제 29 회 고등부 본선

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2015년 11월 1일 (오전) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7 점

1. 양의 정수 m에 대하여, 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (x, y)의 개수가 0 또는 짝수임을 보여라.

(i) $x^2 - 3y^2 + 2 = 16m$

(ii) $2y \le x - 1$

2. 삼각형 ABC의 외접원을 ω라 하자. 점 D는 선분 BC 위에 있고, 점 E는 선분 AD 위에 있다. 반직선 AD와 원 ω의 교점을 F라 하자. 원 ω 위의 점 M은 호 AF를 이등분하는 점으로서, 선분 AF에 대하여 C의 반대쪽에 있다. 반직선 ME와 원 ω의 교점을 G, 반직선 GD와 원 ω의 교점을 H, 반직선 MH와 반직선 AD의 교점을 K라 할 때, 네 점 B, E, C, K가 한 원 위에 있음을 보여라.

3. 실수 a, b, c, x, y가 $a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 = 1$을 만족할 때,

$$(ax + by)^2 + (bx + cy)^2$$

의 최댓값을 구하여라.

4. 양의 정수 n, k, ℓ에 대하여, 다음 네 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 $(a_1, a_2, \ldots, a_\ell)$의 개수를 $Q(n, k, \ell)$라고 하자.

(i) $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_\ell$

(ii) $a_1 > a_2 > \cdots > a_\ell > 0$

(iii) a_ℓ은 홀수

(iv) a_i 중 홀수의 개수가 정확히 k개

예를 들어, $9 = 8 + 1 = 6 + 3 = 6 + 2 + 1$이므로 $Q(9, 1, 1) = 1$, $Q(9, 1, 2) = 2$, $Q(9, 1, 3) = 1$이다. $n > k^2$이면 $\sum_{\ell=1}^{n} Q(n, k, \ell)$가 0 또는 짝수임을 보여라.

제 29 회 고등부 본선
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2015년 11월 1일 (오후) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7 점

5. 모든 실수 x, y, z에 대하여 다음 식을 만족하는 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 을 모두 구하여라. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합)

$$(f(x)+1)(f(y)+f(z)) = f(xy+z) + f(xz-y)$$

6. 원 ω에 내접하는 등변사다리꼴 $ABCD$가 $AB = CD$, $AD < BC$, $AD < CD$를 만족한다. 중심이 D이고 점 A를 지나는 원이 선분 BD, 선분 CD, 원 ω와 각각 점 E, 점 F, 점 $P(\neq A)$에서 만난다고 하자. 직선 AP와 직선 EF의 교점을 Q라 하고, 원 ω가 직선 CQ, 삼각형 BEQ의 외접원과 만나는 점을 각각 $R(\neq C)$, $S(\neq B)$라 하자. $\angle BER = \angle FSC$임을 보여라.

7. 양의 정수 n이 주어져 있다. 다음 두 조건을 모두 만족하는 m개의 집합 $F_1, F_2, \ldots, F_m$이 존재하면 $m \le n$ 임을 보여라. (단, 집합 A, B에 대하여 $|A|$는 A의 원소의 개수이고, $A - B$는 A의 원소 중 B의 원소가 아닌 것의 집합이다. 실수 x, y에 대하여 $\min(x, y)$는 x와 y 중 크지 않은 값이다.)

(i) 모든 $1 \le i \le m$에 대하여 $F_i \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$

(ii) 모든 $1 \le i < j \le m$에 대하여 $\min(|F_i - F_j|, |F_j - F_i|) = 1$

8. 양의 정수 n에 대하여, $a_1, a_2, \ldots, a_k$는 n이하의 양의 정수 중 n과 서로소인 수를 모두 한 번씩 나열한 것이다. $k > 8$ 일 때, 다음을 보여라.

$$\sum_{i=1}^{k} \left| a_i - \frac{n}{2} \right| < \frac{n(k-4)}{2}$$