

2011년 8월 21일 (오후); 제한시간 2시간 30분; 문항당 7점

5. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 중에서 3^8 보다 작은 것의 개수를 구하여라.

양의 정수 $k(1 \leq k \leq \frac{n}{3})$ 중에서 $\frac{n!}{(n-3k)!k!3^{k+1}}$ 이 정수가 되지 않도록 하는 k 의 개수가 216 이다.

6. 삼각형 ABC 의 내접원이 세 변 BC, CA, AB 와 접하는 점을 각각 D, E, F 라 하자. 삼각형 ABC 의 내접원 위에 있고 삼각형 AEF 의 내부에 있는 점 P 에 대하여, 선분 PB 와 선분 DF 의 교점을 X , 선분 PC 와 선분 DE 의 교점을 Y 라 하고 선분 EX 와 선분 FY 의 교점을 Q 라 할 때, 두 점 A 와 Q 는 동시에 직선 DP 위에 있거나 직선 DP 를 중심으로 서로 반대편에 있음을 보여라.

7. 서로 다른 nr 개의 양의 정수를 학생 n 명에게 각각 r 개씩 나누어 주었다. 이 때 다음 조건을 만족시키도록 학생들을 $4r$ 개 이하의 반으로 편성할 수 있음을 증명하여라. (단 n, r 은 양의 정수)

임의의 학생 A 가 양의 정수 m 을 가지고 있으면, A 가 아닌 학생 중 $(m-1)!$ 보다 크고 $(m+1)!+1$ 보다 작은 양의 정수를 가진 학생은 A 와 같은 반이 될 수 없다.

8. 실수 x_1, x_2, \dots, x_{25} 이 각각 $0 \leq x_i \leq i$ ($i = 1, 2, \dots, 25$)을 만족할 때,

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{25}^3 - (x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + \dots + x_{25}x_1x_2)$$

의 최댓값을 구하여라.