

2012 년 8 월 19 일 (오 후); 제한 시간 2 시간 30 분; 문항 당 7 점

5. 3보다 큰 소수 p 가 다음 조건을 만족한다.

$2^x - 1$ 이 p 의 배수가 되는 양의 정수 x 중 가장 작은 것이 $p-1$ 이다.

$p = 2k + 3$ 이라 할 때 수열 $\{a_n\}$ 을 식

$$a_i = a_{k+i} = 2^i \quad (1 \leq i \leq k), \quad a_{j+2k} = a_j a_{j+k} \quad (j \geq 1)$$

에 따라 귀납적으로 정의하자. 수열 $\{a_n\}$ 에는 p 로 나눈 나머지가 모두 다른 $2k$ 개의 연속한 항이 존재함을 보여라.

6. 삼각형 ABC 의 내접원 O 가 변 BC, CA 와 각각 점 D, E 에서 접한다. 점 B 를 지나고 직선 DE 와 평행한 직선이 원 O 와 두 점에서 만난다고 하자. 이 두 점 중 B 와 가까운 점을 F , 다른 점을 G , 직선 CG 와 원 O 의 교점을 H ($\neq G$)라 하자. 점 G 를 지나고 직선 EH 와 평행한 직선과 직선 AC 의 교점을 I 라 할 때 직선 IF 와 원 O 가 서로 다른 두 점 J, F 에서 만난다고 하자. 직선 CJ 와 직선 EG 의 교점을 K , 점 K 를 지나고 직선 JD 와 평행한 직선을 ℓ 이라 할 때, 세 직선 ℓ, IF, ED 는 한 점에서 만남을 보여라.

7. $\{a_1, a_2, \dots, a_{10}\} = \{1, 2, \dots, 10\}$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} (na_n^2 - n^2 a_n)$ 의 최댓값을 구하여라.

8. 4로 나눈 나머지가 3인 소수 p 에 대하여

$$T = \{(i, j) \mid i, j \in \{0, 1, \dots, p-1\}\} - \{(0, 0)\}$$

이라 하자. T 의 임의의 부분집합 S ($\neq \emptyset$)에 대하여, S 의 부분집합 중 다음 조건을 모두 만족하는 집합 A 가 존재함을 보여라.

(1) $(x_i, y_i) \in A$ ($1 \leq i \leq 3$)이면 $x_1 + x_2 - y_3$ 과 $y_1 + y_2 + x_3$ 중 적어도 하나는 p 의 배수가 아니다.

(2) $8n(A) > n(S)$ (단, $n(X)$ 는 집합 X 의 원소의 개수이다.)