

제 3 교 시

2019학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

가형

성명		수험번호							
----	--	------	--	--	--	--	--	--	--

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 기입하십시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며, '0'이 포함된 경우에는 '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하십시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

1. 두 벡터 $\vec{a} = (6, 2, 4)$, $\vec{b} = (1, 3, 2)$ 에 대하여 벡터 $\vec{a} - \vec{b}$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

2. 함수 $f(x) = \ln(2x+3)$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{5}{14}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{4}{7}$

3. 방정식 $2^x + \frac{16}{2^x} = 10$ 의 모든 실근의 합은? [2점]

① 3

② $\log_2 10$

③ $\log_2 12$

④ $\log_2 14$

⑤ 4

4. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{2}{5}, \quad P(A \cup B) = \frac{4}{5}$$

일 때, $P(B|A)$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{10}$

② $\frac{1}{5}$

③ $\frac{3}{10}$

④ $\frac{2}{5}$

⑤ $\frac{1}{2}$

5. 좌표공간에서 두 점 $A(5, a, -3)$, $B(6, 4, b)$ 에 대하여 선분 AB 를 $3:2$ 로 외분하는 점이 x 축 위에 있을 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

6. 이산확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	b	1

$E(X) = \frac{11}{6}$ 일 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

7. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 t ($0 < t < \pi$)에서의 위치 $P(x, y)$ 가

$$x = \cos t + 2, \quad y = 3 \sin t + 1$$

이다. 시각 $t = \frac{\pi}{6}$ 에서 점 P 의 속력은? [3점]

① $\sqrt{5}$

② $\sqrt{6}$

③ $\sqrt{7}$

④ $2\sqrt{2}$

⑤ 3

8. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_1^{e^2} \frac{f(1+2\ln x)}{x} dx = 5$$

일 때, $\int_1^5 f(x) dx$ 의 값은? [3점]

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

9. 흰 공 4개와 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공의 색을 확인한 후 다시 넣는 시행을 5회 반복한다. 각 시행에서 꺼낸 공이 흰 공이면 1점을 얻고, 검은 공이면 2점을 얻을 때, 얻은 점수의 합이 7일 확률은? [3점]

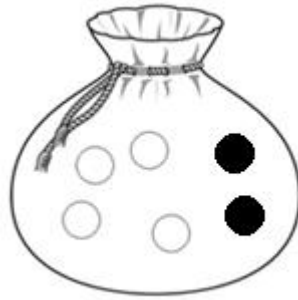
① $\frac{80}{243}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{82}{243}$

④ $\frac{83}{243}$

⑤ $\frac{28}{81}$



10. 곡선 $y=e^{\frac{x}{3}}$ 과 이 곡선 위의 점 $(3, e)$ 에서의 접선 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [3점]

① $\frac{e}{2}-1$

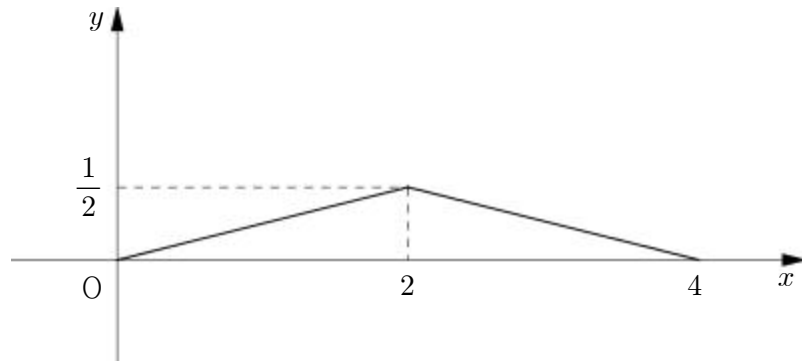
② $e-2$

③ $\frac{3}{2}e-3$

④ $2e-4$

⑤ $\frac{5}{2}e-5$

11. 연속확률변수 X 가 갖는 값의 범위가 $0 \leq X \leq 4$ 이고, X 의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다. $1 < k < 2$ 일 때, $P(k \leq X \leq 2k)$ 가 최대가 되도록 하는 k 의 값은? [3점]



- ① $\frac{7}{5}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{17}{10}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

12. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$xf(x) = x^2e^{-x} + \int_1^x f(t)dt$$

를 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{e}$

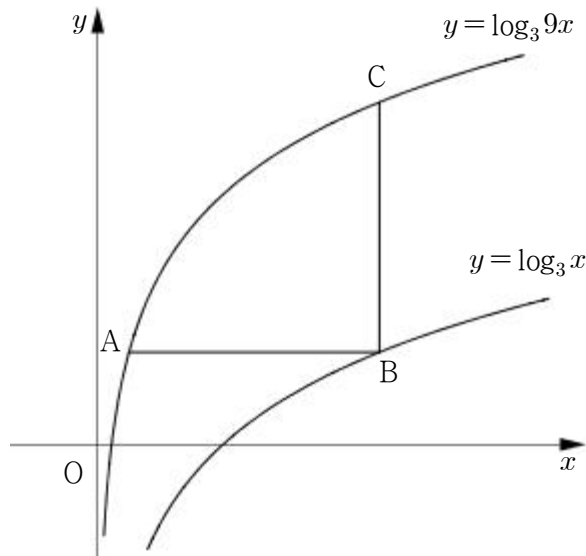
② $\frac{e+1}{e^2}$

③ $\frac{e+2}{e^2}$

④ $\frac{e+3}{e^2}$

⑤ $\frac{e+4}{e^2}$

13. 곡선 $y = \log_3 9x$ 위의 점 $A(a, b)$ 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 곡선 $y = \log_3 x$ 와 만나는 점을 B, 점 B를 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y = \log_3 9x$ 와 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, $a + 3^b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]



- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

14. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)=f(x)\sin x$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$ 의 값은? [4점]

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x^2} = 0$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{x} = 6$$

① 11

② 12

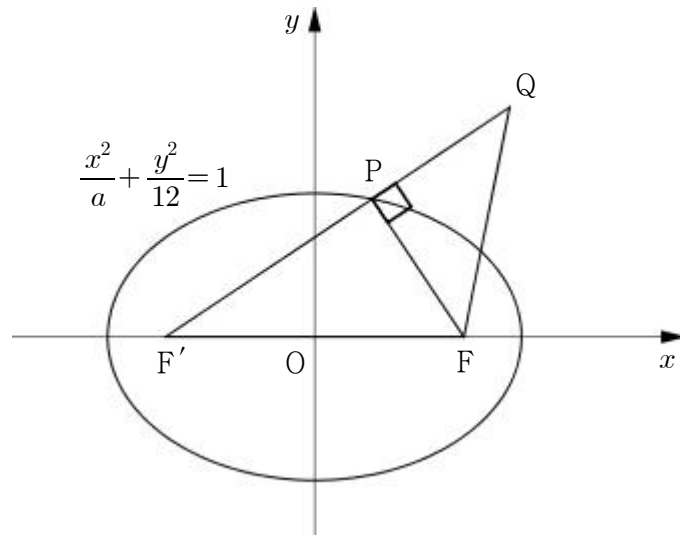
③ 13

④ 14

⑤ 15

15. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{12} = 1$ 의 두 초점 중 x 좌표가 양수인 점을 F , 음수인 점을 F' 이라

하자. 타원 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{12} = 1$ 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P 에 대하여 선분 $F'P$ 의 연장선 위에 점 Q 를 $\overline{F'Q} = 10$ 이 되도록 잡는다. 삼각형 PFQ 가 직각이등변삼각형일 때, 삼각형 $QF'F$ 의 넓이는? (단, $a > 12$) [4점]



① 15

② $\frac{35}{2}$

③ 20

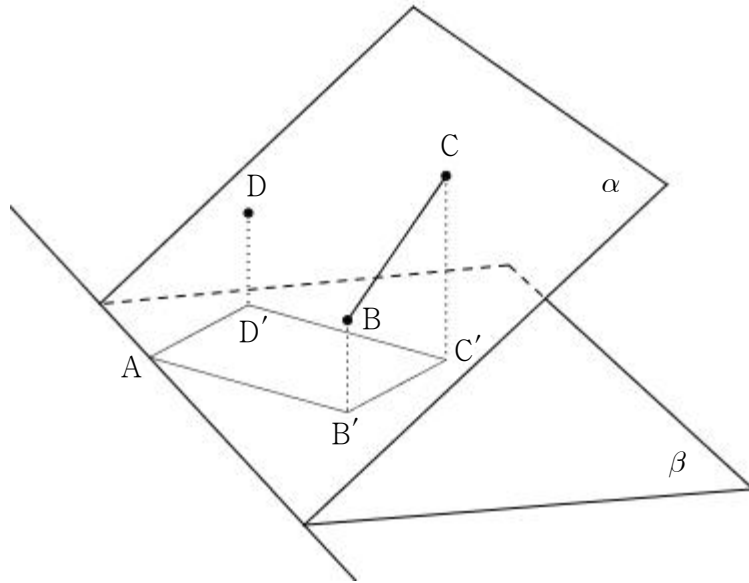
④ $\frac{45}{2}$

⑤ 25



16. 서로 다른 6개의 사탕을 세 명의 어린이 A, B, C에게 남김없이 나누어 줄 때, 어린이 A가 받은 사탕의 개수가 어린이 B가 받은 사탕의 개수보다 많도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 사탕을 하나도 받지 못하는 어린이는 없다.) [4점]

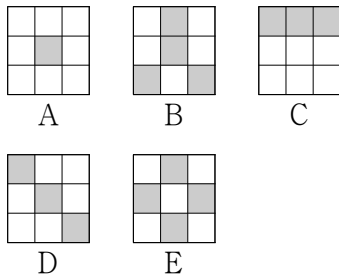
- ① 180 ② 190 ③ 200 ④ 210 ⑤ 220

17. 그림과 같이 서로 다른 두 평면 α, β 의 교선 위에 점 A가 있다. 평면 α 위의 세 점 B, C, D의 평면 β 위로의 정사영을 각각 B', C', D'이라 할 때, 사각형 AB'C'D'은 한 변의 길이가 $4\sqrt{2}$ 인 정사각형이고, $\overline{BB'} = \overline{DD'}$ 이다. 두 평면 α 와 β 가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\tan \theta = \frac{3}{4}$ 이다. 선분 BC의 길이는? (단, 선분 BD와 평면 β 는 만나지 않는다.) [4점]

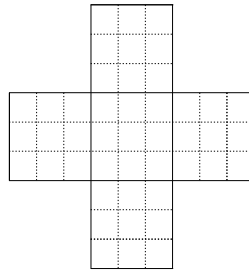


- ① $\sqrt{35}$ ② $\sqrt{37}$ ③ $\sqrt{39}$ ④ $\sqrt{41}$ ⑤ $\sqrt{43}$

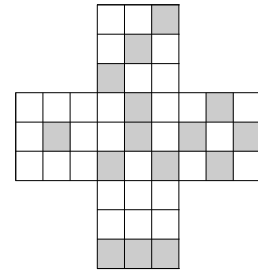
18. [그림 1]과 같이 5개의 스티커 A, B, C, D, E는 각각 흰색 또는 회색으로 칠해진 9개의 정사각형으로 이루어져 있다. 이 5개의 스티커를 모두 사용하여 [그림 2]의 45개의 정사각형으로 이루어진  모양의 판에 빈틈없이 붙여 문양을 만들려고 한다. [그림 3]은 스티커 B를  모양의 판의 중앙에 붙여 만든 문양의 한 예이다.




[그림 1]




[그림 2]



[그림 3]

다음은 5개의 스티커를 모두 사용하여 만들 수 있는 서로 다른 문양의 개수를 구하는 과정의 일부이다. (단,  모양의 판을 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

 모양의 판의 중앙에 붙이는 스티커에 따라 다음과 같이 3가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) A 또는 E를 붙이는 경우

나머지 4개의 스티커를 붙일 위치를 정하는 경우의 수는 $3!$

이 각각에 대하여 4개의 스티커를 붙이는 경우의 수는 $1 \times 2 \times 4 \times 4$

그러므로 이 경우의 수는 $2 \times 3! \times 32$

(ii) B 또는 C를 붙이는 경우

나머지 4개의 스티커를 붙일 위치를 정하는 경우의 수는 (가)

이 각각에 대하여 4개의 스티커를 붙이는 경우의 수는 $1 \times 1 \times 2 \times 4$

그러므로 이 경우의 수는 $2 \times$ (가) $\times 8$

(iii) D를 붙이는 경우

나머지 4개의 스티커를 붙일 위치를 정하는 경우의 수는 (나)

이 각각에 대하여 4개의 스티커를 붙이는 경우의 수는 (다)

그러므로 이 경우의 수는 (나) \times (다)

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a , b , c 라 할 때, $a+b+c$ 의 값은? [4점]

① 52

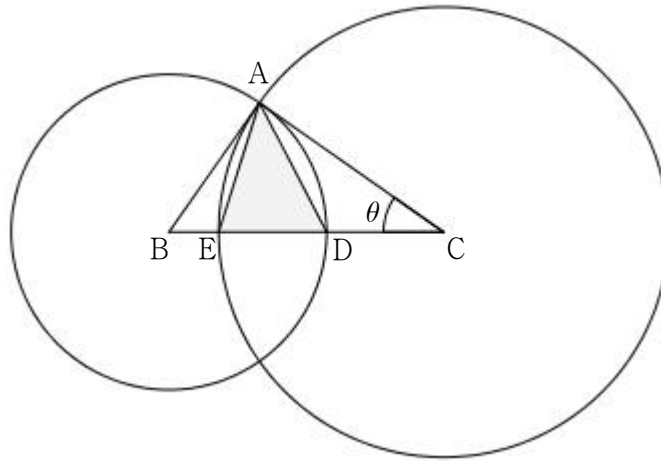
② 54

③ 56

④ 58

⑤ 60

19. 그림과 같이 선분 BC를 빗변으로 하고, $\overline{BC}=8$ 인 직각삼각형 ABC가 있다. 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 \overline{AB} 인 원이 선분 BC와 만나는 점을 D, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 \overline{AC} 인 원이 선분 BC와 만나는 점을 E라 하자. $\angle ACB = \theta$ 라 할 때, 삼각형 AED의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은? [4점]



① 16

② 20

③ 24

④ 28

⑤ 32

20. 좌표평면에서 점 $A(0, 12)$ 와 양수 t 에 대하여 점 $P(0, t)$ 와 점 Q 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$$

$$(나) \quad \frac{t}{3} \leq |\overrightarrow{PQ}| \leq \frac{t}{2}$$

$6 \leq t \leq 12$ 에서 $|\overrightarrow{AQ}|$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, Mm 의 값은? [4점]

① $12\sqrt{2}$

② $14\sqrt{2}$

③ $16\sqrt{2}$

④ $18\sqrt{2}$

⑤ $20\sqrt{2}$

21. 함수 $f(x) = |x^2 - x|e^{4-x}$ 이 있다. 양수 k 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \leq kx) \\ kx & (f(x) > kx) \end{cases}$$

라 하자. 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 함수 $g(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수를 $h(k)$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

———— <보 기> ————

ㄱ. $k=2$ 일 때, $g(2)=4$ 이다.

ㄴ. 함수 $h(k)$ 의 최댓값은 4이다.

ㄷ. $h(k)=2$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위는 $e^2 \leq k < e^4$ 이다.

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. $\left(3x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 상수항을 구하시오. [3점]

23. 함수

$$f(x) = \begin{cases} -14x + a & (x \leq 1) \\ \frac{5\ln x}{x-1} & (x > 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값을 구하시오. [3점]

24. 곡선 $x^2 + y^3 - 2xy + 9x = 19$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기를 구하시오. [3점]

25. 모평균이 85, 모표준편차가 6인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 \bar{X} 라 할 때,

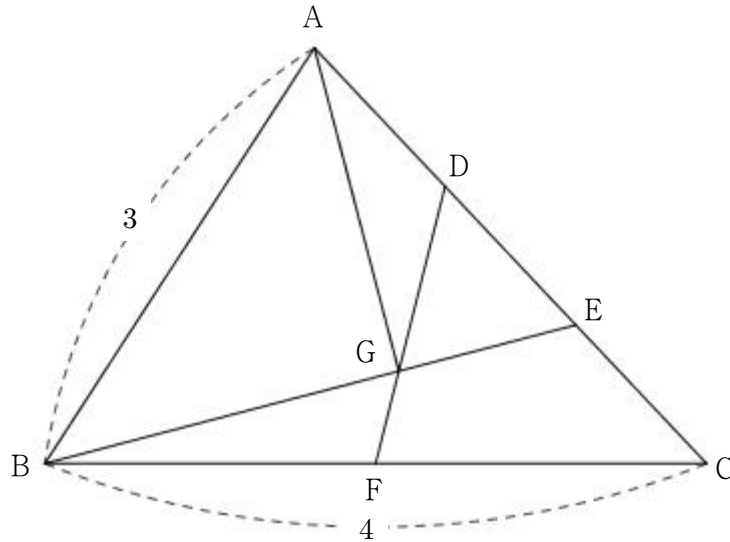
$$P(\bar{X} \geq k) = 0.0228$$

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

을 만족시키는 상수 k 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. [3점]

26. 함수 $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ 의 그래프 위의 두 점 $(0, 0)$, $(1, 1)$ 에서의 접선을 각각 l , m 이라 하자. 두 직선 l , m 이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $12\tan\theta$ 의 값을 구하시오. [4점]

27. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$ 인 삼각형 ABC에서 선분 AC를 1:2로 내분하는 점을 D, 선분 AC를 2:1로 내분하는 점을 E라 하자. 선분 BC의 중점을 F라 하고, 두 선분 BE, DF의 교점을 G라 하자. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE}=0$ 일 때, $\cos(\angle ABC)=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



28. 1부터 11까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 11장의 카드 중에서 임의로 두 장의 카드를 동시에 택할 때, 택한 카드에 적혀 있는 숫자를 각각 $m, n (m < n)$ 이라 하자. 좌표평면 위의 세 점 $A(1, 0), B\left(\cos \frac{m\pi}{6}, \sin \frac{m\pi}{6}\right), C\left(\cos \frac{n\pi}{6}, \sin \frac{n\pi}{6}\right)$ 에 대하여 삼각형 ABC 가 이등변삼각형일 확률이 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

29. 좌표공간에 평면 $\alpha : 2x + y + 2z - 9 = 0$ 과 구 $S : (x-4)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 2$ 가 있다.
 $|\overrightarrow{OP}| \leq 3\sqrt{2}$ 인 평면 α 위의 점 P와 구 S 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 의 최댓값이 $a + b\sqrt{2}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하시오. (단, 점 O는 원점이고, a, b 는 유리수이다.) [4점]

30. 함수 $f(x) = \frac{x}{e^x}$ 에 대하여 구간 $\left[\frac{12}{e^{12}}, \infty\right)$ 에서 정의된 함수

$$g(t) = \int_0^{12} |f(x) - t| dx$$

가 $t = k$ 에서 극솟값을 갖는다. 방정식 $f(x) = k$ 의 실근의 최솟값을 a 라 할 때,
 $g'(1) + \ln\left(\frac{6}{a} + 1\right)$ 의 값을 구하시오. [4점]