제 29 회 최종시험 첫째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2016년 3월 19일 (오후) ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

1. 예각삼각형 ABC 의 꼭짓점 B 와 C 에서 대변에 내린 수선의 발을 각각 D 와 E 라 하고, 변 AC 와 BC 에 대한 점 E 의 대칭점을 각각 S 와 T 라 하자. 삼각형 CST 의 외접원이 직선 AC 와 점 $X(\neq C)$ 에서 만난다. 삼각형 CST 의 외심을 O 라 할 때, 직선 XO 와 DE 는 서로 수직임을 보여라.

2. 두 정수 n, k 가 $n \geq 2$ 와 $k \geq \frac{5}{2}n - 1$ 을 만족한다. 좌표평면에서 x 좌표, y 좌표가 모두 1 이상 n 이하의 정수가 되는 서로 다른 k 개의 점을 어떻게 선택하더라도, 이 중 네 개 이상의 점을 지나는 원이 존재함을 보여라.

3. 어떤 두 유리수 x, y 도 $x - \dfrac{1}{x} + y - \dfrac{1}{y} = 4$ 를 만족하지 않음을 보여라.

kmo
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
제 29 회 최종시험 둘째날
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2016 년 3 월 20 일 (오전) ; 제한시간 4 시간 30 분 ; 문항당 7 점

4. 실수 x, y, z 가 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 을 만족할 때,

$$(x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy)$$

의 최댓값을 구하여라.

5. 내심이 I 인 예각삼각형 ABC 의 내접원이 변 BC, CA, AB 와 각각 점 D, E, F 에서 접한다. 직선 BI, CI, BC, DI 가 직선 EF 와 각각 점 K, L, M, Q 에서 만나고 선분 CL 의 중점과 점 M 을 지나는 직선이 선분 CK 와 점 P 에서 만날 때,

$$PQ = \frac{AB \cdot KQ}{BI}$$

임을 보여라.

6. 삼각형 m 개의 집합을 U 라 하자. 이때, 아래 두 조건을 동시에 만족하는 U 의 부분집합 W 가 반드시 존재함을 보여라.

(i) W 에 속한 삼각형의 개수는 $0.45m^{\frac{4}{5}}$ 이상이다.

(ii) 6 개의 삼각형 ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB 가 모두 W 에 속하게 되는 서로 다른 6 개의 점 A, B, C, D, E, F 는 없다.