2018학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 나형 정답 및 풀이

01. ③	02. ①	03. ③	04. ⑤	05. ④
06. ④	07. ②	08. ②	09. ⑤	10. ⑤
11. ①	12. ②	13. ④	14. ③	15. ②
16. ④	17. ⑤	18. ③	19. ①	20. ③
21. ②	22. 210	23. 4	24. 3	25. 20
26. 8	27. 25	28. 28	29. 10	30. 200

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 지수를 포함한 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$3^{\frac{2}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=3$

정답 ③

2. **출제의도** : 집합의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$A\cap B=\{1,\ 2,\ 3\}\cap\{1,\ 3,\ 5\}$

$\quad=\{1,\ 3\}$

따라서 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은

$1+3=4$

정답 ①

3. **출제의도** : 역함수의 성질을 이용하여 함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(3)=4$이므로 $f^{-1}(4)=3$

정답 ③

4. **출제의도** : 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\times 3^{n+1}+1}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{4\times 3+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$$=12+0$$

$$=12$$

정답 ⑤

5. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x\to 0$일 때, $f(x)\to 0$이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=0$

또, $x\to 1+$일 때, $f(x)\to 2$이므로

$\lim_{x\to 1+}f(x)=2$

따라서

$\lim_{x\to 0}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)=0+2=2$

정답 ④

6. **출제의도** : 원순열의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

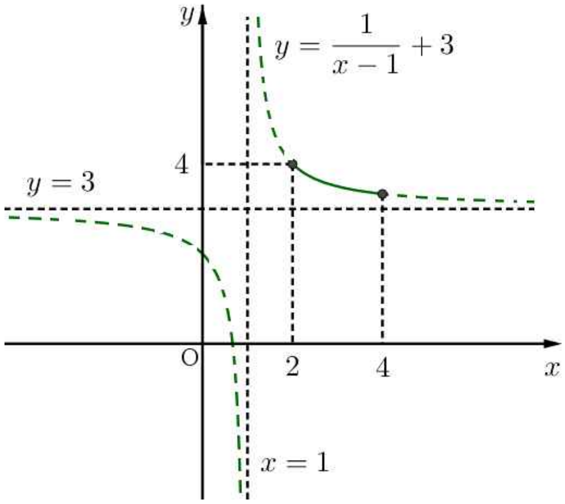
$(5-1)!=4!=24$

정답 ④

7. **출제의도** : 주어진 구간에서 유리함수의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=\dfrac{1}{x-1}+3$의 점근선의 방정식은 $x=1,\ y=3$이므로 닫힌 구간 $[2,\ 4]$에서 이 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



닫힌 구간 $[2,\ 4]$에서 함수 $y=\dfrac{1}{x-1}+3$은 $x=2$일 때 최댓값을 갖는다.
따라서 구하는 최댓값은

$$y=\frac{1}{2-1}+3=4$$

정답 ②

8. 출제의도 : 정적분으로 표현된 함수를 미분할 수 있는가?

정답풀이 :
$f'(x)=(x-2)(x-3)$이므로
$f'(4)=(4-2)(4-3)=2\times1=2$

정답 ②

9. 출제의도 : 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x\,|\,x\neq-2,\ x\neq4,\ x$는 실수$\}$,
$Q=\{x\,|\,-2\le x\le 4\}$
① $P\not\subset Q$이므로 명제 $p\rightarrow q$는 거짓이다.
② 두 조건 $\sim p$, $\sim q$의 진리집합은 각각 P^C, Q^C이다. 이때,
$P^C=\{x\,|\,x=-2$ 또는 $x=4\}$,
$Q^C=\{x\,|\,x<-2$ 또는 $x>4\}$
이므로 $P^C\not\subset Q^C$이다.
따라서 명제 $\sim p\rightarrow\ \sim q$는 거짓이다.
③ $Q=\{x\,|\,-2\le x\le 4\}$,
$P^C=\{x\,|\,x=-2$ 또는 $x=4\}$
이므로 $Q\not\subset P^C$ 이다.
따라서 명제 $q\rightarrow\ \sim p$는 거짓이다.
④ $Q=\{x\,|\,-2\le x\le 4\}$,
$P=\{x\,|\,x\neq-2,\ x\neq4,\ x$는 실수$\}$
이므로 $Q\not\subset P$ 이다.
따라서 명제 $q\rightarrow p$는 거짓이다.
⑤ $P^C=\{x\,|\,x=-2$ 또는 $x=4\}$,
$Q=\{x\,|\,-2\le x\le 4\}$
이므로 $P^C\subset Q$ 이다.
따라서 명제 $\sim p\rightarrow q$는 참이다.

정답 ⑤

10. 출제의도 : 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
임의로 선택한 한 개의 공이 검은색일 사건을 A, 공에 적혀 있는 수가 짝수일 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{9}{14},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{14}$$

이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{4}{14}}{\frac{9}{14}}=\frac{4}{9}$$

정답 ⑤

EBS

11. **출제의도** : $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_n + b_n = 10$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k) = \sum_{k=1}^{10}\{(a_k+b_k)+b_k\}$$
$$= \sum_{k=1}^{10}(10+b_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{10}10 + \sum_{k=1}^{10}b_k$$
$$= 100 + \sum_{k=1}^{10}b_k$$

이때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k) = 160$이므로

$100 + \sum_{k=1}^{10}b_k = 160$

따라서

$\sum_{k=1}^{10}b_k = 60$

정답 ①

12. **출제의도** : 함수의 극한의 성질을 이용하여 다항함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 의하여 다항함수 $f(x)$는

$f(x) = 2x^2 + ax + b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여 $x \to 0$일 때

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 하므로

$\lim_{x\to 0}(2x^2+ax+b) = b = 0$

이때,

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+ax}{x} = \lim_{x\to 0}(2x+a) = a = 3$$

이므로

$f(x) = 2x^2 + 3x$

따라서

$f(2) = 2\times 2^2 + 3\times 2 = 14$

정답 ②

13. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$ab = \log_3 5$, $b - a = \log_2 5$

이므로

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} = \frac{\log_2 5}{\log_3 5}$$
$$= \frac{\dfrac{\log 5}{\log 2}}{\dfrac{\log 5}{\log 3}}$$
$$= \frac{\log 3}{\log 2}$$
$$= \log_2 3$$

정답 ④

14. **출제의도** : 정규분포를 따르는 확률변수에서 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(m \le X \le m+12) - \mathrm{P}(X \le m-12)$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{m-m}{\sigma} \le Z \le \frac{m+12-m}{\sigma}\right) - \mathrm{P}\left(Z \le \frac{m-12-m}{\sigma}\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}\right) - \mathrm{P}\left(Z \le \frac{-12}{\sigma}\right)$$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{12}{\sigma}\right)-\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{12}{\sigma}\right)$

$=0.3664$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{12}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{12}{\sigma}\right)=0.5$$\cdots\cdots$㉡

㉠,㉡에서

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{12}{\sigma}\right)=0.4332$

이므로

$\frac{12}{\sigma}=1.5$

따라서

$\sigma=\frac{12}{1.5}=8$

정답 ③

15. **출제의도** : 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

A, A, A, B, B, C의 문자가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times 2!}=60$

양 끝 모두에는 A가 적힌 카드가 나와야 하므로 A, B, B, C가 적혀 있는 4장의 카드를 A, A가 적혀 있는 2장의 카드 사이에 나열해야 한다. 이때 카드를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$

정답 ②

16. **출제의도** : 중복조합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (x,y,z)의 개수는

$_3\mathrm{H}_{10}={}_{3+10-1}\mathrm{C}_{10}$

$={}_{12}C_{10}$

$={}_{12}\mathrm{C}_2$

$=\frac{12\times 11}{2}=66$

이때, $y+z=0$인 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 (10, 0, 0)의 1이고,

$y+z=10$인 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

$_2\mathrm{H}_{10}={}_{2+10-1}\mathrm{C}_{10}$

$={}_{11}\mathrm{C}_{10}$

$={}_{11}\mathrm{C}_1$

$=11$

즉, 11이므로

구하고자 하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

$66-1-11=54$

정답 ④

17. **출제의도** : 함수의 연속의 성질을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x<0$일 때,

$g(x)=-f(x)+x^2+4$

$x>0$일 때,

$g(x)=f(x)-x^2-2x-8$

한편, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = f(0)$$

이다. 이때,

$$\lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0-} \{-f(x) + x^2 + 4\}$$
$$= -f(0) + 4$$

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} \{f(x) - x^2 - 2x - 8\}$$
$$= f(0) - 8$$

이므로

$\lim_{x\to 0-} g(x) - \lim_{x\to 0+} g(x) = 6$에서

$\{-f(0)+4\} - \{f(0)-8\} = 6$

따라서

$f(0) = 3$

정답 ⑤

18. **출제의도** : 무한히 반복되는 도형에서 규칙을 찾아 넓이의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

반지름의 길이가 2인 원에 내접하는 정삼각형의 높이

$\overline{A_1D_1} = 2 + 1 = 3$

이므로 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 한 변의 길이를 a라 하면

$\frac{\sqrt{3}}{2}a = 3$ 즉, $a = 2\sqrt{3}$

따라서

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{3})^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left\{4\pi - \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{3})^2\right\}$$

$$= \sqrt{3} + \frac{1}{3}(4\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{4}{3}\pi$$

또한, 삼각형 $A_1B_1D_1$에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\frac{r}{2}(2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 3) = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{3}$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

따라서 닮음비가

$$2 : \frac{3-\sqrt{3}}{2} = 1 : \frac{3-\sqrt{3}}{4}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{4}{3}\pi}{1 - \left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi}{1 - \frac{12 - 6\sqrt{3}}{16}}$$

$$= \frac{32\pi}{9\sqrt{3} + 6}$$

$$= \frac{32(3\sqrt{3} - 2)\pi}{69}$$

정답 ③

19. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열에서 특정한 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_1 = a_2 = 1$이고

모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+2} = (a_{n+1})^2 - (a_n)^2$

이므로

$a_3 = (a_2)^2 - (a_1)^2 = 1^2 - 1^2 = 0$

$a_4 = (a_3)^2 - (a_2)^2 = 0^2 - 1^2 = -1$

$a_5 = (a_4)^2 - (a_3)^2 = (-1)^2 - 0^2 = 1$

$a_6 = (a_5)^2 - (a_4)^2 = 1^2 - (-1)^2 = 0$

$a_7 = (a_6)^2 - (a_5)^2 = 0^2 - 1^2 = -1$

$\vdots$

이므로

수열 $\{a_n\}$은

$a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=0,\ a_4=-1$

$a_{n+3}=a_n(n \geq 2)$

이다.

한편

$b_{n+1}=a_n-b_n+n$

이므로

$b_2=a_1-b_1+1=1-k+1=2-k$

$b_3=a_2-b_2+2=1-(2-k)+2=1+k$

$b_4=a_3-b_3+3=0-(1+k)+3=2-k$

$b_5=a_4-b_4+4=-1-(2-k)+4=1+k$

$b_6=a_5-b_5+5=1-(1+k)+5=5-k$

$b_7=a_6-b_6+6=0-(5-k)+6=1+k$

$b_8=a_7-b_7+7=-1-(1+k)+7=5-k$

$b_9=a_8-b_8+8=1-(5-k)+8=4+k$

$b_{10}=a_9-b_9+9=0-(4+k)+9=5-k$

$b_{11}=a_{10}-b_{10}+10=-1-(5-k)+10=4+k$

$b_{12}=a_{11}-b_{11}+11=1-(4+k)+11=8-k$

$b_{13}=a_{12}-b_{12}+12=0-(8-k)+12=4+k$

$b_{14}=a_{13}-b_{13}+13=-1-(4+k)+13=8-k$

$b_{15}=a_{14}-b_{14}+14=1-(8-k)+14=7+k$

$b_{16}=a_{15}-b_{15}+15=0-(7+k)+15=8-k$

$b_{17}=a_{16}-b_{16}+16=-1-(8-k)+16=7+k$

$b_{18}=a_{17}-b_{17}+17=1-(7+k)+17=11-k$

$b_{19}=a_{18}-b_{18}+18=0-(11-k)+18=7+k$

$b_{20}=a_{19}-b_{19}+19=-1-(7+k)+19=11-k$

이때, $b_{20}=14$이므로

$11-k=14$

따라서 $k=-3$

정답 ①

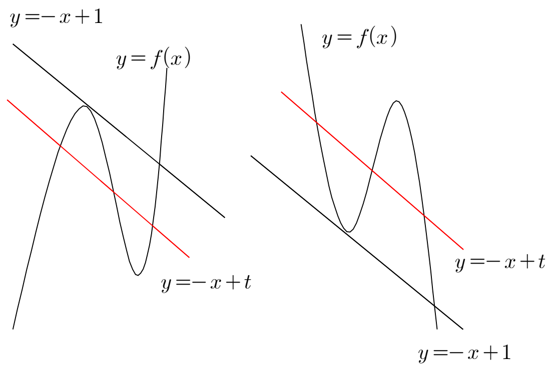
20. 출제의도 : 삼차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이해하여 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. 곡선 $f(x)=x^3$과 직선 $y=-x+t$는 한 점에서 만나므로 $g(t)=1$이다.

따라서, 함수 $g(t)$는 상수함수이다. (참)

ㄴ. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+1$의 교점의 개수가 2개인 경우는 다음 그림과 같은 경우이다.



따라서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+t$가 세 점에서 만나도록 하는 실수 t가 존재한다. (참)

ㄷ. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$(a>0,\ b,\ c,\ d$는 상수)라 하자.

함수 $g(t)$가 상수함수이면 방정식

$ax^3+bx^2+cx+d=-x+t$

의 실근이 1개가 존재해야 한다.

즉, 방정식 $ax^3+bx^2+(c+1)x+d=t$에서 함수 $y=ax^3+bx^2+(c+1)x+d$의 그래프와 직선 $y=t$가 단 한 점에서 만나야 한다.

즉, 함수 $y=ax^3+bx^2+(c+1)x+d$가 극값이 존재하지 않아야 하므로

$y'=3ax^2+2bx+c+1$

에서 방정식 $3ax^2+2bx+c+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=b^2-3a(c+1)=b^2-3ac-3a \leq 0$$

이다.

한편, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서

방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=b^2-3ac$

그런데, $a=2$, $b=3$, $c=1$이면

$\frac{D_1}{4}=3^2-3\times2\times1-3\times2=-3\le0$

을 만족시키지만

$\frac{D_2}{4}=b^2-3ac=3^2-3\times2\times1=3>0$

이므로 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

정답 ③

21. **출제의도** : 합성함수와 역함수의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

합성함수 $g\circ f$가 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 가지려면

$g(-3)=1$, $g(3)=-1$

이므로

$f(-1)=1$, $\lim_{x\to1-}f(x)=-1$,

$\lim_{x\to-1-}f(x)=-3$, $f(1)=3$

이어야 한다.

$f(-1)=-b=1$에서

$b=-1$

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}bx=b=-1$

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(x+a)=-1+a=-3$

에서

$a=-2$

$f(1)=1+c=3$에서

$c=2$

따라서

$a+b+2c=-2+(-1)+2\times2=1$

정답 ②

22. **출제의도** : 순열의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

${}_7\mathrm{P}_3=7\times6\times5=210$

정답 210

23. **출제의도** : 다항함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=3x^2-2x$에서

$f'(x)=6x-2$

따라서

$f'(1)=6\times1-2=4$

정답 4

24. **출제의도** : 무리함수의 그래프를 평행이동할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=2\sqrt{x}+k$의 그래프가 점 (1, 5)를 지나므로

$5=2\sqrt{1}+k$

따라서

$k=3$

정답 3

25. **출제의도** : 등차수열의 일반항을 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 같으므로 첫째항과 공차를 모두 a라 하자.
등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은
$$a_n = a+(n-1)a = an$$
이다.
이때, $a_2 + a_4 = 24$에서
$$2a+4a=24$$
$$a=4$$
따라서 $a_n = 4n$이므로
$$a_5 = 4\times 5 = 20$$
정답 20

26. **출제의도** : 곡선과 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$y=6x(x-2)$이므로 구하고자 하는 넓이는
$$\int_0^2 (-6x^2+12x)dx$$
$$=\left[-2x^3+6x^2\right]_0^2$$
$$=-16+24$$
$$=8$$
정답 8

27. **출제의도** : 표본평균에 대한 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$$\mathrm{E}(\overline{X})=8,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{(1.2)^2}{n}$$
이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포
$$\mathrm{N}\left(8,\ \left(\frac{1.2}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$$
을 따르고, $Z=\dfrac{\overline{X}-8}{\dfrac{1.2}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
이때,
$$\mathrm{P}(7.76 \le \overline{X} \le 8.24)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{7.76-8}{\dfrac{1.2}{\sqrt{n}}} \le Z \le \frac{8.24-8}{\dfrac{1.2}{\sqrt{n}}}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{5} \le Z \le \frac{\sqrt{n}}{5}\right)$$
$$=2\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{\sqrt{n}}{5}\right)$$
이므로
$\mathrm{P}(7.76 \le \overline{X} \le 8.24) \ge 0.6826$에서
$$2\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{\sqrt{n}}{5}\right) \ge 0.6826$$
즉, $\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{\sqrt{n}}{5}\right) \ge 0.3413$
한편
$$\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) = 0.3413$$
이므로
$\dfrac{\sqrt{n}}{5} \ge 1$, 즉 $n \ge 25$이어야 한다.
따라서 구하는 n의 최솟값은 25이다.
정답 25

28. **출제의도** : 이산확률변수에서 기댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{5}k\mathrm{P}(X=k)=4$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\sum_{k=1}^{5}k\mathrm{P}(Y=k)\\&=\sum_{k=1}^{5}k\left\{\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{10}\right\}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}k\mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{5}k\\&=\frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{10}\times\frac{5\times 6}{2}\\&=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

따라서 $a=\frac{7}{2}$이므로

$8a=8\times\frac{7}{2}=28$

정답 28

29. **출제의도** : 다항함수의 극대, 극소의 성질을 이용하여 함수를 구한 후, 미분계수의 값을 구할 수 있는가?

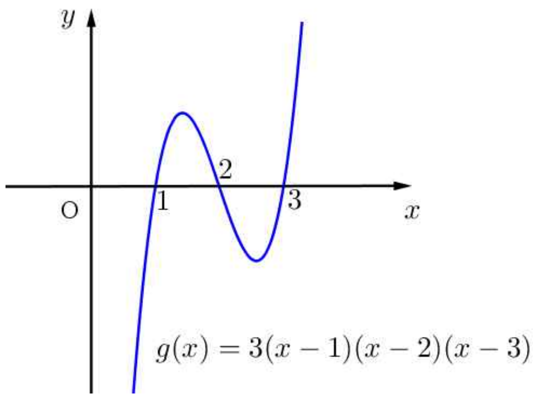
정답풀이 :

$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$에서 삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고, 함수 $f(x)g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 $\frac{1}{3}$이다.

(i) 다항식 $g(x)$가 서로 다른 세 개의 일차식을 인수로 가질 때,

$g(x)=3(x-1)(x-2)(x-3)$

이므로 함수 $g(x)=3(x-1)(x-2)(x-3)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 함수 $g(x)=3(x-1)(x-2)(x-3)$은 $x=2$에서 극값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

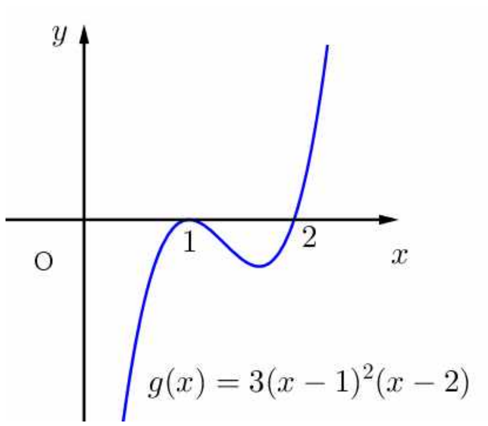
(ii) 다항식 $g(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 가질 때,

$g(x)=3(x-1)^2(x-2)$

또는 $g(x)=3(x-1)^2(x-3)$

이다.

함수 $g(x)=3(x-1)^2(x-2)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

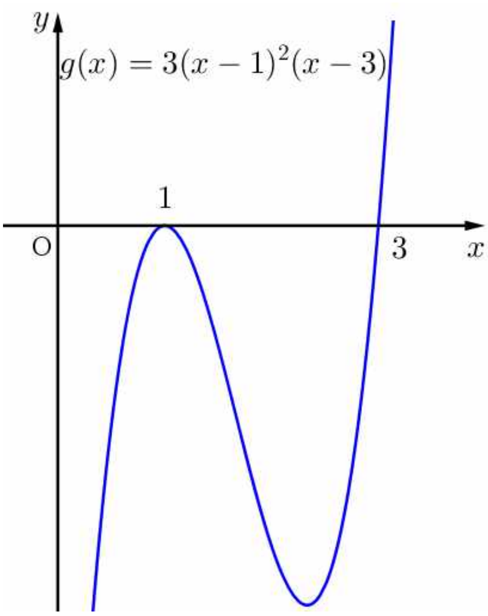


이때, 함수 $g(x)=3(x-1)^2(x-2)$는 $x=2$에서 극값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

또, 함수 $g(x)=3(x-1)^2(x-3)$의 그래

EBS

프의 개형은 다음과 같다.



$g'(x)=6(x-1)(x-3)+3(x-1)^2$
$\quad\quad=3(x-1)(3x-7)$

$g'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=\dfrac{7}{3}$

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖고, $x=\dfrac{7}{3}$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 함수 $g(x)=3(x-1)^2(x-3)$은 $x=2$에서 극값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) 다항식 $g(x)$가 $(x-2)^2$을 인수로 가질 때,

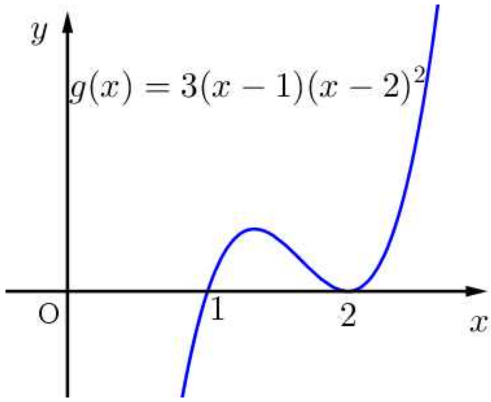
$g(x)=3(x-1)(x-2)^2$

또는

$g(x)=3(x-1)(x-3)^2$

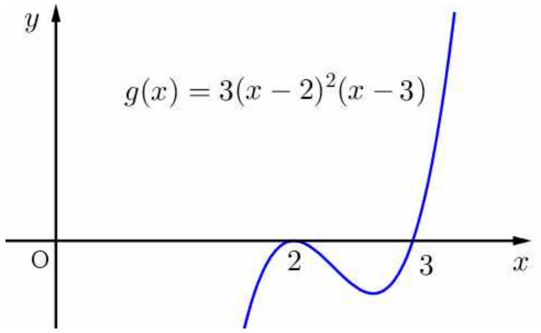
이다.

함수 $g(x)=3(x-1)(x-2)^2$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)=3(x-1)(x-2)^2$은 $x=2$에서 극솟값을 가지므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

한편, 함수 $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$은 $x=2$에서 극댓값을 가지므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(iv) 다항식 $g(x)$가 $(x-3)^2$을 인수로 가질 때,

$g(x)=3(x-1)(x-3)^2$

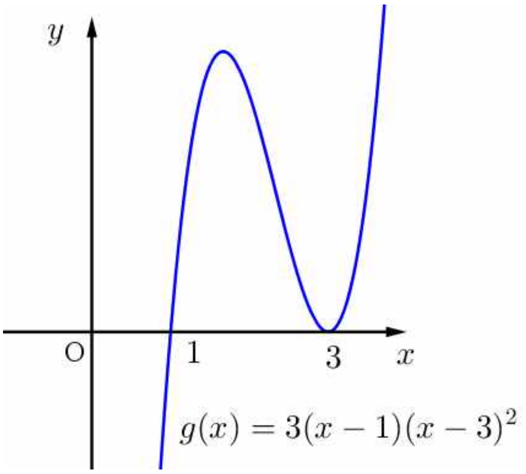
또는

$g(x)=3(x-2)(x-3)^2$

이다.

함수 $g(x)=3(x-1)(x-3)^2$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

EBS



$g'(x)=3(x-3)^2+6(x-1)(x-3)$
$\quad\quad =3(x-3)(3x-5)$

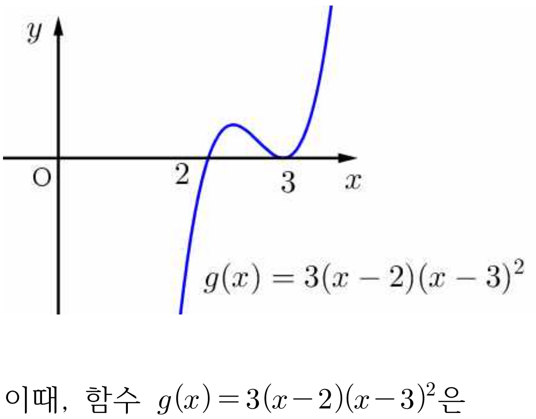
$g'(x)=0$에서

$x=\dfrac{5}{3}$ 또는 $x=3$

함수 $g(x)$는 $x=\dfrac{5}{3}$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 함수 $g(x)=3(x-1)(x-3)^2$은 $x=2$에서 극값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

또, 함수 $g(x)=3(x-2)(x-3)^2$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 함수 $g(x)=3(x-2)(x-3)^2$은 $x=2$에서 극값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서

$g(x)=3(x-2)^2(x-3)$이므로

$f(x)=\dfrac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$이다.

이때,

$$f'(x)=\frac{1}{3}\{2(x-1)(x-3)+(x-1)^2\}$$
$$=\frac{1}{3}(x-1)(3x-7)$$

이므로

$f'(0)=\dfrac{1}{3}\times(-1)\times(-7)=\dfrac{7}{3}$

따라서 $p=3$, $q=7$이므로

$p+q=10$

정답 10

30. 출제의도 : 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이가 최소가 될 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x-a)=\begin{cases} 0 & (x \le a) \\ x-a & (x > a\} \end{cases}$$

$$f(x-b)=\begin{cases} 0 & (x \le b) \\ x-b & (x > b\} \end{cases}$$

$$f(x-2)=\begin{cases} 0 & (x \le 2) \\ x-2 & (x > 2\} \end{cases}$$

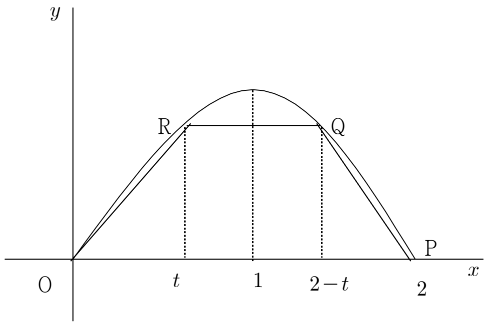
이므로 $0 \le x \le 2$에서

$$h(x)=\begin{cases} kx & (0 \le x \le a) \\ ak & (a < x \le b) \\ k(-x+a+b) & (b < x \le 2) \end{cases}$$

따라서 모든 실수 x에 대하여

$0 \le h(x) \le g(x)$ 이고

$\displaystyle\int_0^2 \{g(x)-h(x)\}dx$ 의 값이 최소가 되기 위해서는 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.



따라서 R$(t,\ t(2-t))$(단, $0<t<1$)이라 하면

Q$(2-t,\ t(2-t))$이고

사다리꼴 OPQR의 넓이 $S(t)$가 최대가 되어야 하므로

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\{2+(2-2t)\}\times t(2-t)$$

$$=t^3-4t^2+4t$$

$$S'(t)=3t^2-8t+4=(3t-2)(t-2)$$

따라서 $S(t)$는 $t=\frac{2}{3}$에서 극대이면서

최댓값을 가지고 그때

$$\int_0^2\{g(x)-h(x)\}dx$$

의 값은 최솟값을 가지므로

$$k=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{4}{3},\ a=\frac{2}{3},\ b=\frac{4}{3}$$

따라서

$$60(k+a+b)=60\times\frac{10}{3}=200$$

정답 200

■ 9월 모평 이후 스타강사의 30일 마무리 전략!

■ 9월 모의평가 이후 내가 필요한 강좌만 골라 듣는다 !

■ 고퀼의 문항으로 마지막 실전 능력을 폭발시켜라!

2018학년도 수능은 EBSi와 함께!! 수험생 여러분을 응원합니다!