



제 25 회 최종시험 둘째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2012년 3월 25일 (오전); 제한시간 4시간 30분; 문항당 7점

4. 예각삼각형 ABC 에 대하여 A 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하자. D, E 는 각각 변 AB, AC 의 내부에 있는 점으로서, D 와 E 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 각각 F 와 G 라 할 때, 두 선분 DG 와 EF 의 교점이 선분 AH 위에 있다 하자. 점 E 에서 직선 DH 에 내린 수선의 발을 P 라 할 때, $\angle APE = \angle CPE$ 임을 보여라.
5. 주어진 양의 정수 n 에 대하여, $nx^2 + y^3 = z^4$ 을 만족하는 정수 x, y, z 중 어떤 두 수도 서로소인 해 (x, y, z) 가 무한히 많이 존재함을 보여라.
6. 3보다 큰 소수를 약수로 갖지 않는 양의 정수의 집합을 M 이라 하자. 집합 M 의 임의의 부분집합들 A_1, A_2, A_3, \dots 에 대해, 다음 조건을 만족하는 서로 다른 양의 정수 i 와 j 가 반드시 존재함을 증명하여라.
집합 A_i 의 각 원소 x 에 대해 집합 A_j 는 x 의 어떤 약수를 갖는다.