중등부

제25회 2차시험 (중등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2011년 8월 21일 (오후); 제한시간 2시간 30분; 문항당 7점

5. 삼각형 $ABC(AB \neq AC)$의 수심을 H, 외심을 O, 변 BC의 중점을 M이라 하자. 직선 HM과 직선 AO가 만나는 점을 D라 하고, AB, CD, AC, BD의 중점을 각각 P, Q, R, S라 하자. 직선 PQ와 직선 RS의 교점을 X라 할 때 $\dfrac{AH}{OX}$를 구하여라.

6. 양의 정수 n에 대하여 집합 S_n을

$$S_n = \{(a,b) | a\text{와 } b\text{는 양의 정수이고 } a\text{와 } b\text{의 최소공배수는 } n\text{이다}\}$$

라 하고, S_n의 각 원소 (a,b)에 대하여 $\phi(a)\phi(b)$의 값을 구한 후 이 값을 모두 합한 것을 $f(n)$이라 하자. (단, $\phi(n)$은 n과 서로소이며 n보다 작거나 같은 양의 정수의 개수이다.)

n과 서로소인 소수 p가 $f(n)$의 약수이면, n의 소인수 q 중에는 q^2-1이 p의 배수가 되게 하는 것이 존재함을 보여라.

7. 실수 $x_1, x_2, \ldots, x_{2011}$이 각각 $0 \leq x_i \leq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, 2011)$을 만족할 때,

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{2011}^3 - (x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + \cdots + x_{2011}x_1x_2)$$

의 최댓값을 구하여라.

8. 서로 다른 nr개의 양의 정수를 학생 n명에게 각각 r개씩 나누어 주었다. 이 때 다음 조건을 만족시키도록 학생들을 $4r$개 이하의 반으로 편성할 수 있음을 증명하여라. (단 n, r은 양의 정수)

> 임의의 학생 A가 양의 정수 m을 가지고 있으면, A가 아닌 학생 중 $(m-1)!$ 보다 크고 $(m+1)!+1$ 보다 작은 양의 정수를 가진 학생은 A와 같은 반이 될 수 없다.