

2020년 9월 12일 ; 제한시간 3시간

- A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
- B. 이 시험은 총 25개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
- C. 문제 1~7 번은 각 3점, 문제 8~18 번은 각 4점, 문제 19~25 번은 각 5점입니다.

### 1. <정답. 10>

삼각형  $ABC$ 에서  $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이고  $\angle B = 40^\circ$ 이다. 변  $BC$  위의 점  $D$ 를  $\angle ADC = 120^\circ$ 가 되도록 잡고, 각  $C$ 의 이등분 선과 변  $AB$ 의 교점을  $E$ 라 하자.  $\angle DEC$ 는 몇 도인가?

### 2. <정답. 158>

실수 계수 9차다항식  $P(x)$ 가  $k = 1, 2, \dots, 10$  에 대하여  $P(k) = \frac{(k+1)^2}{k}$  를 만족할 때,  $12P(12)$ 의 값을 구하여라.

### 3. <정답. 300>

직사각형  $ABCD$ 에서  $\overline{AB} = 20$ ,  $\overline{BC} = 10$ 이다. 점  $P$ 는 변  $AB$  위의 점으로  $\overline{PD} = 20$ 인 점이다. 선분  $CP$ 를 따라 사각형  $ABCD$ 를 접었더니 점  $B$ 와 이 사각형의 내부의 점  $Q$ 가 일치했다. 이때  $\overline{DQ}^2$ 의 값을 구하여라.

### 4. <정답. 151>

양의 정수  $n$ 에 대하여  $\sqrt{n}$ 에 가장 가까운 정수를  $a_n$ 이라 하자. 다음 등식을 만족하는 양의 정수  $m$ 을 구하여라.

$$\sum_{k=1}^{m(m+1)} a_k = 101m(m+1)$$

### 5. <정답. 144>

한자리 수 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8을 원형으로 배열할 때, 이웃한 두 수의 곱이 모두 짹수가 되도록 배열하는 경우의 수는?

### 6. <정답. 21>

수열  $\{a_n\}$ 이 다음을 만족한다.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_{n+2} = 2(a_{n+1} - a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$a_{96}$  을 43 으로 나눈 나머지를 구하여라.

### 7. <정답. 90>

직사각형  $ABCD$ 에서  $\overline{AB} = 5$ ,  $\overline{BC} = 3$ 이다. 변  $CD$  위의 점  $E$ 를  $\overline{BA} = \overline{BE}$ 가 되도록 잡자. 삼각형  $ABE$ 의 내접원의 반지름을  $a + b\sqrt{10}$ 이라 할 때,  $60(a+b)$ 의 값을 구하여라.  
(단,  $a, b$ 는 유리수)

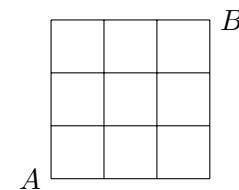
### 8. <정답. 48>

다음을 만족하는 양의 정수의 순서쌍  $(m, n)$ 에 대하여  $mn$ 의 최솟값을 구하여라.

$$\frac{mn}{m+n} \text{ 과 } \frac{m^2 + n^2 + mn}{m+n} \text{ 은 서로 다른 홀수인 소수}$$

### 9. <정답. 224>

다음 그림에서 갑은  $A$ 에서 출발해서 오른쪽 혹은 위쪽으로 1칸씩 이동하면서  $B$ 에 도착하고, 을은  $B$ 에서 출발해서 왼쪽 혹은 아래쪽으로 1칸씩 이동하면서  $A$ 에 도착한다. 갑과 을은 각각 등속력으로 움직이고, 갑의 속력은 을의 2배이다. 갑과 을이 동시에 출발해서 도착하는 총 400 가지의 경우 중, 서로 만나지 않고 이동하는 경우의 수를 구하여라.



### 10. <정답. 20>

집합  $A = \{(x, y) \mid (x-1)(x-9) \leq y \leq 2x, x, y \text{는 실수}\}$ 에 속하는 점  $P = (p_1, p_2)$ ,  $Q = (q_1, q_2)$ ,  $R = (r_1, r_2)$ 에 대하여  $\frac{p_2 + q_2 + r_2}{p_1 + q_1 + r_1}$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 할 때,  $M^2 + m^2$ 의 값을 구하여라.



제 34 회 고등부 1차시험  
한국수학올림피아드  
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

## 11. &lt;정답. 450&gt;

원에 내접하는 사각형  $ABCD$ 의 대각선  $AC$ 와  $BD$ 가 점  $E$ 에서 만난다.  $\angle ABD = 5^\circ$ ,  $\angle AED = \angle BCD = 50^\circ$ ,  $\overline{BD} = 30$  일 때, 사각형  $ABCD$ 의 넓이를 구하여라.

## 15. &lt;정답. 84&gt;

삼각형  $ABC$ 의 변  $BC$ 의 중점을  $M$ 이라 하자.  $M$ 을 중심으로 하고 점  $A$ 를 지나는 원이 변  $AC$ 와 만나는 점을  $D(\neq A)$ 라 하자.  $\overline{AM} = \overline{AD} = 5$ ,  $\overline{CD} = 3$  일 때,  $\overline{AB}^2$ 의 값을 구하여라.

## 12. &lt;정답. 471&gt;

식  $(2x - y)^3 + (2x + 3y)^3$ 의 값이 소수 941의 배수가 되도록 하는 양의 정수  $x, y$ 에 대하여  $x + y$ 의 최솟값을 구하여라.

## 16. &lt;정답. 138&gt;

다음 두 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍  $(a, b)$ 의 개수를 구하여라.

$$(1) a \in \{1, 2, \dots, 12\}, b \in \{1, 2, \dots, 12\}$$

(2)  $an + b$ 와  $12n + 6$ 이 서로소가 아닌 양의 정수  $n$ 이 존재 한다.

## 13. &lt;정답. 592&gt;

집합  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수  $f : X \rightarrow X$ 의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(1) 모든  $n \in \{2, 4, 6\}$ 에 대하여  $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ 은 짝수이다.

(2)  $f(1) + f(2) + f(3)$ 과  $f(1) + f(2) + \dots + f(6)$ 은 모두 3의 배수가 아니다.

## 17. &lt;정답. 37&gt;

집합  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 일대일대응  $f : X \rightarrow X$ 의 개수를 구하여라.

(조건)  $f(x) > x$  인  $x$ 의 개수가  $f(x) < x$  인  $x$ 의 개수보다 크다.

## 14. &lt;정답. 4&gt;

0이 아닌 실수  $x, y, z$ 가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

$$x^2 + 3y^2 + 3xy + yz + 2zx = 0$$

$$2x^2 + 3xy + 2yz + zx = 0$$

식  $\frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}$ 의 값 중 가장 큰 것을  $M$ , 가장 작은 것을  $m$ 이라 할 때,  $M - m$ 의 값을 구하여라.

## 18. &lt;정답. 406&gt;

양의 정수의 집합  $\mathbb{N}$ 에서 정의된 함수  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 이 모든 양의 정수  $n$ 에 대하여  $f(f(n)) = n + 2$ 를 만족한다.  $f(201)$ 의 값이 될 수 있는 모든 양의 정수의 합을 구하여라.

## 19. &lt;정답. 52&gt;

삼각형  $ABC$ 의 외심  $O$ 와 점  $A$ 는 직선  $BC$ 에 대하여 대칭이다. 변  $BC$  위에  $\overline{BD} = 2$ ,  $\overline{CD} = 4$ 인 점  $D$ 가 있다. 선분  $DO$ 의 연장선 위의 점으로  $\overline{OX} = 4$ 인 점  $X$ 에 대하여 ( $O$ 는  $X$ 와  $D$  사이에 있음) 삼각형  $ADX$ 의 외접원이 직선  $BC$ 와 만나는 점을  $Y(\neq D)$ 라 하자.  $\overline{AY}^2$ 의 값을 구하여라.

## 20. &lt;정답. 18&gt;

양의 실수  $x$ 는  $x + \frac{1}{x}$ 이 정수가 되는 실수이다. 모든 양의 정수  $n$ 에 대하여  $a_n = x^n + x^{-n}$ 으로 정의할 때,

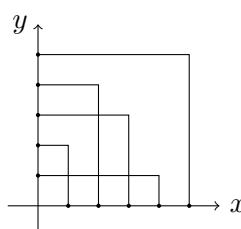
$$a_{13} + a_9 = 3 \times 7 \times 43 \times 307$$

$$a_{13} - a_9 = 3 \times 5 \times 89 \times 199$$

이다.  $a_3$ 을 구하여라.

## 21. &lt;정답. 15&gt;

$x$ 축 위의 5개의 점  $(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (5, 0)$ 과  $y$ 축 위의 5개의 점  $(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5)$ 을 그자 모양의 꺾은선 5개로 연결한 것을 맞대응이라고 하자. 다음 그림은 이러한 맞대응의 예이고, 이 경우 꺾은선끼리 만나는 점의 개수는 4이다.



이때 총 120가지의 맞대응 중, 꺾은선끼리 만나는 점의 개수가 3인 것의 개수를 구하여라.

## 22. &lt;정답. 28&gt;

양의 실수  $a, b, c, d$ 가  $a \geq b \geq c$  와  $4(a+b) \leq 9(c+d)$ 를 모두 만족할 때,  $36\left(\frac{c}{a} + \frac{d}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

## 23. &lt;정답. 405&gt;

삼각형  $ABC$ 에서  $\angle A = 90^\circ$ 이다. 변  $AB$ 를 지름으로 하는 원  $\Omega$ 가 변  $BC$ 와 만나는 점을  $D$ 라 하고,  $D$ 에서의  $\Omega$ 의 접선과 변  $AC$ 의 교점을  $E$ 라 하자.  $\overline{CD} = 4$ ,  $\overline{DE} = 3$  일 때, 삼각형  $ABC$ 의 넓이를  $k$ 라 하자.  $k^2$ 의 값을 구하여라.

## 24. &lt;정답. 201&gt;

다음 등식을 만족하는 양의 정수  $m$  중 가장 작은 것을 구하여라. (단,  $[a]$ 는  $a$ 를 넘지 않는 최대정수)

$$\sum_{k=0}^m \left( \left[ \frac{m+k+2}{2k+1} \right] - \left[ \frac{m+k+1}{2k+1} \right] \right) = 9$$

## 25. &lt;정답. 16&gt;

양의 정수  $a, b, c$ 의 순서쌍  $(a, b, c)$ 에서 하나의 수가 다른 두 수의 곱으로 표현될 때, 이를 곱순서쌍이라고 하자. 예를 들어,  $(1, 1, 1), (6, 2, 3), (2, 8, 4), (5, 5, 25)$ 는 모두 곱순서쌍이다. 집합  $X = \{1, 2, \dots, 14\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 일대일대응  $f : X \rightarrow X$ 의 개수를 구하여라.

(조건)  $a, b, c \in X$ 에 대하여,  $(a, b, c)$ 가 곱순서쌍이면  $(f(a), f(b), f(c))$ 도 곱순서쌍이다.