오일러

제 33 회 고등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2019년 5월 11일 ; 제한시간 4시간

A. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.

B. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.

C. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 “7”일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.

D. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.

E. 문제 1 – 4번은 각 4점, 문제 17 – 20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. 두 이차다항식 $P(x)$와 $Q(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$P(Q(x)) = P(x)Q(x)$$

을 만족한다. $Q(2) = 200$일 때, $Q(5)$의 값을 구하여라.

2. 양의 정수 123456을 재배열하여 만든 여섯자리 정수 $\overline{abcdef}$ 중 다음 조건을 만족하는 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

> $\overline{ab}$는 2의 배수, $\overline{abc}$는 3의 배수, $\overline{abcd}$는 4의 배수, $\overline{abcde}$는 5의 배수, $\overline{abcdef}$는 6의 배수이다.

(예를 들어, $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ 이다.)

3. 원에 내접하는 사각형 $ABCD$가 있다. 두 직선 AB와 CD가 점 E에서 만나고 두 직선 BC와 AD가 점 F에서 만난다. $\overline{AD} = 84$, $\overline{BC} = 28$, $\overline{BE} = 42$, $\overline{CE} = 56$일 때, $\overline{EF}^2$을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

4. 학생 A와 B가 포함된 9명의 학생을 몇 개의 모둠으로 나눌 때, A와 B가 같은 모둠에 속하고 각 모둠의 인원이 2명 또는 3명인 경우의 수를 구하여라. (단, 각 학생은 오직 하나의 모둠에 속한다.)

5. 함수 $y = x^2$의 그래프 위의 세 점 A, B, C가 다음 세 조건을 모두 만족한다.

(i) $\angle BAC = 90°$

(ii) 선분 BC의 중점 M의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같다.

(iii) 선분 AM의 중점의 x좌표는 점 B의 x좌표와 같다.

점 A와 B의 x좌표를 각각 a, b라 할 때, $144a^2b^2$의 값을 구하여라.

6. 다음 식의 값이 정수가 되도록 하는 양의 정수 n 중 가장 큰 것을 구하여라.

$$\frac{300}{2n+1} + \frac{935}{5n+1}$$

7. 사각형 $ABCD$에서 두 대각선의 교점을 O라 하면 $\angle AOB = 30°$, $\overline{AO} = 3$, $\overline{BO} = 5$, $\overline{CO} = 4$, $\overline{DO} = 3$이다. 두 점 A, C에서 직선 BD에 내린 수선의 발을 각각 A_1, C_1, 두 점 B, D에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 각각 B_1, D_1이라 하고 두 점 A_1, C_1에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 각각 A_2, C_2, 두 점 B_1, D_1에서 직선 BD에 내린 수선의 발을 각각 B_2, D_2라 하자. 사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이를 S라 할 때, $64S$의 값을 구하여라.

8. 다음 식의 값을 구하여라. (단, $[a]$는 a를 넘지 않는 최대 정수)

$$\frac{1}{11}\left(\left[\sqrt[3]{1}\right] + \left[\sqrt[3]{2}\right] + \cdots + \left[\sqrt[3]{1000}\right]\right)$$

9. 주어진 양의 정수 n에 대하여 서로 다른 양의 정수 x, y, z가 $x+y+z = n$을 만족할 때, $xy+yz+zx$가 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 a_n이라 하자. 다음 식의 값을 구하여라.

$$a_7 + a_{10} + a_{13} + \cdots + a_{25} + a_{28}$$

10. 60보다 작은 양의 정수 a, b, c, d, e에 대하여

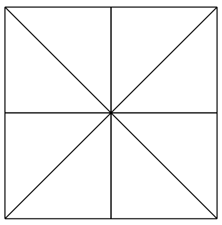
$$\frac{11^7}{60^5} = \frac{a}{60} + \frac{b}{60^2} + \frac{c}{60^3} + \frac{d}{60^4} + \frac{e}{60^5}$$

가 성립할 때, $a+b+c+d+e$의 값을 구하여라.

(뒷면에 계속)

11. 평행사변형 $ABCD$에서 $\angle ABD = 43^\circ$이다. 각 BAD의 이등분선과 직선 BC, CD와의 교점을 각각 E와 F라 하고 삼각형 CEF의 외심을 O라 하자. $\angle ECO = 31^\circ$, $\angle EBO = x^\circ$일 때, x의 값을 구하여라. (단, $0 \le x \le 180$이다.)

12. 다음과 같이 정사각형을 8등분한다. 각 칸을 빨간색 또는 파란색으로 칠한다. 이렇게 색칠된 정사각형의 개수를 구하여라. (단, 회전하여 같은 것은 한 가지로 센다.)



13. 양의 정수 n에 대하여 방정식

$$\sum_{k=1}^{n} |x-k| = \left(x - \frac{n+1}{2}\right)^2 + n - 1$$

의 해를 모두 더한 값을 a_n이라 할 때, 다음의 값을 구하여라.

$$2\left(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}\right)$$

14. 양의 정수 160401의 약수가 되는 모든 소수의 합을 구하여라.

15. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 9$, $\overline{BC} = 11$, $\overline{CA} = 10$이다. 삼각형 ABC의 내접원 I가 변 BC, CA, AB와 만나는 점을 각각 D, E, F라 하고, 점 B를 지나고 직선 AC와 평행한 직선이 직선 EF와 만나는 점을 P, 직선 PD가 원 I와 만나는 점을 $Q(\neq D)$라 하자. 삼각형 DEQ의 넓이를 S라 할 때, $\left(\frac{11}{8}S\right)^2$의 값을 구하여라.

16. 카드 9장에 2부터 10까지의 정수가 하나씩 적혀 있으며 각 카드에 적힌 수는 모두 다르다. 이 카드를 상자 A, B, C에 각각 2장, 3장, 4장씩 넣을 때, 상자 A에 있는 카드에 적힌 수의 곱을 a, 상자 B에 있는 카드에 적힌 수의 곱을 b, 상자 C에 있는 카드에 적힌 수의 곱을 c라 하자. a, b, c의 최대공약수가 1이 되도록 상자에 넣는 경우의 수를 구하여라.

17. 실수 x, y, z가 $x^2 + y^2 + z^2 = 147$을 만족할 때, 다음 식의 최댓값과 최솟값의 차를 구하여라.

$$x + y + z - xy - yz - zx$$

18. 사차방정식 $x^4 - 101^2x^2 + n^2 = 0$이 정수해를 가지도록 하는 양의 정수 n을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

19. 원 O에 내접하는 오각형 $ABCDE$가 다음 세 조건을 모두 만족한다.

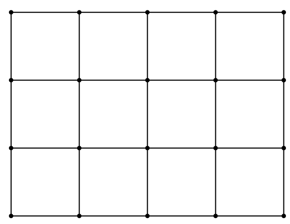
(i) 변 BC와 DE가 평행하다.

(ii) $\angle BAE = 2\angle CAD$ (단, $\angle CAD < 90^\circ$)

(iii) 점 C와 D에서의 원 O의 접선이 점 J에서 만나고 $\angle ADB = \angle AJC$이다.

$\overline{BC} = 30$, $\overline{DE} = 50$일 때, $\overline{CD}$의 값을 구하여라.

20. 다음과 같이 1×1 정사각형 12개를 붙여서 직사각형을 만들었다. 이 도형의 20개의 꼭짓점 중에서 4개의 점을 꼭짓점으로 가지는 평행사변형의 개수를 구하여라.



(끝)

가우스

제 33 회 고등부 1차시험
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2019년 5월 11일 ; 제한시간 4시간

A. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
B. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
C. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.
D. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.
E. 문제 1 – 4번은 각 4점, 문제 17 – 20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. 수열 (a_n)이 $a_1 = \frac{1}{2}$이고 모든 양의 정수 n에 대해 다음을 만족한다.

$$a_{2n} = \frac{2}{n}a_n^2, \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{2}a_{2n} + \frac{1}{2^{2n+1}}$$

이때, $m \times a_{102}$가 정수가 되는 가장 작은 양의 정수 m을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

2. 다음 두 조건을 모두 만족하는 순서쌍 (a, b)의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(i) $a, b \in \{1, 2, \ldots, 2019\}$

(ii) $a(a+b)(a+2b)$은 2019의 배수이다.

3. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 99$, $\overline{BC} = 44$, $\overline{CA} = 88$이다. 각 C의 이등분선이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점을 $D(\neq C)$라 하고 직선 BD와 AC의 교점을 E라 할 때, $\overline{CE}$의 값을 구하여라.

4. 학생 A, B, C가 포함된 9명의 학생을 몇 개의 모둠으로 나눌 때, A와 B는 같은 모둠에 속하고, A와 C는 다른 모둠에 속하고, 각 모둠의 인원이 2명 또는 3명인 경우의 수를 구하여라. (단, 각 학생은 오직 하나의 모둠에 속한다.)

5. 주어진 양의 정수 n에 대하여 n이하의 양의 정수 k 중 다음 식의 값을 가장 작게 하는 것을 a_n이라 하자.

$$9k + \frac{16n^2}{n+k}$$

이때, 다음 식의 값을 구하여라.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{31}$$

6. 다음 식을 만족하는 소수 p와 정수 a의 순서쌍 (p, a)에 대하여 $p + a$의 최댓값을 구하여라.

$$14p^3 - ap^2 - ap + 2a - 14 = 16p^2$$

7. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 27$, $\overline{AC} = 36$이다. 점 D와 E는 각각 변 AB와 AC 위의 점으로 $\overline{AD} = 12$, $\overline{AE} = 18$이다. 점 F는 변 BC 위의 점으로 $\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = \frac{3}{2}$이다. 직선 AF와 DE의 교점을 G라 할 때, $120\frac{\overline{GF}}{\overline{GA}}$의 값을 구하여라.

8. 열 가지의 색이 주어져 있다. 정사면체의 각 면을 열 가지의 색 중 한 가지로 칠한다. 이렇게 색칠된 정사면체의 개수를 구하여라. (단, 회전하여 같은 것은 한 가지로 센다.)

9. 양의 정수 n에 대하여 방정식

$$\sum_{k=1}^{n} |x - k| = \left(x - \frac{n+1}{2}\right)^2 + n - 1$$

의 해를 모두 더한 값을 a_n이라 할 때, 다음의 값을 구하여라.

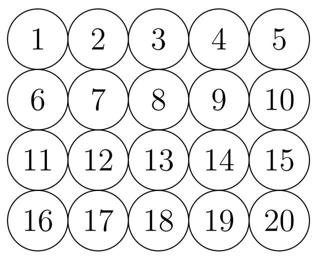
$$2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20})$$

10. 양의 정수 160401의 약수가 되는 모든 소수의 합을 구하여라.

(뒷면에 계속)

11. 예각삼각형 ABC 에서 $\overline{AB} = 7$ 이다. 점 D 는 변 AC 위의 점으로 $\overline{AD} = 8$, $\overline{BD} = 8$, $\overline{CD} = 4$ 이다. 삼각형 ABD 의 외접원이 직선 BC 와 만나는 점을 $E(\neq B)$ 라 하고 직선 AE 와 BD 의 교점을 F 라 할 때, $64\frac{\overline{BF}}{\overline{FD}}$ 의 값을 구하여라.

12. 다음과 같이 수가 적힌 20 개의 원이 배열되어 있다. 수 20 이 적힌 원을 포함하여 네 개의 원을 순서를 무시하고 고를 때, 골라진 네 개의 원 중 어느 두 개도 접하지 않게 되는 경우의 수를 구하여라.



13. 최고차항의 계수가 1 이고 차수가 1 이상인 두 정수계수 다항식 $P(x)$ 와 $Q(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$P(Q(x)) = P(x)Q(x)^2$$

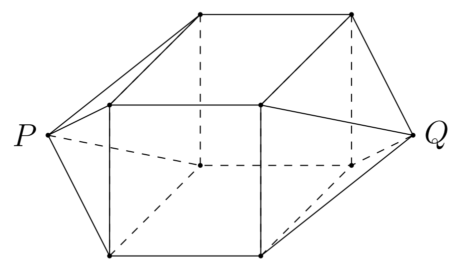
을 만족한다. 이때, 다음 식의 값이 될 수 있는 2019 이하의 모든 실수의 개수를 구하여라.

$$3P(1) - Q(2)$$

14. 방정식 $m^3 + n^3 + 18mn = 10125$ 를 만족하는 정수 m, n 에 대하여 $m^2 + n^2$ 의 값을 구하여라.

15. 사다리꼴 $ABCD$ 에서 $\overline{AC} = 70$, $\overline{CD} = 9$ 이고 변 AB 와 CD 가 평행하다. 사다리꼴 $ABCD$ 의 외부에 있는 점 P 에 대하여, 선분 PA 가 지름인 원과 선분 PC 가 지름인 원이 대각선 BD 위에서 만난다. $\overline{PA} = 40\sqrt{2}$, $\overline{PC} = 50$ 일 때, $\overline{AB}$ 의 값을 구하여라.

16. 다음과 같이 정육면체에 두 개의 정사각뿔을 붙여서 만든 입체가 있다. 이 입체의 꼭짓점 P 에서 꼭짓점 Q 로 모서리를 따라 이동할 때, 한번 지나간 꼭짓점은 다시 지나가지 않는다. 가능한 모든 경로의 수를 구하여라.



17. 양의 실수 a, b, c, d 가 $a > b$ 와 $c > d$ 이고 다음 두 등식을 만족한다.

$$a^2 + b^2 - ab = c^2 + d^2 - cd = 1, \quad (ac - bd)^2 = a^2 - d^2$$

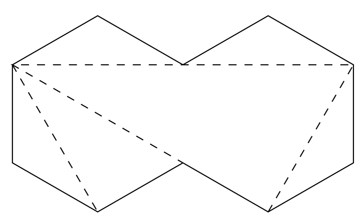
이때, $540a^2$ 의 값을 구하여라.

18. 다음 방정식을 만족하는 양의 정수 a, b 가 존재하도록 하는 소수 p 의 값을 구하여라.

$$5^6p^2(a + 5b + 1) = (5b + 1)^2(a - 5b - 1)$$

19. 길이가 20 인 선분 AB 가 지름인 원 Ω 와 점 A 를 중심으로 하고 반지름이 8 인 원 Γ 가 두 점 C, D 에서 만난다. 원 Γ 위의 점 X 는 원 Ω 의 내부에 있고, 점 C 와 X 는 직선 AB 에 대하여 서로 반대편에 있다. 직선 BX 가 원 Γ 와 만나는 점을 $P(\neq X)$, 직선 CX, DX 가 원 Ω 와 만나는 점을 각각 $Q(\neq C)$, $R(\neq D)$ 이라 하자. 직선 CP 와 원 Ω 의 교점을 S 라 하고 직선 SR 과 CQ 의 교점을 T 라 하자. $\overline{DP} = \overline{DQ}$ 일 때, $25\overline{RT}^2$ 을 1000 으로 나눈 나머지를 구하여라.

20. 주어진 도형의 내부에 꼭짓점을 잇는 선분을 그어 도형을 몇 개의 영역으로 분할한다. 이때, 서로 다른 선분은 내부에서 만나지 않고 끝점에서만 만날 수 있다. 이렇게 나누어진 각각의 영역이 모두 삼각형이 되면 *삼각분할*이라 한다. 다음 그림은 합동인 정육각형 두 개를 붙인 도형의 삼각분할의 예이다.



이 도형의 삼각분할의 개수를 구하여라.

(끝)