

제 23회 한국수학올림피아드 최종시험

2010년 3월 28일 - 제 2 일

4. 변 AB 와 CD 가 평행한 사다리꼴 $ABCD$ 의 네 꼭지점 A, B, C, D 가 시계방향으로 놓여져 있다. 점 A 를 중심으로 하고 B 를 지나는 원을 Γ_1 , 점 C 를 중심으로 하고 D 를 지나는 원을 Γ_2 라 하자. 직선 BD 가 Γ_1 과 (B, D 와 다른 점) P 에서 만난다. 선분 PD 를 지름으로 하는 원을 Γ 라 하고, Γ 와 Γ_1 이 (P 와 다른 점) X 에서 만난다. Γ 와 Γ_2 의 (D 와 다른) 교점을 Y 라 하자. 삼각형 XPY 의 외접원과 Γ_2 의 교점을 Q 라 할 때, B, D, Q 는 일직선 위에 있음을 보여라.
5. 원형의 테이블에 $2n$ 명의 사람들이 일정한 간격으로 둘러 앉아 있다. 이 사람들에게 총 m 개의 과자가 주어지고, 이 사람들은 다음과 같은 규칙으로 과자를 옆으로 전달한다.

- 오직 이웃한 사람에게만 과자를 전달할 수 있다.
- 본인이 과자 하나를 먹어야만 이웃한 사람 중 한 명에게 과자 하나를 전달할 수 있다.

테이블에 앉아 있는 사람들 중 특정한 한 사람을 A 라 하자. 처음에 과자가 어떻게 분포하는지에 무관하게, A 가 과자 하나 이상을 갖도록 과자를 전달할 수 있는 전략이 존재할 최소의 m 값을 구하여라.

6. 임의로 주어진 소수 p 가 있다. 다음 조건들을 모두 만족하는 양의 정수열 (n_1, n_2, \dots, n_k) 가, $k = 1$ 일 때에는 존재하지 않지만, 2 이상의 어떤 양의 정수 k 하나에 대해서라도 존재하면, 소수 p 를 참한 소수라고 부르자:

조건 1. 모든 $i = 1, 2, \dots, k$ 에 대하여 $n_i \geq \frac{p+1}{2}$.

조건 2. 모든 $i = 1, 2, \dots, k$ 에 대하여 $p^{n_i} - 1$ 은 n_{i+1} 의 배수이고,

$\frac{p^{n_i}-1}{n_{i+1}}$ 과 n_{i+1} 은 서로소이다. 단, $n_{k+1} = n_1$ 이다.

2는 참한 소수가 아니지만 그 외의 모든 소수는 참한 소수임을 보여라.

* 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점 *