

2017년 11월 12일 (오전); 제한시간 3시간 ; 문항당 7점

1. 정팔각형  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ 의 대각선 20개의 집합을  $U$ 라고 하자. 다음 두 조건을 모두 만족하는 집합  $S$ 의 개수를 구하여라.

(i)  $S$ 는  $U$ 의 부분집합이다.

(ii)  $\overline{P_iP_j}, \overline{P_jP_k} \in S$ 이고  $i \neq k$ 이면,  $\overline{P_iP_k} \in S$ 이다.

2. 다음 식을 만족하는 정수  $n$ 과 양의 정수  $k, m$ 이 존재하도록 하는 소수  $p$ 를 모두 구하여라.

$$\frac{(mk^2 + 2)p - (m^2 + 2k^2)}{mp + 2} = n^2$$

3. 이등변 삼각형이 아닌 삼각형  $ABC$ 의 내접원이 변  $BC, CA, AB$ 와 만나는 점을 각각  $D, E, F$ 라 하자. 변  $BC$ 의 수직이등분선이 삼각형  $ABC$ 의 외접원과 만나는 두 점 중 직선  $BC$ 에 대하여 점  $A$ 와 같은 쪽에 있는 점을  $P$ , 다른 쪽에 있는 점을  $Q$ 라 하자. 점  $D$ 를 지나고 직선  $AQ$ 와 평행한 직선이 직선  $EF$ 와 만나는 점을  $R$ 이라 하자. 직선  $EF$ 와 직선  $PQ$ 의 교점이 삼각형  $BCR$ 의 외접원 위에 있음을 보여라.

4. 다음과 같이 함수  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 을 정의하자.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & (x > 1) \\ 1 & (x = 1) \\ \frac{x}{1-x} & (x < 1) \end{cases}$$

양의 무리수  $x_1$ 이 어떤 정수 계수 이차방정식의 해라고 하자. 모든 양의 정수  $n$ 에 대하여  $x_{n+1} = f(x_n)$ 으로 정의하자. 이 때,  $x_k = x_\ell$ 을 만족하는 서로 다른 두 양의 정수  $k, \ell$ 이 존재함을 보여라. (단,  $\mathbb{R}$ 은 실수 전체의 집합이다.)