



제 32 회 최종시험 첫째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2019년 3월 23일 ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

1. 책상 위에 1부터 n 까지 번호가 각각 하나씩 적힌 n 장의 카드가 한 묶음으로 쌓여 있다. 최초에 카드에 적힌 번호는 위에서 아래로 증가한다. 맨 위의 한 장의 카드를 카드 묶음 가장 아래 쪽으로 옮기는 행동을 A, 맨 위의 한 장의 카드를 책상 밖으로 버리는 행동을 B라고 할 때, 책상 위에 마지막 한 장이 남을 때까지 다음 순서대로 행동을 반복한다.

ABBABBABBABB...

이때 마지막 남은 한 장의 카드의 번호를 $L(n)$ 이라고 하자. $L(3k) = k$ 가 되는 양의 정수 k 를 모두 구하여라.

2. 정사각형이 아닌 직사각형 $ABCD$ 에 대하여 대각선 BD 의 수직이등분선 위에 있고 삼각형 BCD 의 내부에 있는 점 O 를 중심으로 하고 두 점 B, D 를 지나는 원이 선분 AB, DA 와 각각 점 $E(\neq B), F(\neq D)$ 에서 만난다. 선분 BF 와 DE 의 교점 G 에서 선분 AB, BD, DA 에 내린 수선의 발을 각각 X, Y, Z 라 하자. 점 O 에서 선분 CD, BD, BC 에 내린 수선의 발을 각각 L, M, N 이라 하자. 직선 XY 와 ML 의 교점을 P , 직선 YZ 와 MN 의 교점을 Q 라 할 때, 직선 BP 와 DQ 가 평행함을 보여라.

3. 양의 정수 k 에 대하여, 수열 x_0, x_1, x_2, \dots 을 다음과 같이 정의하자.

$$x_0 = 1, \quad x_1 = k + 2, \quad x_{n+2} - (k+1)x_{n+1} + x_n = 0 \quad (n \geq 0)$$

수열의 모든 항이 1 또는 합성수가 되도록 하는 양의 정수 k 가 무한히 많음을 보여라.

2019년 3월 24일 ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

4. 이등변삼각형이 아닌 예각삼각형 ABC 의 수심을 H , 꼭짓점 A 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 O , 변 AB 와 AC 의 중점을 각각 K, L 이라 하자. 변 BC 위의 점 $D(\neq O, B, C)$ 에 대하여 삼각형 ABD 와 삼각형 ACD 의 수심을 각각 E, F 라 하고 선분 DE, DF 의 중점을 각각 M, N 이라 하자. 점 M 을 지나고 직선 KH 에 수직인 직선과 점 N 을 지나고 직선 LH 에 수직인 직선이 점 P 에서 만난다. 선분 EF 의 중점을 Q 라 하고 삼각형 HPQ 의 수심을 S 라 하면, 점 D 의 위치에 관계없이 $\frac{OS}{OH}$ 와 $\frac{OQ}{OP}$ 의 값이 일정함을 보여라.

5. 다음 4차 방정식이 4개의 정수해를 갖도록 하는 p 와 q 의 순서쌍 (p, q) 를 모두 구하여라. 단, 중근은 2개로, 삼중근은 3개로 센다.

$$x^4 + 2px^2 + qx + p^2 - 36 = 0$$

6. 수열 $\{x_n\} = x_0, x_1, x_2, \dots$ 은 $x_0 = a$ (a 는 실수, $1 \leq a \leq 2019$)이고, 음이 아닌 정수 n 에 대하여 다음을 만족한다.

$$x_{n+1} = \begin{cases} 1 + 1009x_n & (x_n \leq 2) \\ 2021 - x_n & (2 < x_n \leq 1010) \\ 3031 - 2x_n & (1010 < x_n \leq 1011) \\ 2020 - x_n & (1011 < x_n) \end{cases}$$

$x_k = a$ 인 1보다 큰 양의 정수 k 가 존재할 때, 그러한 k 중 가장 작은 수를 수열 $\{x_n\}$ 의 기본주기라고 하자. 수열 $\{x_n\}$ 의 기본주기가 될 수 있는 양의 정수를 모두 구하고, 가능한 기본주기 중 가장 작은 홀수(> 1)에 대하여 그 기본주기를 갖는 수열의 초항 a 의 값을 모두 구하여라.