



제 29 회 중등부 2차시험
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2015년 11월 1일 (오전); 제한시간 2시간 30분; 문항당 7 점

1. 이등변 삼각형이 아닌 예각 삼각형 ABC 의 외심을 O , 변 AC 의 중점을 M 이라 하고, 점 A 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 D 라 하자. 삼각형 OAM 의 외접원과 직선 DM 의 교점을 $P(\neq M)$ 라 하자. 세 점 B, O, P 는 한 직선 위에 있음을 보여라.
2. 양의 정수 m 에 대하여, 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (x, y) 의 개수가 0 또는 짝수임을 보여라.
 - (i) $x^2 - 3y^2 + 2 = 16m$
 - (ii) $2y \leq x - 1$
3. 음이 아닌 모든 정수 i 에 대하여 숫자 2^i 이 적힌 카드가 각각 7장씩 있다. 양의 정수 n 에 대하여 카드에 적힌 수의 합이 n 이 되도록 카드를 선택하는 방법의 개수를 구하여라. (단, 방법의 개수를 구할 때 같은 숫자가 적힌 카드는 구별하지 않는다.)
4. 실수 a, b, c, x, y 가 $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 = 1$ 을 만족할 때,
$$(ax + by)^2 + (bx + cy)^2$$
의 최댓값을 구하여라.



제 29 회 중등부 2차시험
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2015년 11월 1일 (오후); 제한시간 2시간 30분; 문항당 7 점

5. 예각 삼각형 ABC 의 내심과 내접원을 각각 I, Γ 라 하자. 삼각형 IBC 의 외접원과 원 Γ 의 두 교점 중 B 와 가까운 점을 D, C 와 가까운 점을 E 라 하자. 원 Γ 와 직선 BE 의 교점을 $K(\neq E)$ 라 하고, 직선 CD 와 선분 BI , 원 Γ 의 교점을 각각 $T, L(\neq D)$ 이라 하자. 점 T 를 지나고 선분 BI 와 수직인 직선이 원 Γ 와 만나는 두 점 중 삼각형 IBC 내부의 점을 P 라 하자. 점 P 에서의 원 Γ 의 접선, 직선 KL , 직선 BI 가 한 점에서 만남을 보여라.

6. 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 을 모두 구하여라. (단, \mathbb{R} 은 실수 전체의 집합)

- (i) 서로 다른 실수 x, y 에 대하여 $f(x) \neq f(y)$
- (ii) 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x + f(f(-y))) = f(x) + f(f(y))$

7. 차수가 일차 이상이며, 계수가 정수인 다항식 $f(x)$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 소수 p 가 무한히 많음을 보여라.

(조건) $f(n) \neq 0$ 이고 $|f(n)|$ 이 p 의 배수가 되는 정수 n 이 존재한다.

8. 양의 정수 n 이 주어져 있다. 다음 세 조건을 모두 만족하는 m 개의 집합 F_1, F_2, \dots, F_m 이 존재하면 $m \leq n$ 임을 보여라. (단, 집합 A, B 에 대하여 $|A|$ 는 A 의 원소의 개수이고, $A - B$ 는 A 의 원소 중 B 의 원소가 아닌 것의 집합이다.)

- (i) 모든 $1 \leq i \leq m$ 에 대하여 $F_i \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$
- (ii) $|F_1| \leq |F_2| \leq \dots \leq |F_m|$
- (iii) 모든 $1 \leq i < j \leq m$ 에 대하여 $|F_i - F_j| = 1$