제 24회 한국수학올림피아드 1차시험(중등부)

유형 가

2010 년 6 월 5 일; 제한시간 4 시간

1. 답안지에 수험번호와 성명, 지원분야, 문제유형을 반드시 기입하십시오.

2. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.

3. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 "7" 일 경우 "007" 이라고 기입하여야 합니다.

4. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.

5. 문제 1～4 번은 각 4 점, 문제 17～20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 두 다항식

$$P(x) = x^2 + a\ (a \neq 0), Q(x) = x^3 + bx + c$$

가 $P(Q(x)) = Q(P(x))$ 를 만족할 때 $Q(10)$의 값을 구하여라.

2. 원 O에 외접하는 볼록사각형 $ABCD$의 마주보는 두 변 AB와 CD가 평행하다. 원 O와 변 AB의 교점을 P, 원 O와 변 CD의 교점을 Q라고 하자. 선분 AP, BP, CQ의 길이가 각각 175, 147, 75 일 때, 선분 DQ의 길이를 구하여라.

3. 두 삼각형 ABC와 DEF에서

$$\angle A = 60^\circ,\ AB = 36,\ AC = 40$$

이고,

$$\angle D = 60^\circ,\ DE = 18$$

이다. $\angle ABC + \angle DEF = 180^\circ$일 때, 선분 DF의 길이를 구하여라.

4. 8개의 수 $1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5$ 중 4개를 택하여 만들 수 있는 네 자리 양의 정수의 개수를 구하여라.

5. 모든 실수 x에 대하여

$$(x^2 + (7-p)x + 2)(px^2 + 12x + 2p) \geq 0$$

을 만족시키는 정수 p의 개수를 구하여라.

6. 두 동점 P, Q가 $AB = 3m$, $BC = 4m$인 직사각형 $ABCD$의 둘레를 각각 분속 $2m$ 와 $3m$로 움직인다. 시각 $t = 0$분에 점 A에서 동시에 출발하여 $A \to B \to C \to D \to A \to \cdots$ 방향으로 60분 동안 움직일 때 두 동점 사이의 거리(선분 PQ의 길이)가 $5m$가 되는 모든 시각 t(분)의 합을 구하여라.

7. 양의 정수 n에 대하여 $\sqrt{n+100}$에 가장 가까운 정수를 a_n이라고 할 때

$$7\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{100}}\right)$$

의 값을 구하여라.

8. 양의 정수 n에 대하여 $f(n)$은 완전제곱이 아닌 양의 정수 중 n번째 수라 하자. 예를 들어,

$$f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 5,\ f(4) = 6$$

이다. 이 때, $f(2010)$를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

9. 볼록사각형 $ABCD$에서

$$\angle DBC = \angle CDB = 45^\circ,\ \angle BAC = \angle DAC$$

이고 $AB = 5$, $AD = 1$일 때, $(BC)^2$을 구하여라.

10. 다음 등식을 만족시키는 양의 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라.

$$50x + 51y + 52z = 2010$$

11. 양의 정수 n에 대하여

$$a_n = \sqrt{\frac{n}{8}} + \sqrt{\frac{128}{n}}$$

이라고 하자. $a_1, \ldots, a_{127}$ 중에서 a_{63} 보다 큰 항의 개수를 구하여라.

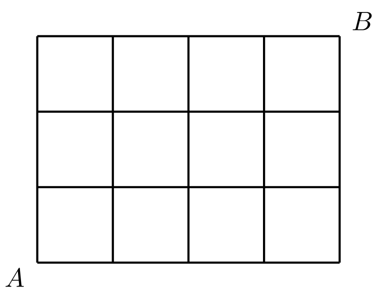
12. 반지름이 100인 원 T_1의 중심 O_1에서 반지름이 200인 원 T_2의 중심 O_2까지의 거리가 500이다. 또, 반지름이 150이고 점 P가 중심인 원 T가 각각 점 A와 B에서 원 T_1과 T_2에 외접한다. 점 A와 B에서의 원 T의 두 접선이 만나는 점이 C이고 점 C를 지나고 직선 O_1O_2에 수직인 직선이 l일 때, 점 P에서 직선 l까지의 거리를 구하여라.

13. 다음 등식을 만족시키는 양의 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하여라.

$$\frac{3}{18620} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

14. 유리수 $\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{46} + \frac{1}{47}$을 기약분수 $\frac{p}{q}$로 표현하자. 이때, 분자 p의 약수 중 가장 작은 소수를 구하여라.

15. 다음 그래프의 각 변의 길이는 모두 1이다. A에서 B까지의 가는 경로 중 길이가 9이면서 같은 변을 두 번 이상 지나지 않는 것의 개수를 구하여라.



16. 좌표평면에서 x-좌표, y-좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 하자. 다음 명제가 참이 되는 양의 정수 n 중 가장 작은 수를 구하여라.

"임의의 n개의 격자점 중에는 두 점이 존재하여 그 두 점을 잇는 선분의 삼등분점이 격자점이다."

17. 실수

$$A = \sqrt{\frac{5}{5^2+1}} + \sqrt{\frac{6}{6^2+1}} + \cdots + \sqrt{\frac{898}{898^2+1}}$$

보다 작은 양의 정수의 개수를 구하여라.

18. 집합 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$에 대하여 다음 조건 (a), (b), (c)를 모두 만족시키는 함수 $f : S \to S$의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(a) n이 3의 배수이면 $f(n)$은 3의 배수가 아니다.

(b) n이 3의 배수가 아니면 $f(n)$은 3의 배수이다.

(c) $f(f(n)) = n$을 만족하는 n의 개수는 6개이다.

19. 원에 내접하는 사각형 $ABCD$의 꼭지점 B에서 직선 AD와 CD에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하고, 꼭지점 D에서 직선 AB와 BC에 내린 수선의 발을 각각 H_3, H_4라 하자. 직선 H_1H_3과 H_2H_4가 서로 평행하고, 변 AB, BC, CD의 길이가 각각 50, 30, $30\sqrt{2}$일 때 변 AD의 길이를 구하여라.

20. 두 수 $n^2 + 3m$과 $m^2 + 3n$이 모두 완전제곱수가 되게 하는 양의 정수 m, n에 대하여 mn의 최댓값을 구하여라.