2017학년도 3월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학'가'형 정답

1	⑤	2	④	3	②	4	①	5	③
6	⑤	7	①	8	③	9	①	10	⑤
11	②	12	③	13	④	14	⑤	15	④
16	①	17	③	18	②	19	④	20	②
21	②	22	5	23	16	24	29	25	28
26	31	27	72	28	17	29	125	30	243

해 설

1. [출제의도] 다항식의 뺄셈을 계산한다.

$A-B=3x^2-2x+1-(x^2-x-3)$
$\quad =3x^2-2x+1-x^2+x+3$
$\quad =2x^2-x+4$

2. [출제의도] 교집합을 이해하여 원소의 합을 구한다.

$A\cap B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}\cap\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$
$\quad =\{2,\ 6\}$
따라서 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은
$2+6=8$

3. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 지수를 계산한다.

$8^{\frac{2}{3}}\times 27^{-\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}\times(3^3)^{-\frac{1}{3}}$
$\quad =2^2\times 3^{-1}$
$\quad =\dfrac{4}{3}$

4. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 나머지를 계산한다.

$f(x)=2x^3+6x^2+3$이라 하면 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $f(-1)$이므로
$f(-1)=2\times(-1)^3+6\times(-1)^2+3$
$\quad =7$

5. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 항을 계산한다.

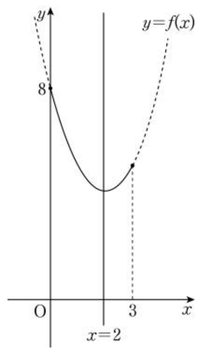
$a_1=1$이고, $a_{n+1}=2na_n-1$에 $n=1,\ 2,\ 3$을 차례로 대입하면
$a_2=2\times1\times a_1-1$
$\quad =2\times1-1=1$
$a_3=2\times2\times a_2-1$
$\quad =4\times1-1=3$
$a_4=2\times3\times a_3-1$
$\quad =6\times3-1=17$

6. [출제의도] 선분의 외분점을 이해하여 두 점 사이의 거리를 구한다.

두 점 $\mathrm{A}(0,\ 4)$, $\mathrm{B}(2,\ 3)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점을 C라 하면
$\mathrm{C}\left(\dfrac{2\times2-1\times0}{2-1},\ \dfrac{2\times3-1\times4}{2-1}\right)$
즉 $\mathrm{C}(4,\ 2)$
따라서 원점 O와 점 C 사이의 거리는
$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{(4-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{20}$
$\quad =2\sqrt{5}$

7. [출제의도] 이차함수의 그래프의 대칭성을 이해하여 이차함수의 최댓값을 구한다.

$f(x)=x^2+ax+b$
$\quad =\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b$
이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로
$-\dfrac{a}{2}=2$에서 $a=-4$이다.



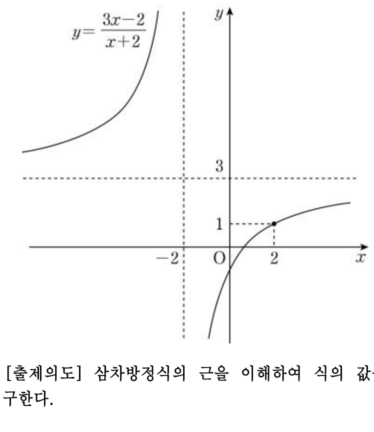
이때 $0\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)$이므로
$f(0)=8$, 즉 $b=8$이다.
따라서 $a+b=(-4)+8=4$

[다른 풀이]

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로
$f(x)=(x-2)^2+k=x^2-4x+4+k$ (k는 상수)
라 할 수 있다.
따라서 $a=-4$이다.
이때 $0\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)$이므로
$f(0)=4+k=8$
즉 $b=8$이다.
따라서 $a+b=(-4)+8=4$

8. [출제의도] 유리함수의 그래프의 대칭성을 이해하여 미지수를 구한다.

$y=\dfrac{3x+b}{x+a}$
$\quad =\dfrac{-3a+b}{x+a}+3$ …… ㉠
㉠의 그래프가 점 $(-2,\ c)$에 대하여 대칭이므로
$a=2,\ c=3$
㉠의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지나므로
$1=\dfrac{6+b}{2+a}$에서 $a-b=4$
$b=-2$
따라서
$a+b+c=2+(-2)+3=3$



9. [출제의도] 삼차방정식의 근을 이해하여 식의 값을 구한다.

-1	2	1	2	3
		-2	1	-3
	2	-1	3	0

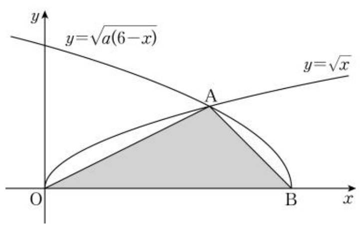
$2x^3+x^2+2x+3=(x+1)(2x^2-x+3)$
따라서 α는 이차방정식 $2x^2-x+3=0$의 허근이다.
$2\alpha^2-\alpha+3=0$이므로
$4\alpha^2-2\alpha+7=2(2\alpha^2-\alpha+3)+1$
$\quad =1$

10. [출제의도] 이차함수의 그래프를 이해하여 부등식의 영역 문제를 해결한다.

$y=x^2-2ax+a^2+a-3$
$\quad =(x-a)^2+a-3$
이므로 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$(a,\ a-3)$
$x^2+y^2-2y-57=0$
$x^2+(y-1)^2=58$ …… ㉠
점 $(a,\ a-3)$이 원 ㉠의 내부에 있으므로
$a^2+(a-3-1)^2<58$
$a^2-4a-21<0$
$(a+3)(a-7)<0$
$-3<a<7$
따라서 정수 a는
$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
으로 그 개수는 9이다.

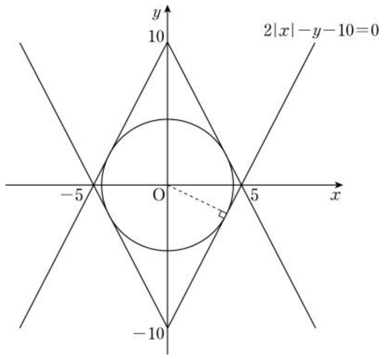
11. [출제의도] 삼각형의 넓이를 이해하여 점의 좌표를 구하고, 무리함수 문제를 해결한다.

점 A의 좌표를 $(p,\ q)$ ($p,\ q$는 양수)라 하자.
$\overline{\mathrm{OB}}=6$이고 삼각형 AOB의 넓이가 6이므로
$\dfrac{1}{2}\times6\times q=6$에서 $q=2$이다.
이때 점 $\mathrm{A}(p,\ 2)$는 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점이므로
$2=\sqrt{p}$에서 $p=4$이다.
점 $\mathrm{A}(4,\ 2)$는 곡선 $y=\sqrt{a(6-x)}$ 위의 점이므로
$2=\sqrt{a(6-4)}=\sqrt{2a}$
$2a=4$에서 $a=2$이다.



12. [출제의도] 도형의 대칭이동을 이해하여 원의 넓이를 구한다.

방정식 $2|x|-y-10=0$이 나타내는 도형과 이 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 도형을 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



두 도형으로 둘러싸인 사각형의 네 변에 모두 접하는 원은 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 원점과 직선 $2x-y-10=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|-10|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\times(2\sqrt{5})^2=20\pi$

13. [출제의도] 절댓값이 있는 부등식의 해를 구하여 필요충분조건 문제를 해결한다.

조건 p에서

(ⅰ) $x\ge 2$일 때,

$x-2\ge 0$이므로

$3(x-2)<9-2x$

$5x<15$, $x<3$

따라서 부등식의 해는

$2\le x<3$

(ⅱ) $x<2$일 때,

$x-2<0$이므로

$-3(x-2)<9-2x$

$x>-3$

따라서 부등식의 해는

$-3<x<2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$-3<x<3$

이때 p는 q이기 위한 필요충분조건이므로

$a=-3$, $b=3$

따라서

$b-a=3-(-3)=6$

[다른 풀이]

$0\le 3|x-2|<9-2x$이므로

$-(9-2x)<3(x-2)<9-2x$

이다.

$-(9-2x)<3(x-2)$에서

$x>-3$

이고, $3(x-2)<9-2x$에서

$x<3$

따라서 부등식의 해는

$-3<x<3$

이때 p는 q이기 위한 필요충분조건이므로

$a=-3$, $b=3$

따라서

$b-a=3-(-3)=6$

[다른 풀이]

$0\le 3|x-2|<9-2x$

이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$(3|x-2|)^2<(9-2x)^2$, $9(x-2)^2<(9-2x)^2$

$x^2-9<0$

이때 $9-2x>0$이어야 하므로 부등식의 해는

$-3<x<3$

이때 p는 q이기 위한 필요충분조건이므로

$a=-3$, $b=3$

따라서

$b-a=3-(-3)=6$

14. [출제의도] 인수분해와 항등식의 정의를 이해하여 나머지를 구한다.

$\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$

$=\{f(x)+g(x)\}\left[\{f(x)\}^2-f(x)g(x)+\{g(x)\}^2\right]$

$=(2x^2-x-1)h(x)$

$f(x)+g(x)=(x^2+x)+(x^2-2x-1)$

$=2x^2-x-1$

이므로

$h(x)=\{f(x)\}^2-f(x)g(x)+\{g(x)\}^2$

이다.

이때 $h(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$h(1)$이다.

$f(1)=2$, $g(1)=-2$이므로

$h(1)=2^2-2\times(-2)+(-2)^2$

$=12$

15. [출제의도] 집합의 연산을 이해하여 실생활 문제를 해결한다.

봉사 활동 A, B를 신청한 학생을 원소로 하는 집합을 각각 A, B라 하자.

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

이고

$n(A)+n(B)=36$

이므로

$n(A\cup B)=36-n(A\cap B)$ …… ㉠

학급의 학생 수가 30이므로

$n(A\cup B)\le 30$

㉠에 의하여

$36-n(A\cap B)\le 30$

$n(A\cap B)\ge 6$ …… ㉡

$n(A\cap B)\le n(A\cup B)$

이고 ㉠에 의하여

$n(A\cap B)\le 36-n(A\cap B)$

$n(A\cap B)\le 18$ …… ㉢

㉡, ㉢에 의하여

$6\le n(A\cap B)\le 18$

$M=18$, $m=6$이므로

$M+m=24$

16. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 자연수의 성질에 대한 명제를 증명한다.

(ⅰ) $n=1$일 때,

$3^1+1=2^2\times 1$이므로 $f(3^1+1)=2$이다.

따라서 $n=1$일 때 $(*)$이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$f(3^{2k-1}+1)=2$

음이 아닌 정수 m과 홀수 p에 대하여

$3^{2k-1}+1=2^m\times p$

로 나타낼 수 있고, $m=2$이므로

$3^{2k-1}+1=\boxed{4}\times p$

$3^{2k-1}=4p-1$

이다.

$3^{2(k+1)-1}+1=9\times 3^{2k-1}+1$

$=9(4p-1)+1$

$=36p-8$

$=2^2\times\left(\boxed{9p-2}\right)$

이고, p는 홀수이므로 $\boxed{9p-2}$도 홀수이다.

따라서 $f(3^{2(k+1)-1}+1)=2$이다.

그러므로 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$f(3^{2n-1}+1)=2$이다.

$a=4$이고 $g(p)=9p-2$이므로

$a+g(7)=4+(9\times 7-2)$

$=65$

17. [출제의도] 원의 평행이동의 성질을 이용하여 명제의 참, 거짓을 추측하여 판단한다.

ㄱ. 원 $x^2+(y-1)^2=9$를 평행이동하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로 원 C의 반지름의 길이는 3이다. (참)

ㄴ. 원 $x^2+(y-1)^2=9$의 중심의 좌표가 $(0,\ 1)$이므로 원 C의 중심의 좌표는 $(m,\ n+1)$이다.

원 C가 x축과 접하므로

$|n+1|=3$

$n=-4$ 또는 $n=2$

따라서 n의 값은 2개이다. (거짓)

ㄷ. $m\ne 0$일 때, 직선 $y=\dfrac{n+1}{m}x$가 원 C의 중심 $(m,\ n+1)$을 지나므로 원 C의 넓이를 이등분한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

18. [출제의도] 등비수열의 합을 이해하여 수열의 항을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

$r=1$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=2$이므로

조건 (나)에서

$S_{12}-S_{10}=a_{11}+a_{12}$

$=4>0$

이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $r\ne 1$이다.

이때 $S_n=\dfrac{2(r^n-1)}{r-1}$이므로 조건 (가)에서

$\dfrac{2(r^{12}-1)}{r-1}-\dfrac{2(r^2-1)}{r-1}=4\times\dfrac{2(r^{10}-1)}{r-1}$

$r^2(r^{10}-1)=4(r^{10}-1)$

$r\ne 1$에서 $r^{10}-1\ne 0$이므로

$r^2=4$

$r=2$ 또는 $r=-2$

$a_{11}+a_{12}=2r^{10}+2r^{11}$

$=2r^{10}(1+r)$

이고 조건 (나)에서

$S_{12}-S_{10}=a_{11}+a_{12}=2r^{10}(1+r)<0$, 즉 $r<-1$

따라서 $r=-2$이므로

$a_4=2\times(-2)^3=-16$

[다른 풀이]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 할 때, 조건 (나)에서

$S_{12}-S_{10}<0$

$S_{12}-S_{10}=a_{11}+a_{12}=2r^{10}+2r^{11}$

$=2r^{10}(1+r)<0$

따라서 $r<-1$이다.

조건 (가)에서

$S_{12}-S_2=4S_{10}$

$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12})-(a_1+a_2)$

$=4(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$

이므로

$(a_3+a_4+a_5+\cdots+a_{12})=4(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$

$r^2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})=4(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\dfrac{2(r^{10}-1)}{r-1}\ne 0$이므로

$r^2=4$

$r<-1$이므로 $r=-2$이다.

따라서

$a_4=2\times(-2)^3=-16$

19. [출제의도] 이등변삼각형의 성질과 두 직선의 위치 관계를 이용하여 문제를 해결한다.

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\mathrm{M}\left(\dfrac{0+18}{2},\ \dfrac{6+0}{2}\right)$

즉 $\mathrm{M}(9,\ 3)$

삼각형 ABC 가 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AB}} \perp \overline{\mathrm{CM}}$

따라서 두 직선 AB, CM 의 기울기의 곱은 -1 이다.

이때 직선 AB 의 기울기가

$\dfrac{0-6}{18-0} = -\dfrac{1}{3}$

이므로 직선 CM 의 기울기는 3 이다.

직선 CM 이 점 $\mathrm{M}(9,\ 3)$ 을 지나므로 그 방정식은

$y = 3(x-9)+3$

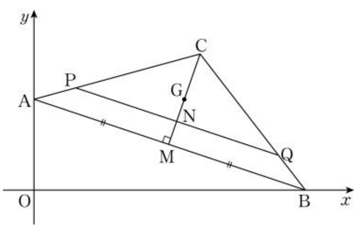
즉 $y = 3x-24$

이때 점 $\mathrm{C}(a,\ b)$ 는 직선 $y=3x-24$ 위의 점이므로

$b = 3a-24$ …… ㉠

두 선분 CM, PQ 의 교점을 N 이라 하자.

점 G 는 삼각형 CPQ 의 무게중심이므로



$\overline{\mathrm{CG}} = \dfrac{2}{3}\overline{\mathrm{CN}}$

$\overline{\mathrm{MN}} : \overline{\mathrm{NC}} = \overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PC}} = 1:3$ 이므로

$\overline{\mathrm{CN}} = \dfrac{3}{4}\overline{\mathrm{CM}}$

따라서

$\overline{\mathrm{CG}} = \dfrac{2}{3} \times \overline{\mathrm{CN}} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} \times \overline{\mathrm{CM}}$

$\quad = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{CM}}$

$\overline{\mathrm{CM}} = 2\overline{\mathrm{CG}} = 2\sqrt{10}$ 이므로

$\sqrt{(a-9)^2+(b-3)^2} = 2\sqrt{10}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$(a-9)^2 + (3a-24-3)^2 = 40$

$(a-9)^2 = 4$

$a=7$ 또는 $a=11$

따라서 점 $(a,\ b)$ 는

$(7,\ -3)$ 또는 $(11,\ 9)$

점 C 는 제1사분면 위의 점이므로 $\mathrm{C}(11,\ 9)$

$a+b = 11+9 = 20$

20. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 수열을 구하고, 수열의 합 문제를 해결한다.

자연수 n 에 대하여 $m \neq 2^{n-1}$ 일 때

$\log_2 m,\ \log_4 m$

의 값은 유리수가 아니다.

따라서 $f(1)=0$ 이고, $m=2^{n-1}\ (n \geq 2)$ 일 때,

$f(m) = f(2^{n-1}) = \log_4 2^{n-1} = \dfrac{n-1}{2}$

은 유리수이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$a_1 = 0,\ a_n = \dfrac{n-1}{2}\ (n \geq 2)$

즉 $a_n = \dfrac{n-1}{2}\ (n \geq 1)$ 이다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{n(n-1)}{2}$

$\quad = \dfrac{n(n-1)}{4}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k > 50$ 에서

$\dfrac{n(n-1)}{4} > 50$

$n(n-1) > 200$

$n=14$ 일 때,

$n(n-1) = 14 \times 13 = 182$

$n=15$ 일 때,

$n(n-1) = 15 \times 14 = 210$

이므로 $n \geq 15$ 일 때 부등식이 성립한다.

따라서 자연수 n 의 최솟값은 15 이다.

[참고]

자연수 m 은 $m \neq 2^{n-1}$ (n 은 자연수)일 때

음이 아닌 정수 k 와 1 이 아닌 홀수 p 에 대하여

$m = 2^k \times p$

로 나타내어진다.

만약 $\log_2 m$ 의 값이 유리수라 가정하면

$\log_2 m = \log_2(2^k \times p)$

$\quad = k + \log_2 p$

즉 $\log_2 p$ 의 값이 유리수이어야 한다.

이때 $\log_2 p = \dfrac{b}{a}$ (a 와 b 는 서로소인 자연수)

라 하면

$\log_2 p = \dfrac{b}{a}$ 에서 $2^{\frac{b}{a}} = p$

$2^b = p^a$ …… ㉠

이때 ㉠의 좌변은 짝수이고, 우변은 홀수이므로 모순이다.

따라서 $\log_2 p$ 의 값이 유리수가 아니므로 $\log_2 m$ 의 값도 유리수가 아니다.

21. [출제의도] 집합에 제시된 조건을 이해하고 연립이차부등식을 해결한다.

집합 A 에서 어떤 실수 x 에 대하여

$x^2 + 2bx - a^2 + 6b \leq 0$

이려면 부등식

$x^2 + 2bx - a^2 + 6b \leq 0$

의 해가 존재해야 한다. 따라서 이차방정식

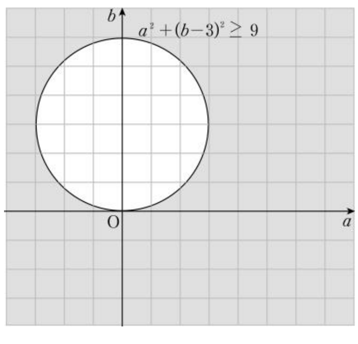
$x^2 + 2bx - a^2 + 6b = 0$

의 판별식을 D_1 이라 하면

$\dfrac{D_1}{4} = b^2 - (-a^2 + 6b) \geq 0$

$a^2 + (b-3)^2 \geq 9$ …… ㉠

부등식 ㉠의 영역을 좌표평면에 나타내면 그림의 색칠된 부분(경계선 포함)과 같다.



집합 B 에서 모든 실수 x 에 대하여

$x^2 + 2ax - b^2 + 6a > 0$

이려면 부등식

$x^2 + 2ax - b^2 + 6a > 0$

의 해가 모든 실수이어야 한다. 따라서 이차방정식

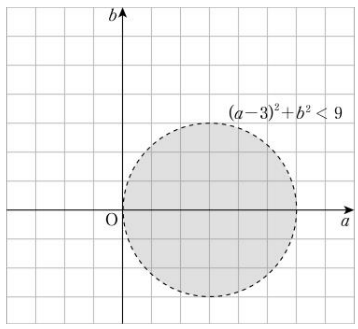
$x^2 + 2ax - b^2 + 6a = 0$

의 판별식을 D_2 라 하면

$\dfrac{D_2}{4} = a^2 - (-b^2 + 6a) < 0$

$(a-3)^2 + b^2 < 9$ …… ㉡

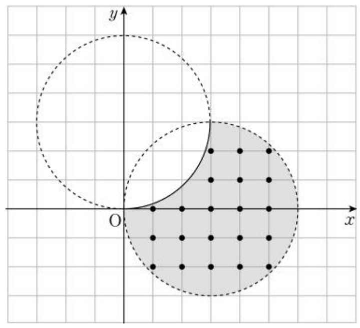
부등식 ㉡의 영역을 좌표평면에 나타내면 그림의 색칠된 부분(경계선 제외)과 같다.



집합 $A \cap B$ 의 원소는 좌표평면에서 연립부등식

$\begin{cases} x^2 + (y-3)^2 \geq 9 \\ (x-3)^2 + y^2 < 9 \end{cases}$

가 나타내는 영역에 포함되는 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점과 같다.



위의 그림에서

x 좌표가 1 인 점의 개수가 3,

x 좌표가 2 인 점의 개수가 3,

x 좌표가 3 인 점의 개수가 5,

x 좌표가 4 인 점의 개수가 5,

x 좌표가 5 인 점의 개수가 5

이므로 집합 $A \cap B$ 의 원소의 개수는

$3+3+5+5+5 = 21$

22. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그를 계산한다.

$\log_2 3 \times \log_3 32 = \dfrac{\log_2 3}{\log_2 2} \times \dfrac{\log_2 2^5}{\log_2 3}$

$\quad = \dfrac{5\log_2 2}{\log_2 2}$

$\quad = 5$

23. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해하여 식의 값을 구한다.

이차방정식 $3x^2 - 16x + 1 = 0$ 의 두 근이 $\alpha,\ \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = \dfrac{16}{3},\ \alpha\beta = \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \dfrac{\frac{16}{3}}{\frac{1}{3}}$

$\quad = 16$

24. **[출제의도] 등차수열의 일반항을 이해하여 수열의 항을 구한다.**

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n = 2+(n-1)d$

이므로

$3a_{n+1}-a_n = 3(2+nd)-\{2+(n-1)d\}$

$\qquad = 4+3d+2(n-1)d$

이다.

수열 $\{3a_{n+1}-a_n\}$이 공차가 6인 등차수열이므로

$2d=6$에서 $d=3$

따라서

$a_{10} = 2+9d$

$\quad = 29$

25. **[출제의도] 역함수를 이해하여 미지수를 구한다.**

$f^{-1}(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 실수 a에 대하여

$(f \circ f^{-1})(a) = f(f^{-1}(a)) = a$

이다. 따라서

$(f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(a) = f^{-1}(f(f^{-1}(a)))$

$\qquad = f^{-1}(a)$

$f^{-1}(a)=3$에서 역함수의 성질에 의해

$a = f(3) = 3^3+1$

$\ = 28$

26. **[출제의도] 부등식의 영역의 최대·최소를 이용하여 실생활 문제를 해결한다.**

하루에 만드는 세트 A와 세트 B의 개수를 각각 x, y라 하면

$x \ge 0$, $y \ge 0$

하루에 사용할 수 있는 비누는 750개 이하이므로

$6x+3y \le 750$

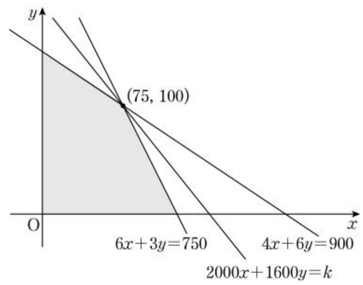
하루에 사용할 수 있는 치약은 900개 이하이므로

$4x+6y \le 900$

따라서 $x \ge 0$, $y \ge 0$이고 연립부등식

$\begin{cases} 6x+3y \le 750 \\ 4x+6y \le 900 \end{cases}$

이 나타내는 영역을 좌표평면에 나타내면 그림의 색칠된 부분(경계선 포함)과 같다.



하루에 얻을 수 있는 판매 이익을 k(원)라 하면

$2000x+1600y=k$

$y = -\frac{5}{4}x+\frac{k}{1600}$ ⋯⋯ ㉠

직선 ㉠이 두 직선

$6x+3y=750$, $4x+6y=900$

즉 $2x+y=250$, $2x+3y=450$

의 교점 $(75, 100)$을 지날 때,

판매 이익이 최대이다.

$M = 2000\times75+1600\times100$

$\ = 310000$

이므로

$\frac{M}{10000} = 31$

27. **[출제의도] 거듭제곱근을 이해하여 자연수의 최솟값을 구한다.**

$\sqrt{2m}$의 값이 자연수이려면

$m = 2p^2$ (p는 자연수) ⋯⋯ ㉠

의 꼴이어야 한다.

$\sqrt[3]{3m}$의 값이 자연수이려면

$m = 3^2q^3$ (q는 자연수) ⋯⋯ ㉡

의 꼴이어야 한다.

$\sqrt{2m}$, $\sqrt[3]{3m}$이 모두 자연수가 되려면 ㉠, ㉡에서

$m = 2^3\times3^2\times r^6$ (r는 자연수)

의 꼴이어야 한다.

따라서 자연수 m의 최솟값은 $r=1$일 때

$2^3\times3^2\times1^6 = 72$

28. **[출제의도] 일대일 대응과 합성함수를 이해하여 함수를 추측한다.**

조건 (가)에 의하여 함수 f는 일대일 대응이다.

집합 X의 임의의 원소 x에 대하여

$1 \le f(x) \le 7$

조건 (나)에서

$f(f(3)) = f(3)-6 \ge 1$

즉 $f(3) \ge 7$이므로 $f(3)=7$

$f(f(3)) = f(7) = 7-6 = 1$

따라서

$f(3)=7$, $f(7)=1$ ⋯⋯ ㉠

$f(7)=1$이므로

$f(f(2)) = f(2)-4 \ge 2$

즉 $f(2) \ge 6$이고 $f(3)=7$이므로

$f(2)=6$

$f(f(2)) = f(6) = 6-4 = 2$

따라서

$f(2)=6$, $f(6)=2$ ⋯⋯ ㉡

$f(7)=1$, $f(6)=2$이므로

$f(f(1)) = f(1)-2 \ge 3$

즉 $f(1) \ge 5$이고 $f(2)=6$, $f(3)=7$이므로

$f(1)=5$

$f(f(1)) = f(5) = 5-2 = 3$

따라서

$f(1)=5$, $f(5)=3$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $f(4)=4$이다.

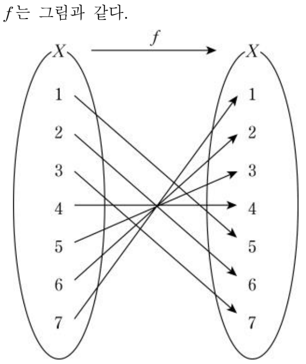
따라서

$f(2)+f(3)+f(4) = 6+7+4$

$\qquad = 17$

[참고]

함수 f는 그림과 같다.



29. **[출제의도] 직선의 방정식을 이용하여 수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.**

두 직선 l, m의 방정식을 각각

$y = a(x+1)+1 = ax+a+1$ (a는 상수)

$y = b(x+1)+1 = bx+b+1$ (b는 상수)

로 놓으면

$\mathrm{A}_n(n,\ an+a+1)$, $\mathrm{B}_n(n,\ bn+b+1)$

이다.

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n} = |(an+a+1)-(bn+b+1)|$

$\qquad = |a-b|(n+1)$

이므로

$S_n = \frac{1}{2}\left(\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}+\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}\right)\times\{(n+1)-n\}$

$\quad = \frac{1}{2}\{|a-b|(n+1)+|a-b|(n+2)\}$

$\quad = \frac{1}{2}|a-b|(2n+3)$

$\sum_{k=1}^{10} S_{2k-1} = \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2}|a-b|\{2(2k-1)+3\}$

$\qquad = \frac{1}{2}|a-b|\sum_{k=1}^{10}(4k+1)$

$\qquad = \frac{1}{2}|a-b|\left(4\times\frac{10\times11}{2}+10\right)$

$\qquad = 115|a-b|$

$\sum_{k=1}^{10} S_{2k-1} = 115$에서

$|a-b|=1$이므로

$S_n = \frac{1}{2}(2n+3)$

이다.

$S_{2k} = \frac{1}{2}(4k+3)$이므로

$\sum_{k=1}^{10} S_{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}(4k+3)$

$\qquad = \frac{1}{2}\left(4\times\frac{10\times11}{2}+30\right)$

$\qquad = 125$

30. **[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 두 이차함수를 추측한다.**

조건 (나)에서 두 함수 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 그래프가 오직 한 점 $(1, 9)$에서 만나므로

방정식 $h_1(x)=h_2(x)$의 실근은 $x=1$ 하나뿐이다.

따라서 방정식

$f(x)-g(x) = f(x)+g(x)$

$g(x)=0$

이 중근 $x=1$을 갖는다.

이차함수 $g(x)$의 이차항의 계수가 1이므로

$g(x) = (x-1)^2$ ⋯⋯ ㉠

이다.

함수 $h_1(x)$의 이차항의 계수는 1이고 조건 (가)에 의하여 함수 $y=h_1(x)$의 그래프가 x축에 접한다.

또, 조건 (다)에 의하여 함수 $y=h_1(x)$는 $x=\alpha$에서 최솟값을 가지므로

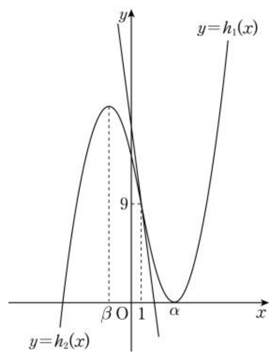
$h_1(x) = (x-\alpha)^2$

이다. 이때 $h_1(1)=9$이므로

$9 = (1-\alpha)^2$

$\alpha=-2$ 또는 $\alpha=4$

조건 (다)에 의하여 함수 $y=h_2(x)$는 $x=\beta$에서 최댓값을 가지고 $\alpha>\beta$이므로 이 조건을 만족하는 두 함수 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $\alpha=4$ 이다.

$h_1(x)=(x-4)^2$

이므로 ㉠에 의하여

$f(x)=h_1(x)-g(x)$

$=(x-4)^2-(x-1)^2$

$=-6x+15$ …… ㉡

이다. ㉠, ㉡에 의하여

$h_2(x)=f(x)-g(x)$

$=(-6x+15)-(x-1)^2$

$=-x^2-4x+14$

$=-(x+2)^2+18$

이다.

이때 함수 $y=h_2(x)$ 는 $x=\beta$ 에서 최댓값을 가지므로 $\beta=-2$ 이다.

$f(\beta)=f(-2)=-6\times(-2)+15=27$

$g(\alpha)=g(4)=(4-1)^2=9$

이므로

$f(\beta)\times g(\alpha)=27\times9$

$=243$