

2012 년 8 월 19 일 (오 전); 제한 시간 2 시간 30 분; 문항 당 7 점

1. 삼각형 ABC 의 외접원 O 의 지름의 길이가 2이고 꼭지각 A 는 둔각이다. 점 D 는 변 AB 위의 점으로 $\overline{AD} = \overline{AC}$ 를 만족하는 점이고, 점 K 는 원 O 위의 점으로 선분 AK 가 원 O 의 지름이 되게 하는 점이다. 선분 AK 와 선분 CD 가 점 L 에서 만나고, 점 D, K, L 을 지나는 원과 원 O 가 점 $P (\neq K)$ 에서 만난다고 하자. $\angle BCD = \angle BAP = 10^\circ$ 이면 $\overline{DP} = \sin \frac{\angle BAC}{2}$ 임을 보여라.

2. 어떤 모임에서 학생 A_1, A_2, \dots, A_n 이 서로 악수를 하였다. 학생 A_i 가 악수한 횟수를 d_i ($1 \leq i \leq n$)이라 할 때 $d_1 + d_2 + \dots + d_n > 0$ 이다. 다음 조건을 모두 만족하는 i, j ($1 \leq i < j \leq n$)이 존재함을 보여라.

(1) 학생 A_i 와 학생 A_j 는 악수를 하였다.

$$(2) \frac{(d_1 + d_2 + \dots + d_n)^2}{n^2} \leq d_i d_j$$

3. 등식 $2^m p^2 + 1 = q^5$ 을 만족하는 양의 정수 m 과 소수 p, q 를 모두 구하여라.

4. 등식 $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc + 1$ 을 만족하는 양의 실수 a, b, c 에 대하여

$$(a - 2bc)(b - 2ca)(c - 2ab)$$

의 최댓값을 구하여라.