



제34회 고등부 1차시험  
한국수학올림피아드  
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2020년 9월 12일 ; 제한시간 3시간

- A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
- B. 이 시험은 총 25개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
- C. 문제 1~7 번은 각 3점, 문제 8~18 번은 각 4점, 문제 19~25 번은 각 5점입니다.

1. <정답. 10>

삼각형  $ABC$ 에서  $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이고  $\angle B = 40^\circ$ 이다. 변  $BC$  위의 점  $D$ 를  $\angle ADC = 120^\circ$ 가 되도록 잡고, 각  $C$ 의 이등분 선과 변  $AB$ 의 교점을  $E$ 라 하자.  $\angle DEC$ 는 몇 도인가?

2. <정답. 808>

계수가 모두 정수인 일차함수  $y = f(x)$ 가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

$$(f \circ f)(0) = 4^2 - 1$$

$$\overbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}^{f \text{ 가 } 2020\text{개}}(0) = 4^{2020} - 1$$

이때  $|f(100)|$ 의 값으로 가능한 것 모두의 합을 구하여라.

3. <정답. 12>

삼각형  $ABC$ 의 변  $BC$ 의 중점을  $M$ 이라 하고, 변  $BC$ 의 수직이등분선과 변  $AC$ 의 교점을  $D$ 라 하자.  $\overline{BD} : \overline{DA} = 1 : 3$ ,  $\overline{MD} = \sqrt{2}$ ,  $\overline{AB} = 2\sqrt{11}$  일 때,  $\overline{BC}^2$ 의 값을 구하여라.

4. <정답. 151>

양의 정수  $n$ 에 대하여  $\sqrt{n}$ 에 가장 가까운 정수를  $a_n$ 이라 하자. 다음 등식을 만족하는 양의 정수  $m$ 을 구하여라.

$$\sum_{k=1}^{m(m+1)} a_k = 101m(m+1)$$

5. <정답. 369>

다음 두 조건을 모두 만족하는 집합의 순서쌍  $(A, B, C, D)$ 의 개수를 구하여라.

(1)  $A \subset B \subset C \subset D \subset \{1, 2, 3, 4\}$

(2)  $B \neq C$

6. <정답. 158>

실수 계수 9차다항식  $P(x)$ 가  $k = 1, 2, \dots, 10$ 에 대하여  $P(k) = \frac{(k+1)^2}{k}$ 를 만족할 때,  $12P(12)$ 의 값을 구하여라.

7. <정답. 90>

직사각형  $ABCD$ 에서  $\overline{AB} = 5$ ,  $\overline{BC} = 3$ 이다. 변  $CD$  위의 점  $E$ 를  $\overline{BA} = \overline{BE}$ 가 되도록 잡자. 삼각형  $ABE$ 의 내접원의 반지름을  $a + b\sqrt{10}$ 이라 할 때,  $60(a+b)$ 의 값을 구하여라.  
(단,  $a, b$ 는 유리수)

8. <정답. 48>

다음을 만족하는 양의 정수의 순서쌍  $(m, n)$ 에 대하여  $mn$ 의 최솟값을 구하여라.

$$\frac{mn}{m+n} \text{ 과 } \frac{m^2 + n^2 + mn}{m+n} \text{ 은 서로 다른 홀수인 소수}$$

9. <정답. 144>

한자리 수 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8을 원형으로 배열할 때, 이웃한 두 수의 곱이 모두 짝수가 되도록 배열하는 경우의 수는?

10. <정답. 504>

방정식  $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$  이 서로 다른 2개의 해를 갖도록 하는 9 이하의 양의 정수의 순서쌍  $(a, b, c)$ 의 개수를 구하여라.



제 34 회 고등부 1차시험  
한국수학올림피아드  
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

## 11. &lt;정답. 50&gt;

한 변의 길이가 5인 정사각형  $ABCD$ 의 대각선  $BD$  위에  $\overline{BE} = \overline{AB}$ 가 되도록 점  $E$ 를 잡자. 직선  $AE$ 에 수직이고 점  $B$ 를 지나는 직선과 직선  $CE$ 의 교점을  $P$ 라 할 때,  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 의 값을 구하여라.

## 15. &lt;정답. 360&gt;

삼각형  $ABC$ 의 점  $A$ 에서  $BC$ 에 내린 수선의 발을  $H$ 라 하자. 선분  $AH$  위의 점  $X$ 를 지나고  $BC$ 에 평행한 직선이  $AB, AC$ 와 만나는 점을 각각  $D, E$ 라 하자. 선분  $DC$ 가  $AH, EH$ 와 만나는 점을 각각  $Y, Z$ 라 하자.  $\overline{AD} = 10, \overline{DX} = 6, \overline{BH} = 9, \overline{XE} = 3$ 이고 사각형  $XYZE$ 의 넓이를  $S$ 라 할 때  $70S$ 의 값을 구하여라.

## 12. &lt;정답. 374&gt;

양의 정수  $x = 10^{10}$ 과  $y = 10^6$ 에 대하여,  $2^x - 2$  와  $2^y - 2$ 의 최대공약수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

## 16. &lt;정답. 503&gt;

양의 정수  $x, y$ 에 대하여

$$\sqrt{409^2 - x^2} + \sqrt{y^2 - 15^2}$$

이 가질 수 있는 정수 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

## 13. &lt;정답. 324&gt;

집합  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수  $f : X \rightarrow X$ 의 개수를 구하여라.

- (1) 모든  $n \in X$ 에 대하여,  $f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ 은 짝수이다.
- (2)  $f(1) + f(2) + f(3)$  과  $f(1) + f(2) + \cdots + f(6)$ 은 모두 3의 배수가 아니다.

## 17. &lt;정답. 120&gt;

서로 다른 숟가락 6개가 있다. 숟가락의 윗부분 3쌍을 짹지어 빨간색 끈으로 연결하고, 아랫부분 3쌍을 짹지어 파란색 끈으로 연결했더니 숟가락과 끈이 교대로 있는 하나의 연결된 모양이 되었다고 한다. 이렇게 되도록 끈으로 연결하는 경우의 수는?

## 14. &lt;정답. 6&gt;

다음 두 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍  $(x, y)$ 의 개수를 구하여라.

$$y(x^2 + 253) - x(y^2 + 253) = 253, \quad x > y$$

## 18. &lt;정답. 406&gt;

양의 정수의 집합  $\mathbb{N}$ 에서 정의된 함수  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 이 모든 양의 정수  $n$ 에 대하여  $f(f(n)) = n + 2$ 를 만족한다.  $f(201)$ 의 값이 될 수 있는 모든 양의 정수의 합을 구하여라.



## 19. &lt;정답. 80&gt;

이등변삼각형  $ABC$ 에서  $\overline{AB} = \overline{AC} = 20$ ,  $\overline{BC} = 30$ 이다. 선분  $AC$ 의  $A$ 쪽 연장선 위에  $\overline{AD} = 60$ 이 되도록 점  $D$ 를 잡고, 선분  $AB$ 의  $B$ 쪽 연장선 위에  $\overline{BE} = 80$ 이 되도록 점  $E$ 를 잡자. 선분  $AE$ 의 중점  $F$ 와 삼각형  $CDE$ 의 무게중심  $G$ 를 연결한 직선  $FG$ 와  $\angle DAE$ 의 이등분선이 만나는 점을  $K$ 라 할 때,  $6\overline{GK}$ 의 값을 구하여라.

## 20. &lt;정답. 154&gt;

다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수  $n$ 을 모두 더한 값을 구하여라.

- (1)  $n = 2^k(p_1p_2 \cdots p_m)$  (단,  $p_i$ 는 서로 다른 홀수인 소수,  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $m \geq 1$ )

- (2)  $n$ 의 모든 약수의 합이  $n$ 의 배수

## 21. &lt;정답. 144&gt;

집합  $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수의 순서쌍  $(f, g)$ 의 개수를 구하여라.

- (1)  $f$ 와  $g$ 는  $X$ 에서  $X$ 로 가는 함수이다.

- (2)  $\{(f \circ g)(x) \mid x \in X\} = \{1, 2\}$

## 22. &lt;정답. 28&gt;

양의 실수  $a, b, c, d$ 가  $a \geq b \geq c$  와  $4(a+b) \leq 9(c+d)$ 를 모두 만족할 때,  $36 \left( \frac{c}{a} + \frac{d}{b} \right)$ 의 최솟값을 구하여라.

## 23. &lt;정답. 25&gt;

삼각형  $ABC$ 에서  $\angle B = 45^\circ$ ,  $\angle C = 60^\circ$ ,  $\overline{BC} = 20$ 이다. 변  $BC$ 를 지름으로 하는 원이 변  $AB$ ,  $AC$ 와 만나는 점을 각각  $D(\neq B)$ ,  $E(\neq C)$ 라 하고, 선분  $BD, BE, CE, CD$ 의 중점을 각각  $P, Q, R, S$ 라 하자. 사각형  $PQRS$ 의 넓이를  $a + b\sqrt{3}$ 이라 할 때,  $a + b$ 의 값을 구하여라. (단,  $a, b$ 는 유리수)

## 24. &lt;정답. 900&gt;

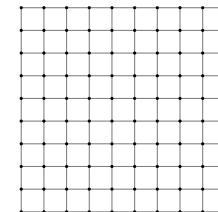
다음 두 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍  $(x, y)$ 의 개수를 구하여라.

$$(1) 1 \leq x \leq 1000, 1 \leq y \leq 1000$$

$$(2) \frac{101x^2 - 5y^2}{2020} \text{은 정수이다.}$$

## 25. &lt;정답. 268&gt;

그림과 같이 81개의 단위 정사각형으로 이루어진 도형이 있다.



이 도형 위의 100개의 점 각각에 빨강, 주황, 노랑, 파랑 중 하나의 색을 칠할 때, 다음 조건을 만족하는 경우의 수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(조건) 각각의 단위 정사각형의 네 꼭지점은 모두 다른색이거나, 모두 같은색이다.