

2017년 11월 12일 (오후) ; 제한시간 3시간 ; 문항당 7점

5. 소수 p 가 주어졌을 때, 다음 조건을 만족하는 정수 a, b 가 존재함을 보여라.

모든 정수 m 에 대하여 $m^3 + 2017am + b$ 는 p 의 배수가 아니다.

6. 사각형 $ABCD$ 에서 $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ 이며, $\overline{CD} < \overline{BC}$ 이다. AC 와 BD 의 교점을 E 라 하고, 선분 BD 의 수직이등분선이 BC 와 만나는 점을 F 라 하자. 점 F 를 중심으로 하고 점 B 를 지나는 원은 선분 AB 와 점 $P (\neq B)$ 에서 만나고, 선분 AC 와 점 Q 에서 만난다. 선분 EP 의 중점을 M 이라 하자. 삼각형 EPQ 의 외접원이 AB 에 접할 필요충분조건이 세 점 B, M, Q 가 한 직선 위에 있는 것임을 보여라.

7. 다음 조건을 만족하는 함수 $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ 이 존재하도록 하는 실수 c 를 모두 구하여라.

$$\text{음이 아닌 모든 실수 } x, y \text{에 대하여 } f(x + y^2) \geq cf(x) + y$$

(단, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 은 음이 아닌 실수 전체의 집합이며, \mathbb{R} 은 실수 전체의 집합이다.)

8. 양의 정수 n 에 대하여, 총 $2n$ 명의 학생이 있는 학교가 있다. 이 학교 학생들로 이루어진 집합 X 에 대하여, X 에 속한 임의의 서로 다른 두 학생이 서로 아는 사이이면 그 집합 X 를 잘 짜인 집합이라 부르자. 잘 짜인 집합의 학생 수의 최댓값이 n 이하일 때, 이 학교에서 만들 수 있는 잘 짜인 집합의 개수의 최댓값을 구하여라. 단, 공집합이나 학생 1명의 집합 역시 잘 짜인 집합이다.