



제 25 회 최종시험 둘째날

## 한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2012년 3월 25일 (오전); 제한시간 4시간 30분; 문항당 7점

4. 예각삼각형  $ABC$ 에 대하여  $A$ 에서 변  $BC$ 에 내린 수선의 발을  $H$ 라 하자.  $D, E$ 는 각각 변  $AB, AC$ 의 내부에 있는 점으로서,  $D$ 와  $E$ 에서 변  $BC$ 에 내린 수선의 발을 각각  $F$ 와  $G$ 라 할 때, 두 선분  $DG$ 와  $EF$ 의 교점이 선분  $AH$  위에 있다 하자. 점  $E$ 에서 직선  $DH$ 에 내린 수선의 발을  $P$ 라 할 때,  $\angle APE = \angle CPE$ 임을 보여라.

5. 주어진 양의 정수  $n$ 에 대하여,  $nx^2 + y^3 = z^4$ 을 만족하는 정수  $x, y, z$  중 어떤 두 수도 서로소인 해  $(x, y, z)$ 가 무한히 많이 존재함을 보여라.

6. 3보다 큰 소수를 약수로 갖지 않는 양의 정수의 집합을  $M$ 이라 하자. 집합  $M$ 의 임의의 부분집합들  $A_1, A_2, A_3, \dots$ 에 대해, 다음 조건을 만족하는 서로 다른 양의 정수  $i$ 와  $j$ 가 반드시 존재함을 증명하여라.

집합  $A_i$ 의 각 원소  $x$ 에 대해 집합  $A_j$ 는  $x$ 의 어떤 약수를 갖는다.