

제 24회 한국수학올림피아드 최종시험

2011년 3월 26일 - 제 1 일

1. 방정식

$$x^2y^4 - x^4y^2 + 4x^2y^2z^2 + x^2z^4 - y^2z^4 = 0$$

을 만족하는 양의 정수 x, y, z 는 존재하지 않음을 보여라.

2. 예각삼각형 ABC 의 변 BC 위에 점 $P (\neq B, C)$ 가 있다. 삼각형 ABC 의 수심 H 에서 선분 AP 에 내린 수선의 발을 D 라 하고, 삼각형 ABD 와 ACD 의 외접원을 각각 Γ_1, Γ_2 라 하자. 점 D 를 지나고 변 BC 에 평행한 직선이 Γ_1, Γ_2 와 만나는 점 중 D 가 아닌 점을 각각 X, Y 라 하고, AB, AC 와 만나는 점을 각각 E, F 라 하자. 두 직선 XB 와 YC 의 교점을 Z 라 할 때, $BP = CP$ 일 필요충분 조건은 $ZE = ZF$ 임을 보여라.

3. 남학생 a_1, a_2, \dots, a_n 과 여학생 b_1, b_2, \dots, b_n 이 있다. 남학생끼리는 악수를 하지 않았고, 여학생끼리도 악수를 하지 않았으며, 모든 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 에 대하여, a_i 와 b_i 는 악수를 하지 않았다. 이 학생 전체를 다음 조건을 만족하는 소그룹들로 나누고자 한다.

1. 소그룹 안의 남학생 수와 여학생 수는 같다.
2. 소그룹 안에서는 서로 악수를 한 학생이 없다.

서로 악수를 한 남학생, 여학생의 쌍 (a_i, b_j) 의 개수가 m 일 때, 소그룹의 개수를 2 또는 $\frac{2m}{n} + 1$ 이하가 되도록 만들 수 있음을 증명하여라.

* 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점 *