kmo 한국수학올림피아드

제 30 회 중등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

가형

2016년 5월 28일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.

2. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.

3. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 "7" 일 경우 "007" 이라고 기입하여야 합니다.

4. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.

5. 문제 1 ∼ 4 번은 각 4 점, 문제 17 ∼ 20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 다음 두 조건을 모두 만족하도록 좌표 평면의 제1사분면에 있는 각 정수격자점에 수를 하나씩 쓸 때, $(2016, 1050)$ 의 위치에 쓰는 수를 구하여라. (단, 정수격자점은 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점)

(i) 점 (x, x) 의 위치에는 x를 쓴다.

(ii) 점 (x, y), (y, x), $(x, x+y)$ 에는 모두 같은 수를 쓴다.

2. 열 개의 수 $0, 1, 2, \ldots, 9$ 중 다섯 개를 사용하여 5자리 수 A 를 만들고, 나머지 다섯 개를 사용하여 5자리 수 B를 만든다고 하자. $|A-B|$가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

3. 2부터 9까지의 정수 중 서로 다른 여섯 개를 선택하여 만들 수 있는 6자리 수 중 99 의 배수인 것의 개수를 구하여라.

4. 원 O에 내접하는 사각형 $ABCD$가 다음 조건을 모두 만족한다.

$$\overline{BC} = \overline{CD}, \quad \overline{AB} = \overline{AC}, \quad \angle BCD = 120^\circ$$

점 A에서 BD에 내린 수선의 발을 E라 하면, $\overline{DE} = 6\sqrt{3} - 6$이다. 원 O의 반지름의 길이를 구하여라.

5. 다음 식을 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{2016}$$

6. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 의 개수를 구하여라.

n은 k자리 수이고, n의 각 자리의 수의 합이 $12(k-1)$이다.

7. 다음 두 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 의 개수를 구하여라.

(i) $0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < 11$

(ii) $a_{k+1} - a_k \le 3 \quad (k = 1, 2, 3)$

8. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$이고 $\angle ABC > \angle CAB$이다. 점 B에서 삼각형 ABC의 외접원에 접하는 직선이 직선 AC와 점 D 에서 만난다. 선분 AC 위의 점 E는 $\angle DBC = \angle CBE$를 만족하는 점이다. $\overline{BE} = 40$, $\overline{CD} = 50$일 때, $\overline{AE}$ 의 값을 구하여라.

9. 양의 정수 k에 대하여

$$a_k = (1+\sqrt{k})(1+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})$$

라 하자. 양의 정수 m, n이

$$10\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{10}}\right) = m - \sqrt{n}$$

을 만족할 때 $m+n$의 값을 구하여라.

(뒷면에 계속)

10. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 m 중 가장 큰 것을 구하여라.

$m^2 = p^n + 3600$ 인 소수 p와 양의 정수 n이 존재한다.

11. 좌표평면에서 $(-3,3)$, $(3,3)$, $(3,-3)$, $(-3,-3)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형의 내부 또는 변 위에 있고 x좌표, y좌표가 모두 정수인 49개의 점을 생각하자. 이 중 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 모든 삼각형 중에서 무게중심이 원점인 것의 개수를 구하여라.

12. 출제취소

13. 다음 식의 값이 정수의 세제곱이 되도록 하는 가장 작은 양의 정수 n을 구하여라.

$$6n^2 - 192n + 1538$$

14. 양의 정수 n을 100으로 나눈 몫을 q, 나머지를 r이라 하자. $q^2 + r + 1$을 74로 나눈 몫이 $r+1$이고 나머지는 q일 때, n을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

15. 다음 세 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$의 개수를 구하여라.

(i) $4 \le a_1 \le 6$이고, $1 \le a_k \le 6 \quad (k = 2,3,4,5,6)$

(ii) $a_1, a_2, \ldots, a_6$이 모두 다르다.

(iii) $a_1 > a_2,\ a_2 < a_3,\ a_3 > a_4,\ a_4 < a_5,\ a_5 > a_6$

16. 삼각형 ABC는 각 A의 크기가 50°이고 $\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형이다. 변 BC의 중점 D에서 변 AB에 내린 수선의 발을 E, 점 A와 선분 DE의 중점을 지나는 직선이 변 BC와 만나는 점을 F, 선분 CE와 AD의 교점을 G라 하자. $\angle FGD = x^\circ$일 때, x의 값을 구하여라.

17. 2016보다 작은 양의 정수 n 중에서

$$\frac{(2016-n)! \times (n!)^2}{6^n}$$

의 값을 가장 작게 만드는 n을 구하여라.
(단, $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$)

18. 양의 정수 n이

$$\left[\frac{n}{10}\right] + \left[\frac{n}{100}\right] + \left[\frac{n}{1000}\right] + \left[\frac{n}{10000}\right] = 2016$$

을 만족하고 n의 각 자리의 수의 합이 20일 때, n을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 가장 큰 정수)

19. 25개의 수

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \ldots,\ \frac{1}{25}$$

중 짝수개(2개 이상)의 서로 다른 수를 선택하는 경우의 수를 N이라 하자. 각 경우마다 선택한 수를 모두 곱한다. 이렇게 하여 얻은 N개의 수를 모두 더한 값을 구하여라.

20. 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D, 변 BC의 중점을 M이라 하자. $\overline{MD} = 30$이고 $\angle BAM = \angle CAD = 15^\circ$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라. (단, $\angle A > 30^\circ$)

(끝)