

2011년 6월 25일; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 “7”일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1~4 번은 각 4 점, 문제 17~20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 다음 등식을 만족시키는 복소수 순서쌍 (z, w) 는 모두 몇 개인가?

$$z^2 + w^2 = z^4 + w^4 = z^8 + w^8$$

2. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 중 가장 작은 것을 구하여라.

모든 일대일함수

$$f : \{1, 2, \dots, 8\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 8\}$$

에 대해, f 를 n 번 합성한 함수는 항등함수이다.

3. 다음 조건 (i), (ii) 를 모두 만족하는 정수 k 전체의 집합을 A 라 하자.

(i) $1 \leq k < 449$

(ii) $k^{224} + 448$ 은 449 의 배수

A 의 모든 원소의 합을 1000 으로 나눈 나머지는 얼마인가?

4. 출제취소

5. 회원이 25 명인 바둑 동호회에서 각 회원이 정확히 k 명과 일대일로 대국하도록 대진표를 만들고자 한다. 이러한 대진표를 만들 수 있는 양의 정수 k 를 모두 더하면 얼마인가?

6. 양의 정수 전체의 집합 \mathbb{N} 에서 정의된 함수 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ 가 다음 조건 (i), (ii) 를 모두 만족한다.

(i) $f(11) = 2$

(ii) m, n 이 서로 소이면 $f(mn) = f(m) + d(m)f(n)$
(단, $d(m)$ 은 m 의 양의 약수의 개수)

이때 $f(900)$ 은 얼마인가?

7. 상수 c_k ($k = 0, 1, \dots, 24$) 가 모든 x ($x \neq 0$) 에 대하여

$$\left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{24} c_k x^{k-12}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=0}^{24} (-1)^k c_k^2$ 의 값을 구하여라.

8. 사각형 $ABCD$ 의 한 꼭짓점 D 를 지나고 BC 에 평행한 직선이 변 AB 와 점 E 에서 만난다. $AE = 10$, $BE = 20$, $CD = CE = 5\sqrt{2}$, $\angle BAD = 2\angle CED$ 일 때, BD 의 값을 구하여라.

9. 각 자리수가 1 또는 2 로 이루어진 7 자리 양의 정수 전체의 집합을 A 라 하자. 다음 조건을 만족하는 A 의 부분집합 S 중 원소가 가장 많은 것은 몇 개의 원소를 가지고 있는가?

임의의 서로 다른 두 원소 $m \in S, n \in S$ 에 대하여 $m+n$ 의 7 개의 자리수 중 숫자 3 이 세 개 이상이다.

10. 양수 a, b, c, d 에 대한 식

$$\frac{ab + 4bc + cd}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

의 최댓값을 M 이라 할 때, $64(M-1)^6$ 의 값은 얼마인가?

11. 각 B 가 둔각이고 $AC = 9$ 인 삼각형 ABC 의 중심을 G 라 하자. 꼭지점 A 에서 직선 BC 에 내린 수선의 발을 D , 선분 AD 의 중점을 E , 직선 AG 가 삼각형 ABC 의 외접원과 만나는 점을 F ($F \neq A$)라 할 때, EG 와 DF 가 평행하다. 선분 AD 와 삼각형 ABC 의 외접원의 교점 P ($P \neq A$)에 대하여 $BP = 2$ 라 하자. 삼각형 ABC 의 외접원의 지름의 길이를 d 라 할 때, d^2 의 값을 구하여라.

12. 다음 조건 (i), (ii), (iii)을 동시에 만족하는 양의 정수 k 가 모두 332개 있다.

(i) $k \leq p - 2$

(ii) $m^2 - k$ 가 p 의 배수가 되는 정수 m 이 존재한다.

(iii) $n^2 - k - 1$ 이 p 의 배수가 되는 정수 n 은 존재하지 않는다.

이때 p 를 1000으로 나눈 나머지는 얼마인가?

13. 각 C 가 60° 이고 $AC = 48$, $BC = 30$ 인 삼각형 ABC 의 내심을 I , 외심을 O 라 하자. 직선 IO 와 변 AC 의 교점을 D 라 할 때, DI^2 의 값을 구하여라.

14. 정수 a_1, a_2, \dots, a_{20} 의 최대공약수를 $G(a_1, a_2, \dots, a_{20})$ 이라 하자. 다음 조건 (i), (ii)를 모두 만족하는 정수 a_1, a_2, \dots, a_{20} 에 대하여 $G(a_1, a_2, \dots, a_{20})$ 의 최댓값을 구하여라.

(i) $1000 < a_1 < a_2 < \dots < a_{20}$

(ii) $a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = 105840$

15. 집합 X, Y 에 대해 $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ 라 하자. $\{0, 1\} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합이면서 다음 조건을 만족하는 집합 A 중 공집합이 아닌 것은 모두 몇 개인가?

$$(a_1, b_1) \in A, (a_2, b_2) \in A \text{ 이면 } |a_1 - a_2| + |b_1 - b_2| \neq 1$$

16. 정수 n 에 대하여 $a_n = (6n + 1)\frac{\pi}{18}$ 라 하자. 이때

$$\left(\sum_{n=1}^{60} n \cos a_n\right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{60} n \sin a_n\right)^2$$

의 값을 1000으로 나눈 나머지는 얼마인가?

17. 양의 정수 전체의 집합 \mathbb{N} 에서 정의된 함수 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 가 다음 조건 (i), (ii), (iii)을 모두 만족한다.

(i) $f(1) \neq 2$

(ii) $m \leq n$ 이면 $f(m) \leq f(n)$

(iii) 모든 양의 정수 n 에 대하여 $f(f(n)) = 5n$

이때 $f(2011)$ 을 1000으로 나눈 나머지는 얼마인가?

18. 일대일대응 $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 중

$$f(1) \neq 1,$$

$$f(f(1)) \neq 1,$$

$$f(f(f(1))) \neq 1,$$

$$f(f(f(f(1)))) \neq 1$$

을 모두 만족하는 일대일대응 f 전체의 집합을 A 라 하자. 이때 A 의 원소로 이루어진 순서쌍 (g, h) 중 $g \circ h$ 가 A 에 속하는 것은 모두 몇 개인가? (단, $g \circ h$ 는 g 와 h 의 합성함수를 뜻한다.)

19. 양의 정수 x, y, z 가 등식

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 6$$

을 만족하고 x 와 z 는 서로 소일 때, $x + y + z$ 의 최댓값을 구하여라.

20. 출제취소