

2017년 11월 12일 (오후) ; 제한시간 3시간 ; 문항당 7점

5. 양의 정수 $n \geq 2$ 이 주어졌을 때, 다음 조건을 만족하는 정수 a, b 가 존재함을 보여라.

모든 정수 m 에 대하여 $m^3 + am + b$ 는 n 의 배수가 아니다.

6. 이등변삼각형이 아닌 예각삼각형 ABC 의 변 BC, CA, AB 의 중점을 각각 D, E, F 라 하자. 세 점 D, E, F 를 지나는 원을 O_1 이라 하고, 그 중심을 N 이라 하자. 삼각형 BCN 의 외접원을 O_2 라 하고, 원 O_1 과 O_2 의 두 교점을 P, Q 라 하자. 원 O_2 가 직선 AB 와 점 $K(\neq B)$ 에서 만나고 직선 AC 와 점 $L(\neq C)$ 에서 만난다. 세 직선 EF, PQ, KL 이 한 점에서 만남을 보여라.

7. 다음을 만족하는 함수 $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ 이 존재하지 않음을 보여라.

$$\text{음이 아닌 모든 실수 } x, y \text{에 대하여 } f(x + y^2) \geq f(x) + y$$

(단, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 은 음이 아닌 실수 전체의 집합이며, \mathbb{R} 은 실수 전체의 집합이다.)

8. 양의 정수 n 에 대하여, 총 n 명의 학생이 있는 학교가 있다. 이 학교 학생들로 이루어진 집합 X 에 대하여, X 에 속한 임의의 서로 다른 두 학생이 서로 아는 사이이면 그 집합 X 를 잘 짜인 집합이라 부르자. 잘 짜인 집합의 학생 수의 최댓값이 k 이면, 이 학교에서 만들 수 있는 잘 짜인 집합의 개수는 $3^{(n+k)/3}$ 이하임을 보여라. 단, 공집합이나 학생 1명의 집합 역시 잘 짜인 집합이다.