



2022년 5월 28일 ; 제한시간 2시간 30분(1교시 1시간 15분, 2교시 1시간 15분)

- A. 답안지에 **수험번호와 성명, 문제유형**을 반드시 기입하십시오.
 B. 이 시험은 총 20개(오전 10개, 오후 10개)의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.

1. 실수 a, b, c 는 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) $a < b$

(ii) 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 이다.

식 $\frac{11a+b+c}{b-a}$ 가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라. [4점]

답: 5

2. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 과 상수항이 528인 정수계수 다항식 $P(x)$ 가 있다.

(조건) 방정식 $P(x) = 2022$ 의 서로 다른 정수해의 개수가 n 이다.

n 이 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 구하여라. [5점]

답: 6

3. 다음 조건을 만족하는 양의 실수 x 의 개수를 구하여라. (단, $[a]$ 는 a 를 넘지 않는 최대정수) [5점]

(조건) $\left[\frac{x^3}{900}\right] - x$ 의 값은 29 이하의 음이 아닌 정수이다.

답: 10

4. 일곱 개의 문자 A, A, A, B, B, C, C 를 모두 일렬로 나열할 때, A 가 두 번 이상 연속하여 나타나지 않는 경우의 수를 구하여라. [4점] 답: 60

5. 다음 조건을 만족하는 함수 $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 개수를 구하여라. [5점]

(조건) 양의 정수 i 에 대하여 $i+1$ 이 f 의 치역에 속하면 i 도 f 의 치역에 속한다.

답: 541

6. 정15각형의 각 꼭짓점 중 6개는 빨간색, 나머지 9개는 파란색으로 색칠하려고 한다. 다음 조건을 만족하도록 색칠하는 경우의 수를 구하여라. (단, 회전하여 같은 것은 한 가지로 센다.) [5점]

(조건) 모든 꼭짓점이 파란색인 정다각형은 없다.

답: 65

7. 포물선 $y = (x-1)^2$ 위의 네 점 A, B, C, D 가 꼭짓점인 사각형 $ABCD$ 가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) 대각선 AC 의 중점은 y -축 위에 있다.

(ii) 대각선 BD 는 대각선 AC 에 수직이다.

선분 BD 의 중점의 x -좌표를 k 라 할 때, $100k$ 의 값을 구하여라. [5점]

답: 125

8. 볼록사각형 $ABCD$ 에서 $\angle BAC = 23^\circ$, $\angle DBC = 75^\circ$, $\angle BCD = 30^\circ$ 이다. $\angle BAC$ 의 이등분선과 $\angle BDC$ 의 이등분선의 교점이 변 BC 위에 있을 때, $\angle CAD = x^\circ$ 이다. x 의 값을 구하여라. [6점]

답: 11

9. 등식 $y^2 - 2xy + x^4 = 2368$ 을 만족하는 정수 x, y 에 대하여, $x+y$ 가 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 구하여라. [5점]

답: 18

10. 방정식 $29m^2 + 34mn + 10n^2 = 170$ 을 만족하는 정수 m, n 의 순서쌍 (m, n) 의 개수를 구하여라. [6점]

답: 16



2022년 5월 28일 ; 제한시간 2시간 30분(1교시 1시간 15분, 2교시 1시간 15분)

- A. 답안지에 **수험번호와 성명, 문제유형**을 반드시 기입하십시오.
- B. 이 시험은 총 20개(오전 10개, 오후 10개)의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.

11. 실계수 6차 다항식 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) $f(0) = 2$

(ii) $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 에 대하여

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1}\right)^3$$
 이다.

 $f(1)$ 의 값을 구하여라. [5점]

답: 721

12. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수 n 의 개수를 구하여라. (단, $[a]$ 는 a 를 넘지 않는 최대정수) [6점]

(i) $n \leq 900$

(ii) $1 \leq \sqrt{n+10} - [\sqrt{n}] \leq 3$

답: 274

13. 양의 정수 n 에 대하여 $d(n)$ 을 n 의 양의 약수 중 5 이하인 것의 개수라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라. [5점]

$$d(1) + d(2) + \cdots + d(400)$$

답: 913

14. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $f : X \rightarrow Y$ 의 개수를 구하여라. [6점](i) 모든 $y \in Y$ 에 대하여 $(f \circ g)(y) = g(y)$ 를 만족하는 함수 $g : Y \rightarrow X$ 의 개수는 8이다.(ii) 모든 $y \in Y$ 에 대하여 $(f \circ h)(y) = y$ 를 만족하는 함수 $h : Y \rightarrow X$ 의 개수는 12이다.

답: 132

15. 삼각형 ABC 에서 $\overline{BC} = 30$, $\overline{AC} = 40$, $\angle ACB = 90^\circ$ 이다. 변 AC 를 지름으로 하는 원이 변 AB 와 점 $D(\neq A)$ 에서 만난다. 변 AC 의 중점을 M , 선분 CD 와 BM 의 교점을 E , 직선 AE 와 변 BC 의 교점을 F 라 하자. $25\overline{FC}$ 의 값을 구하여라. [4점]

답: 480

16. 길이가 4인 선분 AB 를 지름으로 하는 원 Ω_1 이 선분 AC 를 지름으로 하는 원 Ω_2 에 내접한다. 또한 반지름이 1인 원 Ω_3 이 원 Ω_1 에 외접하고 원 Ω_2 에 내접한다. 원 Ω_3 의 중심을 O 라 할 때, 직선 OB 는 직선 BC 에 수직이다. 선분 BC 의 수직이등분선이 Ω_2 와 만나는 점을 D 라 할 때, $9\overline{CD}^2$ 의 값을 구하여라. [5점]

답: 80

17. 삼각형 ABC 의 세 변의 길이가 각각 $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{AC} = 9$ 이다. 변 AB 의 중점을 D , 변 AC 를 2 : 1로 내분하는 점을 E 라 하자. 점 A 를 지나고 직선 BC 에 평행한 직선과 삼각형 ADE 의 외접원의 교점을 $F(\neq A)$ 라 할 때, $30\overline{AF}$ 의 값을 구하여라. [5점]

답: 115

18. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수 n 의 개수를 구하여라. (단, $[a]$ 는 a 를 넘지 않는 최대정수) [4점]

(i) $1 \leq n < 44484$

(ii) $\left[\frac{n}{10^{11}}\right] = m \left[\frac{n}{20^{22}}\right]$ 을 만족하는 정수 m 이 존재한다.

답: 23252

19. 다음 두 조건을 모두 만족하는 가장 작은 양의 정수 N 을 구하여라. [5점](i) N 의 양의 약수의 합은 짹수이지만 4의 배수는 아니다.(ii) N 의 서로 다른 소인수는 4개 이상이다.

답: 4410



제 36 회 고등부 1차시험 2교시

한국수학올림피아드

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

20. $21^{9508} + 21^5 + 1$ 은 두 소수의 곱이다. 이 두 소수 중 작은 것을

구하여라. [5점]

답: 463