고등부

제 27 회 2차시험 (고등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2013년 11월 10일 (오후) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7점

5. 다음 조건을 만족하는 함수 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$를 모두 구하여라.

임의의 양의 정수 m, n에 대하여 $f(mn)=\operatorname{lcm}(m,n)\cdot\gcd(f(m),f(n))$이다.

(단, $\mathbb{N}$은 양의 정수 전체의 집합이고, $\operatorname{lcm}(m,n)$과 $\gcd(m,n)$은 각각 m, n의 최소공배수와 최대공약수이다.)

6. 외심이 O인 삼각형 ABC의 변 BC 위의 점 P에 대하여, P를 지나고 B에서 AB에 접하는 원과 P를 지나고 C에서 AC에 접하는 원이 점 $Q(\neq P)$에서 만난다. Q에서 직선 AB와 AC에 내린 수선의 발을 각각 D와 E라고 할 때, DE와 BC의 교점을 R이라 하자. 세 점 O, P, Q가 한 직선 위에 있으면 세 점 A, R, Q도 한 직선 위에 있음을 보여라.

7. 양의 정수 k에 대하여, 정수로 이루어진 수열 $\{b_n\}$과 $\{c_n\}$이 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
&b_1=1, && b_{2n}=kb_{2n-1}+(k-1)c_{2n-1}, && b_{2n+1}=b_{2n}+(k-1)c_{2n}, &\\
&c_1=1, && c_{2n}=b_{2n-1}+c_{2n-1}, && c_{2n+1}=b_{2n}+kc_{2n} && (n\geq 1)
\end{aligned}$$

양의 정수 k에 대하여 얻어진 b_{2014}를 a_k라 할때

$$\sum_{k=1}^{100}\left(a_k-\sqrt{a_k^2-1}\right)^{\frac{1}{2014}}$$

를 구하여라.

8. 양의 정수 a, b, c, d에 대하여, 평면 위에 $a+b+c+d$개의 점으로 이루어진 집합 X가 있다. X의 어떠한 세 점도 한 직선 위에 있지 않다면 다음 조건을 모두 만족하는 두 직선 ℓ_1, ℓ_2가 존재함을 보여라.

(i) 두 직선 ℓ_1, ℓ_2는 서로 평행하지 않다.

(ii) 두 직선 ℓ_1, ℓ_2는 집합 X의 어느 점도 지나지 않는다.

(iii) 두 직선 ℓ_1과 ℓ_2로 평면을 나누었을 때 만들어지는 네 영역이 X의 원소를 각각 a, b, c, d개 포함한다.