

제 23 회 한국수학올림피아드 - 2차시험

고등부

2009년 8월 23일 (오후)

5. 집합 $A = \{1, 2, \dots, 12\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 일대일대응함수 $f: A \rightarrow A$ 의 개수를 구하여라.
조건: 모든 $i \in A$ 에 대하여 $f(i) - i$ 는 3의 정수배가 아니다.
6. 삼각형 ABC 의 변 BC 위의 점 P 와 변 CA 위의 점 Q 에 대하여, 세 삼각형 ABP, APQ, CPQ 의 내심을 각각 I, J, K 라 할 때, 사각형 $PIJK$ 는 항상 볼록사각형임을 보여라. 단, P, Q 는 삼각형 ABC 의 꼭짓점이 아니다.
7. n 이 2 이상의 양의 정수일 때, $2^n - 1$ 이 $3^n - 1$ 의 약수가 될 수 없음을 보여라.
8. 양의 정수 n 에 대하여, 구간 $[0, n+1]$ 에서 함수

$$f_n(x) = \left(\sum_{i=1}^n |x-i| \right)^2 - \sum_{i=1}^n (x-i)^2$$

의 최솟값을 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{11} (-1)^{n+1} a_n$ 의 값을 구하여라.

제한 시간 2시간 30분

문항당 7점