

2023년 5월 13일; 제한시간 2시간 30분

- A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
 B. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
 C. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
 예를 들면, 답이 “7” 일 경우 “007” 이라고 기입하여야 합니다.
 D. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
 E. 문제 1 ~ 4 번은 각 4 점, 문제 17 ~ 20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. [정답. 384]

다음 조건을 만족하는 집합 $\{1, 2, \dots, 10\}$ 의 부분집합 S 의 개수를 구하여라.

(조건) 집합 $\{1, 2, 3\} \cap S$ 의 원소의 개수는 1이다.

2. [정답. 24]

양의 정수 x, y, z 는 등식 $x^2 + y^2 + z^2 = 224$ 를 만족한다.
 $x + y + z$ 의 값을 구하여라.

3. [정답. 135]

마름모 $ABCD$ 에서 변 BC 의 중점 M 에 대하여 $\overline{AM} = 3$, $\overline{BM} = 2$ 이다. 마름모 $ABCD$ 의 넓이를 S 라 할 때, S^2 의 값을 구하여라.

4. [정답. 23]

곡선 $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 15$ 와 직선 $y = a$ 가 서로 다른 세 점 P, Q, R 에서 만난다. $\overline{PQ} = \overline{QR}$ 일 때, 실수 a 의 값을 구하여라.

5. [정답. 160]

집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합 중 원소의 곱이 12의 배수인 것의 개수를 구하여라.

6. [정답. 399]

반지름이 10인 원에 내접하는 오각형 $ABCDE$ 가 있다.
 $\overline{AB} = 1$, $\angle BAC = \angle ACE = \angle CED = 30^\circ$ 일 때, $(\overline{DE})^2$ 의 값을 구하여라.

7. [정답. 90]

다항식 $(x^2 - 1)^5(x^2 - x + 1)^5$ 을 전개하였을 때, x^9 의 계수를 구하여라.

8. [정답. 113]

정수 $\frac{2^{84} - 1}{(2^7 - 1)(2^8 + 2^4 + 1)}$ 을 2^7 으로 나눈 나머지를 구하여라.

9. [정답. 23]

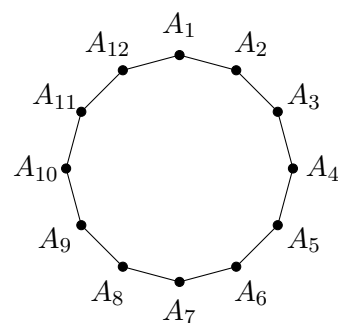
다항함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 모두 만족할 때, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x)}{f(x)}$ 의 값을 구하여라.

(i) $f(0) = 0$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f'(x))^2}{f(x)f''(x)} = \frac{23}{22}$

10. [정답. 135]

정12각형 $A_1A_2 \cdots A_{12}$ 의 꼭짓점 중에서 4개의 점을 꼭짓점으로 가지는 사다리꼴의 개수를 구하여라.



11. [정답. 144]

점 B 는 선분 AC 를 $3:2$ 로 내분하는 점이다. 선분 AC 를 지름으로 하는 반원을 O 라 하고 선분 AB 와 BC 를 지름으로 하는 반원 중 선분 AC 에 대하여 O 와 같은 쪽에 있는 반원을 각각 O_1, O_2 라 하자. 점 B 를 지나고 선분 AC 에 수직인 직선 ℓ 과 O 의 교점을 P 라 하고, 반원 O_1, O_2 의 ℓ 이 아닌 공통의 접선이 O_1, O_2 와 접하는 점을 각각 Q, R 이라 하자. 삼각형 PQR 과 삼각형 PAC 의 넓이를 각각 X, Y 라 할 때, $\frac{600X}{Y}$ 의 값을 구하여라.

12. [정답. 11]

다음 등식을 만족하는 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x + 11y} = 11$$

13. [정답. 384]

삼각형 ABC 의 내접원 O_1 은 반지름이 12이고, 변 AB, BC 와 각각 점 D, E 에서 접한다. 삼각형 DBE 의 내접원 O_2 은 변 AB, BC 와 각각 점 F, G 에서 접한다. 두 원 O_1 과 O_2 의 두 교점을 P, Q 라 하고 원 O_2 의 반지름을 r 이라 하자. 사각형 PFQ 가 직사각형일 때, $6r^2$ 의 값을 구하여라.

14. [정답. 42]

다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$, $g: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ 의 순서쌍 (f, g) 의 개수를 구하여라.

(i) 함수 f 는 일대일대응이다.

(ii) 모든 $n = 1, 2, 3$ 에 대하여 $f(g(n)) = g(f(n))$ 이다.

15. [정답. 25]

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) $f(0) = 0$

(ii) 모든 양의 실수 x 에 대하여

$$f(x) = 1 + 3f\left(\left[\frac{x}{2}\right]\right) - 2f\left(\left[\frac{x}{4}\right]\right)$$

함숫값 $f(2^{100} + 2^{99} + 2^{98})$ 을 31로 나눈 나머지를 구하여라.
(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 가장 큰 정수)

16. [정답. 320]

다음 두 조건을 모두 만족하는 정수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(i) $0 \leq a, b, c, d \leq 10$

(ii) $a^2 - b^2 - cd - 1$ 은 11의 배수이다.

17. [정답. 16]

삼각형 ABC 의 내심을 P 라 하자. 점 D 는 선분 BC 의 C 쪽 연장선 위의 점이고 삼각형 ACD 의 내심을 Q 라 하자. $6\overline{CA} = 5\overline{BC}$, $\overline{AB} = 10$, $\overline{AD} = 6$ 이고 네 점 B, D, Q, P 가 한 원 위에 있을 때, $\frac{60\overline{CD}}{\overline{BC}}$ 의 값을 구하여라.

18. [정답. 1]

다음 등식이 항등식인 정수 계수 다항식 $P(x)$ 와 정수 a, b, c 에 대하여 $3b - c$ 를 23으로 나눈 나머지를 구하여라.

$$x^{2023} = (x^3 - x - 1)P(x) + ax^2 + bx + c$$

19. [정답. 214]

다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수 x, y, z, a 에 대하여 $x + y + z + a$ 가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

(i) $x > y > z$

(ii) $(150x - za)(150y - a) < 0$

20. [정답. 330]

다음 두 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍 (a_1, a_2, \dots, a_7) 의 개수를 구하여라.

(i) $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 에 대하여 $0 \leq a_i + a_{i+1} \leq 4$

(ii) $0 \leq a_1 \leq 4$ 이고 $a_7 \leq -8$