

2017학년도 4월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[가형]

1	④	2	③	3	③	4	②	5	①
6	⑤	7	③	8	①	9	④	10	⑤
11	③	12	②	13	④	14	④	15	②
16	③	17	①	18	⑤	19	①	20	⑤
21	②	22	25	23	54	24	6	25	13
26	35	27	7	28	180	29	16	30	50

1. [출제의도] 로그함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{3x} = \frac{4}{3} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{4x} = \frac{4}{3}$$

2. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{ 이므로}$$

$$-2 \leq 2\sin x \leq 2$$

$$-1 \leq 2\sin x + 1 \leq 3$$

따라서 $y = 2\sin x + 1$ 의 최댓값은 3

3. [출제의도] 지수함수의 적분 계산하기

$$\int_0^1 (e^x + 1)dx = [e^x + x]_0^1 = e$$

4. [출제의도] 쌍곡선의 방정식 이해하기

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1 \text{에서 주축의 길이는 } 2 \times 2 = 4$$

5. [출제의도] 삼각함수의 미분법 이해하기

$$f'(x) = -\sin x \text{이므로}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$$

6. [출제의도] 지수방정식 이해하기

$$(2^{-3})^{2-x} = 2^{x+4}$$

$$2^{-6+3x} = 2^{x+4}$$

$$-6+3x = x+4$$

$$2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

7. [출제의도] 자연수의 분할 이해하기

구하는 경우의 수는 9를 3개의 자연수로 분할하는 경우의 수와 같다.

$$9 = 7+1+1$$

$$= 6+2+1$$

$$= 5+3+1$$

$$= 5+2+2$$

$$= 4+4+1$$

$$= 4+3+2$$

$$= 3+3+3$$

따라서 구하는 경우의 수는 7

8. [출제의도] 역함수의 미분법 이해하기

$$g(4) = k \text{라 하자.}$$

$$f(k) = 4 \text{이므로 } k^3 + 3k - 4 = 0$$

$$(k-1)(k^2+k+4) = 0$$

$$\therefore k = 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3 \text{에서 } f'(1) = 6$$

역함수의 미분법에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x) - g(4)}{x - 4} = g'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$$

9. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

$$|\sin 2x| = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{i) } \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{12} \text{ 또는 } \frac{5}{12}\pi \text{ 또는 } \frac{13}{12}\pi \text{ 또는 } \frac{17}{12}\pi$$

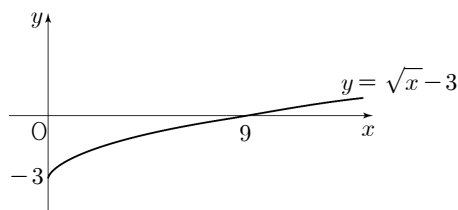
$$\text{ii) } \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{7}{12}\pi \text{ 또는 } \frac{11}{12}\pi \text{ 또는 } \frac{19}{12}\pi \text{ 또는 } \frac{23}{12}\pi$$

따라서 실근의 개수는 8

10. [출제의도] 정적분의 활용 이해하기

곡선 $y = \sqrt{x} - 3$ 의 그래프는 그림과 같다.



곡선과 x 축이 만나는 점의 좌표는 (9, 0)

곡선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^9 |\sqrt{x} - 3| dx &= \int_0^9 (-\sqrt{x} + 3) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x \right]_0^9 = 9 \end{aligned}$$

11. [출제의도] 지수함수의 미분법 이해하기

함수 $f(x) = e^{x-2}$ 이라 하면 $f'(x) = e^{x-2}$

$$f'(3) = e$$

곡선 위의 점 (3, e)에서의 접선의 방정식은

$$y = ex - 2e$$

두 점 A, B의 좌표는 각각 (2, 0), (0, -2e)

따라서 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2e = 2e$

12. [출제의도] 경우의 수 문제해결하기

$$f(1) = a, f(2) = b \text{라 하자.}$$

조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

i) $a+b=4$ 일 때

$$(1, 3), (2, 2), (3, 1) \therefore 3 \text{가지}$$

ii) $a+b=8$ 일 때

$$(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) \therefore 5 \text{가지}$$

iii) $a+b=12$ 일 때

$$(6, 6) \therefore 1 \text{가지}$$

i), ii), iii)에 의하여 함수 f 의 개수는 9

13. [출제의도] 도함수의 활용 이해하기

$$f'(x) = 12\ln x - 3x^2 + 14$$

$$f''(x) = \frac{12-6x^2}{x}$$

$$f''(a) = 0 \text{에서 } \frac{12-6a^2}{a} = 0$$

$$12-6a^2 = 0$$

$$\therefore a = \sqrt{2} \quad (\because a > 0)$$

14. [출제의도] 타원의 정의 이해하기

타원의 정의에 의하여 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 20$

$F(c, 0) (c > 0)$ 이라 하면 $c^2 = 100 - k$ 이므로

$$\overline{F'F} = 2\sqrt{100-k}$$

삼각형 $PF'F$ 의 둘레의 길이는

$$\overline{PF} + \overline{PF'} + \overline{F'F} = 20 + 2\sqrt{100-k} = 34$$

$$\sqrt{100-k} = 7$$

$$\therefore k = 51$$

15. [출제의도] 부분적분법 이해하기

부분적분법에 의하여

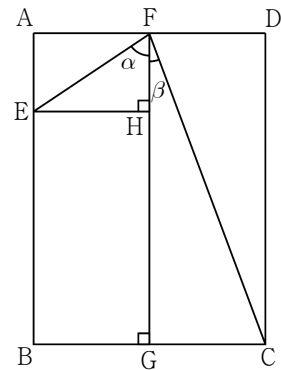
$$f(x) = x+1, g'(x) = \cos x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 1, g(x) = \sin x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos x dx &= \left[(x+1)\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) - \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

16. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 문제 해결하기

그림과 같이 점 F에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 G, 점 E에서 선분 FG에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\angle EFH = \alpha, \angle CFG = \beta$ 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{3}{2}, \tan \beta = \frac{3}{8}$$

$\theta = \alpha + \beta$ 이므로

$$\tan \theta = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{8}}{1 - \frac{3}{2} \times \frac{3}{8}} = \frac{30}{7}$$

17. [출제의도] 로그부등식을 활용하여 문제해결하기

집합 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 4\}$

집합 B 에서 $(\log_2 x - k + 1)(\log_2 x - k - 1) \leq 0$

$$k-1 \leq \log_2 x \leq k+1$$

$$\therefore 2^{k-1} \leq x \leq 2^{k+1}$$

$A \cap B \neq \emptyset$ 이 되려면

$$2^{k+1} \geq 1 \text{이고 } 2^{k-1} \leq 4$$

$$-1 \leq k \leq 3$$

따라서 정수 k 는 -1, 0, 1, 2, 3이므로 개수는 5

18. [출제의도] 이항정리를 활용하여 추론하기

이항정리를 이용하여 $(1+x)^n$ 을 전개하면

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \left({}^nC_k \times x^k \right) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

위 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠의 양변을 0에서 1까지 적분하면

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$\int_0^1 ({}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_n x^n) dx$$

$$= \left[{}_nC_0 x + \frac{1}{2} {}_nC_1 x^2 + \frac{1}{3} {}_nC_2 x^3 + \cdots + \frac{1}{n+1} {}_nC_n x^{n+1} \right]_0^1$$

$$= {}_nC_0 + \frac{1}{2} {}_nC_1 + \frac{1}{3} {}_nC_2 + \cdots + \frac{1}{n+1} {}_nC_n \text{이므로}$$

$$\frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} = {}_nC_0 + \frac{1}{2} {}_nC_1 + \cdots + \frac{1}{n+1} {}_nC_n \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉡에서 ㉢을 빼면

$$\boxed{\frac{n-1}{n+1} \times 2^n} + \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2} {}_nC_1 + \frac{2}{3} {}_nC_2 + \frac{3}{4} {}_nC_3 + \cdots + \frac{n}{n+1} {}_nC_n$$

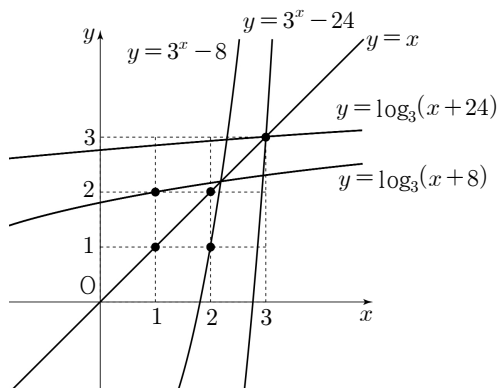
$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{k+1} \times {}_nC_k \right) \text{이므로}$$

$f(x)=3^x-n$ 이라 할 때, $f(2)\leq 1$, $f(3)>3$ 이어야 한다.

$$3^2-n\leq 1, 3^3-n>3$$

$$\therefore 8\leq n<24$$

따라서 자연수 n 의 개수는 16



30. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

(가)에서

$$f(x)=x^m(x-2)^n \quad (\text{단, } m, n \text{은 자연수})$$

(나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^3}{x^m(x-2)^n} = \begin{cases} 0 & (n=1, 2) \\ \frac{1}{2^m} & (n=3) \\ \text{발산} & (n \geq 4) \end{cases}$$

$\therefore n$ 은 3 이하의 자연수

$$f'(x)=x^{m-1}(x-2)^{n-1}\{(m+n)x-2m\} \text{이므로}$$

$$g(x)=x-\frac{x^m(x-2)^n}{x^{m-1}(x-2)^{n-1}\{(m+n)x-2m\}}$$

i) $m \geq 2, n \geq 2$ 일 때

함수 $g(x)$ 는 $x \neq 0, x \neq 2, x \neq \frac{2m}{m+n}$ 인 모든 실수에서 정의된다.

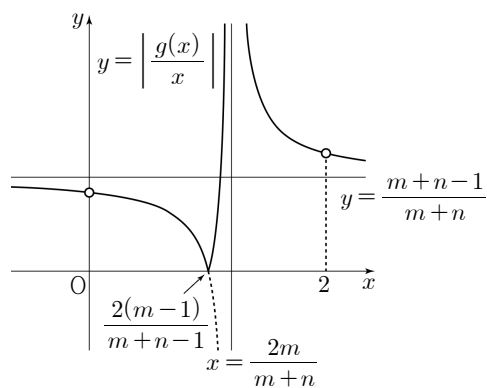
$$g(x)=\frac{x\{(m+n-1)x-2(m-1)\}}{(m+n)x-2m}$$

$$\frac{g(x)}{x}=\frac{(m+n-1)x-2(m-1)}{(m+n)x-2m}$$

$$=\frac{\frac{2n}{x-\frac{2m}{m+n}}}{\frac{(m+n)^2}{x-\frac{2m}{m+n}}+\frac{m+n-1}{m+n}}$$

이고 점근선의 방정식은

$$x=\frac{2m}{m+n}, y=\frac{m+n-1}{m+n}$$



$$\frac{g(x)}{x}=0 \text{에서 } x=\frac{2(m-1)}{m+n-1}$$

$$\text{함수 } \left| \frac{g(x)}{x} \right| \text{는 } x=\frac{2(m-1)}{m+n-1} \text{일 때 연속이고}$$

미분가능하지 않다.

(다)에서

$$\frac{2(m-1)}{m+n-1}=\frac{5}{4}$$

$$m=\frac{5n+3}{3}$$

m 은 자연수이고 $n \leq 3$ 인 자연수이므로

$$m=6, n=3$$

ii) $m \neq 1, n=1$ 일 때

함수 $g(x)$ 는 $x \neq 0, x \neq \frac{2m}{m+1}$ 인

모든 실수에서 정의된다.

$$g(x)=\frac{x\{mx-2(m-1)\}}{(m+1)x-2m}$$

함수 $\left| \frac{g(x)}{x} \right|$ 는 $x=\frac{2(m-1)}{m}$ 일 때 연속이고

미분가능하지 않다.

$$\frac{2(m-1)}{m}=\frac{5}{4}$$

\therefore 자연수 m 이 존재하지 않는다.

iii) $m=1, n \neq 1$ 일 때

함수 $g(x)$ 는 $x \neq 2, x \neq \frac{2}{n+1}$ 인 모든 실수에서 정의된다.

$$g(x)=\frac{nx^2}{(n+1)x-2}$$

함수 $\left| \frac{g(x)}{x} \right|$ 는 $x=\frac{5}{4}$ 에서 미분가능하므로

조건 (다)를 만족시키지 않는다.

iv) $m=n=1$ 일 때

$g(x)$ 는 $x \neq 1$ 인 모든 실수에서 정의된다.

$$g(x)=\frac{x^2}{2x-2}$$

함수 $\left| \frac{g(x)}{x} \right|$ 는 $x=\frac{5}{4}$ 에서 미분가능하므로

조건 (다)를 만족시키지 않는다.

i), ii), iii), iv)에 의하여

$$m=6, n=3$$

$$\therefore g(x)=\frac{2x(4x-5)}{3(3x-4)}$$

$$g'(x)=\frac{8(3x^2-8x+5)}{3(3x-4)^2}$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=\frac{5}{3}$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	\dots	1	\dots	$\left(\frac{4}{3}\right)$	\dots	$\frac{5}{3}$	\dots
$g'(x)$	+	0	-		-	0	+
$g(x)$	\nearrow	$\frac{2}{3}$	\searrow		\searrow	$\frac{50}{27}$	\nearrow

함수 $g(x)$ 의 극솟값 k 는 $\frac{50}{27}$

따라서 $27k=50$