제30회 최종시험 첫째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2017년 3월 25일 (오후); 제한시간 4시간 30분; 문항당 7점

1. 예각삼각형 ABC의 외심을 O라 하자. 삼각형 OAB의 외접원 O_1과 삼각형 OAC의 외접원 O_2가 변 BC와 각각 점 $D(\neq B)$와 $E(\neq C)$에서 만나고, 변 BC의 수직이등분선이 변 AC와 점 $F(\neq A)$에서 만난다고 하자. 삼각형 ADE의 외심이 직선 AC 위에 놓이는 것이 O_1과 O_2의 중심을 지나는 직선 위에 점 F가 있을 필요충분조건임을 보여라.

2. 양의 정수 n에 대하여 $n+1$개의 정수로 이루어진 순서쌍 $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$이 있다. 모든 $k = 0, 1, \ldots, n$에 대하여, $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$에서의 k의 개수를 b_k라 하고, $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$에서의 k의 개수를 c_k라고 하자. 이때 $a_0 = c_0$, $a_1 = c_1$, $\ldots$, $a_n = c_n$이 되는 순서쌍 $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$을 모두 구하여라.

3. 양의 정수 n에 대하여 $c_n = 2017^n$이라 하자. 함수 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$이 다음 두 조건

(i) 모든 양의 정수 m, n에 대하여 $f(m+n) \le 2017 \cdot f(m) \cdot f(n+325)$,

(ii) 모든 양의 정수 n에 대하여 $0 < f(c_{n+1}) < f(c_n)^{2017}$

을 모두 만족한다. 이때, 다음을 만족하는 수열 a_1, a_2, $\ldots$이 존재함을 보여라.

부등식 $a_k < n$을 만족하는 모든 양의 정수 n, k에 대하여 $f(n)^{c_k} < f(c_k)^n$이다.

단, $\mathbb{N}$은 양의 정수 전체의 집합이며, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.

kmo 한국수학올림피아드

제30회 최종시험 둘째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2017년 3월 26일 (오전) ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

4. 정수 $n \geq 2$에 대하여 $a_1, a_2, \ldots, a_n$을 다음과 같이 정의하자.

$$a_1 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3},$$
$$a_k = \frac{(n+k-1)(n-k+1)}{2(k-1)(2k+1)} a_{k-1} \quad (k = 2, 3, \ldots, n)$$

(a) a_1, a_2, …, a_n은 모두 정수임을 보여라.

(b) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 중 $2n-1$의 배수가 아닌 것이 하나 뿐이고, $2n+1$의 배수가 아닌 것도 하나 뿐인 것이 $2n-1$과 $2n+1$이 모두 소수일 필요충분조건임을 보여라.

5. 원에 내접하는 사각형 $ABCD$의 두 변 AB와 CD의 중점을 각각 L과 M이라 하고, 두 대각선 AC와 BD의 교점을 E라 하자. 반직선 AB와 DC가 점 F에서 만나며, 선분 LM이 선분 DE와 점 P에서 만난다고 하자. 점 P에서 선분 EM에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 삼각형 FLM의 수심이 E일 때, 다음 등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{EP^2}{EQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{BD^2}{DF} - \frac{BC^2}{CF}\right)$$

6. 총 2017개의 상자가 원형으로 놓여 있는 방이 있다. 어떤 상자의 집합이 어울린다는 말은 그 집합에 속한 상자의 수가 2개 이상이며 그 집합에 속한 각 상자에서 시계 방향으로 이동할 때 그 집합에 속한 다음 상자를 처음으로 만날 때까지 넘어야 하는 상자의 개수가 0 또는 홀수임을 뜻한다. 30명의 학생이 차례로 그 방에 입장하여 자기가 고른 상자들의 집합이 어울리도록 여러 상자를 고른 후, 고른 상자마다 자기 이름이 적힌 쪽지를 하나씩 넣는다. 들어있는 쪽지의 개수가 30개인 상자 전체의 집합이 어울리지 않는 경우 다음 두 성질을 모두 만족하는 학생 A, B와 상자 a, b가 존재함을 보여라.

(i) A는 a를 고르고 b를 고르지 않았으며 B는 b를 고르고 a를 고르지 않았다.

(ii) a에서 시계 방향으로 b까지 이동하는 사이에 넘게 되는 a, b가 아닌 상자의 개수는 홀수가 아니며, 이러한 각 상자는 A와 B 중 누구도 고른 적이 없다.