제 28 회 2차시험 (중등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2014년 11월 2일 (오전) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7점

1. 삼각형 ABC의 내심을 I라 하고, 직선 AI가 변 BC와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 ABD의 내심 E와 D를 지나는 직선이 삼각형 BCE의 외접원과 만나는 점을 $P(\neq E)$라 하자. 또, 삼각형 ACD의 내심 F와 D를 지나는 직선이 삼각형 BCF의 외접원과 만나는 점을 $Q(\neq F)$라 하자. 변 BC의 중점이 삼각형 DPQ의 외접원 위에 있음을 보여라.

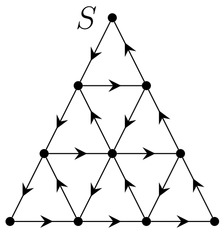
2. 주어진 짝수 개의 양의 실수 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n-1}, a_{2n}$에 대하여

$$s = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}$$
$$t = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n}$$
$$x_k = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+n-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n)$$

이라 하자. 여기서 $a_{2n+1} = a_1,\ a_{2n+2} = a_2,\ \ldots,\ a_{3n-1} = a_{n-1}$이다. 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{s}{x_1} + \frac{t}{x_2} + \frac{s}{x_3} + \frac{t}{x_4} + \cdots + \frac{s}{x_{2n-1}} + \frac{t}{x_{2n}} > \frac{2n^2}{n+1}$$

3. 꼭짓점 10개로 이루어진 아래 그림에서 한 꼭지점으로부터 이웃한 꼭짓점으로 화살표 방향을 따라 움직이는 것을 한 번 이동한 것으로 보자. 꼭짓점 S에서 출발하여 총 n번 이동하는 방법의 수를 구하여라. 단, 지나갔던 꼭짓점이나 선분을 다시 지나가는 것도 허용한다.



4. 세 양의 정수 p, q, r을 모두 나누는 양의 정수가 1밖에 없다면, p와 $q + ar$이 서로소가 되도록 하는 정수 a가 존재함을 보여라.

제28회 2차시험 (중등부)

중등부

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2014년 11월 2일 (오후) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7점

5. 양의 정수 x, y에 대하여 x^2y+x가 xy^2+7의 배수가 되는 정수쌍 (x, y)를 모두 구하여라.

6. 실수 p를 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}$라 하자. 등식

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=27$$

을 만족하는 음이 아닌 세 실수 x, y, z에 대하여 $x^p+y^p+z^p$의 최댓값을 구하여라.

7. 평행사변형 $ABCD(AB<BC)$가 있다. 삼각형 ABC의 내접원이 점 P와 Q에서 각각 변 BC와 AC에 접하고, 삼각형 ACD의 내접원이 점 R에서 변 CD에 접한다. 점 S는 직선 PQ와 AD의 교점이고, 점 T는 선분 BC 위의 점으로 $AB=BT$를 만족하는 점이며, 점 U는 직선 AR과 CS의 교점일 때 세 직선 AT, BU, PQ가 한 점에서 만남을 보여라.

8. 학생 n명과 동아리 m개가 있는 어느 중학교에서 아래 조건을 만족하도록 학생들이 동아리에 가입하였다고 한다.

> 임의의 학생 x에 대하여, 동아리들을 적당히 잘 선택하면 그 동아리들에 모두 가입한 회원은 x밖에 없다.

각 학생이 가입한 동아리의 수를 $a_1, a_2, \ldots, a_n$이라 할 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$a_1!(m-a_1)!+a_2!(m-a_2)!+\cdots+a_n!(m-a_n)!\leq m!$$