2018학년도 대학수학능력시험 대비

2017학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 '가'형 정답

1	③	2	⑤	3	②	4	④	5	④
6	⑤	7	①	8	②	9	②	10	⑤
11	①	12	③	13	②	14	①	15	②
16	④	17	①	18	③	19	⑤	20	③
21	④	22	3	23	20	24	60	25	27
26	6	27	8	28	24	29	528	30	90

해 설

1. [출제의도] $\pi+\theta$ 꼴의 삼각함수의 값을 계산한다.

$\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

2. [출제의도] 조합의 수를 계산한다.

${}_6C_3=\frac{6!}{3!3!}=\frac{6\times5\times4}{3!}=20$

3. [출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=2xe^{x^2-1}$ 이므로 $f'(1)=2$

4. [출제의도] 정적분의 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 계산한다.

$\ln x=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$

$x=1$ 이면 $t=0$ 이고, $x=e^2$ 이면 $t=2$

따라서 $\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^3}{x}dx=\int_0^2 t^3dt=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^2=4$

5. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이해하고 역함수를 이용하여 지수함수의 밑을 구한다.

곡선 $y=a^x$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 곡선은 $y=\log_a x$ 이고 이 곡선이 점 $(2, 3)$ 을 지나므로

$x=2$, $y=3$ 을 대입하면 $3=\log_a 2$

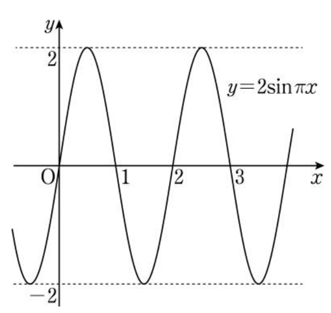
따라서 $a=\sqrt[3]{2}$

[다른 풀이]

직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 곡선은 $y=a^x$ 의 역함수의 그래프이므로 지수함수 $y=a^x$ 에 $x=3$, $y=2$ 를 대입하면 등식이 성립한다.

따라서 $2=a^3$ 에서 $a=\sqrt[3]{2}$

6. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하고 미지수의 값을 구한다.



함수 $y=a\sin\frac{\pi}{2b}x$ 의 그래프는 $y=\sin\frac{\pi}{2b}x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 a 배한 것이고 $a>0$ 이므로 최댓값은 a 이고 최솟값은 $-a$ 이다.

그런데 함수 $y=a\sin\frac{\pi}{2b}x$ 의 최댓값이 2이므로 $a=2$

또한 $a\sin\frac{\pi}{2b}x=a\sin\left(\frac{\pi}{2b}x+2\pi\right)=a\sin\frac{\pi}{2b}(x+4b)$ 이므로

함수 $y=a\sin\frac{\pi}{2b}x$ 의 주기가 $4b$ 이다.

그러므로 $4b=2$, $b=\frac{1}{2}$

따라서 $a+b=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

7. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이해하여 두 로그함수의 그래프가 만나는 점을 구한다.

두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(2^n-x)$ 의 만나는 점의 x 좌표는 $\log_2 x=\log_2(2^n-x)$ 에서 $x=2^n-x$

즉, $x=2^{n-1}$ 이므로 $a_n=2^{n-1}$

따라서 $\sum_{n=1}^{5}a_n=\sum_{n=1}^{5}2^{n-1}$

$=1+2+4+8+16=31$

8. [출제의도] 변곡점을 이해하여 접선의 기울기를 구한다.

$y=(\ln x)^2-x+1$ 에서

$y'=\frac{2\ln x}{x}-1$

$y''=\frac{2-2\ln x}{x^2}$

$2-2\ln x=0$ 에서 $x=e$ 이고

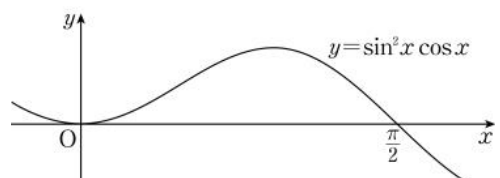
$x=e$ 의 좌우에서 y'' 의 부호가 바뀌므로

곡선 $y=(\ln x)^2-x+1$ 은 $x=e$ 에서 변곡점 $(e, 2-e)$ 를 갖는다.

따라서 변곡점에서의 접선의 기울기는

$\frac{2\ln e}{e}-1=\frac{2}{e}-1$

9. [출제의도] 정적분의 치환적분법을 이해하여 곡선과 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.



$0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin^2 x\cos x=0$ 의 해를 구하면

$x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 일 때 $\sin^2 x\cos x\ge0$ 이므로 구하는 넓이는 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin^2 x\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\,dx$

$\sin x=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$\cos x=\frac{dt}{dx}$

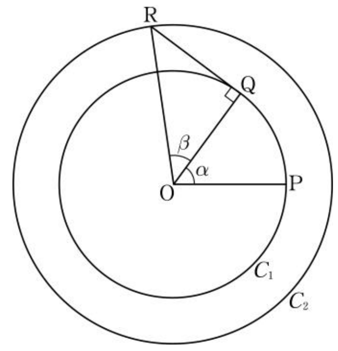
$x=0$ 이면 $t=0$ 이고, $x=\frac{\pi}{2}$ 이면 $t=1$

따라서 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\,dx=\int_0^1 t^2dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}$

10. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이해하고 도형의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구한다.



$\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 이고

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$

삼각형 ROQ에 대하여

$\overline{OR}=\sqrt{2}$, $\overline{OQ}=1$, $\angle OQR=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\beta=\frac{\pi}{4}$

그러므로 $\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{10}$

11. [출제의도] 로그함수의 그래프의 성질을 이해하여 선분의 길이를 구한다.

$y=\log_a x$, $y=\log_b x$ 와 직선 $y=1$ 이 만나는 두 점의 x 좌표를 각각 구하면

$\log_a x=1$ 에서 $x=a$, $\log_b x=1$ 에서 $x=b$

두 점 A_1, B_1 의 좌표는 각각 $(a, 1)$, $(b, 1)$

$y=\log_a x$, $y=\log_b x$ 와 직선 $y=2$ 가 만나는 두 점의 x 좌표를 각각 구하면

$\log_a x=2$ 에서 $x=a^2$, $\log_b x=2$ 에서 $x=b^2$

두 점 A_2, B_2 의 좌표는 각각 $(a^2, 2)$, $(b^2, 2)$

$\overline{A_1B_1}=1=b-a$

선분 A_1B_1 의 중점의 좌표가 $(2, 1)$ 이므로

$\frac{a+b}{2}=2$, $a+b=4$

따라서 $\overline{A_2B_2}=b^2-a^2=(b-a)(b+a)=1\times4=4$

12. [출제의도] 조합의 성질을 이해하여 조건을 만족시키는 조합의 수를 구한다.

(i) $a=5$ 일 때

$c<b<5$ 이므로 1부터 4까지의 자연수 중 2개를 뽑아 큰 수를 b, 작은 수를 c 라 하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

(ii) $a=6$ 일 때,

$c<b<6$ 이므로 1부터 5까지의 자연수 중 2개를 뽑아 큰 수를 b, 작은 수를 c 라 하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수의 개수는

$6+10=16$

13. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 로그함수의 극한에 관한 문제를 해결한다.

$A(t, \ln t)$, $B(t, -\ln t)$ 이므로 $\overline{AB}=2\ln t$

선분 PQ의 길이가 $f(t)$ 이고 삼각형 AQB의 넓이가 1이므로 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PQ}=1$ 에서 $\frac{1}{2}\times2\ln t\times f(t)=1$

즉, $f(t)=\frac{1}{\ln t}$

$t-1=s$ 로 놓으면 $t=s+1$ 이고

$t\to1+$ 일 때 $s\to0+$

$\lim_{t\to1+}\{(t-1)f(t)\}=\lim_{t\to1+}\frac{t-1}{\ln t}$

$=\lim_{s\to0+}\frac{s}{\ln(s+1)}$

$=1$

14. **[출제의도] 극댓값과 극솟값의 정의를 이해하여 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구한다.**

$a=-1$일 때 구간 $[0, 2)$에서 $f(x)=x+1$이므로 $x=0$에서 극댓값을 갖지 않는다.

이것은 모순이므로 $a \neq -1$

구간 $[0, 2)$에서 $f(x)$가 극솟값을 갖도록 하는 a의 값의 범위를 구하면

$f(x)=\dfrac{(x-a)^2}{x+1}$ 에서 $f'(x)=\dfrac{(x-a)(x+2+a)}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=-a-2$

(i) $a<-a-2$일 때

$a<-a-2$에서 $a<-1$이고,

$x=-a-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=-a-2$에서 $f(x)$는 극솟값을 갖는다. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 구간 $(0, 2)$에서 극솟값을 갖는다.

즉 $0<-a-2<2$, $-4<a<-2$

a는 정수이므로 $a=-3$

(ii) $a>-a-2$일 때

$a>-a-2$에서 $a>-1$이고,

$x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=a$에서 $f(x)$는 극솟값을 갖는다. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 구간 $(0, 2)$에서 극솟값을 갖는다.

즉 $0<a<2$

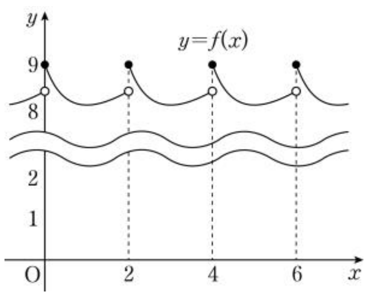
a는 정수이므로 $a=1$

(i), (ii)에 의해서 조건을 만족하는 정수 a의 값은 -3 또는 1

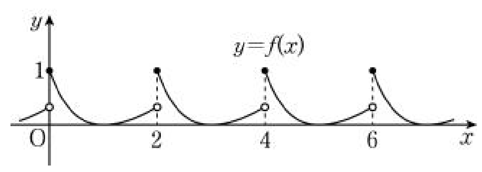
따라서 모든 정수 a의 값의 곱은 $(-3)\times 1=-3$

[보충 설명]

(i) $a=-3$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보면 다음과 같이 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.



(ii) $a=1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보면 다음과 같이 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.



15. **[출제의도] 순열의 성질과 원순열이 활용된 실생활 문제를 해결한다.**

여학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!$

각 경우에 대하여 여학생과 여학생 사이 세 곳에 앉는 남학생의 수는 모두 달라야 하므로 각각 1명, 2명, 3명이고 이를 정하는 경우의 수는 $3!$

남학생을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $6!$

그러므로 구하는 경우의 수는

$2!\times 3!\times 6!=12\times 6!$

따라서 $n=12$

[다른 풀이]

여학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!$

각 경우에 대하여 여학생과 여학생 사이 세 곳에 앉는 남학생의 수는 모두 다르므로 남학생 6명이 3명, 2명, 1명의 세 조로 나뉘어 여학생과 여학생 사이에 앉아야 한다.

이와 같이 남학생을 세 조로 나누는 경우의 수는

${}_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1=\dfrac{6!}{3!2!}$

각 경우에 대하여 세 조를 여학생과 여학생 사이의 세 곳에 배열하는 경우의 수는 $3!$

각 경우에 대하여 남학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!\times 2!\times 1!$

이므로 구하는 경우의 수는

$2!\times\dfrac{6!}{3!2!}\times 3!\times 3!\times 2!\times 1!=12\times 6!$

따라서 $n=12$

16. **[출제의도] 부분적분법을 이용하여 일반적인 함수의 정적분의 값을 추론한다.**

$\displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt=F(x)$ 이므로 $F'(x)=f(x)$, $F(-1)=0$

$\displaystyle\int_0^1 xf'(x)\,dx=\int_0^{-1} xf(x)\,dx$ 이므로

$\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx-\int_0^{-1} xf(x)\,dx=0$

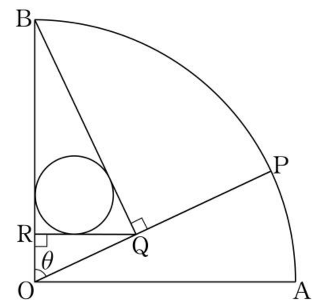
$\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx+\int_{-1}^{0} xf(x)\,dx=0$

$\displaystyle\int_{-1}^1 xf(x)\,dx=0$

정적분의 부분적분법에 의하여,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 F(x)\,dx&=\Big[xF(x)\Big]_{-1}^{1}-\int_{-1}^1 xf(x)\,dx\\&=F(1)+F(-1)-0\\&=F(1)+0\\&=\int_{-1}^1 f(x)\,dx=12\end{aligned}$$

17. **[출제의도] 도형의 성질과 삼각함수의 극한을 이용하여 문제를 해결한다.**



$\angle\mathrm{BOQ}=\theta$, $\overline{\mathrm{OB}}=1$이고 $\angle\mathrm{OQB}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{BQ}}=\sin\theta$

또, $\angle\mathrm{RQB}=\dfrac{\pi}{2}-\angle\mathrm{QBR}=\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\theta$,

$\overline{\mathrm{BQ}}=\sin\theta$이고 $\angle\mathrm{BRQ}=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{BR}}=\sin^2\theta$, $\overline{\mathrm{RQ}}=\sin\theta\cos\theta$

삼각형 BRQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BR}}\times\overline{\mathrm{RQ}}=\dfrac{1}{2}\times\sin^2\theta\times\sin\theta\cos\theta$ …… ㉠

삼각형 BRQ에 내접하는 원의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하면

$\dfrac{1}{2}\times r(\theta)\times(\sin\theta+\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta)$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해서

$r(\theta)=\dfrac{\sin^2\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\theta^2(1+\sin\theta+\cos\theta)}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}\\&=1\times\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

18. **[출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 그래프와 직선이 만나는 점의 개수를 추론한다.**

$f(x)=x^2e^{-x+2}$에서

$f'(x)=(-x^2+2x)e^{-x+2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$y=(f\circ f)(x)$에서 $\dfrac{dy}{dx}=f'(f(x))f'(x)$

$\dfrac{dy}{dx}=0$인 x의 값을 구하면

(i) $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

(ii) $f'(f(x))=0$에서

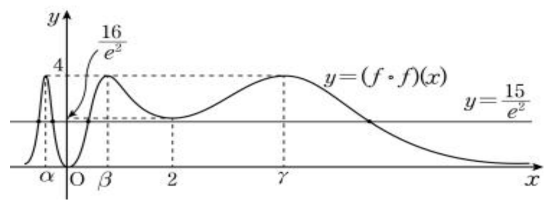
$f(x)=0$일 때, $x=0$

$f(x)=2$일 때,

$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$ $(\alpha<\beta<\gamma)$로 놓으면 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 증가와 감소를 나타낸 표는 다음과 같다.

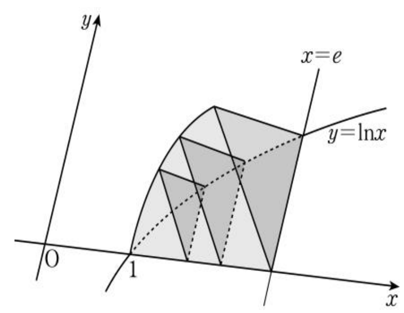
x	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$	β	$\cdots$	2	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f'(f(x))$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$\dfrac{dy}{dx}$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↗	4	↘	0	↗	4	↘	$\dfrac{16}{e^2}$	↗	4	↘

위의 표를 이용하여 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프를 나타내면 다음과 같다.



따라서 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{15}{e^2}$가 만나는 점의 개수는 4이다.

19. **[출제의도] 정적분을 활용하여 입체도형의 부피 구하는 문제를 해결한다.**



$y=e^x$의 역함수는 $y=\ln x$이므로

점 $(0, 1)$은 점 $(1, 0)$으로, 점 $(0, e)$는 점 $(e, 0)$으로 이동한다.

그런데 $x=t\,(1\le t\le e)$일 때 정삼각형의 한 변의 길이는 $\ln t$이므로 정삼각형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\ln t)^2$

따라서 구하는 부피는

$$\begin{aligned}\int_1^e S(t)\,dt&=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^e(\ln t)^2\,dt\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\Big[t(\ln t)^2\Big]_1^e-\int_1^e t\left(2\times\frac{1}{t}\times\ln t\right)dt\right\}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\Big[t(\ln t)^2\Big]_1^e-2\int_1^e\ln t\,dt\right\}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\Big[t(\ln t)^2\Big]_1^e-2\Big[t\ln t-t\Big]_1^e\right\}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}(e-2)\end{aligned}$$

[다른 풀이]

$\displaystyle\int\ln x\,dx=x\ln x-x+C$(단, C는 적분상수)이므로

$\displaystyle\int_1^e S(t)\,dt=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^e(\ln t)^2\,dt$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\Big[\ln t\,(t\ln t - t)\Big]_1^e - \int_1^e (\ln t - 1)\,dt\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\Big[\ln t\,(t\ln t - t)\Big]_1^e - \Big[t\ln t - 2t\Big]_1^e\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(e-2)$$

[다른 풀이]

함수 $f(x)=e^x$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 하고, 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_1^e \frac{\sqrt{3}}{4}\{f^{-1}(y)\}^2\,dy$$

이다. $y=f(x)$ 에서 $f^{-1}(y)=x$ 이고 $y=f(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $\frac{dy}{dx}=f'(x)=e^x$ 이므로

$$V=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1 x^2 f'(x)\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1 x^2 e^x\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\Big[x^2e^x\Big]_0^1 - 2\int_0^1 xe^x\,dx\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\Big[x^2e^x\Big]_0^1 - 2\left(\Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx\right)\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\Big[x^2e^x\Big]_0^1 - 2\left(\Big[xe^x\Big]_0^1 - \Big[e^x\Big]_0^1\right)\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(e-2)$$

20. [출제의도] 중복조합에 관한 증명 문제를 해결한다.

(i) $k=0$ 일 때

둘째 줄에 있는 n 개의 타일 중에서 검은색으로 칠할 타일 3개를 고르는 경우의 수는 다음과 같다.

검은색으로 칠할 타일 사이에는 검은색으로 칠하지 않을 타일이 각각 1개 이상씩 있어야 한다.

즉, 검은색으로 칠하지 않을 타일이 있을 수 있는 곳은 많아야 4곳이므로 타일의 개수를 결정하는 경우의 수는 $\boxed{{}_4\mathrm{H}_{n-5}}$ 이다.

(ii) $k=1$ 일 때

둘째 줄에 있는 n 개의 타일 중에서 검은색으로 칠할 타일 2개를 고르는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{n-3}$ 이다.

첫째 줄에서 검은색으로 칠할 타일 1개를 고르는 경우의 수는 둘째 줄에서 검은색으로 칠할 타일의 바로 위쪽에 있는 타일을 제외한 나머지 $n-2$ 개의 타일 중 1개의 타일을 고르는 경우의 수와 같으므로 $\boxed{{}_{n-2}\mathrm{C}_1}$ 이다. 그러므로 검은색으로 칠할 타일 3개를 고르는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_{n-3}\times\boxed{{}_{n-2}\mathrm{C}_1}$ 이다.

(가)에 알맞은 식은 ${}_4\mathrm{H}_{n-5}$ 이므로 $f(n)={}_4\mathrm{H}_{n-5}$

(나)에 알맞은 식은 ${}_{n-2}\mathrm{C}_1$ 이므로 $g(n)={}_{n-2}\mathrm{C}_1$

따라서 $f(10)+g(8)={}_4\mathrm{H}_5\times{}_6\mathrm{C}_1=56+6=62$

21. [출제의도] 정적분의 적분법을 이용하여 정적분의 값을 추론한다.

ㄱ. (가)의 $F(x)=f(x)-x$ 를 (나)의 $F(x)$ 에 대입하면

$$\int_0^1 F(x)\,dx=\int_0^1\{f(x)-x\}\,dx$$

$$=\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 x\,dx$$

$$=\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{2}$$

$$=F(1)-\frac{1}{2}$$

이므로 $F(1)=e-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=e-2$ (거짓)

ㄴ. (가)의 $F(x)=f(x)-x$ 를 $\int_0^1 xF(x)dx$ 의 $F(x)$ 에 대입하면

$$\int_0^1 xF(x)\,dx=\int_0^1 x\{f(x)-x\}\,dx$$

$$=\int_0^1\{xf(x)-x^2\}\,dx$$

$$=\int_0^1 xf(x)\,dx-\int_0^1 x^2\,dx$$

$$=\Big[xF(x)\Big]_0^1-\int_0^1 F(x)\,dx-\frac{1}{3}$$

$$=F(1)-\left(e-\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{3}$$

$$=e-2-e+\frac{5}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\ (\text{참})$$

ㄷ. $F(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=0$ 이고, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $F'(x)=f(x)$

(가)에 의해서

$$\int_0^1\{F(x)\}^2\,dx=\int_0^1 F(x)\{f(x)-x\}\,dx$$

$$=\int_0^1 F(x)f(x)\,dx-\int_0^1 xF(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 F(x)F'(x)\,dx-\int_0^1 xF(x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\{F(x)\}^2\right]_0^1-\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{2}\{F(1)\}^2-\frac{1}{2}\{F(0)\}^2-\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{2}(e-2)^2-\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{11}{6}\ (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

조건 (가)의 $F(x)=f(x)-x$ 의 양변을 x 에 대하여 두 번 미분하면 $f'(x)=f''(x)$

$\frac{f''(x)}{f'(x)}=1$ 이므로 양변을 x 에 대하여 적분하면

$\ln|f'(x)|=x+C_1$ (단, C_1 는 적분상수)

$f'(x)=C_2e^x$ (단, C_2 는 상수)이므로 양변을 x 에 대하여 적분하면 $f(x)=C_2e^x+C_3$ (단, C_3 은 적분상수)

$0=F(0)=f(0)-0,\ f(0)=0$

$f(x)=f'(x)-1$ 이므로 $f'(0)=1$

$f'(x)=C_2e^x,\ f(x)=C_2e^x+C_3$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$f'(0)=C_2=1,\ f(0)=C_2+C_3=0,\ C_3=-1$

$f(x)=e^x-1$

이를 조건 (가)에 대입하면

$F(x)=e^x-x-1$

$$\int_0^1 F(x)\,dx=\int_0^1(e^x-x-1)\,dx$$

$$=\left[e^x-\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^1$$

$$=(e-1)-\frac{1}{2}-1$$

$$=e-\frac{5}{2}$$

이므로 함수 $F(x)=e^x-x-1$ 은 조건 (나)를 만족시킨다.

ㄱ. $F(1)=e^1-1-1=e-2$ (거짓)

ㄴ. $\int_0^1 xF(x)\,dx=\int_0^1 x(e^x-x-1)\,dx$

$$=\int_0^1 xe^x\,dx-\int_0^1 x^2\,dx-\int_0^1 x\,dx$$

$$=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\Big[xe^x\Big]_0^1-\Big[e^x\Big]_0^1-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=e-(e-1)-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\ (\text{참})$$

ㄷ. $\int_0^1\{F(x)\}^2\,dx=\int_0^1(e^x-x-1)^2\,dx$

$$=\int_0^1\{e^{2x}+x^2+1-2xe^x+2x-2e^x\}\,dx$$

$$=\int_0^1 e^{2x}\,dx+\int_0^1 x^2\,dx+\int_0^1 1\,dx$$

$$-2\int_0^1 xe^x\,dx+\int_0^1 2x\,dx-2\int_0^1 e^x\,dx$$

$$=\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\Big[x\Big]_0^1$$

$$-2\Big[xe^x\Big]_0^1+2\Big[e^x\Big]_0^1+\Big[x^2\Big]_0^1-2\Big[e^x\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}(e^2-1)+\frac{1}{3}+1-2\times1+1-2(e-1)$$

$$=\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{11}{6}\ (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

22. [출제의도] 지수를 포함한 부등식의 근을 구하여 그 합을 계산한다.

$3^{x-4}\le\frac{1}{9}$ 이므로 $3^{x-4}\le3^{-2}$

밑이 1보다 크므로

$x-4\le-2,\ x\le2$

그러므로 부등식 $3^{x-4}\le\frac{1}{9}$ 을 만족시키는 자연수 x 는 1과 2뿐이다.

따라서 $1+2=3$

23. [출제의도] 삼각함수의 극한값을 이해하여 주어진 식의 극한값을 구한다.

$$f(\theta)=1-\frac{1}{1+2\sin\theta}$$

$$=\frac{1+2\sin\theta-1}{1+2\sin\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}$$

이므로

$$\lim_{\theta\to0}\frac{10f(\theta)}{\theta}=10\lim_{\theta\to0}\frac{\frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}}{\theta}$$

$$=10\lim_{\theta\to0}\frac{2\sin\theta}{\theta(1+2\sin\theta)}$$

$$=10\times2=20$$

24. [출제의도] 역함수의 미분법을 이해하여 주어진 함수의 미분계수를 구한다.

$g(e)=a$ 라 하면, $f(a)=e$

$f(a)=ae^a+e=e$

그러므로 $a=0$

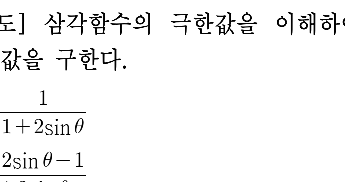
$f'(x)=(x+1)e^x$

$f'(0)=(0+1)e^0=1$

$$g'(e)=\frac{1}{f'(g(e))}=\frac{1}{f'(0)}=1$$

따라서 $60g'(e)=60\times1=60$

25. [출제의도] 호도법을 이해하여 주어진 도형에서 선분의 길이를 구한다.



반원의 중심을 O 라 하면 반원의 지름의 길이가 12이므로 $\overline{\mathrm{OB}}=6$ 이다.

$\angle\mathrm{COB}=\theta$ 라 하면 호 BC 의 길이가 4π 이므로

$6\times\theta=4\pi,\ \theta=\frac{2}{3}\pi$

점 C 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\angle\mathrm{COH}=\pi-\theta=\frac{\pi}{3}$

삼각형 CHO 는 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{OC}}=6$ 이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{OC}}\times\sin\frac{\pi}{3}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

따라서 $\overline{\mathrm{CH}}^2=(3\sqrt{3})^2=27$

26. [출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 이해하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.

네 자연수의 합이 6인 경우는 $1+1+1+3$ 또는 $1+1+2+2$의 두 가지이다.

(i) $1+1+1+3$인 경우

$1\times1\times1\times3=3$이므로 곱이 4의 배수가 아니다.

(ii) $1+1+2+2$인 경우

$1\times1\times2\times2=4$이므로 곱이 4의 배수이다.

(i), (ii)에 의해서 조건을 만족시키는 네 자연수는 1, 1, 2, 2이다.

따라서 가능한 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$

27. [출제의도] 지수함수 그래프의 성질을 활용하여 두 점 사이의 거리를 구하는 문제를 해결한다.

곡선 $y=2^x$을 y축에 대하여 대칭이동한 곡선은 $y=2^{-x}$이고 곡선 $y=2^{-x}$은 직선 $y=x+1$과 점 $(0, 1)$에서 만난다.

곡선 $y=2^{-x}$을 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동한 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=2^{-x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}$과 일치한다. 직선 $y=x+1$은 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동하여도 직선 $y=x+1$이 된다.

그러므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+1$이 만나는 점 A는 $y=2^{-x}$과 직선 $y=x+1$이 만나는 점인 $(0, 1)$이 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동한 점 $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$이다.

따라서 $k=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 $\frac{1}{k^2}=8$

[다른 풀이]

곡선 $y=2^x$을 y축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동한 곡선은 $y=f(x)$이므로 $f(x)=2^{-x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}$이다.

그러므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+1$이 만나는 점의 x좌표는

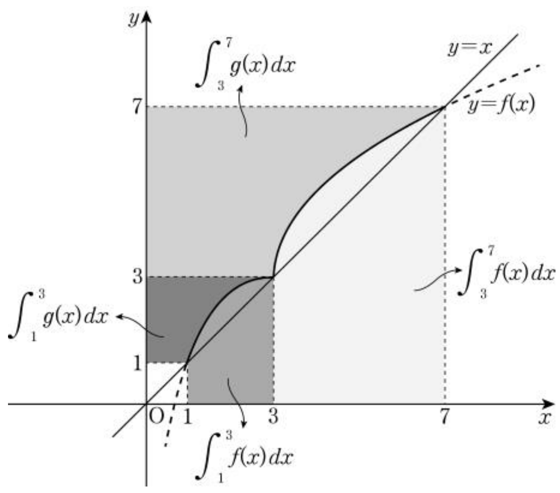
$x+1=2^{-x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}$

$2^{-x+\frac{1}{4}}=x+\frac{3}{4}$에서 $x=\frac{1}{4}$

즉, 점 A의 좌표는 $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$이다.

따라서 $k=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 $\frac{1}{k^2}=8$

28. [출제의도] 이계도함수를 활용하여 주어진 정적분 문제를 해결한다.



함수 $f(x)$가 $f(1)<f(3)$이고 일대일대응이므로 함수 $f(x)$는 구간 $[1, 3]$에서 증가한다.

그러므로 $\int_1^3 f(x)\,dx=3\times3-1\times1-\int_1^3 g(x)\,dx$

조건 (다)에 의해서 $\int_1^3 g(x)\,dx=3$이므로

$\int_1^3 f(x)\,dx=8-3=5$

$\int_3^7 f(x)\,dx=\int_1^7 f(x)\,dx-\int_1^3 f(x)\,dx$
$=27-5=22$

조건 (나)에 의해서 함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(3, 7)$에서 위로 볼록하다. 조건 (가)에 의해서 $f(3)=3$, $f(7)=7$이므로 구간 $[3, 7]$에서 $f(x)-x\geq0$이다.

$12\int_3^7|f(x)-x|\,dx=12\int_3^7\{f(x)-x\}\,dx$
$=12\left\{\int_3^7 f(x)\,dx-\int_3^7 x\,dx\right\}$
$=12\times(22-20)=24$

29. [출제의도] 경우를 나누어 학생들에게 사물함을 배정하는 실생활 문제를 해결한다.

(i) 2층 또는 3층 중 한 층의 사물함만을 여학생에게 배정하는 경우

여	여	

2층의 두 사물함을 두 여학생에게 배정하는 경우의 수는 $2!$이고 나머지 사물함을 남학생 3명에게 배정하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_3$이다. 3층의 두 사물함을 두 여학생에게 배정하는 경우의 수는 $2!$이고 나머지 사물함을 남학생 3명에게 배정하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_3$이다.

이와 같이 배정하는 경우의 수는

$2\times2!\times{}_5\mathrm{P}_3=240$

(ii) 1층의 사물함만을 여학생에게 배정하는 경우

여	여	

1층의 사물함만을 여학생에게 배정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2$이고 1층의 사물함을 남학생에게 배정할 수는 없으므로 나머지 사물함을 남학생 3명에게 배정하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_3$이다.

이와 같이 배정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2\times{}_4\mathrm{P}_3=144$

(iii) 2층, 3층의 사물함을 각각 1개씩 여학생에게 배정하는 경우

여		
여		

2층, 3층의 사물함을 각각 1개씩 선택하여 여학생에게 배정하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times2!$이고 2층과 3층의 사물함을 남학생에게 배정할 수는 없으므로 1층의 사물함만을 남학생 3명에게 배정해야 하고 그 경우의 수는 $3!$이다.

이와 같이 배정하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times2!\times3!=48$

(iv) 1층의 사물함을 한 여학생에게 배정하고 2층 또는 3층의 사물함을 다른 여학생에게 배정하는 경우

여		
여		

1층의 가운데에 있는 사물함을 여학생에게 배정하면 3명의 남학생에게 사물함을 배정할 수 없다. 그러므로 1층의 사물함 중 가운데 사물함을 제외한 2개의 사물함 중 한 사물함을 여학생에게 배정한다. 1층의 사물함을 한 여학생에게 배정하고 2층 또는 3층의 사물함을 다른 여학생에게 배정하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1\times2!$이고 남학생에게 3개의 사물함을 배정하는 경우의 수는 $3!$이다.

이와 같이 배정하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1\times2!\times3!=96$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에 의해서 구하는 경우의 수는 $240+144+48+96=528$

30. [출제의도] 몫의 미분법을 이용하여 두 접선과 한 선분으로 이루어진 도형 문제를 해결한다.

$\mathrm{A}\left(\alpha, -\frac{2}{\alpha}\right)$, $\mathrm{B}\left(\beta, -\frac{2}{\beta}\right)$라 하자.

$y=-\frac{2}{x}$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x^2}$

점 A를 지나는 접선의 방정식은 $y=\frac{2}{\alpha^2}(x-\alpha)-\frac{2}{\alpha}$

즉, $y=\frac{2}{\alpha^2}x-\frac{4}{\alpha}$ …… ㉠

같은 방법으로 점 B를 지나는 접선의 방정식은

$y=\frac{2}{\beta^2}x-\frac{4}{\beta}$ …… ㉡

㉠, ㉡이 모두 $\mathrm{P}(a, 2a)$를 지나므로

$2a=\frac{2a}{\alpha^2}-\frac{4}{\alpha}$, $2a=\frac{2a}{\beta^2}-\frac{4}{\beta}$

즉, $a\alpha^2+2\alpha-a=0$, $a\beta^2+2\beta-a=0$이므로

α, β는 이차방정식 $ax^2+2x-a=0$의 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해서

$\alpha+\beta=-\frac{2}{a}$, $\alpha\beta=-1$

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$

$=(a-\alpha)^2+\left(2a+\frac{2}{\alpha}\right)^2+(a-\beta)^2+\left(2a+\frac{2}{\beta}\right)^2$

$=10a^2-2a(\alpha+\beta)+(\alpha^2+\beta^2)+8a\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+4\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)$

$=10a^2+4+\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$
$\quad+8a\times\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+4\times\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$

$=10a^2+\frac{20}{a^2}+30$,

$\overline{\mathrm{AB}}^2=(\alpha-\beta)^2+\left(-\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}\right)^2$

$= 5(\alpha-\beta)^2$
$= 5\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$
$= 5\left(\frac{4}{a^2}+4\right)$
$= \frac{20}{a^2}+20$

그러므로 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2=10a^2+\frac{40}{a^2}+50$

$a^2=t\,(t>0)$ 으로 놓고 $f(t)=10t+\frac{40}{t}+50$ 이라 하면

$f'(t)=10-\frac{40}{t^2}=\frac{10(t^2-4)}{t^2}$

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 나타낸 표는 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	90	↗

함수 $f(t)$ 는 $t=2$ 에서 최솟값 90 을 갖는다.
$a^2=2$ 이므로 $a=\sqrt{2}$ 에서 점 P 의 좌표는
$(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ 이다.
따라서 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2$ 의 최솟값은 90 이다.

[다른 풀이]

절대부등식을 이용하면

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2=10a^2+\frac{40}{a^2}+50$
$\geq 2\sqrt{10a^2\times\frac{40}{a^2}}+50$
$=2\times20+50$
$=90$

(단, 등호는 $10a^2=\frac{40}{a^2}$ 즉, $a=\sqrt{2}$ 일 때 성립한다.)