

2012년 5월 19일; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명, 문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.  
예를 들면, 답이 “7”일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지를** 기입하여야 합니다.
5. 문제 1~4 번은 각 4점, 문제 17~20 번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. 어떤 양의 정수를 2진법으로 표현하면 마지막 세 자리가 011이고, 5진법으로 표현하면 마지막 세 자리가 101이다. 이 수를 10진법으로 표현할 때 마지막 세 자리를 구하여라.
2. 다항식  $x^4 - 9x + n$ 이 두 개의 정수 계수 이차다항식의 곱이 되게 하는 정수  $n$ 의 개수를 구하여라.
3. 삼각형의 각 변에 꼭짓점이 아닌 점이 네 개씩 주어져 있다. 이 12개의 점 중 네 점을 꼭짓점으로 갖는 볼록사각형의 개수를 구하여라.
4. 각  $B$ 와 각  $C$ 가 모두 예각인 삼각형  $ABC$ 의 꼭짓점  $A$ 에서 변  $BC$ 에 내린 수선의 발을  $D$ 라 하고, 각  $B$ 의 이등분선이 변  $AD, AC$ 와 만나는 점을 각각  $E, F$ 라 하자.  $\overline{AE} : \overline{ED} = 3 : 2$ 이고  $\overline{AE} = \overline{AF}$  일 때,  $\frac{S(ABC)}{S(CEF)}$ 의 값을 구하여라. 단,  $S(ABC)$ 는 삼각형  $ABC$ 의 넓이이다.
5. 숫자 9를 자릿수로 가지는 세 자리 양의 정수 중 3의 배수의 개수를 구하여라.
6. 양의 실수  $x, y$ 가  $4x^2 + 9y^2 = 36x^2y^2$ 을 만족할 때  $\frac{1}{ax} + \frac{1}{by}$ 의 최댓값이 1이 되는 양의 실수  $a, b$ 에 대하여  $ab$ 의 최솟값을 구하여라.
7. 두 자리 양의 정수 중에서 양의 약수의 개수가 2의 거듭제곱인 수는 모두 몇 개인가?
8. 선분  $AB$ 가 지름인 원에 사각형  $ABCD$ 가 내접한다. 선분  $AB$  위의 점  $P$ 에서 변  $CD$ 에 내린 수선의 발을  $Q$ 라 할 때,  $\overline{PA} = \overline{PQ}$ 이다.  $\angle BCD = 145^\circ$ ,  $\angle ADC = 110^\circ$ ,  $\angle PQA = M^\circ$  일 때,  $10M$ 의 값을 구하여라.
9. 숫자 1, 2, 3을 각각 네 번씩 사용하여 만든 12자리 양의 정수 중, 213321231321과 같이 어떠한 두 개의 1 사이에도 2와 3이 모두 있는 것의 개수를 구하여라.
10. 방정식  $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{6}\right] = x - 2$ 의 양수해 중 1000을 넘지 않는 것의 개수를 구하여라. 단  $[x]$ 는  $x$ 를 넘지 않는 최대 정수이다.
11. 중심이  $G$ 이고 수심이  $H$ 인 예각삼각형  $ABC$ 의 외심  $O$ 에서 변  $BC$ 의 중점까지 거리가 6이다. 꼭짓점  $A$ 에서 변  $BC$ 에 내린 수선의 발을  $D$ 라 하고, 직선  $DG$ 가 삼각형  $ABC$ 의 외접원과 만나는 점 중 직선  $BC$ 를 기준으로  $G$ 와 같은 쪽에 있는 점을  $E$ 라 할 때,  $\overline{HD} = 36$ ,  $\overline{AE} = 36$ 이다. 선분  $DG$ 의 길이를 구하여라.

12. 양의 실수  $x, y$ 에 대하여

$$\frac{100xy}{4x + (x + y - 1)^2}$$

의 최댓값을 구하여라.

13. 각 자릿수가 1 또는 2인 10자리 양의 정수 중, 1211212212와 같이 2 바로 다음에 1이 나오는 경우가 정확히 세 번인 것의 개수를 구하여라.

14. 반지름이 12인 원  $O$  위의 한 점  $A$ 에 대하여, 선분  $OA$ 의 중점  $M$ 을 지나고  $OA$ 에 수직인 직선  $l$ 이 원  $O$ 와 만나는 점 중 하나를  $B$ 라 하자. 점  $C$ 는 호  $AB$  위의 점으로 직선  $CM$ 이 원  $O$ 와 만나는 점  $D$  ( $D \neq C$ )에 대해  $\overline{CD} = 21$ 이다. 직선  $AD$ 와 직선  $l$ 이 만나는 점을  $P$ 라 할 때,  $\overline{CP}^2$ 을 구하여라.

15. 양의 정수  $M$ 에 대하여  $M^5$ 의 약수 중 1보다 크고  $\sqrt{M^5}$ 보다 작은 것의 개수가 2012라 하자. 이러한  $M$  중 가장 작은 수를  $P$ 라 할 때,  $P$ 의 양의 약수 중 32의 배수이고  $\sqrt{P}$ 보다 작은 것의 개수를 구하여라.

16.  $f(x) = x^2 - 2kx + 2k^2$ 이라 하자.  $0 \leq a, b, c \leq 4$ 인 임의의 실수  $a, b, c$ 에 대하여  $f(a), f(b), f(c)$ 가 삼각형의 세 변을 이루도록 하는 양의 정수  $k$  중 가장 작은 것을 구하여라.

17. 양의 정수  $n$ 을 두 개 이상의 연속한 양의 정수의 합으로 나타내는 방법을 생각하자. 예를 들어 15의 경우에는  $7+8, 4+5+6, 1+2+3+4+5$ 의 세 가지 방법이 있다. 999를 이와 같이 나타내는 방법의 수를 구하여라.

18. 정수  $x$  중  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ 이 완전제곱수가 되게 하는 것들의 합을 구하여라.

19. 삼각형  $ABC$ 의 내심  $I$ 를 지나고 직선  $AI$ 에 수직인 직선이 직선  $BC$ 와 점  $D$ 에서 만난다.  $\overline{AB} = 30$ ,  $\overline{CA} = 60$ ,  $\overline{CD} = 50$  일 때 선분  $BC$ 의 길이를 구하여라.

20. 원 위에 서로 다른  $n$ 개의 점  $P_1, P_2, \dots, P_n$ 이 있다. 이 중 두 점을 잇는 선분들을 모두 그릴 때, 어떠한 세 선분도 원 내부의 한 점에서 만나지 않는다. 다음 조건을 만족하는 삼각형의 개수를  $T_n$ 이라 하자.

삼각형의 각 변은 어떤 선분  $P_iP_j$ 에 포함된다.

예를 들어  $T_3 = 1$ ,  $T_4 = 8$  이다.  $T_7$ 을 구하여라.