



한국수학올림피아드

제 36 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2022년 10월 29일 (오전), 제한시간 3시간, 문항당 7점

1. 이등변삼각형이 아닌 예각삼각형  $ABC$ 의 내접원이 점  $D, E$ 에서 각각 변  $AB, BC$ 에 접한다. 삼각형  $ABC$ 의 내심을  $I$ 라 하면, 직선  $AI$ 와  $DE$ 의 교점이 변  $AC$ 를 지름으로 하는 원 위에 있음을 보여라.

2. 양의 정수  $n (\geq 3)$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 의 개수를 구하여라.

- $1 \leq i \leq n$  을 만족하는 양의 정수  $i$ 에 대하여  $1 \leq a_i \leq i$ 이다.
- $1 \leq i < j < k \leq n$  을 만족하는 양의 정수  $i, j, k$ 에 대하여  $a_i = a_j$  이면  $a_j \geq a_k$ 이다.

3. 홀수인 소수  $p$ 가 주어져있다. 양의 정수  $n$ 에 대하여  $n$ 의 약수이면서  $p$ 의 배수가 아닌 수 중 가장 큰 것을  $p$ 로 나눈 나머지를  $f(n)$ 이라 하자. 예를 들어,  $p = 5$ 이면  $f(6) = 1, f(35) = 2, f(75) = 3$ 이다. 정수  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 은 다음 두 조건을 모두 만족한다.

- $a_1 = 1$
- 모든 양의 정수  $n$ 에 대하여  $a_{n+1} = a_n + (-1)^{f(n)+1}$ 이다.

이때  $m = a_k$  인 양의 정수  $k$ 가 무한히 많은 정수  $m$ 을 모두 구하여라.

4. 다음 조건을 만족하는 함수  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 을 모두 구하여라. (단,  $\mathbb{N}$ 은 양의 정수 전체의 집합)

(조건) 각 양의 정수  $x, y$ 에 대하여  $\frac{f(x+y)-f(x)}{f(y)}$ 는  $2022^{2022}$  이하의 양의 정수이다.



한국수학올림피아드

제 36 회 중등부 2차시험

## 한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2022년 10월 29일 (오후), 제한시간 3시간, 문항당 7점

5. 실수  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 은 다음 두 조건을 모두 만족한다.

- $a_1 = 2, a_2 = 11$
- 모든 양의 정수  $n$ 에 대하여  $2a_{n+2} = 3a_n + \sqrt{5(a_n^2 + a_{n+1}^2)}$  이다.

모든 양의 정수  $n$ 에 대하여  $a_n$ 은 유리수임을 보여라.

6. 삼각형  $ABC$ 에서  $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이다. 점  $D$  ( $\neq A, C$ )는 변  $AC$  위의 점이고 원  $O$ 는 점  $E$ 에서 직선  $BD$ 에 접하고 점  $C$ 에서 직선  $AC$ 에 접한다. 직선  $AE$ 와 원  $O$ 는 점  $F$  ( $\neq E$ )에서 만나고, 직선  $AC$ 과 삼각형  $ABF$ 의 외접원은 점  $G$  ( $\neq A$ )에서 만날 때, 네 점  $D, E, F, G$ 가 한 원 위에 있음을 보여라.

7. 카드  $n$ 장에 1부터  $n$ 까지의 정수가 하나씩 적혀 있으며 각 카드에 적힌 수는 모두 다르다.  $n$  개의 상자에 이 카드가 한 장씩 들어있는 상태에서 시작하여, 다음 시행을 반복하여  $n$ 장의 카드를 모두 한 상자에 넣으려고 한다. 이것이 가능한 양의 정수  $n$ 을 모두 구하여라.

(시행) 상자에 들어있는 카드 중 원하는 정수  $k$ 가 적혀있는 카드를 선택하여, 상자에 들어있는 카드에 적힌 수의 합이  $k$ 의 배수가 되는 다른 상자로 옮긴다. (단, 빈 상자로는 옮기지 않는다.)

8. 다음 등식을 만족하는 유리수  $x, y$ 의 순서쌍  $(x, y)$ 를 모두 구하여라.

$$xy^2 = x^2 + 2x - 3$$