

2024년 5월 18일; 제한시간 2시간 30분

- A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
- B. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
- C. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 “7”일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
- D. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
- E. 문제 1~4 번은 각 4 점, 문제 17~20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. [정답. 72]

예각삼각형 ABC 에서 점 D, E 는 각각 변 AB, BC 위의 점이다. 선분 AE 와 CD 의 교점을 F 라 할 때, 네 점 B, E, F, D 는 한 원 위에 있고, $\angle AFC = 126^\circ$ 이다. $\angle BAE + \angle BCD = a^\circ$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

2. [정답. 256]

다음 세 조건을 모두 만족하는 집합 S 의 개수를 구하여라.

(i) $S \subseteq \{1, 2, \dots, 10\}$

(ii) $|S \cap \{1, 2\}| = 1$

(iii) S 의 모든 원소의 합은 짝수이다.

3. [정답. 400]

다음 조건을 만족하는 1000 이하의 양의 정수 n 의 개수를 구하여라.

(조건) 두 등식 $2x + y = n^2$ 과 $x + 3y = n$ 을 모두 만족하는 정수 x, y 가 존재한다.

4. [정답. 125]

다음 두 등식을 모두 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2$ 의 값을 구하여라.

$$x^2 + 10y = 50, \quad y^2 + 20x = -175$$

5. [정답. 27]

외접원이 Ω_1 인 삼각형 ABC 에서 $\overline{AC} = \overline{BC} = 8$ 이고 $\angle C = 120^\circ$ 이다. 원 Ω_2 는 점 A 에서 원 Ω_1 과 외접하고 직선 BC 와 점 D 에서 접한다. 직선 AB 와 원 Ω_2 의 교점을 $E (\neq A)$ 라 하고, 삼각형 BDE 의 넓이를 S 라 할 때, $(\frac{S}{12} - 5)^2$ 의 값을 구하여라.

6. [정답. 401]

다음 정수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라. (단, $[a]$ 는 a 를 넘지 않는 가장 큰 정수)

$$\left[\left(10 + 3\sqrt{11} \right)^{2024} \right]$$

7. [정답. 787]

다음 등식을 만족하는 12 이하의 양의 실수 x 의 개수를 구하여라. (단, $[a]$ 는 a 를 넘지 않는 가장 큰 정수)

$$x^3 + 16x - 8x^2 = [x^3 + 16x] - [8x^2]$$

8. [정답. 51]

다음 조건을 만족하도록 정사각형의 각 꼭짓점에 1, 2, 3, 4, 5 중 하나의 수를 적는 경우의 수를 구하여라. (단, 회전하여 같은 것은 한 가지로 세며, 같은 수를 여러 번 적을 수 있다.)

(조건) 정사각형의 각 변의 양 끝점에 적힌 두 수의 곱은 짝수이다.

9. [정답. 90]

반지름이 $10\sqrt{7}$ 인 원에 내접하는 사각형 $ABCD$ 에서 각 B 가 둔각이고, $\overline{AD} = 50$ 이다. 점 C 에서 직선 AB 에 내린 수선의 발을 H , 직선 BD 와 CH 의 교점을 E 라 하자. $\overline{EH} = \overline{CH}$ 일 때, $840 \left(\frac{\overline{BH}}{\overline{BC}} \right)^2$ 의 값을 구하여라.

10. [정답. 8]

다음 조건을 만족하는 실계수 다항식 $P(x)$ 에서 x^7 의 계수를 a 라 할 때, $12a$ 의 값을 구하여라.

(조건) 모든 양의 정수 n 에 대하여

$$P(n) = 1^8 + 2^8 + \dots + n^8$$

11. [정답. 450]

다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 실수 a_1, a_2, \dots, a_{100} 에 대하여 a_{100} 의 값을 구하여라.

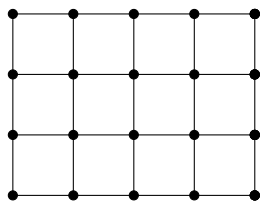
(i) $a_1 = \frac{9}{2}, a_2 = \frac{5}{3}, a_3 = \frac{4}{5}$

(ii) 4 이상 100 이하의 양의 정수 n 에 대하여

$$a_n = a_{n-3} + \frac{3(n-1)(n-2)}{a_{n-1}a_{n-2}}$$

12. [정답. 93]

다음과 같이 1×1 정사각형 12개를 붙여서 만든 도형이 있다. 이 도형의 20개의 꼭짓점 중에서 2개 이상을 지나는 직선의 개수를 구하여라.



13. [정답. 32]

사각형 $ABCD$ 가 중심이 I 인 내접원을 갖는다. $\overline{AI} = 8$, $\overline{BI} = 16$, $\overline{CI} = 12$, $\overline{DI} = 6$ 일 때, $18 \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ 의 값을 구하여라.

14. [정답. 125]

복소수 $z (\neq 1)$ 은 $z^5 = 1$ 을 만족한다. 다항식

$$p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$

에 대하여 $p(z)p(z^2)p(z^3)p(z^4)$ 의 값을 구하여라.

15. [정답. 506]

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = 2023 + \frac{2024}{x}$ 에 대하여

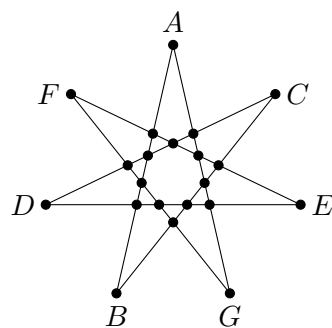
$$\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{f \text{가 } 2024 \text{개}}(x) = \frac{cx + d}{ax + b}$$

일 때, $\frac{d - 2024^2 a}{4(a - d)}$ 의 값을 구하여라. (단, a, b, c, d 는 실수)

16. [정답. 932]

다음 그림과 같이 7개의 선분 $AB, BC, CD, DE, EF, FG, GA$ 와 이 7개 선분의 교점 21개로 구성된 도형이 있다. 다음 조건을 만족하도록 21개의 교점 각각에 1 또는 2를 적는 방법의 수를 구하여라.

(조건) 각 선분 $AB, BC, CD, DE, EF, FG, GA$ 위에 적힌 여섯 개의 수들의 합이 모두 같다.



17. [정답. 936]

실수 $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$ 가 다음 두 조건을 모두 만족할 때, $[1000 - a_{2024}]$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 가장 큰 정수)

(i) $a_1 = 1$

(ii) 모든 $n = 1, 2, \dots, 2023$ 에 대하여 $a_n(a_{n+1} - a_n) = 1$

18. [정답. 440]

다음 식을 만족하는 15 이하의 서로 다른 양의 정수 a_1, a_2, \dots, a_{15} 의 순서쌍 $(a_1, a_2, \dots, a_{15})$ 의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

$$|a_1^2 - a_2^2| + |a_2^2 - a_3^2| + \dots + |a_{15}^2 - a_1^2| = 458$$

19. [정답. 625]

다음 조건을 만족하는 가장 작은 양의 정수 n 을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(조건) $2024n$ 의 각 자리의 수는 0 또는 1이다.

20. [정답. 256]

예각삼각형 ABC 에서 $\overline{AB} = 15$, $\overline{BC} = 10$, $\overline{CA} = 14$ 이다. 점 D, E 는 각각 변 AB, AC 위의 점으로 선분 CD 와 BE 는 서로 수직이다. 직선 DE 와 BC 는 점 F 에서 만나고 선분 CD 와 BE 는 점 G 에서 만난다. 사각형 $AGCF$ 가 원 O 에 내접하고, 직선 AB 와 원 O 의 교점을 $P (\neq A)$ 라 할 때, $(\overline{BP})^2$ 의 값을 구하여라.