제 30 회 고등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2016년 11월 12일 (오전) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7 점

1. 양의 정수 n에 대하여 방정식

$$x^2 + 2016y^2 = 2017^n$$

을 만족하는 정수의 순서쌍 (x, y)의 개수를 n에 대한 식으로 나타내어라.

2. 이등변삼각형이 아닌 삼각형 ABC의 내접원이 변 BC, CA, AB와 접하는 점을 각각 D, E, F라 하고, 내심을 I라 하자. 직선 AD와 내접원의 교점을 $G(\neq D)$라 하고, 점 G에서의 내접원의 접선이 변 AC와 만나는 점을 H라 하고, 직선 IH와 AD의 교점을 K라 하자. 점 I에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 L이라 할 때, $\overline{IE} \cdot \overline{IK} = \overline{IC} \cdot \overline{IL}$임을 보여라.

3. 넓이가 S이고 둘레의 길이가 L인 예각삼각형 ABC 내부의 점 P에서 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 길이가 각각 1, 1.5, 2라 하자. 변 BC와 직선 AP가 만나는 점을 D, 변 CA와 직선 BP가 만나는 점을 E, 변 AB와 직선 CP가 만나는 점을 F라 하고, 삼각형 DEF의 넓이를 T라 하자. 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\left(\frac{\overline{AD} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{CF}}{T}\right)^2 > 4L^2 + \left(\frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA}}{24S}\right)^2$$

4. 양의 정수 n에 대하여 집합 S_n은 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$의 집합이다.

(i) $a_1 = 1$

(ii) 모든 $i = 1, 2, \ldots, n-1$에 대하여 $a_{i+1} \leq a_i + 1$

양의 정수 $k(\leq n)$에 대하여 집합 S_n의 원소 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 중 $a_k = 1$, $a_{k+1} = 2$인 것의 개수를 N_k라 할 때, $N_1 + N_2 + \cdots + N_{n-1}$의 값을 구하여라.

제 30 회 고등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2016년 11월 12일 (오후) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7 점

5. 이등변삼각형이 아닌 삼각형 ABC의 내심을 I라 하고, 삼각형 ABC의 내접원이 변 BC, CA, AB와 접하는 점을 각각 D, E, F라 하자. 직선 EF가 삼각형 CEI의 외접원과 만나는 점을 $P(\neq E)$라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 ABP의 넓이의 2배임을 보여라.

6. 양의 정수 n에 대하여 n개의 양의 실수 $a_1, a_2, \ldots, a_n$이 $a_1 \geq \cdots \geq a_n$을 만족한다. 임의의 n개의 양의 실수 $b_1, b_2, \ldots, b_n$에 대하여 다음 부등식이 항상 성립함을 보여라.

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leq \max\left\{\frac{b_1}{1}, \frac{b_1 + b_2}{2}, \ldots, \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}\right\}$$

(단, $\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$은 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 중 가장 큰 값)

7. 서로 다른 홀수인 소수 p_1, $p_2, \ldots, p_k$와 음이 아닌 정수 a, b_1, $b_2, \ldots, b_k$에 대하여 $N = 2^a p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_k^{b_k}$라 하자. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n의 개수는 $(b_1+1)(b_2+1)\cdots(b_k+1)$임을 보여라.

$$\frac{n(n+1)}{2} \leq N\text{이고, } \left(N - \frac{n(n+1)}{2}\right)\text{은 } n\text{의 배수이다.}$$

8. 집합 $\{0, 1, 2, \ldots, 2000\}$의 부분집합 S가 401개의 원소를 가지면 다음 성질을 만족함을 보여라.

x와 $x+n$이 모두 S에 속하는 x가 70개 이상 존재하는 양의 정수 n이 있다.