고등부

제 27 회 2차시험 (고등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2013년 11월 10일 (오전) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7점

1. 삼각형 ABC에서 변 BC 위의 점 P를 지나고 AB, AC와 평행한 직선이 AC, AB와 만나는 점을 각각 Q, R이라 하고, 삼각형 ABC, BPR, PCQ의 외심을 각각 O, O_1, O_2라 하자. 삼각형 BPR의 외접원과 삼각형 PCQ의 외접원이 만나는 점을 $K(\neq P)$라 할 때, $OO_1 = KO_2$임을 보여라.

2. 식 $ab + bc + ca = 3$을 만족하는 양의 실수 a, b, c에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{(a+b)^3}{\sqrt[3]{2(a+b)(a^2+b^2)}} + \frac{(b+c)^3}{\sqrt[3]{2(b+c)(b^2+c^2)}} + \frac{(c+a)^3}{\sqrt[3]{2(c+a)(c^2+a^2)}} \geq 12$$

3. 최고차항의 계수가 1인 정수계수 6차 다항식 중 다음 조건을 모두 만족하는 다항식 $f(x)$가 존재함을 보여라.

(i) 모든 정수 m에 대하여, $f(m) \neq 0$이다.

(ii) 홀수인 양의 정수 n이 주어졌을 때, $f(k)$가 n의 배수가 되는 양의 정수 k가 존재한다.

4. 양의 정수로 이루어진 수열 $\{a_i\}$가 점화식 $a_{i+2} = a_{i+1} + a_i$ $(i \geq 1)$ 을 만족할 때, 양의 정수 n에 대하여

$$b_n = \frac{1}{a_{2n+1}} \sum_{i=1}^{4n-2} a_i$$

라 하자. 수열 $\{b_n\}$의 모든 항이 양의 정수임을 보이고, 이 수열의 일반항을 구하여라.