

2017학년도 4월 고3 전국연합학력평가

정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[가형]

1	④	2	③	3	③	4	②	5	①
6	⑤	7	③	8	①	9	④	10	⑤
11	③	12	②	13	④	14	④	15	②
16	③	17	①	18	⑤	19	①	20	⑤
21	②	22	25	23	54	24	6	25	13
26	35	27	7	28	180	29	16	30	50

1. [출제의도] 로그함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{3x} = \frac{4}{3} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{4x} = \frac{4}{3}$$

2. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-2 \leq 2\sin x \leq 2$$

$$-1 \leq 2\sin x + 1 \leq 3$$

따라서 $y = 2\sin x + 1$ 의 최댓값은 3

3. [출제의도] 지수함수의 적분 계산하기

$$\int_0^1 (e^x + 1) dx = [e^x + x]_0^1 = e$$

4. [출제의도] 쌍곡선의 방정식 이해하기

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$$
에서 주축의 길이는 $2 \times 2 = 4$

5. [출제의도] 삼각함수의 미분법 이해하기

$$f'(x) = -\sin x$$
이므로

$$f'(\frac{\pi}{2}) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$$

6. [출제의도] 지수방정식 이해하기

$$(2^{-3})^{2-x} = 2^{x+4}$$

$$2^{-6+3x} = 2^{x+4}$$

$$-6 + 3x = x + 4$$

따라서 $x = 5$

7. [출제의도] 자연수의 분할 이해하기

구하는 경우의 수는 9를 3개의 자연수로 분할하는 경우의 수와 같다.

$$9 = 7 + 1 + 1$$

$$= 6 + 2 + 1$$

$$= 5 + 3 + 1$$

$$= 5 + 2 + 2$$

$$= 4 + 4 + 1$$

$$= 4 + 3 + 2$$

$$= 3 + 3 + 3$$

따라서 구하는 경우의 수는 7

8. [출제의도] 역함수의 미분법 이해하기

$$g(4) = k$$
라 하자.

$$f(k) = 4$$
이므로 $k^3 + 3k - 4 = 0$

$$(k-1)(k^2 + k + 4) = 0$$

$$\therefore k = 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$
에서 $f'(1) = 6$

역함수의 미분법에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x) - g(4)}{x - 4} = g'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$$

9. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

$$|\sin 2x| = \frac{1}{2}$$
에서

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$
 또는 $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

i) $\sin 2x = \frac{1}{2}$

$$x = \frac{\pi}{12} \text{ 또는 } \frac{5}{12}\pi \text{ 또는 } \frac{13}{12}\pi \text{ 또는 } \frac{17}{12}\pi$$

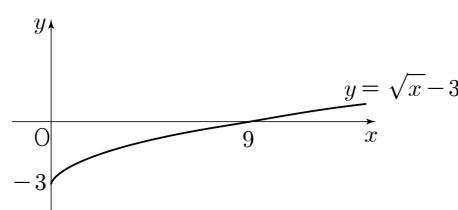
ii) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

$$x = \frac{7}{12}\pi \text{ 또는 } \frac{11}{12}\pi \text{ 또는 } \frac{19}{12}\pi \text{ 또는 } \frac{23}{12}\pi$$

따라서 실근의 개수는 8

10. [출제의도] 정적분의 활용 이해하기

곡선 $y = \sqrt{x} - 3$ 의 그래프는 그림과 같다.



곡선과 x 축이 만나는 점의 좌표는 $(9, 0)$

곡선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^9 |\sqrt{x} - 3| dx = \int_0^9 (-\sqrt{x} + 3) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x \right]_0^9 = 9$$

11. [출제의도] 지수함수의 미분법 이해하기

함수 $f(x) = e^{x-2}$ 이라 하면 $f'(x) = e^{x-2}$

$$f'(3) = e$$

곡선 위의 점 $(3, e)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = ex - 2e$$

두 점 A, B의 좌표는 각각 $(2, 0)$, $(0, -2e)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2e = 2e$

12. [출제의도] 경우의 수 문제해결하기

$$f(1) = a, f(2) = b$$
라 하자.

조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

i) $a+b=4$ 일 때

$$(1, 3), (2, 2), (3, 1) \therefore 3\text{ 가지}$$

ii) $a+b=8$ 일 때

$$(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) \therefore 5\text{ 가지}$$

iii) $a+b=12$ 일 때

$$(6, 6) \therefore 1\text{ 가지}$$

i), ii), iii)에 의하여 함수 f 의 개수는 9

13. [출제의도] 도함수의 활용 이해하기

$$f'(x) = 12\ln x - 3x^2 + 14$$

$$f''(x) = \frac{12-6x^2}{x}$$

$$f''(a) = 0 \text{에서 } \frac{12-6a^2}{a} = 0$$

$$12-6a^2 = 0$$

$$\text{따라서 } a = \sqrt{2} \quad (\because a > 0)$$

14. [출제의도] 타원의 정의 이해하기

타원의 정의에 의하여 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 20$

$$F(c, 0) \quad (c > 0) \text{이라 하면 } c^2 = 100 - k \text{이므로}$$

$$\overline{FF'} = 2\sqrt{100-k}$$

삼각형 PF'F의 둘레의 길이는

$$\overline{PF} + \overline{PF'} + \overline{FF'} = 20 + 2\sqrt{100-k} = 34$$

$$\sqrt{100-k} = 7$$

$$\text{따라서 } k = 51$$

15. [출제의도] 부분적분법 이해하기

부분적분법에 의하여

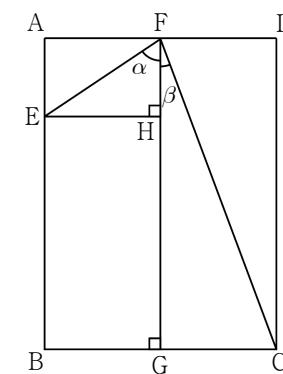
$$f(x) = x+1, g'(x) = \cos x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 1, g(x) = \sin x$$
이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \cos x dx &= [(x+1)\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

16. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 문제 해결하기

그림과 같이 점 F에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 G, 점 E에서 선분 FG에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$$\angle EFH = \alpha, \angle CFG = \beta \text{라 하면}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{2}, \tan \beta = \frac{3}{8}$$

$$\theta = \alpha + \beta$$
이므로

$$\tan \theta = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{8}}{1 - \frac{3}{2} \times \frac{3}{8}} = \frac{30}{7}$$

17. [출제의도] 로그부등식을 활용하여 문제해결하기

$$집합 A = \{x | 1 \leq x \leq 4\}$$

$$집합 B \text{에서 } (\log_2 x - k + 1)(\log_2 x - k - 1) \leq 0$$

$$k-1 \leq \log_2 x \leq k+1$$

$$\therefore 2^{k-1} \leq x \leq 2^{k+1}$$

$$A \cap B \neq \emptyset \text{이 되려면}$$

$$2^{k+1} \geq 1 \text{이고 } 2^{k-1} \leq 4$$

$$-1 \leq k \leq 3$$

따라서 정수 k 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 이므로 개수는 5

18. [출제의도] 이항정리를 활용하여 추론하기

이항정리를 이용하여 $(1+x)^n$ 을 전개하면

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \left(\boxed{{}_n C_k} \times x^k \right) \quad \dots \dots \quad \textcircled{①}$$

위 식의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$2^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \dots + {}_n C_n \quad \dots \dots \quad \textcircled{②}$$

①의 양변을 0에서 1까지 적분하면

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{2^{n+1}}{$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{k+1} \times {}_n C_k \right) = \frac{n-1}{n+1} \times 2^n + \frac{1}{n+1} < 100$$

$$h(n) = \frac{n-1}{n+1} \times 2^n + \frac{1}{n+1} \text{ } \circ \text{ 라 하면}$$

$$h(7) = \frac{769}{8} < 100$$

$$h(8) = \frac{1793}{9} > 100 \text{ } \circ \text{ 라므로}$$

n 의 최댓값은 $\boxed{7}$ 이다.

$$\text{따라서 } f(n) = {}_n C_1, g(n) = \frac{n-1}{n+1} \times 2^n, p = 7 \text{ } \circ \text{ 이고}$$

$$f(6) \times g(5) + p = 6 \times \frac{64}{3} + 7 = 135$$

19. [출제의도] 평면곡선을 활용하여 문제해결하기

$$\text{접근선의 방정식이 } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x \text{ } \circ \text{ 라므로 } a^2 = 3b^2$$

초점 F의 x좌표가 $4\sqrt{3}$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 4b^2 = (4\sqrt{3})^2$$

$$\therefore a^2 = 36, b^2 = 12$$

$$\text{점 P는 쌍곡선 } \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{12} = 1 \text{ 위의 점이므로}$$

$$P(4\sqrt{3}, 2)$$

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{12} = 1 \text{ 의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$\frac{2x}{36} - \frac{2y}{12} \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{3y} (y \neq 0)$$

$$\text{따라서 점 P에서의 접선의 기울기는 } \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

20. [출제의도] 여러 가지 적분법을 활용하여 추론하기

ㄱ. $0 \leq t < 3$ 일 때 점 P는 점 A(1, 1)을 x축 방향으로 t만큼 평행이동한 점이므로 점 P의 좌표는 $(t+1, 1)$ \therefore (참)

ㄴ. 점 P($t+1, 1$)은 함수 $f(x) = kx^2$ 위의 점이므로

$$k = \frac{1}{(t+1)^2}$$

$$f'(x) = 2kx \text{ } \circ \text{ 라므로}$$

$$g(t) = f'(t+1) = \frac{2}{t+1} \quad \therefore \text{(참)}$$

ㄷ. $3 \leq t \leq 7$ 일 때 점 P는 점 B(4, 1)을 y축 방향으로 $(t-3)$ 만큼 평행이동한 점이므로 점 P의 좌표는 $(4, t-2)$ 이다. 점 P는 함수 $f(x) = kx^2$

$$\text{위의 점이므로 } k = \frac{t-2}{16}$$

$$g(t) = f'(4) = \frac{t-2}{2}$$

$$\therefore g(t) = \begin{cases} \frac{2}{t+1} & (0 \leq t < 3) \\ \frac{t-2}{2} & (3 \leq t \leq 7) \end{cases}$$

$$\int_0^7 g(t) dt = \int_0^3 g(t) dt + \int_3^7 g(t) dt$$

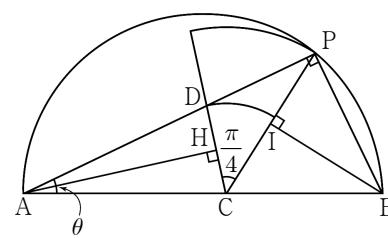
$$= \int_0^3 \frac{2}{t+1} dt + \int_3^7 \frac{t-2}{2} dt$$

$$= \left[2\ln|t+1| \right]_0^3 + \left[\frac{1}{4}t^2 - t \right]_3^7$$

$$= 6 + 4\ln 2 \quad \therefore \text{(참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기



$$\overline{AB} = 1 \text{ } \circ \text{ } \text{and } \angle APB = \frac{\pi}{2} \text{ } \circ \text{ } \text{and}$$

$$\overline{BP} = \sin \theta = \overline{BC}, \overline{AC} = 1 - \sin \theta$$

$$\text{삼각형 ACD에서 } \angle ACD = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \text{ } \circ \text{ } \text{and}$$

$$\text{삼각형 BPC에서 } \angle BCP = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \text{ } \circ \text{ } \text{and}$$

$$\angle PCD = \frac{\pi}{4}$$

점 A에서 \overline{CD} 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CD} = 2\overline{CH} = 2\overline{AC} \sin \frac{\theta}{2} = 2(1 - \sin \theta) \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore S(\theta) = \frac{1}{2} \times 4(1 - \sin \theta)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \times \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{2} \times (1 - \sin \theta)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

점 B에서 \overline{CP} 에 내린 수선의 발을 I라 하면

$$\overline{CP} = 2\overline{CI} = 2\overline{BC} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) = 2\sin \theta \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\therefore T(\theta) = \frac{1}{2} \times 4\sin^2 \theta \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \times \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{T(\theta) - S(\theta)}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) - (1 - \sin \theta)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\theta^2} \right\}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)}{\theta^2} - \frac{(1 - \sin \theta)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{4 \times \frac{\theta^2}{4}} \right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(1 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times 1 \right) = \frac{\pi}{8}$$

22. [출제의도] 중복순열 계산하기

$${}^5\Pi_2 = 5^2 = 25$$

23. [출제의도] 봇의 미분법 이해하기

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \text{ } \circ \text{ } \text{and } f' \left(\frac{1}{3} \right) = 54$$

24. [출제의도] 매개변수로 나타낸 함수의 미분법 이해하기

$$x = t + 2\sqrt{t} \text{ } \text{and } \frac{dx}{dt} = 1 + \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t} + 1}{\sqrt{t}}$$

$$y = 4t^3 \text{ } \text{and } \frac{dy}{dt} = 12t^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{12t^2}{\sqrt{t} + 1} = \frac{12t^2\sqrt{t}}{\sqrt{t} + 1}$$

$$\text{따라서 } t = 1 \text{ 일 때, } \frac{dy}{dx} \text{의 값은 } 6$$

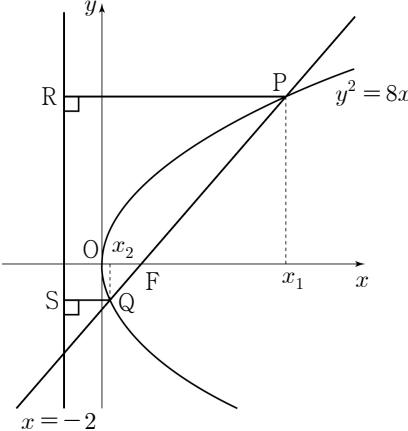
25. [출제의도] 포물선의 성질 이해하기

포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점은 F(2, 0)이므로

직선은 점 F를 지난다.

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 x_1, x_2 라 하고

두 점 P, Q에서 준선 $x = -2$ 에 내린 수선의 발을 각각 R, S라 하자.



$$\overline{PQ} = \overline{PF} + \overline{FQ} = \overline{PR} + \overline{QS}$$

$$17 = (x_1 + 2) + (x_2 + 2)$$

$$\text{따라서 } x_1 + x_2 = 13$$

26. [출제의도] 중복조합을 활용하여 추론하기

자연수 2, 3, 5, 7이 선택되어진 개수를 각각 a, b, c, d 라 하면 $a+b+c+d=8$ (단, a, b, c, d 는 음이 아닌 정수)

8개의 수의 곱은

$$2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d = 60k \text{ } \text{and } k \text{는 자연수}$$

$$2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d = (2^2 \times 3 \times 5) \times k \text{ } \text{and}$$

$$a \geq 2, b \geq 1, c \geq 1, d \geq 0$$

$$a' = a-2, b' = b-1, c' = c-1, d' = d \text{라 하면}$$

$$a' + b' + c' + d' = 4$$

(단, a', b', c', d' 은 음이 아닌 정수)

순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 순서쌍 (a', b', c', d') 의 개수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 ${}_4H_4 = {}_7C_4 = 35$

27. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \left\{ \sqrt{x + \frac{\pi}{4} \sin \left(\frac{\pi}{2}x \right)} \right\}^2$$

입체도형의 부피 V 는

$$V = \int_1^4 S(x) dx = \int_1^4 \left\{ x + \frac{\pi}{4} \sin \left(\frac{\pi}{2}x \right) \right\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2}x \right) \right]_1^4 = 7$$

28. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 활용하여 추론하기

4, 5, 6이 적힌 칸의 세 개의 공에 적힌 수의 합이 5이고 세 개의 공이 모두 같은 색인 경우는 다음과 같다.

i) 4, 5, 6이 적힌 칸에 흰 공 ①, ②, ③를 넣는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}$

나머지 5개의 칸에 흰 공 ①, 검은 공 ①, ①, ②,

②를 넣는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!2!}$

$$\therefore \frac{3!}{2!} \times \frac{5!}{2!2!} = 90$$

ii) 4, 5, 6이 적힌 칸에 검은 공 ①, ②, ③를 넣는 경우도 마찬가지이므로 경우의 수는 90

i), ii)에 의하여 $2 \times 90 = 180$

29. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 활용하여 추론하기

두 곡선 $y = 3^x - n$, $y = \log_3(x+n)$ 은 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 점 (a, b) 가 주어진 영역에 포함되면 점 (b, a) 도 포함된다.

영역의 내부 또는 경계에 포함되는 점의 개수가

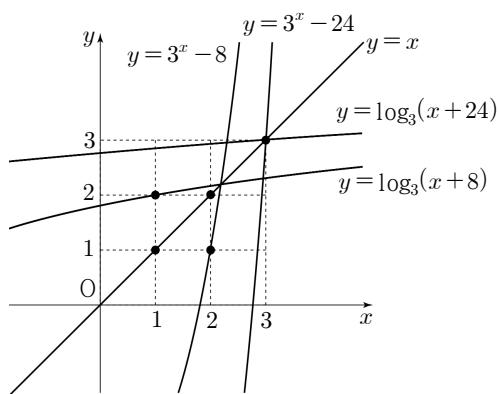
4일 때의 네 점은 $(1, 1), (2, 2), (2, 1), (1, 2)$ 이다.

$f(x) = 3^x - n$ 라 할 때, $f(2) \leq 1$, $f(3) > 3$ 이어야 한다.

$$3^2 - n \leq 1, 3^3 - n > 3$$

$$\therefore 8 \leq n < 24$$

따라서 자연수 n 의 개수는 16



30. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

(가)에서

$$f(x) = x^m(x-2)^n \quad (\text{단, } m, n \text{은 자연수})$$

(나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^3}{x^m(x-2)^n} = \begin{cases} 0 & (n=1, 2) \\ \frac{1}{2^m} & (n=3) \\ \text{발산} & (n \geq 4) \end{cases}$$

$\therefore n \leq 3$ 이하의 자연수

$$f'(x) = x^{m-1}(x-2)^{n-1}\{(m+n)x-2m\}$$

$$g(x) = x - \frac{x^m(x-2)^n}{x^{m-1}(x-2)^{n-1}\{(m+n)x-2m\}}$$

i) $m \geq 2, n \geq 2$ 일 때

함수 $g(x)$ 는 $x \neq 0, x \neq 2, x \neq \frac{2m}{m+n}$ 인 모든 실수에서 정의된다.

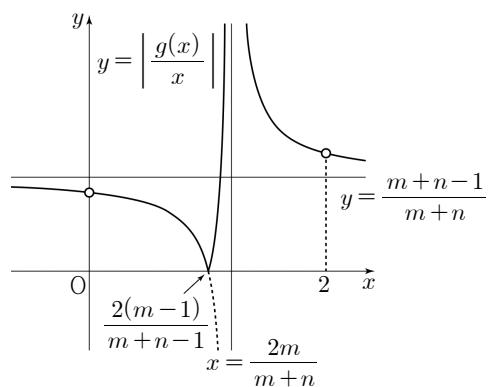
$$g(x) = \frac{x\{(m+n-1)x-2(m-1)\}}{(m+n)x-2m}$$

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{(m+n-1)x-2(m-1)}{(m+n)x-2m}$$

$$= \frac{\frac{2n}{(m+n)^2}}{x - \frac{2m}{m+n}} + \frac{m+n-1}{m+n}$$

이고 점근선의 방정식은

$$x = \frac{2m}{m+n}, y = \frac{m+n-1}{m+n}$$



$$\frac{g(x)}{x} = 0 \text{에서 } x = \frac{2(m-1)}{m+n-1}$$

함수 $\left| \frac{g(x)}{x} \right|$ 는 $x = \frac{2(m-1)}{m+n-1}$ 일 때 연속이고 미분가능하지 않다.

(다)에서

$$\frac{2(m-1)}{m+n-1} = \frac{5}{4}$$

$$m = \frac{5n+3}{3}$$

m 은 자연수이고 $n \leq 3$ 인 자연수이므로

$$m=6, n=3$$

ii) $m \neq 1, n=1$ 일 때

함수 $g(x)$ 는 $x \neq 0, x \neq \frac{2m}{m+1}$ 인 모든 실수에서 정의된다.

$$g(x) = \frac{x\{mx-2(m-1)\}}{(m+1)x-2m}$$

함수 $\left| \frac{g(x)}{x} \right|$ 는 $x = \frac{2(m-1)}{m}$ 일 때 연속이고 미분가능하지 않다.

$$\frac{2(m-1)}{m} = \frac{5}{4}$$

\therefore 자연수 m 이 존재하지 않는다.

iii) $m=1, n \neq 1$ 일 때

함수 $g(x)$ 는 $x \neq 2, x \neq \frac{2}{n+1}$ 인 모든 실수에서 정의된다.

$$g(x) = \frac{nx^2}{(n+1)x-2}$$

함수 $\left| \frac{g(x)}{x} \right|$ 는 $x = \frac{5}{4}$ 에서 미분가능하므로

조건 (다)를 만족시키지 않는다.

iv) $m=n=1$ 일 때

$g(x)$ 는 $x \neq 1$ 인 모든 실수에서 정의된다.

$$g(x) = \frac{x^2}{2x-2}$$

함수 $\left| \frac{g(x)}{x} \right|$ 는 $x = \frac{5}{4}$ 에서 미분가능하므로

조건 (다)를 만족시키지 않는다.

i), ii), iii), iv)에 의하여

$$m=6, n=3$$

$$\therefore g(x) = \frac{2x(4x-5)}{3(3x-4)}$$

$$g'(x) = \frac{8(3x^2-8x+5)}{3(3x-4)^2}$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=\frac{5}{3}$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	...	1	...	$\left(\frac{4}{3}\right)$...	$\frac{5}{3}$...
$g'(x)$	+	0	-		-	0	+
$g(x)$	↗	$\frac{2}{3}$	↘		↘	$\frac{50}{27}$	↗

함수 $g(x)$ 의 극솟값 k 는 $\frac{50}{27}$

따라서 $27k=50$