

제 24 회 한국수학올림피아드 - 2 차 시 험

중등부

2010년 8월 22일 (오전)

1. 모든 양의 정수 k 에 대하여, $2^{2^k} + 2^{2^{k-1}} + 1$ 은 소수인 약수를 k 개 이상 가짐을 보여라.
2. n^2 개의 단위 정사각형으로 이루어진 $n \times n$ 바둑판이 있다. 단위 정사각형 각각에 0 또는 1을 써 넣는다. k 번째($1 \leq k \leq n$) 가로줄에 있는 모든 숫자의 곱을 A_k 라 할 때, $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ 이 짝수가 되도록 써 넣는 방법의 수를 구하여라.
3. 예각삼각형 ABC 의 변 AC 위의 점 D 와 변 AB 위의 점 E 가 $\angle ADE = \angle ABC$ 를 만족한다. $\angle A$ 의 이등분선과 변 BC 의 교점을 K 라 하고, K 에서 변 DE 에 내린 수선의 발을 P , A 에서 변 DE 에 내린 수선의 발을 L , 선분 AL 의 중점을 Q 라 하자. 삼각형 ABC 의 내심이 삼각형 ADE 의 외접원 위에 있으면, P, Q 와 삼각형 ADE 의 내심이 일직선 위에 있음을 보여라.
4. 연속한 네 항 a, b, c, d 의 다음 항은 $a + 2b + 3c + 4d$ 를 9로 나눈 나머지가 되도록 정수를 나열하자. 처음에 2, 0, 1, 0으로 시작할 때, 0, 1, 0, 2가 연속한 네 항으로 나타날 수 없음을 보여라.

제한 시간 2시간 30분

문항당 7점