제31회 최종시험 첫째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2018년 3월 24일 (오후) ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

1. 유리수 m, n이 각각 0이 아니고 $m^3 = (27n^2 + 1)(m + 2n)$을 만족시킬 때 $\dfrac{m - 6n}{m + 2n}$이 가질 수 있는 정수값을 모두 구하여라.

2. 삼각형 ABC가 $\angle ABC < \angle BCA < \angle CAB < 90°$를 만족한다. 삼각형 ABC의 외심 O를 변 BC에 대하여 대칭시킨 점을 K라 하자. 점 K에서 직선 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자. 직선 DE와 직선 BC가 점 P에서 만나고 선분 AK를 지름으로 하는 원과 삼각형 ABC의 외접원이 점 $Q(\neq A)$에서 만난다. 직선 PQ가 변 BC의 수직이등분선과 점 S에서 만난다면, S는 선분 AK를 지름으로 하는 원 위에 있음을 보여라.

3. 지난 31년간 $n(\geq 7)$명의 테니스 선수들이 서로 경기를 한 결과를 분석하였더니, 임의의 두 선수 X, Y를 뽑더라도 그 두 선수를 모두 이긴 적이 있는 다른 선수가 있었다는 사실을 발견하였다. 만일 어떤 정수 k에 대하여 $2(2^{(2^k)} - 1) \geq n$이면 다음 조건을 만족하는 서로 다른 테니스 선수들 A_1, A_2, $\ldots$, A_ℓ이 존재함을 보여라.

> $2 \leq \ell \leq 2k$이며 모든 $1 \leq i < \ell$에 대하여 A_i는 A_{i+1}을 이긴 적이 있고 A_ℓ은 A_1을 이긴 적이 있다.

(단, 어떤 두 선수 A, B는 서로 경기를 한 적이 없을 수도 있고 있을 수도 있다.)

제 31 회 최종시험 둘째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2018년 3월 25일 (오전) ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

4. 각 C가 직각인 직각삼각형 ABC이 있다. 점 A, B를 지나는 원이 변 AC와 A, C가 아닌 점 G에서 만나고 변 BC와 B 아닌 점 D에서 만난다. 선분 AD와 선분 BG의 교점을 H, 선분 AD의 수직이등분선 ℓ과 선분 AB의 수직이등분선의 교점을 E라 하자. 점 D를 지나고 선분 DE와 수직인 직선이 직선 ℓ과 만나는 점을 F라 하자. 삼각형 CFH의 외접원이 직선 AC와 $P(\neq C)$, 직선 BC와 $Q(\neq C)$에서 만난다. 이때, 직선 PQ와 직선 FH가 서로 수직으로 만남을 보여라.

5. 임의의 실수 x에 대하여

$$P(Q(x)) - 3Q(P(x)) = 1$$

을 만족하는 차수가 2018 이상인 두 정수계수 다항식 $P(x)$와 $Q(x)$가 존재하는가?

6. 한 변의 길이가 1인 정이십면체의 각 면에 개미가 한 마리씩 살고 있다. 개미는 각 면의 모서리를 따라 반시계방향으로 돌아야 하며 어느 순간에도 속력이 1 이상이어야 한다. 꼭짓점이 아닌 점에서 두 개미가 만나는 것은 금지되어 있다. 다섯 마리의 개미가 한 꼭짓점에서 동시에 만나는 것을 **충돌**이라고 한다. 충돌이 일어나지 않도록 개미들이 움직이는 전략이 존재하는가?