

2020년 7월 10일 ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

1. 사각형  $ABCD$ 는  $AB \parallel CD$ ,  $\overline{AD} = \overline{BC}$ ,  $\overline{AB} > \overline{CD}$ 인 등변사다리꼴이다. 점  $C$ 를 지나고 변  $BC$ 에 수직인 직선 위에  $\overline{EC} = \overline{AC}$ 와  $\angle ACE < 90^\circ$ 인 점  $E$ 를 잡자. 중심이  $D$ 이고 반지름이  $DA$ 인 원  $\Gamma$ 가 삼각형  $AEB$ 의 외접원  $\Omega$ 와 만나는 점을  $F( \neq A)$ 라 하고, 원  $\Gamma$  위에  $\overline{BF} = \overline{BG}$ 인 점  $G( \neq F)$ 를 잡자. 두 직선  $EG$ 와  $BD$ 의 교점이 원  $\Omega$  위에 있음을 보여라.

2. 남학생 1명과 여학생 1명으로 구성된 모듬이 2020개 있다. 각 학생은 정확히 1개의 모듬에만 포함된다. 다음 네 조건을 모두 만족하도록 2명씩 악수하기로 하자.

- (i) 동성 간에는 악수하지 않는다.
- (ii) 같은 모듬의 이성 간에는 정확히 1회 악수한다.
- (iii) 같은 모듬이 아닌 이성 간에는 1회만 악수하거나 악수하지 않는다.
- (iv) 임의의 두 모듬에 속한 4명의 학생 간에 악수한 총 횟수는 3회 이상이다.

이때 서로 악수한 학생들끼리 이웃하면서 원형으로 배치할 수 있도록 4038명을 뽑을 수 있음을 보여라.

3. 다음 조건을 만족하는 함수  $f: \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 를 모두 구하여라. (단,  $\mathbb{Q}_+$ 와  $\mathbb{R}$ 는 각각 양의 유리수와 모든 실수의 집합)

양의 유리수  $x, y, z$ 가  $x + y + z + 1 = 4xyz$ 를 만족하면

$$f(x) + f(y) + f(z) = 1$$

이다.



제 33 회 최종시험 둘째 날

# 한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2020년 7월 11일 ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

4. 모든 양의 정수가 다음 수열에 정확히 한 번 등장하도록 하는 양의 실수의 순서쌍  $(\alpha, \beta)$ 가 존재하는가? 존재한다면 순서쌍을 모두 구하고, 그렇지 않다면 순서쌍이 존재하지 않음을 보여라.

$$2020, [\alpha], [\beta], 4040, [2\alpha], [2\beta], 6060, [3\alpha], [3\beta], 8080, [4\alpha], [4\beta], \dots$$

(단,  $[x]$ 는  $x$ 를 넘지 않는 최대 정수)

5. 예각삼각형  $ABC$ 가  $\overline{AB} = \overline{AC}$ 를 만족한다. 변  $BC$ 의 중점을  $M$ 이라 하고, 선분  $AM$ 과  $AC$ 의 중점을 각각  $L, N$ 이라 하자. 삼각형  $AMC$ 의 외접원  $\Omega$ 와 선분  $AB$ 의 교점을  $P(\neq A)$ , 원  $\Omega$ 와 선분  $BL$ 의 교점을  $Q$ 라 하자. 삼각형  $BQC$ 의 외접원의 중심을  $O$ 라 하자. 두 직선  $AC$ 와  $PQ$ 가 점  $X$ 에서 만나고, 두 직선  $OB$ 와  $LN$ 이 점  $Y$ 에서 만나고, 두 직선  $BQ$ 와  $CO$ 가 점  $Z$ 에서 만날 때, 세 점  $X, Y, Z$ 가 한 직선 위에 있음을 보여라.

6. 양의 정수  $n$  중  $6(n^4 - 1)$ 의 값이 완전제곱수가 되는 것을 모두 구하여라.