



제 27 회 2차시험 (중등부)
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2013년 11월 10일 (오전) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7점

1. 다음 세 수의 크기를 비교하여라.

$$\sqrt[3]{\frac{25}{3}}, \quad \sqrt[3]{\frac{1148}{135}}, \quad \frac{\sqrt[3]{25}}{3} + \sqrt[3]{\frac{6}{5}}$$

2. 원 O 에 내접하는 오각형 $ABCDE$ 가 다음 조건을 모두 만족한다.

(i) $AB = BC, AE = DE$

(ii) 점 E 에서 직선 DE 에 접하고 점 A 를 지나는 원이 선분 EC 와 점 F 에서 만나고 직선 BF 와는 점 $G(\neq F)$ 에서 만난다.

직선 DG 와 원 O 의 교점을 $H(\neq D)$ 라 할 때, 점 E 에서의 원 O 의 접선이 직선 HA 와 직교함을 보여라.

3. 양의 정수로 이루어진 수열 a_1, a_2, a_3, \dots 이 식 $a_{i+2} = a_{i+1} + a_i$ ($i \geq 1$) 을 항상 만족할 때, 모든 양의 정수 n 에 대하여 다음의 값이 양의 정수임을 보여라.

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{4n-2}}{a_{2n+1}}$$

4. 다음 조건을 만족하는 소수 p 가 존재함을 보여라.

$2^n - 1$ 이 p 의 배수가 되는 양의 정수 n 중 가장 작은 것은 3^{2013} 이다.