

# 2018학년도 3월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

## • 수학 영역 •

### 수학 '가'형 정답

1	④	2	②	3	①	4	③	5	③
6	②	7	⑤	8	④	9	⑤	10	④
11	①	12	②	13	③	14	①	15	⑤
16	③	17	①	18	②	19	④	20	④
21	⑤	22	16	23	4	24	13	25	18
26	600	27	12	28	128	29	2	30	67

### 해설

#### 1. [출제의도] 다항식의 몇셈을 계산한다.

두 다항식  $A = x^2 - 1$ ,  $B = x^2 + 2x + 7$ 에서  
 $2A + B = 2(x^2 - 1) + (x^2 + 2x + 7)$   
 $= 2x^2 - 2 + x^2 + 2x + 7$   
 $= 3x^2 + 2x + 5$

#### 2. [출제의도] 교집합의 원소의 합을 구한다.

두 집합  $A = \{1, 2, 4, 6\}$ ,  $B = \{2, 4, 5\}$ 에서  
 $A \cap B = \{2, 4\}$ 이므로  
 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합은  
 $2+4=6$

#### 3. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그를 계산한다.

$$\log_2 8 + \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 \left( 8 \times \frac{1}{2} \right)$$

$$= \log_2 4$$

$$= 2$$

#### 4. [출제의도] 복소수의 곱셈을 계산한다.

$$(1+2i)(1-2i) = 1^2 - (2i)^2$$

$$= 1 - (-4)$$

$$= 5$$

#### 5. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 나머지를 구한다.

$f(x) = 2x^3 - 3x + 4$  라 하면 나머지정리에 의하여  
 $f(x)$ 를  $x-1$ 로 나눈 나머지는  $f(1)$ 이므로  
 $f(1) = 2-3+4=3$

#### 6. [출제의도] 두 직선의 수직 조건을 이용하여 상수의 값을 구한다.

직선  $x+y+2=0$ 의 기울기는  $-1$ 이고,  
직선  $(a+2)x-3y+1=0$ 의 기울기는  $\frac{a+2}{3}$ 이다.  
두 직선  $x+y+2=0$ ,  $(a+2)x-3y+1=0$ 이 서로 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱은  $-1$ 이다.  
따라서  $(-1) \times \frac{a+2}{3} = -1$ 이므로  
 $a=1$

#### 7. [출제의도] 연립이차부등식의 해를 구한다.

연립부등식  $\begin{cases} 2x-7 \geq 0 \\ x^2-5x-14 < 0 \end{cases}$   
을 풀면  $2x-7 \geq 0$ 에서  $x \geq \frac{7}{2}$  ..... ①  
 $x^2-5x-14 < 0$ 에서  $(x-7)(x+2) < 0$   
 $-2 < x < 7$  ..... ②  
이므로 ①, ②을 동시에 만족시키는  $x$ 의 값의 범위는  
 $\frac{7}{2} \leq x < 7$   
따라서 연립부등식을 만족시키는 정수  $x$ 는 4, 5, 6  
이므로 모든 정수  $x$ 의 값의 합은  
 $4+5+6=15$

#### 8. [출제의도] 이차방정식의 판별식을 이용하여 자연수의 개수를 구한다.

$$(a^2-9)x^2 = a+3$$

$$(a+3)(a-3)x^2 = a+3$$

$a$ 는 자연수이므로  $a+3 > 0$

$$(a-3)x^2 = 1$$

이차방정식  $(a-3)x^2 - 1 = 0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로  
 $D = 0^2 - 4(a-3)(-1) = 4(a-3) > 0$   
 $a-3 > 0$ ,  $a > 3$   
따라서 10보다 작은 자연수  $a$ 는  
4, 5, 6, 7, 8, 9  
이므로  $a$ 의 개수는 6이다.

#### [다른 풀이]

$$(a^2-9)x^2 = a+3$$

$$(a+3)(a-3)x^2 = a+3$$

$a$ 는 자연수이므로  $a+3 > 0$

$$(a-3)x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{a-3}$$

이차방정식이 두 실근을 가지므로  $\frac{1}{a-3} > 0$   
 $a-3 > 0$ 이므로  $a > 3$   
따라서 10보다 작은 자연수  $a$ 는  
4, 5, 6, 7, 8, 9  
이므로  $a$ 의 개수는 6이다.

#### 9. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구한다.

$$2^{\frac{a}{2}} - 2^{\frac{b}{2}} = 3$$

$$\left( 2^{\frac{a}{2}} - 2^{\frac{b}{2}} \right)^2 = 3^2$$

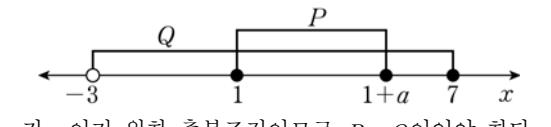
$$2^a - 2 \times 2^{\frac{a}{2}} \times 2^{\frac{b}{2}} + 2^b = 2^a - 2^{\frac{a+b}{2}+1} + 2^b$$

$$= 9$$

$a+b=2$ 이므로  
 $2^a + 2^b - 2^{\frac{a+b}{2}+1} = 2^a + 2^b - 2^2 = 9$   
따라서  $2^a + 2^b = 9+4=13$

#### 10. [출제의도] 충분조건과 이차부등식의 성질을 이용하여 자연수의 개수를 구한다.

두 조건  $p$ ,  $q$ 의 진리집합을 각각  $P$ ,  $Q$ 라 하자.  
 $a$ 는 자연수이므로  $1 < 1+a$ 이다.  
 $P = \{x | 1 \leq x \leq 1+a\}$   
 $Q = \{x | -3 < x \leq 7\}$



$p$ 가  $q$ 이기 위한 충분조건이므로  $P \subset Q$ 이어야 한다.  
따라서  
 $1+a \leq 7$ ,  $a \leq 6$   
자연수  $a$ 는 1, 2, 3, 4, 5, 6이다. 이므로  $a$ 의 개수는 6이다.

#### 11. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식의 해를 구한다.

부등식  $|3x-2| \leq x+6$ 에서  
(i)  $x \geq \frac{2}{3}$  일 때,  $3x-2 \geq 0$ 이므로  
 $3x-2 \leq x+6$   
 $2x \leq 8$ ,  $x \leq 4$   
따라서  $\frac{2}{3} \leq x \leq 4$   
(ii)  $x < \frac{2}{3}$  일 때,  $3x-2 < 0$ 이므로  
 $-(3x-2) \leq x+6$   
 $-4 \leq 4x$ ,  $-1 \leq x$   
따라서  $-1 \leq x < \frac{2}{3}$

( i ), ( ii )에서 주어진 부등식의 해는

$$-1 \leq x \leq 4$$

따라서  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 4$   
 $\alpha + \beta = (-1) + 4 = 3$

#### 12. [출제의도] 도형의 이동과 유리함수의 그래프의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

함수  $f(x)$ 의 그래프는 곡선  $y = -\frac{2}{x}$ 를 평행이동한 것이므로 두 상수  $m$ ,  $n$ 에 대하여  
 $f(x) = -\frac{2}{x-m} + n$   
이라 하자. 함수  $f(x)$ 의 그래프가 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 곡선  $y=f(x)$ 의 두 점근선  $x=m$ ,  $y=n$ 의 교점  $(m, n)$ 이 직선  $y=x$  위에 있다.  
따라서  $m=n$   
함수  $f(x)$ 의 정의역이  $\{x | x \neq -2\}$ 인 모든 실수}이므로  $m=-2$ ,  $n=-2$ 이다.  
 $f(x) = -\frac{2}{x+2} - 2$ 이므로  
 $f(4) = -\frac{2}{4+2} - 2$   
 $= -\frac{1}{3} - 2$   
 $= -\frac{7}{3}$

#### 13. [출제의도] 등차수열의 일반항을 이해하여 수열의 항을 구한다.

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하면  
 $a_n = 20 + (n-1)d$ ,  $a_{n+1} = 20 + nd$   
 $b_n = a_n + a_{n+1}$ 이므로  
 $b_n = a_n + a_{n+1}$   
 $= \{20 + (n-1)d\} + \{20 + nd\}$   
 $= 40 + (2n-1)d$   
 $a_{10} = b_{10}$ 이므로  
 $20 + 9d = 40 + 19d$ 에서  
 $-10d = 20$ ,  $d = -2$   
따라서

$$b_n = 40 - 2(2n-1)$$

$$= 42 - 4n$$

이므로

$$b_8 = 42 - 4 \times 8 = 42 - 32 = 10$$

#### [다른 풀이]

$$b_{10} = a_{10} + a_{11}$$

$$b_8 = a_8 + a_9$$

$$= (20 - 2(n-1)) + (20 - 2n)$$

$$= 40 - 2(2n-1)$$

$$= 42 - 4n$$

$$a_{11} = 20 + 10d = 0$$

$$d = -2$$

$$a_n = 20 - 2(n-1) = 22 - 2n$$

$$b_8 = a_8 + a_9$$

$$= (22 - 2 \times 8) + (22 - 2 \times 9)$$

$$= 10$$

#### 14. [출제의도] 삼차방정식의 근을 이해하여 식의 값을 구한다.

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4$$

좌변을 전개하면  
 $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7$   
이므로  
 $1 + x + x^2 + x^3 = 0$   
 $(1+x) + x^2(1+x) = 0$   
 $(1+x)(1+x^2) = 0$   
 $x = -1$  또는  $x^2 = -1$   
따라서 주어진 방정식의 세 근은  $-1$ ,  $i$ ,  $-i$ 이므로  
 $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = (-1)^4 + i^4 + (-i)^4$   
 $= 1 + 1 + 1 = 3$

### [다른 풀이]

우변을 인수분해하면

$$\begin{aligned}x^4(x^3+x^2+x+1) &= x^4\{x^2(x+1)+x+1\} \\&= x^4(x^2+1)(x+1) \\(1+x)(1+x^2)(1+x^4) &= x^4(1+x)(1+x^2) \\(1+x)(1+x^2)(1+x^4-x^4) &= 0 \\(1+x)(1+x^2) &= 0 \\x = -1 \text{ 또는 } x^2 &= -1 \\\text{따라서 주어진 방정식의 세 근은 } &-1, i, -i \text{ 이므로} \\a^4 + \beta^4 + \gamma^4 &= (-1)^4 + i^4 + (-i)^4 \\&= 1 + 1 + 1 = 3\end{aligned}$$

### 15. [출제의도] 거듭제곱근을 이해하여 자연수의 개수를 구한다.

$\sqrt[5]{8}$ 이 자연수  $N$ 의  $n$ 제곱근이므로 거듭제곱근의 정의에 의하여  $(\sqrt[5]{8})^n = N$ 이다. 따라서

$$N = (\sqrt[5]{8})^n = 8^{\frac{n}{5}} = (2^3)^{\frac{n}{5}} = 2^{\frac{3n}{5}}$$

$N$ 은 자연수이므로  $n$ 의 값은 5의 배수이다.

따라서  $\sqrt[5]{8}$ 이 어떤 자연수  $N$ 의  $n$ 제곱근이 되도록 하는 두 자리 자연수  $n$ 은 10, 15, 20, ..., 95이므로  $n$ 의 개수는 18이다.

### 16. [출제의도] 부등식의 영역의 최대·최소를 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

두 메뉴 A, B를 각각  $x$ 인분,  $y$ 인분 만든다고 하면  $x \geq 0, y \geq 0$  ..... ①

하루에 최대 35인분을 만들 수 있으므로

$$x+y \leq 35 \quad \text{..... ②}$$

재료 S의 가격은 10g당 600원이므로 두 메뉴 A, B 1인분을 만들기 위한 재료 S의 구입 비용은 각각 6000원, 3000원이다. 따라서 하루 동안 사용할 재료 S의 구입 비용은  $6000x + 3000y$ (원)이다.

재료 T의 가격은 10g당 400원이므로 두 메뉴 A, B 1인분을 만들기 위한 재료 T의 구입 비용은 각각 2000원, 6000원이다. 따라서 하루 동안 사용할 재료 T의 구입 비용은  $2000x + 6000y$ (원)이다.

하루에 사용할 수 있는 두 재료 S, T의 구입 비용은 최대 30만 원이므로

$$(6000x + 3000y) + (2000x + 6000y) \leq 300000$$

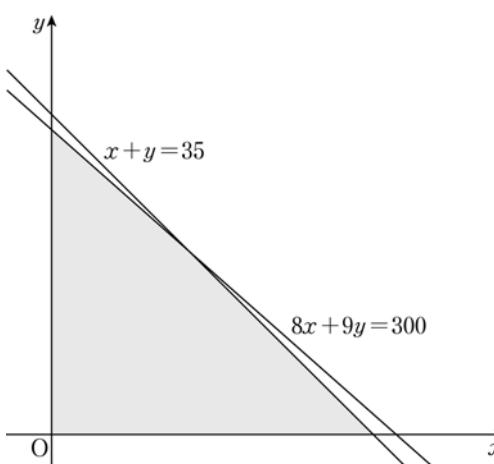
$$8000x + 9000y \leq 300000$$

$$8x + 9y \leq 300 \quad \text{..... ③}$$

좌표평면 위에 세 부등식 ①, ②, ③을 모두 만족시키는 영역을 나타내면 그림과 같이 두 직선

$$x+y=35, 8x+9y=300$$

과  $x$ 축,  $y$ 축으로 둘러싸인 부분이다.



한편, 하루 동안 두 메뉴 A, B를 각각  $x$ 인분,  $y$ 인분 판매하여 얻을 수 있는 판매 금액은

$$20000x + 22000y \text{ (원)} \text{이므로}$$

$20000x + 22000y = k$  ( $k$ 는 양의 실수)라 하면

$$10x + 11y = \frac{k}{2000} \quad \text{..... ④}$$

이때 두 직선  $x+y=35$ ,  $8x+9y=300$ 과 직선 ④의 기울기의 관계가

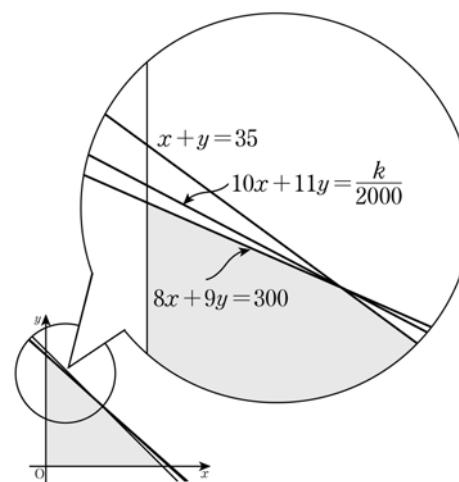
$$-1 < -\frac{10}{11} < -\frac{8}{9}$$

이므로 직선 ④이 두 직선

$$x+y=35, 8x+9y=300$$

이 만나는 점을 지날 때  $k$ 의 값은 최대이다.

두 직선  $x+y=35, 8x+9y=300$ 의 교점은  $(15, 20)$ 이고 따라서 식당에서 두 메뉴 A, B를 판매하여 얻을 수 있는 하루 최대 판매 금액은  $20000 \times 15 + 22000 \times 20 = 740000$ (원)이다.



### 17. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 명제를 증명한다.

(i)  $n=1$  일 때,

$$(좌변) = 1 \times 1 = 1$$

$$(우변) = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{24} = 1$$

(좌변) = (우변) = 1 이므로 (\*)이 성립한다.

(ii)  $n=m$  일 때, (\*)이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m k(k+(k+1)+(k+2)+\dots+m) \\= \frac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24}\end{aligned}$$

이다.  $n=m+1$  일 때, (\*)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} k(k+(k+1)+(k+2)+\dots+(m+1))$$

$$\begin{aligned}= \sum_{k=1}^m k(k+(k+1)+\dots+(m+1)) \\+ (m+1) \sum_{k=1}^m k + (m+1)^2 \\= \frac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24} \\+ \frac{m(m+1)^2}{2} + (m+1)^2 \\= \frac{(m+1)(m+2)(m+3)(3m+4)}{24}\end{aligned}$$

따라서  $n=m+1$  일 때도 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수  $n$ 에 대하여 (\*)이 성립 한다. 따라서

$$a=1$$

$$f(m) = (m+1)^2$$

$$g(m) = \frac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24}$$

이므로

$$a+f(2)+g(3) = 1 + (2+1)^2 + \frac{3(3+1)(3+2)(3 \times 3+1)}{24}$$

$$= 1 + 9 + 25$$

$$= 35$$

### 18. [출제의도] 이차방정식과 집합의 연산을 이용하여 교집합의 원소의 개수를 구한다.

집합  $A$ 의 원소는 20 이하의 자연수  $n$ 에 대하여

$$f(n) = (n^2 - 7n + 11)(n^2 + 3n + 3)$$

이고 집합  $B$ 의 원소가 100 이하의 소수이므로 집합  $A \cap B$ 의 원소는  $f(n) = (n^2 - 7n + 11)(n^2 + 3n + 3)$  중에서 100 이하의 소수이다.

집합  $A \cap B$ 의 원소는 두 수

$$n^2 - 7n + 11, n^2 + 3n + 3$$

의 곱으로 나타낼 수 있고,  $n^2 + 3n + 3 \mid 1$ 보다 큰 자연수이므로

$$n^2 - 7n + 11 = 1, n^2 + 3n + 3 = p (p \text{는 소수})$$

가 되어야 한다.

$$n^2 - 7n + 11 = 1$$

$$n^2 - 7n + 10 = 0$$

$$(n-2)(n-5) = 0$$

$$n=2 \text{ 또는 } n=5$$

$$(i) n=2 \text{ 일 때,}$$

$$f(2) = 1 \times (2^2 + 3 \times 2 + 3) = 13$$

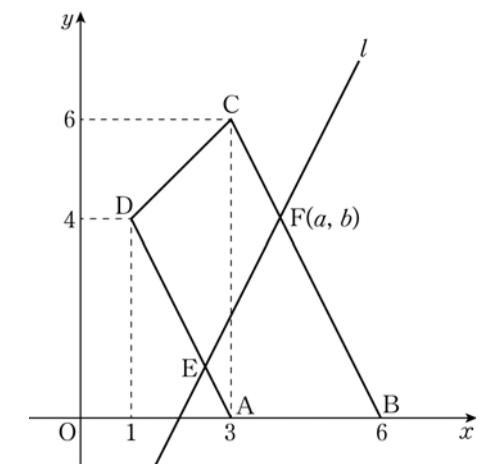
$$(ii) n=5 \text{ 일 때,}$$

$$f(5) = 1 \times (5^2 + 3 \times 5 + 3) = 43$$

(i), (ii)에서 13과 43이 모두 100 이하의 소수이므로  $A \cap B = \{13, 43\}$

따라서  $n(A \cap B) = 2$

### 19. [출제의도] 선분의 내분점과 직선의 방정식을 활용하여 점의 좌표를 구한다.



직선 AD의 기울기는  $\frac{4-0}{1-3} = -2$

직선 BC의 기울기는  $\frac{6-0}{3-6} = -2$

에서 두 직선 AD, BC는 평행이므로 사각형 ABCD는 사다리꼴이다.

두 밑변의 길이가 각각  $a, b$ 이고 높이가  $h$ 인 사다리꼴의 넓이를  $S$ 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times (a+b) \times h$$

이다. 직선 l이 사다리꼴 ABCD의 넓이를 이등분하려면 나누어진 두 개의 사다리꼴의 두 밑변의 길이의 합이 서로 같아야 한다.

선분 AD를 1:3으로 내분하는 점을 E라 하고 점 E를 지나는 직선 l이 사다리꼴 ABCD의 넓이를 이등분할 때, 선분 BC와 만나는 점 F에 대하여 점 F가 선분 BC를  $m:n$ 으로 내분한다고 하자.

$$\overline{AD} = 2\sqrt{5}, \overline{BC} = 3\sqrt{5} \text{이고}$$

$$\overline{AE} + \overline{BF} = \overline{DE} + \overline{CF} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{4} \times 2\sqrt{5} + \frac{m}{m+n} \times 3\sqrt{5} = \frac{3}{4} \times 2\sqrt{5} + \frac{n}{m+n} \times 3\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3m}{m+n} = \frac{3}{2} + \frac{3n}{m+n}$$

$$\frac{3(m-n)}{m+n} = 1 \text{에서}$$

$$3m - 3n = m + n$$

$$2m = 4n, m = 2n$$

따라서  $m:n = 2:1$  이므로

점 F의 좌표는

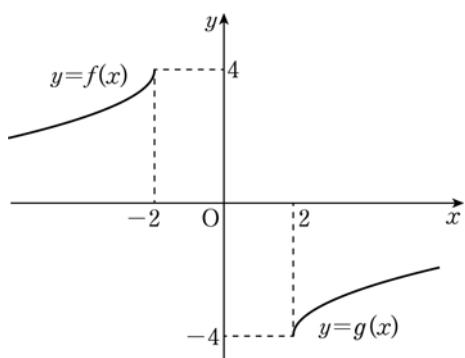
$$F\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times 6}{3}, \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{3}\right)$$

에서  $F(4, 4)$  이다.  
따라서  $a=4$ ,  $b=4$  이므로  
 $a+b=8$

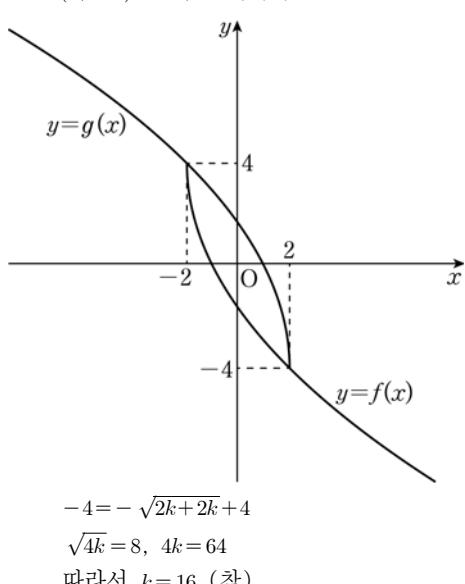
20. [출제의도] 무리함수의 그래프의 성질을 이용하여 주어진 문제의 참, 거짓을 판단한다.

두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 를  
 $f(x) = -\sqrt{kx+2k}+4$ ,  $g(x) = \sqrt{-kx+2k}-4$   
라 하자.  
 $\neg$ .  $f(-x) = -\sqrt{-kx+2k}+4$   
 $= -(\sqrt{-kx+2k}-4)$   
 $= -g(x)$

이므로  $g(x) = -f(-x)$   
따라서 두 곡선  
 $y = -\sqrt{kx+2k}+4$ ,  $y = \sqrt{-kx+2k}-4$   
는 원점에 대하여 대칭이다. (참)  
 $\hookrightarrow$ .  $k < 0$  이면 두 곡선은 다음과 같다.



따라서 두 곡선은 만나지 않는다. (거짓)  
 $\Leftarrow$ . (i)  $k < 0$  일 때  
 $\hookrightarrow$ 에 의하여 두 곡선은 만나지 않는다.  
(ii)  $k > 0$  일 때  
 $\neg$ 에서 두 곡선은 원점에 대하여 대칭이고  
 $k$ 의 값이 커질수록 곡선  $y=f(x)$ 는 직선  
 $y=4$ 와 멀어지고 곡선  $y=g(x)$ 는 직선  
 $y=-4$ 와 멀어진다.  
따라서 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는  $k$ 의 최댓값은 그림과 같이 곡선  $y=f(x)$ 가 곡선  $y=g(x)$  위의 점  $(2, -4)$ 를 지날 때이다.



21. [출제의도] 이차부등식과 이차함수의 성질을 이용하여 최댓값과 최솟값의 차를 구한다.

조건 (가)에서  $\frac{1-x}{4}=t$  라 하면  $x=1-4t$  이고,  
부등식  $f\left(\frac{1-x}{4}\right) \leq 0$ 의 해가  $-7 \leq x \leq 9$  이므로  
 $-7 \leq 1-4t \leq 9$ ,  $-2 \leq t \leq 2$   
따라서  $f(t) = k(t-2)(t+2)$  ( $k > 0$ )에서  
 $f(x) = k(x-2)(x+2) = k(x^2-4)$  ..... ①  
라 할 수 있다.  
조건 (나)에서 부등식

$$f(x) \geq 2x - \frac{13}{3}$$

이 항상 성립하므로 이차부등식

$$kx^2 - 2x - 4k + \frac{13}{3} \geq 0$$

의 해는 모든 실수이다. 따라서 방정식

$$kx^2 - 2x - 4k + \frac{13}{3} = 0$$

의 판별식을  $D$ 라 놓으면

$$\frac{D}{4} = 1 - k\left(-4k + \frac{13}{3}\right)$$

$$= 4k^2 - \frac{13}{3}k + 1 \leq 0$$

$$12k^2 - 13k + 3 \leq 0$$

$$(4k-3)(3k-1) \leq 0$$

$$\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{3}{4}$$

⑦에서  $f(3) = 5k$  이므로

$$\frac{5}{3} \leq f(3) \leq \frac{15}{4}$$

따라서  $M = \frac{15}{4}$ ,  $m = \frac{5}{3}$ 에서

$$M-m = \frac{15}{4} - \frac{5}{3} = \frac{25}{12}$$

[다른 풀이]

0이 아닌 실수  $k$ 와 두 상수  $a$ ,  $b$ 에 대하여  
 $f(x) = k(x-a)(x-b)$  라 하자.

조건 (가)에서  $f\left(\frac{1-x}{4}\right) \leq 0$

$$k\left(\frac{1-x}{4}-a\right)\left(\frac{1-x}{4}-b\right) \leq 0$$

$$k\left(\frac{1-4a-x}{4}\right)\left(\frac{1-4b-x}{4}\right) \leq 0$$

부등식  $k(x+4a-1)(x+4b-1) \leq 0$ 의 해가

$$-7 \leq x \leq 9$$
 이므로  $k > 0$

$$-4a+1 = -7, -4b+1 = 9$$
 라 하면

$$a=2, b=-2$$

따라서  $f(x) = k(x-2)(x+2) = k(x^2-4)$  ..... ①

조건 (나)에서 부등식

$$f(x) \geq 2x - \frac{13}{3}$$

이 항상 성립하므로 이차부등식

$$kx^2 - 2x - 4k + \frac{13}{3} \geq 0$$

의 해는 모든 실수이다. 따라서 방정식

$$kx^2 - 2x - 4k + \frac{13}{3} = 0$$

의 판별식을  $D$ 라 놓으면

$$\frac{D}{4} = 1 - k\left(-4k + \frac{13}{3}\right) = 4k^2 - \frac{13}{3}k + 1 \leq 0$$

$$12k^2 - 13k + 3 \leq 0, (4k-3)(3k-1) \leq 0$$

$$\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{3}{4}$$

⑦에서  $f(3) = 5k$  이므로

$$\frac{5}{3} \leq f(3) \leq \frac{15}{4}$$

따라서  $M = \frac{15}{4}$ ,  $m = \frac{5}{3}$ 에서

$$M-m = \frac{15}{4} - \frac{5}{3} = \frac{25}{12}$$

22. [출제의도] 등비수열의 성질을 이용하여 주어진 항을 구한다.

첫째항이  $\frac{1}{2}$  이고 공비가 2인 등비수열  $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = \frac{1}{2} \times 2^{n-1} = 2^{n-2}$$

따라서  $a_6 = 2^4 = 16$

[다른 풀이]

첫째항이  $\frac{1}{2}$  이고 공비가 2인 등비수열  $\{a_n\}$ 을 순서대로 나열하면

$$\{a_n\} : \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

따라서  $a_6 = 16$

23. [출제의도] 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 알고 식의 값을 구한다.

이차방정식  $x^2 + 8x - 2 = 0$ 의 두 근을  $\alpha, \beta$ 라 하면

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -8, \alpha\beta = -2$$

$$\text{따라서 } \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{-8}{-2} = 4$$

[다른 풀이]

이차방정식  $x^2 + 8x - 2 = 0$ 의 근을 구하면

$$x = -4 \pm 3\sqrt{2}$$
 이므로

$$\alpha + \beta = (-4 + 3\sqrt{2}) + (-4 - 3\sqrt{2})$$

$$= -8$$

$$\alpha\beta = (-4 + 3\sqrt{2})(-4 - 3\sqrt{2})$$

$$= -2$$

$$\text{따라서 } \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{-8}{-2} = 4$$

24. [출제의도] 역함수를 이해하여 함숫값을 구한다.

$$(g \circ f^{-1})(2) = g(f^{-1}(2))$$

$$f^{-1}(2) = k$$
 라 하면  $f(k) = 2$

$$\frac{1}{2}k = 2, k = 4$$

$$\text{따라서 } g(f^{-1}(2)) = g(4) = 13$$

[다른 풀이]

$$f(x) = \frac{1}{2}x$$
 이므로 함수  $f^{-1}(x)$ 는

$$x = \frac{1}{2}y$$
에서  $y = 2x$

즉,  $f^{-1}(x) = 2x$  이므로

$$(g \circ f^{-1})(x) = g(f^{-1}(x))$$

$$= g(2x)$$

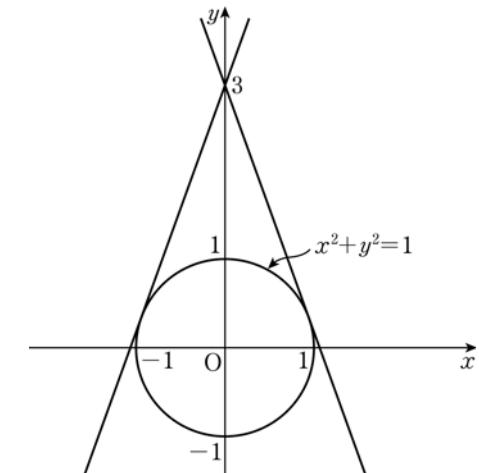
$$= 4x + 5$$

따라서

$$(g \circ f^{-1})(2) = 4 \times 2 + 5$$

$$= 13$$

25. [출제의도] 원의 접선의 방정식을 이해하여 점의 좌표를 구한다.



점  $(0, 3)$ 을 지나고 원  $x^2 + y^2 = 1$ 에 접하는 직선의 기울기를  $m$ 이라 하면 접선의 방정식은

$$y = mx + 3$$
 즉,  $mx - y + 3 = 0$

원의 중심  $(0, 0)$ 에서 직선  $mx - y + 3 = 0$ 까지의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|m \times 0 - 0 + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$$

$$3 = \sqrt{m^2 + 1}, m^2 = 8$$

$$m = 2\sqrt{2}, m = -2\sqrt{2}$$

(i)  $m = 2\sqrt{2}$  일 때

$$\text{접선의 방정식이 } y = 2\sqrt{2}x + 3$$
 이므로

$x$  축과 만나는 점의  $x$  좌표  $k$ 는

$$k = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \text{에서 } k^2 = \frac{9}{8}$$

(ii)  $m = -2\sqrt{2}$  일 때

접선의 방정식이  $y = -2\sqrt{2}x + 3$  이므로

$x$  축과 만나는 점의  $x$  좌표  $k$ 는

$$k = \frac{3}{2\sqrt{2}} \text{에서 } k^2 = \frac{9}{8}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } 16k^2 = 16 \times \frac{9}{8} = 18$$

## 26. [출제의도] 연립방정식을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 R석의 티켓의 수를  $a$ , S석의 티켓의 수를  $b$ , A석의 티켓의 수를  $c$ 라 놓으면

$$a+b+c=1500 \quad \text{..... ①}$$

조건 (나)에서 R석, S석, A석 티켓의 가격은 각각 10만 원, 5만 원, 2만 원이므로

$$10a+5b+2c=6000 \quad \text{..... ②}$$

A석의 티켓의 수는 R석과 S석 티켓의 수의 합과 같으므로

$$a+b=c \quad \text{..... ③}$$

세 방정식 ①, ②, ③을 연립하여 풀면

$$\text{①, ③에서 } 2c=1500 \text{ 이므로 } c=750$$

①, ③에서 연립방정식

$$\begin{cases} a+b=750 \\ 2a+b=900 \end{cases}$$

을 풀면  $a=150$ ,  $b=600$ 이다.

따라서 구하는 S석의 티켓의 수는 600

## 27. [출제의도] 일대일 대응의 뜻을 이용하여 함수의 최댓값을 구한다.

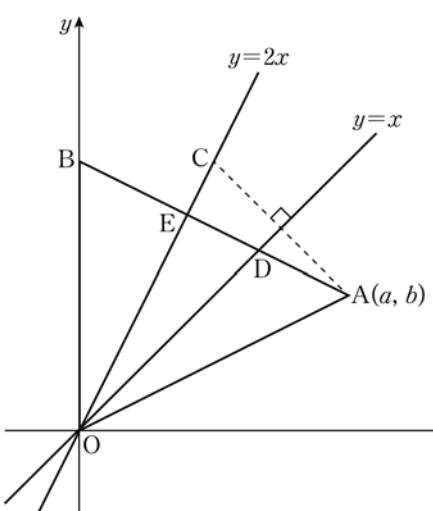
3 이상 5 이하의 자연수  $n$ 에 대하여  $f(n)f(n+2)$ 의 값이 짹수이므로

$f(3) \times f(5)$ ,  $f(4) \times f(6)$ ,  $f(5) \times f(7)$ 은 모두 짹수이다.

$f(4)$  또는  $f(6)$ 은 적어도 하나가 짹수이고, 집합  $X$ 의 원소 중 짹수인 것은 4, 6뿐이므로  $f(3) \times f(5)$ 와  $f(5) \times f(7)$ 이 모두 짹수이려면  $f(5)$ 는 짹수가 되어야 한다.

따라서  $f(3)$ ,  $f(7)$ 은 모두 홀수이므로  $f(3)+f(7)$ 의 최댓값은  $f(3)=5$ ,  $f(7)=7$  또는  $f(3)=7$ ,  $f(7)=5$  일 때  $5+7=12$ 이다.

## 28. [출제의도] 도형의 이동과 직선의 수직 조건을 이용하여 원의 둘레의 길이를 구한다.



두 상수  $a$ ,  $b$ 에 대하여 점  $A$ 의 좌표를  $(a, b)$ 라 하면 점  $C$ 는 점  $A$ 를 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점이므로 점  $C$ 의 좌표는  $(b, a)$ 이다.

점  $C$ 는 직선  $y=2x$  위의 점이므로  $a=2b$ 이다.

따라서 점  $A$ 의 좌표는  $A(2b, b)$ 이다.

$\overline{OA}=2\sqrt{5}$  이므로

$$\overline{OA}^2=(2\sqrt{5})^2=20$$

$$(2b)^2+b^2=20, 5b^2=20$$

$$b^2=4 \text{에서 } b=2$$

따라서 두 점  $A$ ,  $C$ 의 좌표는

$$A(4, 2), C(2, 4)$$

$y$ 축 위의 점  $B$ 의 좌표를  $(0, c)$ 라 하면

$$\overline{AB}=\overline{OA}=2\sqrt{5}, \overline{AB}^2=(2\sqrt{5})^2=20$$

$$(4-0)^2+(2-c)^2=20$$

$$16+4-4c+c^2=20$$

$$-4c+c^2=0, c(c-4)=0$$

$$c>0 \text{이므로 } c=4$$

따라서 점  $B$ 의 좌표는  $(0, 4)$ 이다.

점  $D$ 는 직선  $AB$ 와 직선  $y=x$ 의 교점이므로

$$x=-\frac{1}{2}x+4, \frac{3}{2}x=4$$

$$x=\frac{8}{3}, y=\frac{8}{3}$$

$$\text{따라서 } D\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

한편, 직선  $AB$ 의 기울기는  $-\frac{1}{2}$ 이고 직선  $y=2x$ 의 기울기는 2이므로 두 직선은 서로 수직이다.

따라서 삼각형 ODE는  $\angle OED=90^\circ$ 인 직각삼각형이고, 삼각형 ODE의 외접원의 지름의 길이는 선분 OD의 길이와 같다.

$$\overline{OD}=\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

삼각형 ODE의 외접원의 둘레의 길이는

$$k\pi=\frac{8}{3}\sqrt{2}\pi, k=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

따라서

$$9k^2=9\times\left(\frac{8}{3}\sqrt{2}\right)^2$$

$$=9\times\frac{128}{9}$$

$$=128$$

## 29. [출제의도] 절댓값과 이차함수의 성질을 이용하여 상수의 최솟값을 구한다.

$$x^2+2x-8=(x+4)(x-2)=0$$

$$x=-4 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가  $x$  축과 만나는 점의  $x$  좌표는  $x=-4$  와  $x=2$ 이다.

$$\text{부등식 } \frac{|f(x)|}{3}-f(x) \geq m(x-2) \text{ 에서}$$

(i)  $f(x) \geq 0$ , 즉  $x \leq -4$  또는  $x \geq 2$  일 때

$$\frac{f(x)}{3}-f(x) \geq m(x-2) \text{ 이므로}$$

$$-\frac{2}{3}f(x) \geq m(x-2)$$

(ii)  $f(x) < 0$ , 즉  $-4 < x < 2$  일 때

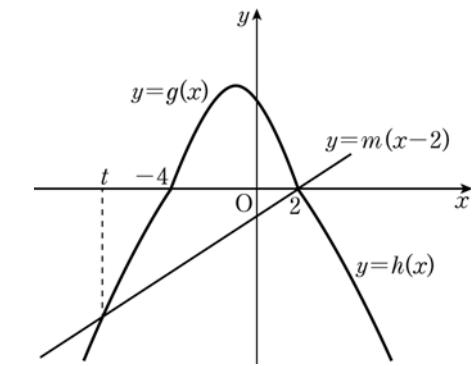
$$-\frac{f(x)}{3}-f(x) \geq m(x-2) \text{ 이므로}$$

$$-\frac{4}{3}f(x) \geq m(x-2)$$

여기서  $g(x)=-\frac{4}{3}f(x)$ ,  $h(x)=-\frac{2}{3}f(x)$  라 하면

$$\frac{|f(x)|}{3}-f(x)=\begin{cases} g(x) & (-4 < x < 2) \\ h(x) & (x \leq -4, x \geq 2) \end{cases}$$

한편, 직선  $y=m(x-2)$ 는 점  $(2, 0)$ 을 지나고 기울기  $m$ 이 양수이므로 함수  $y=\frac{|f(x)|}{3}-f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=m(x-2)$ 를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



직선  $y=m(x-2)$  와 함수  $y=\frac{|f(x)|}{3}-f(x)$ 의 그래프

의 교점의  $x$  좌표를  $t$  ( $t < -4$ )라 하면 부등식

$$\frac{|f(x)|}{3}-f(x) \geq m(x-2)$$

의 해는  $t \leq x \leq 2$

$t \leq x \leq 2$  인 정수  $x$ 의 개수가 10이 되기 위한 실수

$t$ 의 범위는  $-8 < t \leq -7$ 이고,  $m$ 의 값의 범위는 직선  $y=m(x-2)$ 가 점  $(-7, h(-7))$ 을 지날 때보다 크거나 같고, 점  $(-8, h(-8))$ 을 지날 때보다 작다.

$t=-7$  일 때

$$h(-7)=-\frac{2}{3}\{(-7)^2+2\times(-7)-8\}=-\frac{2}{3}\times27=-18$$

$$\text{이므로 } m=\frac{0-(-18)}{2-(-7)}=2 \quad \text{..... ①}$$

$t=-8$  일 때

$$h(-8)=-\frac{2}{3}\{(-8)^2+2\times(-8)-8\}=-\frac{2}{3}\times40=-\frac{80}{3}$$

$$\text{이므로 } m=\frac{0-\left(-\frac{80}{3}\right)}{2-(-8)}=\frac{8}{3} \quad \text{..... ②}$$

①, ②에서  $m$ 의 범위는  $2 \leq m < \frac{8}{3}$

따라서  $m$ 의 최솟값은 2이다.

## 30. [출제의도] 등차수열과 등비수열의 성질을 활용하여 수열의 항을 구한다.

$a_7, a_8, a_k$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

이 수열의 공비를  $r$ 라 하면

$$a_8=a_7r, a_k=a_7r^2 \quad \text{..... ①}$$

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하면

조건 (가)에서

$$a_n=a_1+(n-1)d \quad (a_1 \text{은 정수, } d \text{는 자연수})$$

이므로

$$a_8-a_7=d, a_k-a_8=(k-8)d$$

이 식에 ①을 대입하면

$$a_7(r-1)=d, a_7(r-1)r=(k-8)d$$

위 식으로부터

$$dr=(k-8)d$$

$d \neq 0$  이므로  $r=k-8$  ②

②을 ①에 대입하면

$$a_k=a_7(k-8)^2, a_k=144=12^2$$

위 식으로부터

$$a_7(k-8)^2=12^2$$

조건 (가)에서  $k-8$ 과  $a_7$ 이 정수이므로  $a_7$ 은 완전제곱수이다. 따라서  $a_7$ 은 12의 약수의 제곱수인

$$1, 2^2, 3^2, 4^2, 6^2, 12^2$$

중 하나이다.

(i)  $a_7=1$  일 때

$$(k-8)^2=12^2 \text{ 이므로}$$

$$k=20 \quad (k > 8)$$

(ii)  $a_7=2^2$  일 때

$$(k-8)^2=6^2 \text{ 이므로}$$

$$k=14 \quad (k > 8)$$

(iii)  $a_7=3^2$  일 때

$$(k-8)^2=4^2 \text{ 이므로}$$

$$k=12 \quad (k > 8)$$

(iv)  $a_7=4^2$  일 때

$(k-8)^2 = 3^2$  이므로  
 $k=11$  ( $k > 8$ )  
 (v)  $a_7 = 6^2$  일 때  
 $(k-8)^2 = 2^2$  이므로  
 $k=10$  ( $k > 8$ )  
 (vi)  $a_7 = 12^2$  일 때  
 $(k-8)^2 = 1$  이므로  
 $k=9$  ( $k > 8$ )  
 그런데  $k=9$  이면  $\odot$ 에서  $r=1$  이므로 수열  $\{a_n\}$   
 의 공차가 0이다. 따라서  $k \neq 9$  이다.  
 (i)~(vi)에서 구하는 모든  $k$ 의 값의 합은  
 $20+14+12+11+10=67$