



2022년 5월 28일 ; 제한시간 2시간 30분(1교시 1시간 15분, 2교시 1시간 15분)

- A. 답안지에 **수험번호와 성명, 문제유형**을 반드시 기입하십시오.
 B. 이 시험은 총 20개(오전 10개, 오후 10개)의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.

1. x 에 대한 방정식 $x^4 - 4x^3 - a^2x^2 + 16x + 4a^2 - 16 = 0$ 의 실수해 중 가장 큰 수와 두 번째로 큰 수의 합이 17이다. 양의 실수 a 의 값을 구하여라. [4점]

답: 13

2. 실수 a, b, c 는 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) $a < b$ (ii) 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 이다.

식 $\frac{11a+b+c}{b-a}$ 가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라. [5점]

답: 5

3. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 과 상수항이 528인 정수계수 다항식 $P(x)$ 가 있다.

(조건) 방정식 $P(x) = 2022$ 의 서로 다른 정수해의 개수가 n 이다.

n 이 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 구하여라. [6점]

답: 6

4. 10명의 학생을 2개 이상의 모둠으로 나눌 때, 각 모둠의 인원이 4 이상인 경우의 수를 구하여라. (단, 각 학생은 오직 하나의 모둠에 속한다.) [4점]

답: 336

5. 서로 구별되지 않는 17개의 공을 서로 다른 상자 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 에 남김없이 넣을 때, 다음 두 조건을 모두 만족하도록 넣는 경우의 수를 구하여라. [5점]

(i) 각각의 상자에 적어도 한 개의 공을 넣는다.

(ii) 모든 $i = 1, 2, 3, 4, 5$ 에 대하여 상자 B_i 에 들어 있는 공의 개수에 i 를 더한 수는 짝수이다.

답: 126

6. 열 개의 수 $-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5$ 를 원형으로 배열할 때, 다음 두 조건을 모두 만족하도록 배열하는 경우의 수를 구하여라. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [5점]

(i) 이웃한 두 수의 곱은 음수이다.

(ii) 네 개의 수 $-4, -2, 2, 4$ 중 어떤 두 수도 서로 이웃하지 않는다.

답: 144

7. 삼각형 ABC 는 외접원의 반지름의 길이가 10인 삼각형으로 $\overline{AB} = 2\overline{AC}$, $\cos \angle BAC = -\frac{1}{3}$ 을 만족한다. 변 AB 의 중점을 D 라 할 때, 삼각형 BCD 의 외접원의 반지름의 길이를 x 라 하자. $3x^2$ 의 값을 구하여라. [5점]

답: 800

8. 포물선 $y = (x - 1)^2$ 위의 네 점 A, B, C, D 가 꼭짓점인 사각형 $ABCD$ 가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) 대각선 AC 의 중점은 y -축 위에 있다.

(ii) 대각선 BD 는 대각선 AC 에 수직이다.

선분 BD 의 중점의 x -좌표를 k 라 할 때, $100k$ 의 값을 구하여라. [5점]

답: 125

9. 등식 $y^2 - 2xy + x^4 = 2368$ 을 만족하는 정수 x, y 에 대하여, $x + y$ 가 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 구하여라. [5점]

답: 18

10. 다음 조건을 만족하는 세 자리 양의 정수 m, n 의 순서쌍 (m, n) 의 개수를 구하여라. [6점]

(조건) m, n 의 최대공약수를 G , 최소공배수를 L 이라 할 때, $L - G = m + 2n$ 이다.

답: 366



제 36 회 고등부 1차시험 2교시

한국수학올림피아드

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2022년 5월 28일 ; 제한시간 2시간 30분(1교시 1시간 15분, 2교시 1시간 15분)

- A. 답안지에 **수험번호와 성명, 문제유형**을 반드시 기입하십시오.
 B. 이 시험은 총 20개(오전 10개, 오후 10개)의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.

- 11.** 실수 x 가 다음 식을 만족할 때, $72x$ 의 값을 구하여라. [5점]

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}$$

답: 200

- 12.** 실계수 6차 다항식 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) $f(0) = 2$

(ii) $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 에 대하여

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1}\right)^3$$
 이다.

 $f(1)$ 의 값을 구하여라. [5점]

답: 721

- 13.** 양의 정수 n 에 대하여 $d(n)$ 을 n 의 양의 약수 중 5 이하인 것의 개수라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라. [5점]

$$d(1) + d(2) + \cdots + d(400)$$

답: 913

- 14.** 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $f : X \rightarrow Y$ 의 개수를 구하여라. [6점]

(i) 모든 $y \in Y$ 에 대하여 $(f \circ g)(y) = g(y)$ 를 만족하는 함수 $g : Y \rightarrow X$ 의 개수는 8이다.(ii) 모든 $y \in Y$ 에 대하여 $(f \circ h)(y) = y$ 를 만족하는 함수 $h : Y \rightarrow X$ 의 개수는 8이다.

답: 18

- 15.** 삼각형 ABC 의 세 변의 길이가 각각 $\overline{AB} = 30$, $\overline{BC} = 50$, $\overline{CA} = 40$ 이다. 점 X, Y, Z 는 각각 삼각형 ABC 의 변 AB , BC , CA 위에 있는 점으로 $\overline{AX} : \overline{BY} : \overline{CZ} = 3 : 5 : 4$ 를 만족한다. 삼각형 XYZ 의 넓이의 최솟값을 구하여라. [4점]

답: 150

- 16.** 삼각형 ABC 에서 $\overline{BC} = 30$, $\overline{AC} = 40$, $\angle ACB = 90^\circ$ 이다.

변 AC 를 지름으로 하는 원이 변 AB 와 점 $D(\neq A)$ 에서 만난다. 변 AC 의 중점을 M , 선분 CD 와 BM 의 교점을 E , 직선 AE 와 변 BC 의 교점을 F 라 하자. $25\overline{FC}$ 의 값을 구하여라. [5점]

답: 480

- 17.** 길이가 4인 선분 AB 를 지름으로 하는 원 Ω_1 이 선분 AC 를 지름으로 하는 원 Ω_2 에 내접한다. 또한 반지름이 1인 원 Ω_3 이 원 Ω_1 에 외접하고 원 Ω_2 에 내접한다. 원 Ω_3 의 중심을 O 라 할 때, 직선 OB 는 직선 BC 에 수직이다. 선분 BC 의 수직이등분선이 Ω_2 와 만나는 점을 D 라 할 때, $9\overline{CD}^2$ 의 값을 구하여라. [6점]

답: 80



제 36 회 고등부 1차시험 2교시

한국수학올림피아드

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

- 18.** 곡선 $y = x^4 - 35x^3 + 27x^2 + 34x - 11$ 과 직선 $y = 4x - 6$ 은 서로 다른 네 점에서 만난다. 이 네 점의 y 좌표의 합을 구하여라. [4점]

답: 116

- 19.** 다항식 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족한다.

$$(조건) f(0) = 9, f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = 24$$

이러한 다항식 중 차수가 최소인 것을 $p(x)$ 라 할 때, $p(5)$ 를 구하여라. [5점]

답: 184

- 20.** 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수 n 의 개수를 구하여라. (단, $[a]$ 는 a 를 넘지 않는 최대정수) [5점]

$$(i) 1 \leq n < 44484$$

$$(ii) \left[\frac{n}{1011} \right] = m \left[\frac{n}{2022} \right] \text{을 만족하는 정수 } m \text{이 존재한다.}$$

답: 23252