



제 32 회 중등부 2차시험  
한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2018년 11월 11일 (오전); 제한시간 3시간; 문항당 7점

1. 이차함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족할 때,  $\frac{f(8) - f(2)}{f(2) - f(1)}$ 의 값을 구하여라.

서로 다른 두 실수  $a, b$ 에 대하여  $f(a) = f(b)$ 이면  $f(a^2 - 6b - 1) = f(b^2 + 8)$ 이다.

2. 약수의 개수가 4 이상인 양의 정수  $N$ 에 대하여,  $N$ 의 약수 중 가장 작은 네 개를 각각 제곱하여 더한 값이  $N$ 과 같아지는  $N$ 을 모두 구하여라.

3. 이등변삼각형이 아닌 삼각형  $ABC$ 의 변  $BC$ 의 중점을  $M$ 이라 하고, 변  $BC$ 의 수직이등분선이 삼각형  $ABC$ 의 외접원과 만나는 점을  $P$ 라 하자. 이때  $A$ 와  $P$ 는 변  $BC$ 에 대하여 같은 쪽에 있다. 삼각형  $ABM$ 과  $AMC$ 의 내심을 각각  $I, J$  라 하고,  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle ABC = \beta$ ,  $\angle BCA = \gamma$ 라 할 때,  $\angle IPJ$ 를 구하여라.

4. 양의 정수  $n$ 에 대하여,  $x + 2y + 2z + 3w = n$ 을 만족하는 음이 아닌 정수의 순서쌍  $(x, y, z, w)$ 의 개수를  $p(n)$ 이라 하고, 다음 세 조건을 모두 만족하는 음이 아닌 정수의 순서쌍  $(a, b, c, d)$ 의 개수를  $q(n)$ 이라 하자.

(i)  $a + b + c + d = n$

(ii)  $a \geq b \geq c \geq d$

(iii)  $a \geq c \geq d$

모든  $n$ 에 대하여  $p(n) = q(n)$ 임을 보여라.