제 25 회 최종시험 첫째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2012년 3월 24일 (오후) ; 제한시간 4시간 30분; 문항당 7점

1. 임의의 양의 실수 x, y, z에 대해 다음 부등식이 성립함을 증명하여라.

$$\frac{2x^2+xy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2}+\frac{2y^2+yz}{(z+\sqrt{xy}+x)^2}+\frac{2z^2+zx}{(x+\sqrt{yz}+y)^2}\geq 1$$

2. 각 B가 직각이 아니고 $AB \neq AC$인 삼각형 ABC의 내심 I에서 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. 직선 AB와 DI의 교점을 S, 직선 DF에 수직이고 F를 지나는 직선이 직선 DE와 만나는 점을 T, 직선 ST가 직선 EF와 만나는 점을 R이라 하자. 이 때, 선분 IR을 지름으로 하는 원이 삼각형 ABC의 내접원과 만나는 두 점 중 직선 IR에 대해 A와 다른 쪽에 있는 점을 P_{ABC}라 하자. $XZ = YZ > XY$인 이등변삼각형 XYZ의 변 YZ 위에 $WY < XY$인 점 W가 있다. $K = P_{YXW}$, $L = P_{ZXW}$라 할 때 $2KL \leq XY$임을 보여라.

3. n개의 집합 $A_1, A_2, \ldots, A_n$이 주어져있다. 집합 $\{1, 2, \ldots, n\}$의 부분집합 X에 대해

$$N(X) = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} - X : \text{모든 } j \in X \text{에 대해 } A_i \cap A_j \neq \emptyset\}$$

이라 하자. 이때 m이 $3 \leq m \leq n-2$인 정수이면, $|X| = m$이고 $|N(X)| \neq 1$인 $\{1, 2, \ldots, n\}$의 부분집합 X가 반드시 존재함을 증명하여라.