제3교시

2020학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

나형

성명	

수험번호							

○ 먼저 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 기입하시오.
○ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며, '0'이 포함된 경우에는 '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

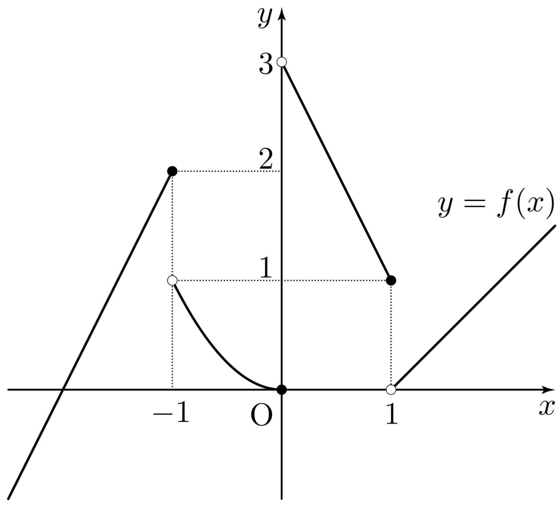
1. 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 두 부분집합 $A=\{1, 3\}$, $B=\{3, 5\}$에 대하여 집합 $A^C \cap B^C$의 모든 원소의 합은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2. $\sqrt[3]{36} \times \left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^2 = 2^a$일 때, a의 값은? [2점]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

3. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



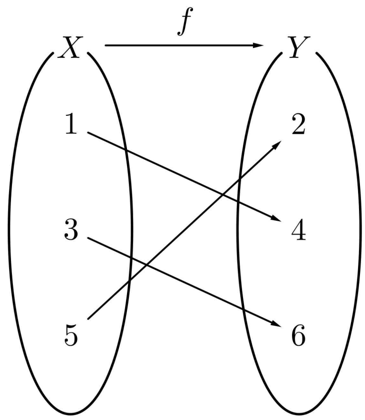
$\lim_{x \to -1+} f(x) + \lim_{x \to 0-} f(x)$의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

4. 4개의 수 6, a, 15, b가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $\frac{b}{a}$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$　② 3　③ $\frac{5}{2}$　④ 4　⑤ $\frac{7}{2}$

5. 그림은 함수 $f: X \to Y$를 나타낸 것이다.



함수 $g: Y \to X$에 대하여 함수 $g \circ f: X \to X$가 항등함수일 때, $g(6)+(f \circ g)(4)$의 값은? [3점]

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

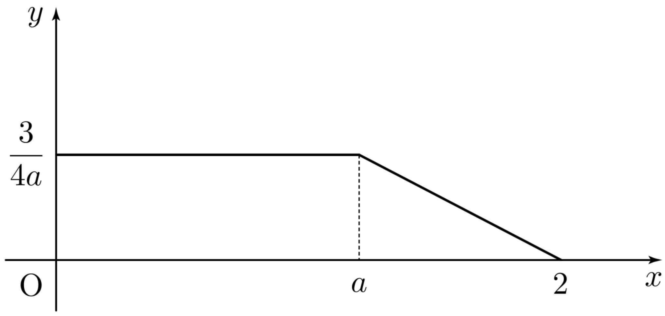
6. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A \cap B)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A^C \cup B)=\frac{2}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

7. 연속확률변수 X가 가지는 값의 범위는 $0 \le X \le 2$이고 X의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같이 두 점 $\left(0,\ \frac{3}{4a}\right)$, $\left(a,\ \frac{3}{4a}\right)$을 이은 선분과 두 점 $\left(a,\ \frac{3}{4a}\right)$, $(2,\ 0)$을 이은 선분으로 이루어져 있다. $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \le X \le 2\right)$의 값은? (단, a는 양수이다.) [3점]



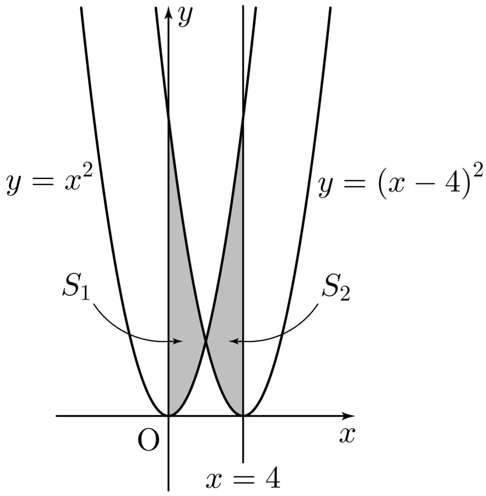
① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{11}{16}$ ③ $\frac{17}{24}$ ④ $\frac{35}{48}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

8. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h \to 0}\frac{f(1+h)-3}{h}=2$일 때, 함수 $g(x)=(x+2)f(x)$에 대하여 $g'(1)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

9. 두 곡선 $y=x^2$, $y=(x-4)^2$과 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 곡선 $y=x^2$, $y=(x-4)^2$과 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 할 때, S_1+S_2의 값은? [3점]

① 30　② 32　③ 34　④ 36　⑤ 38



10. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(5,\ p)$를 따르고,

$$\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(X=4)$$

일 때, $\mathrm{E}(6X)$의 값은? (단, $0<p<1$) [3점]

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

11. 함수

$$f(x)=\begin{cases} a & (x<1) \\ x+3 & (x\ge 1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $(x-a)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12. 실수 x에 대한 두 조건 p, q가 다음과 같다.

$$p : (x-a+7)(x+2a-18)=0,$$

$$q : x(x-a) \leq 0$$

p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은? [3점]

① 24 ② 25 ③ 26 ④ 27 ⑤ 28

13. 어느 도시의 직장인들이 하루 동안 도보로 이동한 거리는 평균이 $m$km, 표준편차가 1.5km인 정규분포를 따른다고 한다. 이 도시의 직장인들 중에서 36명을 임의추출하여 조사한 결과 36명이 하루 동안 도보로 이동한 거리의 평균은 $\overline{x}$km이었다. 이 결과를 이용하여, 이 도시의 직장인들이 하루 동안 도보로 이동한 거리의 평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하면 $a \le m \le 6.49$이다. a의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

① 5.46 ② 5.51 ③ 5.56 ④ 5.61 ⑤ 5.66

14. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n}{2-a_n} & (a_n>2) \\ a_n+2 & (a_n \le 2) \end{cases}$$

이다. $\sum_{k=1}^{m} a_k=12$를 만족시키는 자연수 m의 최솟값은? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

15. 두 양수 a, $b\,(a>b)$에 대하여

$$9^{a}=2^{\frac{1}{b}},\ (a+b)^{2}=\log_{3}64$$

일 때, $\dfrac{a-b}{a+b}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

16. 1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 6장의 카드를 모두 일렬로 나열할 때, 서로 이웃하는 두 카드에 적힌 수를 곱하여 만들어지는 5개의 수가 모두 짝수인 경우의 수는? [4점]

① 120 ② 126 ③ 132 ④ 138 ⑤ 144

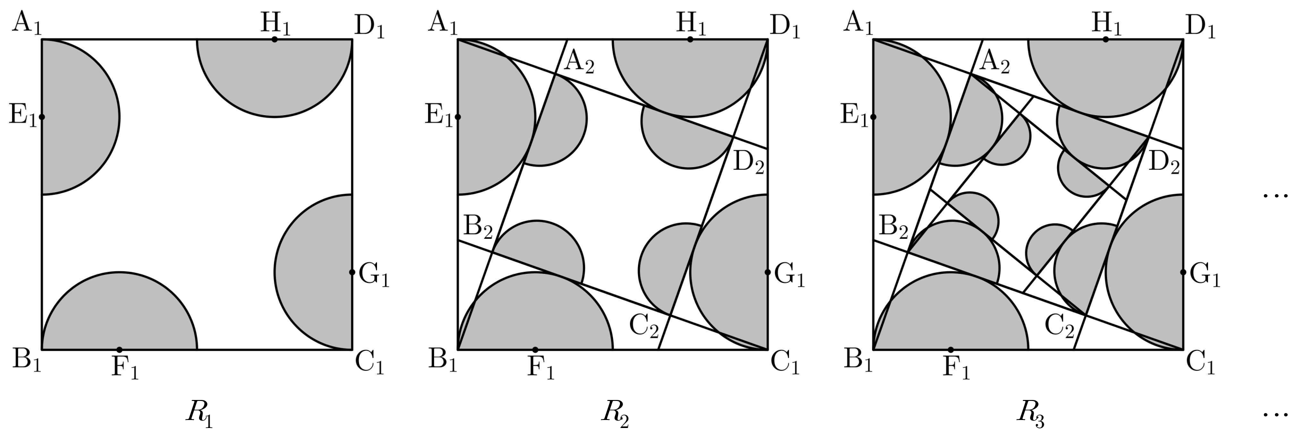
17. 집합 $X=\{x \mid x>0\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}+1 & (0<x\le 3) \\ -\dfrac{1}{x-a}+b & (x>3) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 일대일 대응일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\dfrac{13}{4}$ ② $\dfrac{10}{3}$ ③ $\dfrac{41}{12}$ ④ $\dfrac{7}{2}$ ⑤ $\dfrac{43}{12}$

18. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 4개의 선분 A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1을 $1:3$으로 내분하는 점을 각각 E_1, F_1, G_1, H_1이라 하고, 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에 점 E_1, F_1, G_1, H_1 각각을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}\overline{A_1B_1}$인 4개의 반원을 그린 후 이 4개의 반원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 A_1을 지나고 중심이 H_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선과 점 B_1을 지나고 중심이 E_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선의 교점을 A_2, 점 B_1을 지나고 중심이 E_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선과 점 C_1을 지나고 중심이 F_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선의 교점을 B_2, 점 C_1을 지나고 중심이 F_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선과 점 D_1을 지나고 중심이 G_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선의 교점을 C_2, 점 D_1을 지나고 중심이 G_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선과 점 A_1을 지나고 중심이 H_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선의 교점을 D_2라 하자. 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 4개의 반원을 그리고 이 4개의 반원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{9\sqrt{2}\pi}{4}$ ② $\frac{19\sqrt{2}\pi}{8}$ ③ $\frac{5\sqrt{2}\pi}{2}$ ④ $\frac{21\sqrt{2}\pi}{8}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{2}\pi}{4}$

19. 다음은 자연수 n에 대하여 방정식 $a+b+c=3n$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$ 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 선택한 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$가

$a>b$ 또는 $a>c$

를 만족시킬 확률을 구하는 과정이다.

방정식

$a+b+c=3n \ \cdots\cdots \ (*)$

을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $\boxed{\text{(가)}}$이다.
방정식 $(*)$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$가 $a>b$ 또는 $a>c$를 만족시키는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 방정식 $(*)$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$가 $a \le b$와 $a \le c$를 만족시키는 사건이다.
이제 $n(A^C)$의 값을 구하자.
자연수 $k\,(1 \le k \le n)$에 대하여 $a=k$인 경우,
$b \ge k$, $c \ge k$이고 방정식 $(*)$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는
$\boxed{\text{(나)}}$ 이므로

$$n(A^C)=\sum_{k=1}^{n}\boxed{\text{(나)}}$$

이다.
따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 식에 $n=2$를 대입한 값을 p, (나)에 알맞은 식에 $n=7$, $k=2$를 대입한 값을 q, (다)에 알맞은 식에 $n=4$를 대입한 값을 r라 할 때, $p \times q \times r$의 값은? [4점]

① 88 ② 92 ③ 96 ④ 100 ⑤ 104

20. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq a) \\ 2a-f(x) & (f(x)<a) \end{cases} \quad (a\text{는 상수})$$

라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=4$에서만 미분가능하지 않다.
(나) 함수 $g(x)-f(x)$는 $x=\frac{7}{2}$에서 최댓값 $2a$를 가진다.

$f\left(\frac{5}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ 2 ⑤ $\frac{9}{4}$

21. 함수 $f(x)=(x-2)^3$과 두 실수 m, n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (|x|<a) \\ mx+n & (|x|\geq a) \end{cases} \quad (a>0)$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a=1$일 때, $m=13$이다.

ㄴ. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, $m=48$이다.

ㄷ. $f(a)-2af'(a)>n-ma$를 만족시키는 자연수 a의 개수는 5이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. $\lim_{n\to\infty}\frac{a\times 3^{n+2}-2^n}{3^n-3\times 2^n}=207$ 일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

23. 자연수 n에 대하여 좌표평면에서 직선 $x=n$이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점을 A_n, 직선 $x=n$이 직선 $y=-2x$와 만나는 점을 B_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{9}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$의 값을 구하시오. [3점]

24. 무리함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}$ 에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 가 점 $(2,\ 3)$ 에서 만날 때, $f(-6)$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

25. 이차함수 $f(x)$ 가 $f(0)=0$ 이고

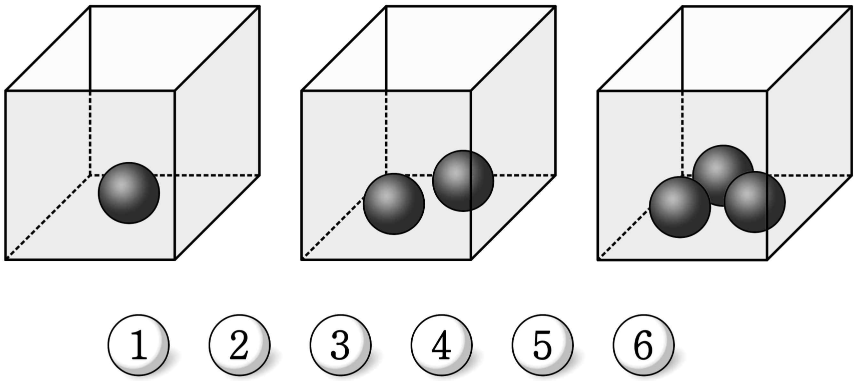
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x}{x-1}$$

일 때, $60\times f'(0)$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 두 눈의 수의 최대공약수가 1일 때, 나온 두 눈의 수의 합이 8일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

27. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\int_{1}^{x}(2x-1)f(t)\,dt=x^3+ax+b$일 때, $40\times f(1)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

28. 그림과 같이 같은 종류의 검은 공이 각각 1개, 2개, 3개가 들어 있는 상자 3개가 있다. 1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 6개의 흰 공을 3개의 상자에 남김없이 나누어 넣으려고 한다. 각각의 상자에 들어 있는 공의 개수가 모두 3의 배수가 되도록 6개의 흰 공을 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 흰 공이 하나도 들어 있지 않은 상자가 있을 수 있고, 공을 넣는 순서는 고려하지 않는다.) [4점]



29. 수열 $\{a_n\}$은 a_1이 자연수이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-d & (a_n \geq 0) \\ a_n+d & (a_n < 0) \end{cases} \quad (d\text{는 자연수})$$

이다. $a_n<0$인 자연수 n의 최솟값을 m이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{m-2}+a_{m-1}+a_m=3$

(나) $a_1+a_{m-1}=-9(a_m+a_{m+1})$

(다) $\sum_{k=1}^{m-1} a_k=45$

a_1의 값을 구하시오. (단, $m \geq 3$) [4점]

30. 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$가 $0 \le x < 4$에서

$$h(x) = \begin{cases} x & (0 \le x < 2) \\ f(x) & (2 \le x < 3) \\ g(x) & (3 \le x < 4) \end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $h(x) = h(x-4) + k$ (k는 상수)이다.
(나) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(다) $\int_0^4 h(x)\,dx = 6$

$h\left(\dfrac{13}{2}\right) = \dfrac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]