

2021년 11월 13일; 제한시간 2시간; 문항당 7점

1. 양의 정수  $n, k, r$ 에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 의 개수를  $A(n, k, r)$ 이라 하자.

(i)  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \geq 0$

(ii)  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$

(iii)  $x_1 - x_k \leq r$

2 이상인 양의 정수  $s, t$ 에 대하여, 다음을 보여라.

$$A(st, s, t) = A(s(t-1), s, t) = A((s-1)t, s, t)$$

2. 모든 항이 정수인 수열  $\{a_n\}$ 은 다음 세 조건을 모두 만족한다.

(i)  $a_1 = 2021^{2021}$

(ii) 양의 정수  $k (k \geq 2)$ 에 대하여  $0 \leq a_k < k$  이다.

(iii) 양의 정수  $k$ 에 대하여  $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{k+1}a_k$  는  $k$ 의 배수이다.

수열  $\{a_n\}$ 의  $2021^{2022}$ 번째 항의 값을 구하여라.

3. 원  $O$ 에 내접하는 사각형  $ABCD$ 의 두 대각선  $AC, BD$ 의 교점을  $X$ 라 하자. 사각형  $AEFB$ 는 삼각형  $ABX$ 의 외접원에 내접하고, 직선  $EF$ 와  $AB$ 는 평행하다. 삼각형  $CDX$ 의 외접원과 직선  $FX$ 의 교점을  $G (\neq X)$ , 직선  $EX$ 와  $AB$ 의 교점을  $P$ , 직선  $XG$ 와  $CD$ 의 교점을  $Q$ 라 하자. 선분  $EG$ 의 수직이등분선과 원  $O$ 의 두 교점 중  $B$  보다  $A$ 에 가까운 점을  $S$ 라 할 때, 직선  $PQ$ 에 평행하고 점  $S$ 를 지나는 직선이 원  $O$ 에 접함을 보여라.

2021년 11월 13일; 제한시간 2시간; 문항당 7점

4. 예각삼각형  $ABC$  ( $\overline{AB} < \overline{AC}$ )의 꼭짓각  $A$ 의 이등분선과 변  $BC$ 의 수직이등분선의 교점을  $D$ 라 하자. 삼각형  $ABC$ 의 내부의 점  $P$ 에 대하여 직선  $CP$ 가 삼각형  $ABP$ 의 외접원과 점  $K(\neq P)$ 에서 만난다. 다음 두 명제가 동치임을 보여라.

- (i) 점  $B, D, K$ 가 한 직선 위에 있다.
- (ii) 선분  $AD$ 와  $BC$ 의 교점이 삼각형  $APC$ 의 외접원 위에 있다.

5. 다음 조건을 만족하는 함수  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 을 모두 구하여라. (단,  $\mathbb{R}$ 은 실수 전체의 집합)

$$\text{모든 실수 } x, y \text{에 대하여 } f(f(x+y) - f(x-y)) = y^2 f(x)$$

6. 어떤 모임에 4042명이 모여있고 두 명씩 짝을 이루어 총 2021쌍의 짝이 있다. 이 모임에 속하는 서로 다른 두 사람  $A, B$ 에 대하여  $A$ 가  $B$ 를 알면  $B$ 도  $A$ 를 안다고 한다.  $n$ 은 양의 정수로, 이 모임에 모인 각각의 사람은 다음 조건을 모두 만족하도록  $-n$  이상  $n$  이하인 정수 중 하나를 선택하려고 한다. (여러 사람이 같은 수를 선택하는 것도 가능하다.)

- (i) 0을 선택한 사람은 두 명 이하이고, 만약 정확히 두 명이면 그 두 사람은 짝이다.
- (ii) 같은 수를 선택한 두 사람은 짝이거나 모르는 사이이다.
- (iii) 선택한 수의 합이 0인 두 사람은 짝이거나 아는 사이이다.

이와 같은 선택이 항상 가능한  $n$ 의 값 중 가장 작은 것을 구하여라.