

2017년 11월 12일 (오전) ; 제한시간 3시간 ; 문항당 7점

1. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 과 음이 아닌 정수 a_1, \dots, a_n 을 모두 구하여라.

각 $i = 1, \dots, n$ 에 대하여 a_1, \dots, a_n 중 i 의 배수는 정확히 a_i 개 있다.

단, 0은 모든 정수의 배수이다.

2. 이등변 삼각형이 아닌 삼각형 ABC 의 내접원이 변 BC, CA, AB 와 만나는 점을 각각 D, E, F 라 하자. 변 BC 의 수직이등분선이 삼각형 ABC 의 외접원과 만나는 두 점 중 직선 BC 에 대하여 점 A 와 같은 쪽에 있는 점을 P , 다른 쪽에 있는 점을 Q 라 하자. 점 D 를 지나고 직선 AQ 와 평행한 직선이 직선 EF 와 만나는 점을 R , 직선 PQ 와 만나는 점을 T 라 하자. 네 점 B, R, C, T 가 한 원 위에 있음을 보여라.

3. 다음 세 조건을 모두 만족하는 1보다 큰 정수 n 과 정수 a_1, a_2, \dots, a_n 을 모두 구하여라.

(i) $2 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$

(ii) a_1, a_2, \dots, a_n 은 모두 $15^{25} + 1$ 의 약수이다.

(iii) $2 - \frac{2}{15^{25} + 1} = \left(1 - \frac{2}{a_1}\right) + \left(1 - \frac{2}{a_2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{2}{a_n}\right)$

4. 양의 실수 $a \geq b \geq c \geq d > 0$ 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{b^3}{a} + \frac{c^3}{b} + \frac{d^3}{c} + \frac{a^3}{d} + 3(ab + bc + cd + da) \geq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$