2015년 고등부 수행평가

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

유형 가

2015년 5월 16일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
   예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1～4번은 각 4점, 문제 17～20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. 실계수 5차 다항식 $f(x)$의 모든 계수가 0 이상이다. $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족할 때 $\frac{f(3)}{f(2)}$에 가장 가까운 정수를 구하여라.

(i) $x \neq 0$인 모든 x에 대하여 $f(x) = x^6 f\left(\frac{1}{x}\right)$

(ii) $f(2) = 10f(1)$

2. 다음 세 조건을 모두 만족하는 순서쌍 $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$의 개수를 구하여라.

(i) $a_i \in \{1, 2, 3\} \quad (i = 1, 2, \ldots, 10)$

(ii) $i = 1, 3, 5, 7, 9$ 이면 $a_i < a_{i+1}$

(iii) $i = 2, 4, 6, 8$ 이면 $a_i > a_{i+1}$

3. 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 점 C를 잡고, 선분 BC의 중점을 M이라 하자. 어떤 원이 선분 BC와 점 M에서 접하고, 호 BC와 점 D에서 접한다. 선분 AD와 BC의 교점을 E라 하자. $\overline{AB} = 20$, $\overline{AC} = 5$일 때 $\overline{CE}^2$의 값을 구하여라.

4. 양의 정수 m, n이 다음 조건을 만족할 때 $m + n$의 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

$k^3 - mk^2 - nk + 2015 = 0$을 만족하는 양의 정수 k가 존재한다.

5. 다음 조건을 만족하는 모든 소수 p의 합을 구하여라.

$p^4 + 119$의 양의 약수의 개수가 20 이하이다.

6. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 중 가장 작은 것을 구하여라.

$\sum_{k=2}^{2015} (-1)^k \, {}_{2015}C_k \, (n \cdot k^{2015} - 1)$을 소수 2017로 나눈 나머지가 1이다.

7. 다음 세 조건을 모두 만족하는 양의 정수 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5의 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$의 개수를 구하여라.

(i) $x_1 = x_5$

(ii) $x_i \neq x_{i+1} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$

(iii) $x_i + x_{i+1} \leq 6 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$

8. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{CA} = 13$이다. 점 P가 평면 위를 움직일 때

$$5\overline{PA} \cdot \overline{PB} + 12\overline{PB} \cdot \overline{PC} + 13\overline{PC} \cdot \overline{PA}$$

의 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

9. 실수 $x_1, x_2, \ldots, x_7$이 $\sum_{i=1}^{7} x_i = 0$과 $\sum_{i=1}^{7} |x_i| = 1$을 만족할 때

$$\sum_{i=1}^{7} x_i |x_i|$$

의 값 중 가장 큰 것을 $\frac{q}{p}$ (단, p, q는 서로소인 양의 정수)라 하자. $p + q$의 값을 구하여라.

(뒷면에 계속)

10. 함수 $f\colon \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ 중 다음 조건을 만족하는 것의 개수를 구하여라.

$$f(k+1) \le f(k)+1 \qquad (k=1,2,3,4)$$

11. 삼각형 ABC의 내접원 O와 방접원이 변 BC에 각각 점 D와 E에서 접한다. 선분 AE가 원 O와 두 점 P, Q $(\overline{AP} < \overline{AQ})$에서 만나고 $\overline{PQ} = 40$, $\overline{EQ} = 5$이다. $\overline{DQ}^2$ 의 값을 구하여라.

12. 양의 정수 n을 서로 다른 2개의 양의 정수를 각각 한 번 이상 사용하여 합으로 나타내는 방법의 수를 $q(n)$이라고 하자. 이 때 더하는 순서는 고려하지 않는다. 예를 들어 5는

$$4+1,\ 3+2,\ 3+1+1,\ 2+2+1,\ 2+1+1+1$$

으로 나타낼 수 있으므로 $q(5) = 5$이다. 100 이하의 양의 정수 n 중 다음 두 조건을 모두 만족하는 것의 개수를 구하여라.

(i) n을 4로 나눈 나머지는 3이다.

(ii) $q(n)$은 짝수이다.

13. 실수 a, b, c가 $a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 6abc$를 만족한다. $0 \le a \le 1$일 때 $4bc - a^2 - b - c$의 값 중 가장 큰 것을 m이라 하자. $32m$ 이하의 정수 중 가장 큰 것을 구하여라.

14. 십각형 $A_1A_2\cdots A_{10}$의 꼭짓점에 다음 두 조건을 모두 만족하도록 10개의 수 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10을 배치하는 방법의 수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(i) 각 꼭짓점에 서로 다른 수를 하나씩 배치한다.

(ii) 이웃한 두 꼭짓점에 배치된 두 수는 서로소이다.

15. 각 B가 둔각인 삼각형 ABC의 수심과 외심을 각각 H와 O라 할 때, $\overline{AO} = 8$, $\overline{AH} = 12$이다. 점 C에서 변 AB의 연장선 위에 내린 수선의 발을 D, 점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 E라 할 때, 세 점 D, E, O가 일직선 위에 있다. 선분 AE 위의 점 P가 $\overline{EP} = \overline{EO}$를 만족할 때 $\overline{HP}^2$ 의 값을 구하여라.

16. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 중 가장 작은 것을 구하여라.

$n^4 + 1$이 274의 배수이다.

17. 수열 $\{a_n\}$이 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

(ii) $a_n a_{n-3} - a_{n-1}a_{n-2} = 4^n \qquad (n \ge 4)$

이 때

$$\frac{a_{2016} + 4a_{2014}}{a_{2015}}$$

의 값을 구하여라.

18. 정수를 원소로 하는 집합 S에 대하여 $S+1$을 집합 $\{k+1 \mid k \in S\}$라 하자. 집합 $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$의 공집합이 아닌 부분집합 K 중 $K = S \cup (S+1)$을 만족하는 집합 S가 존재하는 것의 개수를 구하여라.

19. 삼각형 ABC (단, $\angle B < \angle C$)의 변 AC의 삼등분점 중 점 C에 가까운 것을 D, 점 A에 가까운 것을 E라 하자. 삼각형 BCE의 외접원과 변 AB의 교점을 $F(\ne B)$라 하면 $\overline{AF} = 2$이다. 직선 EF와 직선 BC의 교점을 K, 직선 AK와 직선 BE의 교점을 L, 직선 DL과 직선 BC의 교점을 M이라 하면 $\overline{CM} = 1$이다. 직선 DK가 변 AB의 중점을 지날 때 $\overline{AK}^2$ 의 값을 구하여라.

20. 다섯 개 이상의 양의 약수를 갖는 모든 양의 정수들의 집합을 S라 하자. 집합 S의 원소 n 중 다음 두 조건을 모두 만족하는 것들의 합을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(i) $n < 2015$

(ii) n의 양의 약수 중 가장 작은 다섯 개를 1, a, b, c, d (단, $1 < a < b < c < d$)라고 할 때, $n = 12ac + 7d^2$ 이다.

(끝)