



한국수학올림피아드

제33회 최종시험 첫째 날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2020년 7월 10일 ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

1. 사각형 $ABCD$ 는 $AB \parallel CD$, $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{AB} > \overline{CD}$ 인 등변사다리꼴이다. 점 C 를 지나고 변 BC 에 수직인 직선 위에 $\overline{EC} = \overline{AC}$ 와 $\angle ACE < 90^\circ$ 인 점 E 를 잡자. 중심이 D 이고 반지름이 DA 인 원 Γ 가 삼각형 AEB 의 외접원 Ω 와 만나는 점을 $F(\neq A)$ 라 하고, 원 Γ 위에 $\overline{BF} = \overline{BG}$ 인 점 $G(\neq F)$ 를 잡자. 두 직선 EG 와 BD 의 교점이 원 Ω 위에 있음을 보여라.
2. 남학생 1명과 여학생 1명으로 구성된 모둠이 2020개 있다. 각 학생은 정확히 1개의 모둠에만 포함된다. 다음 네 조건을 모두 만족하도록 2명씩 약수하기로 하자.
 - (i) 동성 간에는 약수하지 않는다.
 - (ii) 같은 모둠의 이성 간에는 정확히 1회 약수한다.
 - (iii) 같은 모둠이 아닌 이성 간에는 1회만 약수하거나 약수하지 않는다.
 - (iv) 임의의 두 모둠에 속한 4명의 학생 간에 약수한 총 횟수는 3회 이상이다.

이때 서로 약수한 학생들끼리 이웃하면서 원형으로 배치할 수 있도록 4038명을 뽑을 수 있음을 보여라.

3. 다음 조건을 만족하는 함수 $f: \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 를 모두 구하여라. (단, \mathbb{Q}_+ 와 \mathbb{R} 는 각각 양의 유리수와 모든 실수의 집합)

양의 유리수 x, y, z 가 $x + y + z + 1 = 4xyz$ 를 만족하면

$$f(x) + f(y) + f(z) = 1$$

이다.



제33회 최종시험 둘째 날
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2020년 7월 11일 ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

4. 모든 양의 정수가 다음 수열에 정확히 한 번 등장하도록 하는 양의 실수의 순서쌍 (α, β) 가 존재하는가? 존재한다면 순서쌍을 모두 구하고, 그렇지 않다면 순서쌍이 존재하지 않음을 보여라.

$$2020, [\alpha], [\beta], 4040, [2\alpha], [2\beta], 6060, [3\alpha], [3\beta], 8080, [4\alpha], [4\beta], \dots$$

(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수)

5. 예각삼각형 ABC 가 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 를 만족한다. 변 BC 의 중점을 M 이라 하고, 선분 AM 과 AC 의 중점을 각각 L, N 이라 하자. 삼각형 AMC 의 외접원 Ω 와 선분 AB 의 교점을 $P(\neq A)$, 원 Ω 와 선분 BL 의 교점을 Q 라 하자. 삼각형 BQC 의 외접원의 중심을 O 라 하자. 두 직선 AC 와 PQ 가 점 X 에서 만나고, 두 직선 OB 와 LN 이 점 Y 에서 만나고, 두 직선 BQ 와 CO 가 점 Z 에서 만날 때, 세 점 X, Y, Z 가 한 직선 위에 있음을 보여라.
6. 양의 정수 n 중 $6(n^4 - 1)$ 의 값이 완전제곱수가 되는 것을 모두 구하여라.