline{MH} = 20$ 일 때, $(\overline{AM})^2 - (\overline{AD})^2$ 의 값을 구하여라. 답: 700

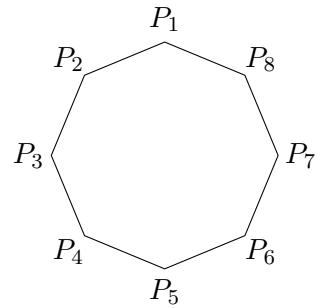
16. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하여라.

(i) $1 \leq a, b, c \leq 115$

(ii) 모든 양의 정수 n 에 대하여 $115^{115n+a} - 1$ 은 $115^{bn+c} - 1$ 의 배수이다.

답: 144

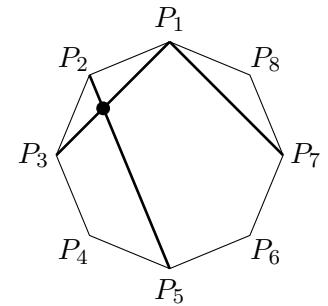
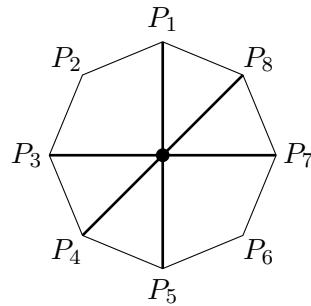
19. 정팔각형 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ 이 있다.



서로 다른 3개의 대각선을 선택하는 방법 중 다음 조건을 만족하는 것의 개수를 구하여라.

(조건) 3개의 대각선으로 만들어지는 교점 중, 정팔각형의 내부에 있는 것의 개수는 1이다.

예를 들어, 다음과 같이 대각선을 선택하면 조건을 만족한다.



답: 460

17. 실수가 아닌 복소수 p 가 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ (a, b 는 실수)의 해이다. $p^5 = 32$ 일 때, $(a+1)^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

답: 21

18. 양의 정수 k (≥ 2)에 대하여 $a^b = k$ 를 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (a, b) 의 개수를 $f(k)$ 라 하자. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (m, n) 의 개수를 구하여라.

(i) $2 \leq m, n \leq 100$ 이고 m 과 n 은 서로소이다.

(ii) $f(mn) = f(m) = f(n) \geq 2$

답: 24

20. 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $f : \{1, 2, \dots, 9\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 9\}$ 의 개수를 구하여라.

(i) $f(1) \leq f(2) \leq \dots \leq f(9)$

(ii) 합성함수 $f \circ f$ 의 치역의 원소의 개수는 7이다.

답: 161