

## • 2교시 수학 영역 •

<b>1</b>	③	<b>2</b>	⑤	<b>3</b>	④	<b>4</b>	④	<b>5</b>	①
<b>6</b>	②	<b>7</b>	③	<b>8</b>	⑤	<b>9</b>	①	<b>10</b>	③
<b>11</b>	②	<b>12</b>	①	<b>13</b>	⑤	<b>14</b>	②	<b>15</b>	⑤
<b>16</b>	④	<b>17</b>	①	<b>18</b>	②	<b>19</b>	③	<b>20</b>	④
<b>21</b>	③	<b>22</b>	8	<b>23</b>	7	<b>24</b>	34	<b>25</b>	6
<b>26</b>	385	<b>27</b>	54	<b>28</b>	22	<b>29</b>	48	<b>30</b>	75

### 1. [출제의도] 지수법칙 계산하기

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{4})^2 \times 2^{\frac{2}{3}} &= \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^2 \times 2^{\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}} \\ &= 2^2 = 4 \end{aligned}$$

### 2. [출제의도] 미분계수 이해하기

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \times \frac{1}{x + 2} \\ &= \frac{f'(2)}{4} = 3 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } f'(2) = 3 \times 4 = 12$$

### 3. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$$\text{함수 } y = \cos \frac{\pi}{4}x \text{의 주기는 } \left| \frac{\pi}{4} \right| = 8$$

### 4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3 + 1 = 4$$

### 5. [출제의도] 함수의 극한의 성질 이해하기

$$x > \frac{1}{2} \text{인 모든 실수 } x \text{에 대하여}$$

$$\frac{3}{2x+1} < f(x) < \frac{3}{2x-1} \text{이므로}$$

$$\frac{3x}{2x+1} < xf(x) < \frac{3x}{2x-1}$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{2x-1} = \frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$\text{함수의 극한의 대소 관계에 의하여 } \lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = \frac{3}{2}$$

### 6. [출제의도] 등차수열 이해하기

$$\text{등차수열 } \{a_n\} \text{의 공차가 3이므로}$$

$$\begin{aligned} a_2 \times a_4 &= (a_3 - 3)(a_3 + 3) \\ &= a_3^2 - 9 = 72 \end{aligned}$$

$$\text{에서 } a_3 = 9 \text{ 또는 } a_3 = -9$$

$$a_3 = -9 \text{이면 } a_1 = a_3 - 6 = -15 < 0$$

$$\text{따라서 } a_3 = 9$$

### 7. [출제의도] 미분계수 이해하기

$$\text{함수 } f(x) \text{가 } x=2 \text{에서 미분가능하므로}$$

$$\text{함수 } f(x) \text{는 } x=2 \text{에서 연속이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \text{에서}$$

$$2 - a = 4 + 2b + a, \quad b = -a - 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - a) - (2 - a)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{x - 2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x^2 + bx + a) - (2 - a)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - (a + 1)x + 2(a - 1)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x - a + 1)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - a + 1) = 3 - a \end{aligned}$$

$$\text{함수 } f(x) \text{가 } x=2 \text{에서 미분가능하므로}$$

$$1 = 3 - a \text{에서 } a = 2, \quad b = -3$$

$$\text{따라서 } f(2) = 0$$

### 8. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계 이해하기

$$a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_5 = S_5 - S_4 = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30}$$

$$\text{따라서 } a_1 + a_5 = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{30}\right) = \frac{7}{15}$$

### 9. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

$$\text{함수 } f(x) = \log_2(x + a) + 1 \text{의 밑이 1보다 크므로}$$

$$x \text{의 값이 증가하면 } f(x) \text{의 값도 증가한다.}$$

$$\text{그러므로 함수 } f(x) \text{는 닫힌구간 } [a, 5] \text{에서}$$

$$x = a \text{일 때 최솟값 3을 갖는다.}$$

$$f(a) = \log_2 2a + 1 = 3 \text{에서 } a = 2$$

$$\text{따라서 } f(a + 4) = f(6) = \log_2 8 + 1 = 3 + 1 = 4$$

### 10. [출제의도] 등비수열의 합 이해하기

$$\text{등비수열 } \{a_n\} \text{의 공비를 } r(r \neq 0) \text{이라 하자.}$$

$$a_1 = 0 \text{이면 } \sum_{k=1}^5 a_k = 0 \neq 33 \text{이므로 } a_1 \neq 0$$

$$a_3 + 2a_4 = a_1 r^2 + 2a_1 r^3 = a_1 r^2(1 + 2r) = 0$$

$$\text{에서 } r = -\frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^5 a_k = \frac{a_1 \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \right\}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{11}{16} a_1 = 33$$

$$\text{따라서 } a_1 = 48$$

### 11. [출제의도] 삼각함수의 성질을 활용하여 문제해결하기

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) = -\sin \theta, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) \times \tan \theta &= -\sin \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= -\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로 } \frac{\cos^2 \theta - 1}{\cos \theta} = \frac{8}{3}$$

$$3\cos^2 \theta - 8\cos \theta - 3 = 0$$

$$(\cos \theta - 3)(3\cos \theta + 1) = 0$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \text{이므로 } \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

### 12. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

$$a_{2n} = \sum_{k=1}^{2n-1} (k - a_k) = \sum_{k=1}^{2n-1} k - \sum_{k=1}^{2n-1} a_k$$

$$a_{2n} + \sum_{k=1}^{2n-1} a_k = \sum_{k=1}^{2n-1} k \text{에서 } \sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{2n-1} k$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^9 k = \frac{9 \times 10}{2} = 45$$

### 13. [출제의도] 삼각함수의 정의 이해하기

$$\text{점 P의 } x \text{좌표를 } a(a > 0) \text{이라 하면 점 P의 좌표는}$$

$$P(a, a + 1)$$

$$\text{각의 크기 } \theta \text{를 나타내는 동경과 각의 크기 } 7\theta \text{를}$$

$$\text{나타내는 동경이 일치하므로}$$

$$7\theta = \theta + 2n\pi (n \text{은 정수})$$

$$\theta = \frac{n}{3}\pi$$

$$\text{이때 점 P는 제1사분면 위의 점이고}$$

$$0 < \theta < 2\pi \text{이므로 } n = 1, \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{a+1}{a} \text{에서 } \sqrt{3}a = a + 1, \quad (\sqrt{3} - 1)a = 1$$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

### 14. [출제의도] 함수의 연속을 활용하여 문제해결하기

$$\text{조건 (가)의 식의 양변에 } x = 0 \text{을 대입하면}$$

$$0 \times f(0) = b \text{에서 } b = 0$$

$$\text{조건 (가)의 식의 양변에 } x = 4 \text{를 대입하면}$$

$$2f(4) = 16 + 4a$$

$$\text{조건 (나)에 의하여 } 4 = 16 + 4a \text{에서 } a = -3$$

$$\text{그러므로 } x \geq -\frac{1}{2} \text{이고 } x \neq 0 \text{인 모든 실수 } x \text{에}$$

$$\text{대하여 } f(x) = \frac{x(x-3)}{\sqrt{2x+1}-1}$$

$$\text{함수 } f(x) \text{가 실수 전체의 집합에서 연속이므로}$$

$$\text{함수 } f(x) \text{는 } x = 0 \text{에서 연속이다.}$$

$$\text{따라서 } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-3)}{\sqrt{2x+1}-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-3)(\sqrt{2x+1}+1)}{(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-3)(\sqrt{2x+1}+1)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-3)(\sqrt{2x+1}+1)}{2} \\ &= \frac{-3 \times 2}{2} = -3 \end{aligned}$$

### 15. [출제의도] 거듭제곱근의 정의 이해하기

$$(i) \quad n \text{이 홀수일 때}$$

$$f(n) = 1 \text{이므로 } f(3) = f(5) = f(7) = f(9) = 1$$

$$(ii) \quad n \text{이 짝수일 때}$$

$$n = 2, 4 \text{이면 } \sin \frac{n}{5}\pi > 0 \text{이므로 } f(2) = f(4) = 2$$

$$n = 6, 8 \text{이면 } \sin \frac{n}{5}\pi < 0 \text{이므로 } f(6) = f(8) = 0$$

$$n = 10 \text{이면 } \sin \frac{10}{5}\pi = 0 \text{이므로 } f(10) = 1$$

$$(i), (ii) \text{에 의하여 } \sum_{n=2}^{10} f(n) = 1 \times 4 + 2 \times 2 + 1 = 9$$

### 16. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 문제해결하기

$$\log_n 4 \times \left( \frac{4}{\log_m 2} + \log_2 n \right)$$

$$= 2\log_n 2 \times (4\log_2 m + \log_2 n)$$

$$= 8\log_n 2 \times \log_2 m + 2\log_n 2 \times \log_2 n$$

$$= 8\log_n m + 2 = 8$$

$$\log_n m = \frac{3}{4} \text{에서 } m = n^{\frac{3}{4}}$$

$$n^{\frac{3}{4}} \text{이 자연수가 되기 위해서는 어떤 자연수}$$

$$k \text{에 대하여 } n = k^4 \text{이어야 한다.}$$

$$1 < n < 100 \text{이므로 } n = 2^4 \text{ 또는 } n = 3^4 \text{이다.}$$

$n = 2^4$ 이면  $m = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$ 이므로  
 $m + n = 8 + 16 = 24$   
 $n = 3^4$ 이면  $m = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^3 = 27$ 이므로  
 $m + n = 27 + 81 = 108$   
 따라서  $m + n$ 의 최댓값은 108

17. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 추론하기

$f(x) = \cos^2 x - \sin x - 1$   
 $= (1 - \sin^2 x) - \sin x - 1$   
 $= -\sin^2 x - \sin x = -\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$   
 $f(\pi) = 0$ 이고  $\pi$ 가 구간  $(\pi, a]$ 에 속하지 않으므로  
 구간  $(\pi, a]$ 에서 함수  $f(x)$ 가 최솟값을 갖기  
 위해서는  $f(x) \leq 0$ 을 만족시키는  $x$ 의 값이  
 구간  $(\pi, a]$ 에 존재해야 한다.  
 $f(x) \leq 0$ 에서  $\sin x = -1$  또는  $\sin x \geq 0$   
 $x > \pi$ 에서  $\sin x = -1$ 인  $x$ 의 최솟값은  $\frac{3}{2}\pi$   
 $x > \pi$ 에서  $\sin x \geq 0$ 인  $x$ 의 최솟값은  $2\pi$   
 그러므로  $p = \frac{3}{2}\pi$   
 한편 구간  $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$ 에서  $-1 \leq \sin x < 0$ 이므로  
 $f(x) = -\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$   
 그러므로  $M = \frac{1}{4}$   
 따라서  $p \times M = \frac{3}{8}\pi$

18. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

점 A의 좌표를 A( $p, 3p+2$ )라 하면  
 점 B는 선분 DA를 2:1로 외분하는 점이므로  
 점 B의 좌표는 B( $2p, 6p+2$ )이다.  
 함수  $y = a^x + k$ 의 그래프와 함수  $y = \log_a(x - k)$ 의  
 그래프는 직선  $y = x$ 에 대하여 서로 대칭이고,  
 곡선  $y = a^x + k$  위의 점 B와 곡선  $y = \log_a(x - k)$   
 위의 점 C를 지나는 직선이 직선  $y = x$ 와  
 서로 수직이므로 점 C는 점 B를 직선  $y = x$ 에  
 대하여 대칭이동시킨 점이다.  
 그러므로 점 C의 좌표는 C( $6p+2, 2p$ )이다.  
 삼각형 CBD는 이등변삼각형이므로  
 두 직선 BD, AC는 서로 수직이다.  
 직선 BD의 기울기가 3이므로  
 직선 AC의 기울기는  
 $\frac{2p - (3p + 2)}{(6p + 2) - p} = \frac{-p - 2}{5p + 2} = -\frac{1}{3}$ 에서  $p = 2$   
 그러므로 A(2, 8), B(4, 14)  
 점 A가 곡선  $y = a^x + k$  위의 점이므로  $a^2 + k = 8$   
 점 B가 곡선  $y = a^x + k$  위의 점이므로  $a^4 + k = 14$   
 두 식을 연립하면  
 $a^4 - a^2 - 6 = 0, (a^2 + 2)(a + \sqrt{3})(a - \sqrt{3}) = 0$   
 $a > 1$ 이므로  $a = \sqrt{3}, k = 5$   
 따라서  $a \times k = 5\sqrt{3}$

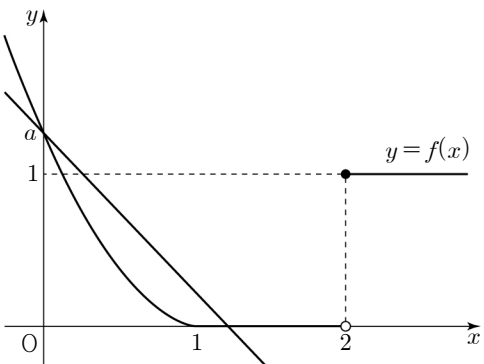
19. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제해결하기

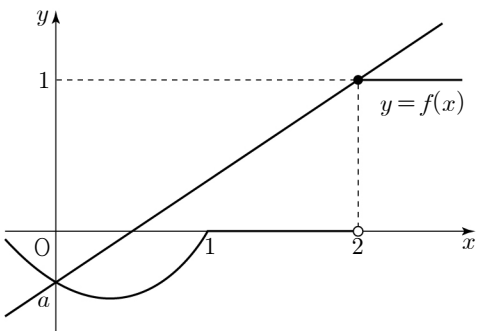
두 호 AD, DE의 길이가 같으므로  
 두 호 AD, DE에 대한 원주각의 크기가 같다.

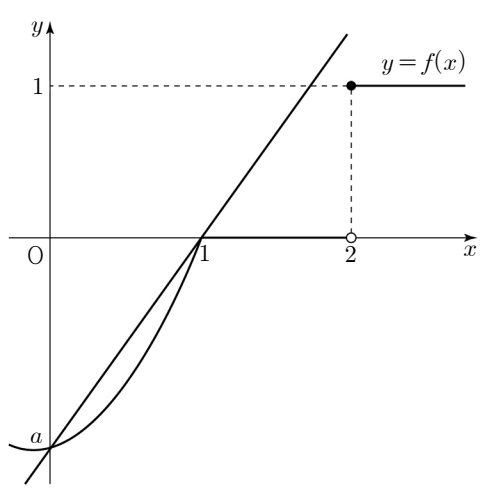
$\angle DBA = \angle EBD = \theta, \overline{AD} = k$ 라 하면  
 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{CD}$ 이므로  $\overline{CD} = 2k$   
 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여  
 $k^2 = 2^2 + \sqrt{6}^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{6} \times \cos \theta$   
 $k^2 = 10 - 4\sqrt{6} \cos \theta \cdots \textcircled{㉠}$   
 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여  
 $(2k)^2 = \sqrt{6}^2 + 4^2 - 2 \times \sqrt{6} \times 4 \times \cos \theta$   
 $2k^2 = 11 - 4\sqrt{6} \cos \theta \cdots \textcircled{㉡}$   
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하면  $k = 1, \cos \theta = \frac{3}{8}\sqrt{6}$   
 $\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{8}\sqrt{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{8}$   
 원 C의 반지름의 길이를 R이라 하면  
 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여  
 $\frac{\overline{AD}}{\sin \theta} = 2R$ 에서  $R = \frac{2}{5}\sqrt{10}$   
 따라서 원 C의 넓이는  $\pi \times \left(\frac{2}{5}\sqrt{10}\right)^2 = \frac{8}{5}\pi$

20. [출제의도] 평균변화율을 이용하여 추론하기

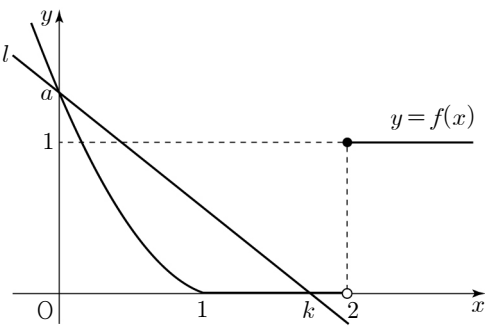
$f(0) = a$ 이므로 양수  $t$ 에 대하여  
 $g(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{f(t) - a}{t}$   
 이고, 함수  $g(t)$ 의 값은 두 점  $(0, a), (t, f(t))$ 를  
 지나는 직선의 기울기와 같다.  
 $\neg$ .  $a = 1$ 일 때  $g(1) = \frac{f(1) - 1}{1} = -1$  (참)  
 $\therefore$ . (i)  $a \geq 1$ 일 때

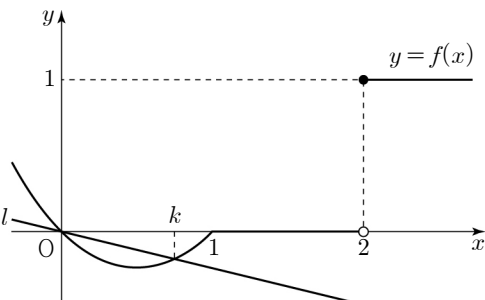

 모든 양수  $t$ 에 대하여  
 $f(t) \leq a$ 이므로  $g(t) = \frac{f(t) - a}{t} \leq 0$   
 그러므로 함수  $g(t)$ 의 최댓값은 1이 될 수 없다.  
 (ii)  $-1 < a < 1$ 일 때


 함수  $g(t)$ 는  $t = 2$ 일 때 최댓값을 갖는다.  
 $g(2) = \frac{f(2) - a}{2} = \frac{1 - a}{2} < 1$   
 그러므로 함수  $g(t)$ 의 최댓값은 1보다 작다.  
 (iii)  $a \leq -1$ 일 때


 함수  $g(t)$ 는  $t = 1$ 일 때 최댓값을 갖는다.  
 $g(1) = \frac{f(1) - a}{1} = -a$   
 함수  $g(t)$ 의 최댓값이 1이기 위해서는  
 $a = -1$   
 이때  $g(2) = \frac{f(2) - a}{2} = \frac{1 - (-1)}{2} = 1$

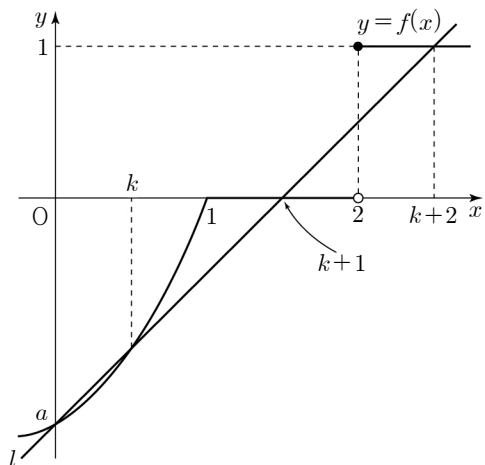
(i), (ii), (iii)에 의하여  
 함수  $g(t)$ 의 최댓값이 1일 때,  $g(2) = 1$  (거짓)  
 $\therefore$ .  $0 < k < 2$ 인  $k$ 에 대하여  
 두 점  $(0, a), (k, f(k))$ 를 지나는 직선을  $l$ 이라  
 하자.  $g(k) = g(k+1) = g(k+2)$ 인  
 양수  $k (0 < k < 2)$ 가 존재하기 위해서는  
 함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 직선  $l$ 의 교점 중  
 $(0, a)$ 가 아닌 점이 3개이어야 하고,  
 이 세 교점의  $x$ 좌표는  $k, k+1, k+2$ 이어야  
 한다.  
 (i)  $a > 0$ 일 때


 함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 직선  $l$ 의 교점 중  
 $x$ 좌표가 양수인 점은  $(k, f(k))$ 뿐이므로  
 $g(k) = g(k+1) = g(k+2)$ 인  $k$ 가 존재하지  
 않는다.  
 (ii)  $a = 0$ 일 때


 $0 < k < 1$ 일 때, 함수  $y = f(x)$ 의 그래프와  
 직선  $l$ 의 교점 중  $x$ 좌표가 양수인 점은  
 $(k, f(k))$ 뿐이므로  $g(k) = g(k+1) = g(k+2)$ 인  
 $k$ 가 존재하지 않는다.  
 $1 \leq k < 2$ 일 때, 직선  $l$ 의 기울기가 0이므로  
 $g(k) = 0$   
 이때  $g(k+1) = \frac{1 - 0}{(k+1) - 0} = \frac{1}{k+1} > 0$ 이므로  
 $g(k) \neq g(k+1)$   
 그러므로  $g(k) = g(k+1) = g(k+2)$ 인  $k$ 가

존재하지 않는다.

(iii)  $a < 0$  일 때



함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $l$ 의 교점 중  $(0, a)$ 가 아닌 점이 3개이기 위해서는  $0 < k < 1$ 이고

$f(k+1)=0, f(k+2)=1$ 이어야 한다.

$\frac{1-0}{(k+2)-(k+1)}=1$ 이므로 직선  $l$ 의 기울기는 1

직선  $l$  위의 두 점  $(k, f(k)), (k+1, 0)$ 에

대하여  $\frac{0-f(k)}{(k+1)-k}=1$ 에서  $f(k)=-1$

즉,  $(k-1)(k-a)=-1 \dots \textcircled{\text{㉑}}$

직선  $l$  위의 두 점  $(0, a), (k, f(k))$ 에

대하여  $\frac{f(k)-a}{k-0}=\frac{-1-a}{k}=1$ 에서

$a=-k-1 \dots \textcircled{\text{㉒}}$

$\textcircled{\text{㉑}}, \textcircled{\text{㉒}}$ 을 연립하면

$(k-1)(2k+1)=-1, 2k^2-k=0$

$0 < k < 1$ 이므로  $k=\frac{1}{2}, a=-\frac{3}{2}$

그러므로

$$f(x)=\begin{cases} (x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right) & (x < 1) \\ 0 & (1 \leq x < 2) \\ 1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

이때

$$(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \\ =\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{25}{16} \geq -\frac{25}{16}$$

함수  $y=f(x)$ 의 최솟값  $-\frac{25}{16}$ 가  $-\frac{3}{2}$ 보다

작으므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와

직선  $y=-\frac{3}{2}$ 은 서로 다른 두 점에서

만난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

21. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

$a_1 \geq 2$ 이므로 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n > 0$

$a_2 = \frac{1}{2}a_1 \geq 1$ 이므로  $a_3 = \frac{1}{4}a_1$

$a_5 < 1$ 이라 하면  $a_6 = \frac{1}{2}(a_5 + a_1)$ 에서

$a_5 + 2a_6 = 2a_5 + a_1 > 2$ 이므로  $a_5 \geq 1$

그러므로  $a_6 = \frac{1}{2}a_5$ 이고  $a_5 + 2a_6 = 2a_5 = 2$ 에서

$a_5 = 1$

$a_4 < 1$ 이라 하면  $a_5 = \frac{1}{2}(a_4 + a_1) = 1$ 에서

$a_4 = 2 - a_1 \leq 0$ 이므로  $a_4 \geq 1$

그러므로  $a_5 = \frac{1}{2}a_4 = 1$ 에서  $a_4 = 2$

(i)  $a_1 \geq 4$ 일 때

$a_3 = \frac{1}{4}a_1 \geq 1$ 이므로  $a_4 = \frac{1}{8}a_1 = 2$ 에서

$a_1 = 16$

(ii)  $a_1 < 4$ 일 때

$a_3 = \frac{1}{4}a_1 < 1$ 이므로

$a_4 = \frac{1}{2}(a_3 + a_1) = \frac{5}{8}a_1 = 2$ 에서  $a_1 = \frac{16}{5}$

(i), (ii)에 의하여 모든  $a_1$ 의 값의 합은

$$16 + \frac{16}{5} = \frac{96}{5}$$

22. [출제의도] 지수방정식 계산하기

방정식  $(\sqrt{3})^{x-2} = 27$ 에서

$$\left(\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}\right)^{x-2} = 3^3, 3^{\frac{x}{2}-1} = 3^3$$

$$\frac{x}{2} - 1 = 3 \text{에서 } x = 8$$

23. [출제의도] 호도법 이해하기

$$\frac{1}{2} \times 8 \times a\pi = 28\pi \text{에서 } a = 7$$

24. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$f(x)$ 가 다항함수이고  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-2x^3}{x^2} = 3$ 이므로

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + ax + b$  ( $a, b$ 는 상수)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ 이고  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ 이므로  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

그러므로  $b = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 3x^2 + ax}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + 3x + a) \\ = a = 3$$

그러므로  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3x$

따라서  $f(2) = 34$

25. [출제의도] 로그의 정의 이해하기

$\log_{|a|}(-a^2 - 4a + 21)$ 의 밑이  $|a|$ 이므로

$|a| > 0$ 이고  $|a| \neq 1 \dots \textcircled{\text{㉑}}$

$\log_{|a|}(-a^2 - 4a + 21)$ 의 진수가  $-a^2 - 4a + 21$ 이므로

$-a^2 - 4a + 21 > 0$

$a^2 + 4a - 21 = (a+7)(a-3) < 0 \dots \textcircled{\text{㉒}}$

$\textcircled{\text{㉑}}, \textcircled{\text{㉒}}$ 을 동시에 만족시키는 정수  $a$ 는

$-6, -5, -4, -3, -2, 2$

따라서 구하는 정수  $a$ 의 개수는 6

26. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

$n \geq 2$ 인 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}) \\ = (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}) + (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}) + \dots \\ + (\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_n}) \\ = \sqrt{a_1} - \sqrt{a_n} = \frac{n-1}{n}$$

$a_1 = 1$ 이므로  $n \geq 2$ 일 때  $\sqrt{a_n} = 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$

그러므로 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n = \frac{1}{n^2}$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$$

27. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$$\frac{2t}{x} = -\frac{1}{t}x + 3 \text{에서 } 2t^2 = -x^2 + 3tx$$

$$x^2 - 3tx + 2t^2 = 0, (x-t)(x-2t) = 0$$

그러므로 두 점 A, B의 좌표는  $A(t, 2), B(2t, 1)$

$$\overline{OA} = \sqrt{t^2 + 4}, \overline{OB} = \sqrt{4t^2 + 1}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\overline{OB} - \overline{OA}}{t-1} \\ = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\sqrt{4t^2 + 1} - \sqrt{t^2 + 4}}{t-1} \\ = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{(\sqrt{4t^2 + 1} - \sqrt{t^2 + 4})(\sqrt{4t^2 + 1} + \sqrt{t^2 + 4})}{(t-1)(\sqrt{4t^2 + 1} + \sqrt{t^2 + 4})} \\ = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{3(t^2 - 1)}{(t-1)(\sqrt{4t^2 + 1} + \sqrt{t^2 + 4})} \\ = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{3(t+1)}{\sqrt{4t^2 + 1} + \sqrt{t^2 + 4}} = \frac{3}{5} \sqrt{5}$$

$$\text{따라서 } 30 \times k^2 = 30 \times \left(\frac{3}{5} \sqrt{5}\right)^2 = 54$$

28. [출제의도] 등차수열을 이용하여 추론하기

$a_k + a_{k+1} + a_{k+2} = 3a_{k+1} = 21$ 에서  $a_{k+1} = 7$

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$  ( $d$ 는 자연수)라 하자.

$$a_1 = a_{k+1} - dk = 7 - dk,$$

$$a_{k+4} = a_{k+1} + 3d = 7 + 3d \text{이므로}$$

$$S_{k+4} = \frac{(k+4)(a_1 + a_{k+4})}{2} \\ = \frac{(k+4)\{14 + (3-k)d\}}{2} = 11$$

에서  $(k+4)\{14 + (3-k)d\} = 22$

$k+4$ 는 4보다 큰 자연수이므로

$$k+4 = 11 \text{ 또는 } k+4 = 22$$

즉,  $k = 7$  또는  $k = 18$

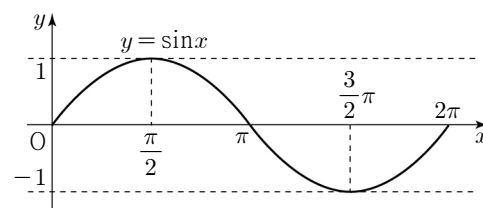
$k = 7$ 일 때,  $14 + (3-7)d = 2$ 에서  $d = 3$

$k = 18$ 일 때,  $14 + (3-18)d = 1$ 에서  $d = \frac{13}{15}$

$d$ 는 자연수이므로  $d = 3, k = 7$

따라서  $a_{k+6} = a_{k+1} + 5d = 7 + 5 \times 3 = 22$

29. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 추론하기



$$\frac{1}{4}k = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k \text{에서 } k(k-2) = 0$$

$k = 0$  또는  $k = 2$

(i)  $k = 0$  또는  $k = 2$ 일 때

$$\text{방정식 } \left(\sin x - \frac{1}{4}k\right)\left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k\right) = 0 \text{의}$$

서로 다른 해의 개수는 방정식  $\sin x = \frac{1}{4}k$ 의

서로 다른 해의 개수와 같다.

방정식  $\sin x = \frac{1}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수는

$k = 0$ 일 때 3이고  $k = 2$ 일 때 2이다.

그러므로

$$\text{방정식 } \left(\sin x - \frac{1}{4}k\right)\left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k\right) = 0 \text{의}$$

서로 다른 해의 개수가 2가 되도록 하는  $k$ 의 값은 2이다.

(ii)  $k \neq 0$ 이고  $k \neq 2$ 일 때  
 방정식  $\left(\sin x - \frac{1}{4}k\right)\left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k\right) = 0$ 의  
 서로 다른 해의 개수는  
 방정식  $\sin x = \frac{1}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수와  
 방정식  $\sin x = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k$ 의 서로 다른 해의  
 개수의 합과 같다.

(a) 방정식  $\sin x = \frac{1}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수가  
 0일 때  
 $|k| > 4$ 이고,  
 $|k| > 4$ 일 때 방정식  $\sin x = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k$ 의  
 서로 다른 해의 개수는 0이다.  
 그러므로  
 방정식  $\left(\sin x - \frac{1}{4}k\right)\left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k\right) = 0$ 의  
 서로 다른 해의 개수는 0이다.

(b) 방정식  $\sin x = \frac{1}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수가  
 1일 때  
 $|k| = 4$ 이므로  $k = 4$  또는  $k = -4$   
 방정식  $\sin x = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k$ 의 서로 다른 해의  
 개수는  
 $k = 4$ 일 때 1이고  $k = -4$ 일 때 0이므로  
 방정식  $\left(\sin x - \frac{1}{4}k\right)\left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k\right) = 0$ 의  
 서로 다른 해의 개수가 2가 되도록 하는  $k$ 의  
 값은 4이다.

(c) 방정식  $\sin x = \frac{1}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수가  
 2일 때  
 $|k| < 4 \dots \textcircled{1}$   
 방정식  $\left(\sin x - \frac{1}{4}k\right)\left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k\right) = 0$ 의  
 서로 다른 해의 개수가 2가 되기 위해서는  
 방정식  $\sin x = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k$ 의 서로 다른 해의  
 개수가 0이어야 하므로  $k < -1$ ,  $k > 4 \dots \textcircled{2}$   
 $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 정수  $k$ 는  $-3$ ,  $-2$   
 (i), (ii)에 의하여 구하는 정수  $k$ 는  
 $-3$ ,  $-2$ ,  $2$ ,  $4$ 이므로 모든 정수  $k$ 의 값의 곱은  
 $-3 \times (-2) \times 2 \times 4 = 48$

### 30. [출제의도] 함수의 연속을 이용하여 추론하기

$$y = \frac{bx}{x+a} = -\frac{ab}{x+a} + b \text{이므로}$$

함수  $y = \frac{bx}{x+a}$ 의 그래프의 점근선은

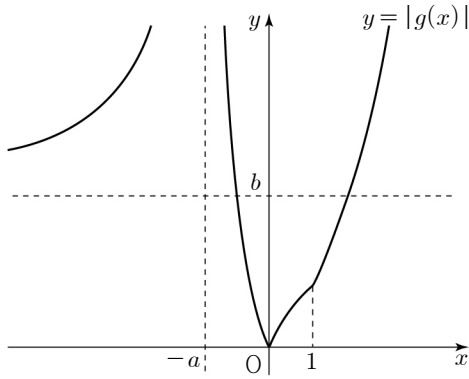
$$x = -a, y = b$$

함수  $g(x)$ 는  $x=1$ 에서 연속이므로

$$g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{bx}{x+a} = \frac{b}{1+a} < b$$

이차함수  $f(x)$ 의 꼭짓점의  $x$ 좌표를  $k$ 라 하자.

$k \leq 1$ 일 때, 함수  $y = |g(x)|$ 의 그래프의 개형은  
 그림과 같다.



$0 < t \leq b$ 인  $t$ 에 대하여  $h(t) = 2$ 이고

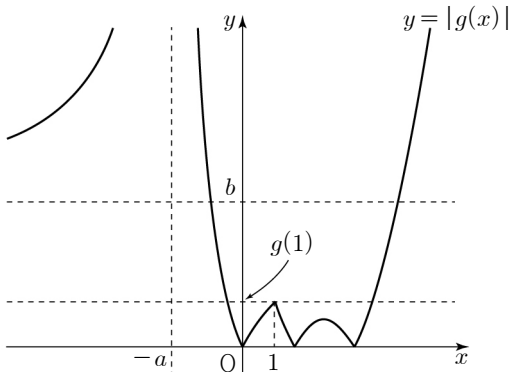
$t > b$ 인  $t$ 에 대하여  $h(t) = 3$ 이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로  $k > 1$

(i)  $f(k) > -b$ 일 때

(a)  $f(k) \geq -g(1)$ 일 때



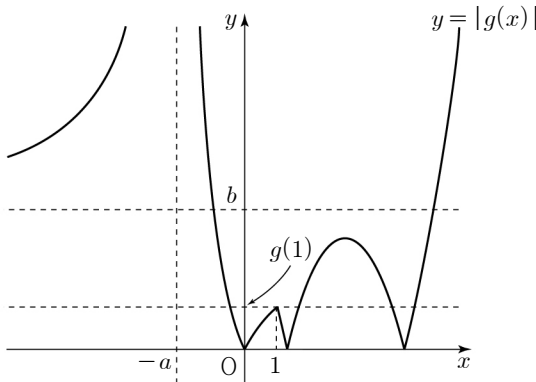
$|f(k)| \leq g(1)$ 이므로

$g(1) < t \leq b$ 인  $t$ 에 대하여  $h(t) = 2$ 이고

$t > b$ 인  $t$ 에 대하여  $h(t) = 3$ 이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(b)  $-b < f(k) < -g(1)$ 일 때



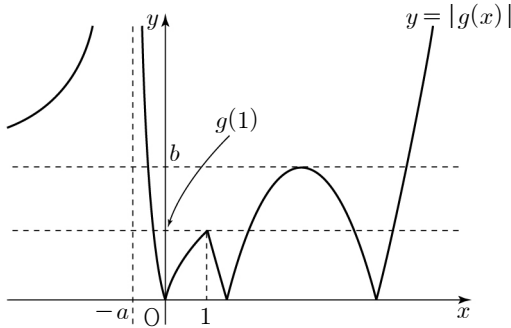
$g(1) < -f(k) < b$ 이므로

$-f(k) < t \leq b$ 인  $t$ 에 대하여  $h(t) = 2$ 이고

$t > b$ 인  $t$ 에 대하여  $h(t) = 3$ 이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii)  $f(k) = -b$ 일 때



$t < 0$ 일 때,  $h(t) = 0$

$t = 0$ 일 때,  $h(0) = 3$

$0 < t < g(1)$ 일 때,  $h(t) = 6$

$t = g(1)$ 일 때,  $h(g(1)) = 5$

$g(1) < t < b$ 일 때,  $h(t) = 4$

$t \geq b$ 일 때,  $h(t) = 3$

그러므로

$$h(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 3 & (t = 0, t \geq b) \\ 4 & (g(1) < t < b) \\ 5 & (t = g(1)) \\ 6 & (0 < t < g(1)) \end{cases}$$

이때 함수  $h(t)$ 는 조건 (가)를 만족시킨다.

함수  $h(t)$ 가  $t = 0$ ,  $t = g(1)$ ,  $t = b$ 에서만

불연속이므로 조건 (나)에 의하여

$$\alpha = g(1), \beta = b$$

$$g(1) = \alpha = h(0) = 3 \text{이므로 } g(1) = \frac{b}{1+a} = 3$$

$$h(\alpha) = h(g(1)) = 5 \text{이고}$$

$$h(\alpha) = \beta - 1 = b - 1 \text{이므로 } b = 6, a = 1$$

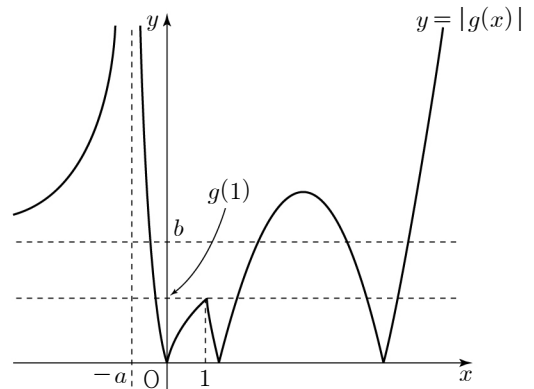
$$f(k) = -6 \text{이므로 } f(x) = (x - k)^2 - 6$$

$$f(1) = g(1) = 3 \text{이므로}$$

$$(1 - k)^2 - 6 = 3 \text{에서 } k = 4$$

$$\text{그러므로 } f(x) = (x - 4)^2 - 6$$

(iii)  $f(k) < -b$ 일 때



$-f(k) > b$ 이므로

$g(1) < t \leq b$ 인  $t$ 에 대하여  $h(t) = 4$ 이고

$b < t < -f(k)$ 인  $t$ 에 대하여  $h(t) = 5$ 이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$f(a-b) = f(1-6) = (-5-4)^2 - 6 = 75$$