



제 26 회 최종시험 첫째날

## 한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2013년 3월 23일 (오후); 제한시간 4시간 30분; 문항당 7점

1. 삼각형  $ABC$ 가  $\angle B > \angle C$ 를 만족하고, 변  $AC$  위의 점  $D$ 는  $\angle ABD = \angle C$ 를 만족한다. 삼각형  $ABC$ 의 내심을  $I$ 라고 할 때, 삼각형  $CDI$ 의 외접원과 직선  $AI$ 의 교점  $E( \neq I)$ 를 지나고  $AB$ 에 평행한 직선이 직선  $BD$ 와 만나는 점을  $P$ 라 하자. 삼각형  $ABD$ 의 내심을  $J$ ,  $A$ 의  $I$ 에 대한 대칭점을  $A'$ 이라 하고 직선  $JP$ 와 직선  $A'C$ 가 점  $Q$ 에서 만날 때,  $QJ = QA'$ 임을 보여라.

2. 다음 두 조건을 만족하는 함수  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 를 모두 구하여라.

(i) 임의의 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) \geq 0$ 이다.

(ii) 식  $ab + bc + cd = 0$ 을 만족하는 실수  $a, b, c, d$ 에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$f(a - b) + f(c - d) = f(a) + f(b + c) + f(d)$$

3. 양의 정수  $n(\geq 2)$ 에 대하여,  $1 \leq i < j \leq n$ 이고,  $i$ 가  $j$ 의 약수인 모든 정수의 순서쌍  $(i, j)$ 들의 집합을  $T$ 라 하자. 음 아닌 실수  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 이  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ 을 만족할 때 다음 식의 최댓값을  $n$ 에 대한 함수로 나타내어라.

$$\sum_{(i,j) \in T} x_i x_j$$