

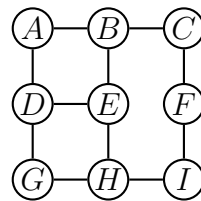
2018년 11월 11일 (오후); 제한시간 3시간; 문항당 7점

5. 볼록사각형  $ABCD$ 에서 각  $A$ 의 이등분선이 각  $B$ 의 이등분선, 각  $D$ 의 이등분선과 만나는 점을 각각  $P, Q$ 라 하고, 각  $C$ 의 이등분선이 각  $D$ 의 이등분선, 각  $B$ 의 이등분선과 만나는 점을 각각  $R, S$ 라 하자. 이때 네 점  $P, Q, R, S$ 는 모두 다른 점이고, 두 선분  $PR$ 과  $QS$ 가 점  $Z$ 에서 수직으로 만난다. 각  $A, B, C, D$ 의 외각의 이등분선을 각각  $\ell_A, \ell_B, \ell_C, \ell_D$ 라 하고,  $\ell_A$ 와  $\ell_B$ 의 교점을  $E$ ,  $\ell_B$ 와  $\ell_C$ 의 교점을  $F$ ,  $\ell_C$ 와  $\ell_D$ 의 교점을  $G$ ,  $\ell_D$ 와  $\ell_A$ 의 교점을  $H$ 라 하자. 사각형  $EFGH$ 의 네 변  $FG, GH, HE, EF$ 의 중점을 각각  $K, L, M, N$ 이라 할 때, 사각형  $KLMN$ 의 넓이는  $\overline{ZM} \cdot \overline{ZK} + \overline{ZL} \cdot \overline{ZN}$ 임을 보여라.

6. 서로 다른  $n$ 개의 양의 정수로 이루어진 집합  $S$ 에 대하여, 다음 조건을 만족하는 일대일 대응  $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow S$ 가 항상 존재함을 보여라. (단,  $n$ 은 3 이상인 정수이다.)

모든  $1 \leq i < j < k \leq n$ 에 대하여,  $(f(j))^2 \neq f(i) \cdot f(k)$ 이다.

7. 아래 그림과 같이 9개의 작은 원판  $A, B, \dots, I$ 와 11개의 선분으로 이루어진 도형이 있다. 모든 원판에 실수를 하나씩 쓰고, 각 선분에는 선분의 양 끝 원판에 적힌 두 실수의 차의 제곱을 적는다. 원판  $A$ 에는 0, 원판  $I$ 에는 1을 쓰자. 이때 모든 선분에 적힌 수의 합이 될 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라.



8. 양의 정수  $a, c$ 에 대하여  $b$ 는  $ac-1$ 의 양의 약수이다. 1보다 작은 양의 유리수  $r$ 에 대하여, 집합  $A(r)$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$A(r) = \{m(r - ac) + nab \mid m, n \text{은 정수}\}$$

이때  $A(r)$ 의 원소 중 가장 작은 양의 유리수가  $\frac{ab}{a+b}$  이상이 되는  $r$ 을 모두 구하여라.