



제 22회 한국수학올림피아드 최종시험

2009년 3월 28일 - 제 1 일

1. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여

$$A = \frac{a^2 + bc}{b + c} + \frac{b^2 + ca}{c + a} + \frac{c^2 + ab}{a + b},$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}} + \frac{1}{\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}} + \frac{1}{\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}}$$

이라 할 때, $AB \geq 9$ 임을 보여라.

2. 각 B 가 둔각인 삼각형 ABC 의 외접원 O 에 대하여, 점 C 에서 원 O 에 접하는 접선과 직선 AB 의 교점을 B_1 , 삼각형 AB_1C 의 외접원의 중심을 O_1 이라 하자. 선분 BB_1 의 내부의 점 B_2 에서 원 O 에 그은 두 접선의 접점 중에서 점 C 에 가까운 점을 C_1 , 삼각형 AB_2C_1 의 외접원의 중심을 O_2 라 하자. 두 직선 OO_2 와 AO_1 이 직교할 때, 다섯 개의 점 O, O_2, O_1, C_1, C 가 한 원 위에 있음을 보여라.

3. 탁자 위에 흰 돌과 검은 돌이 일렬로 놓여 있다 (단, 흰 돌과 검은 돌은 각각 적어도 한 개 이상이다). 이때 다음의 행위를 “작업”이라 하자:

검은 돌을 하나 선택하여, 그 검은 돌의 양 옆에 있는 두 개의 돌(선택한 검은 돌이 양 끝에 있는 경우에는 한 개의 돌)을, 흰 돌은 검은 돌로 검은 돌은 흰 돌로 바꾼다.

이제 탁자 위에 2008 개의 흰 돌과 한 개의 검은 돌이 일렬로 놓여 있을 때, 위의 “작업”을 유한 번 시행하여 2009 개의 돌이 모두 검은 돌이 되도록 만들 수 있는 검은 돌의 처음 위치를 모두 구하여라.

* 문항당 7점; 제한시간 4시간 30분 *