



제 36 회 최종시험 둘째날

# 한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2023년 3월 26일 ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

4. 다음 조건을 만족하는 양의 정수  $n$ 을 모두 구하여라.

(조건)  $2^n - 1$ 은 7보다 큰 소인수를 갖지 않는다.

5. 주어진 양의 정수  $n$ 에 대하여  $n$ 개의 상자  $B_1, \dots, B_n$ 이 있다. 다음과 같은 시행을 반복하여 상자에 공을 추가할 수 있다.

(시행)  $1 \leq i \leq j \leq n$ 을 만족하는 양의 정수  $i, j$ 를 선택하여  $i \leq k \leq j$ 를 만족하는 각  $k$ 에 대하여 상자  $B_k$ 에 공을 하나씩 추가한다.

양의 정수  $x_1, \dots, x_n$ 에 대하여  $f(x_1, \dots, x_n)$ 을 상자  $B_i$ 에  $x_i$ 개의 공이 들어있는 상태에서 시작하여 ( $i = 1, \dots, n$ ), 각 상자에 들어있는 공의 개수를 모두 3의 배수로 만들기 위해 필요한 시행의 횟수의 최솟값이라 하자. 이때  $f(x_1, \dots, x_n)$ 이 가질 수 있는 값 중 가장 큰 값을 구하여라. (단,  $x_1, \dots, x_n$ 이 모두 3의 배수이면  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ )

6. 양의 정수  $n \geq 3$ 과 실수  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ 에 대하여 다음 부등식을 증명하여라.

$$\sum_{i=1}^n a_i(b_i - b_{i+3}) \leq \frac{3n}{8} \sum_{i=1}^n ((a_i - a_{i+1})^2 + (b_i - b_{i+1})^2)$$

(단,  $a_{n+1} = a_1$ 이고  $i = 1, 2, 3$ 에 대하여  $b_{n+i} = b_i$ )