제 29 회 중등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

유형 가

2015년 5월 16일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
   예를 들면, 답이 “7” 일 경우 “007” 이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1∼4 번은 각 4 점, 문제 17∼20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 포물선 $y = x^2$ 위의 세 점 A, B, C 의 x좌표를 각각 a, b, c $(a < b < c)$ 라 하자. 선분 BC, CA 의 중점을 각각 D, E 라 할 때, 직선 AD 가 x축과 평행하고 직선 BE 는 y축과 평행하다. $\overline{AD} = \overline{BE}$ 일 때 $16(a^2 + b^2 + c^2)$ 의 값을 구하여라.

2. 다음 세 조건을 모두 만족하는 순서쌍 $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ 의 개수를 구하여라.

(i) $a_i \in \{1, 2, 3\} \quad (i = 1, 2, \ldots, 10)$

(ii) $i = 1, 3, 5, 7, 9$ 이면 $a_i < a_{i+1}$

(iii) $i = 2, 4, 6, 8$ 이면 $a_i \geq a_{i+1}$

3. 삼각형 ABC 에서 $\angle A = 90°$, $\angle B = 60°$, $\overline{AB} = \sqrt{3}+1$ 이다. 반지름이 1 인 원 O_1 이 변 AB 와 변 AC 에 모두 접하고 원 O_2 가 변 AB, 변 BC, 원 O_1 에 모두 접한다. 원 O_2 의 반지름을 r 이라 할 때 $300r$ 의 값을 구하여라.

4. $5^{(2^k)}$ 을 2^{1000} 으로 나눈 나머지가 1 이 되도록 하는 양의 정수 k 중 가장 작은 것을 구하여라.

5. 다음 두 조건을 모두 만족하는 실수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하여라.

(i) $a + b = 1$

(ii) $(a^2 + b^2)(a^3 + b^3)(a^4 + b^4) = a^5 + b^5 - 3a^2b^2$

6. 아흔 아홉 명의 사람 $p_1, p_2, \ldots, p_{99}$ 가 서로 악수를 할 때 $i = 1, 2, \ldots, 98$ 에 대하여 p_i 와 악수를 한 사람이 정확히 i 명이다. p_{99} 와 악수한 사람의 수를 구하여라.

7. 삼각형 ABC 에서 $\overline{AB} = 18$, $\overline{BC} = 12$ 이다. 변 BC 의 삼등분점을 D 와 E 라 하면 $\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 3\overline{DE}^2$ 이다. 삼각형 ADE 의 외접원의 반지름을 r 이라 할 때 r^2 의 값을 구하여라.

8. 양의 정수 m, n 이

$$\left[\frac{m}{n}\right] + \left[\frac{2m}{n}\right] + \cdots + \left[\frac{(n-1)m}{n}\right] = 421$$

을 만족할 때, m 과 n 의 최대공약수로 가능한 수 중 가장 큰 것을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 가장 큰 정수)

9. 팔각형 $A_1A_2 \cdots A_8$ 의 꼭짓점에 다음 세 조건을 모두 만족하도록 8 개의 수 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 을 배치하는 방법의 수를 1000 으로 나눈 나머지를 구하여라.

(i) 각 꼭짓점에 서로 다른 수를 하나씩 배치한다.

(ii) 홀수와 이웃한 두 수 중 적어도 하나는 홀수이다.

(iii) 짝수와 이웃한 두 수 중 적어도 하나는 짝수이다.

(뒷면에 계속)

10. 실수 a, b, c, d가 $a^2+c^2=4$와 $b^2+d^2=5$를 만족할 때 $ab+cd+2(ad-bc)$의 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

11. 외접원의 반지름의 길이가 10인 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=12$이고 $\overline{AC}:\overline{BC}=7:5$이다. 각 C의 이등분선이 변 AB와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 ABC의 외부에 있는 원 O가 점 D에서 변 AB에 접하고 삼각형 ABC의 외접원에 내접한다. 원 O의 반지름의 길이를 r이라 할 때 $36r$의 값을 구하여라. (단, 각 C는 예각)

12. 양의 정수 a, b, c가 $a^2=4(b+c)$를 만족할 때

$$\frac{a^4-b^4-c^4}{abc}$$

의 값이 될 수 있는 양수 중 가장 작은 것을 k라 하자. $240k$의 값을 구하여라.

13. 세 실수 x, y, z가 다음 두 조건을 모두 만족할 때 $16(x^7+y^7+z^7)$의 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

(i) $xyz=1$

(ii) $yz^2(x^4+2y^2)=zx^2(y^4+2z^2)=xy^2(z^4+2x^2)$

14. 다음 두 조건을 모두 만족하는 정수 a_1, a_2, a_3, a_4의 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4)의 개수를 구하여라.

(i) $0 \le a_i \le 5 \quad (i=1,2,3,4)$

(ii) $a_i - a_{i+1} \le i \quad (i=1,2,3)$

15. 각 B가 예각인 삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=3\overline{AB}$이다. 삼각형 ABC의 외접원과 점 A에서 접하는 직선이 선분 BC의 수직이등분선과 점 D에서 만나고 $\overline{AD}=6$이다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 r이라 할 때 $7r^2$의 값을 구하여라.

16. 소수 p와 양의 정수 m이

$$157p=m^4+2m^3+m^2+3$$

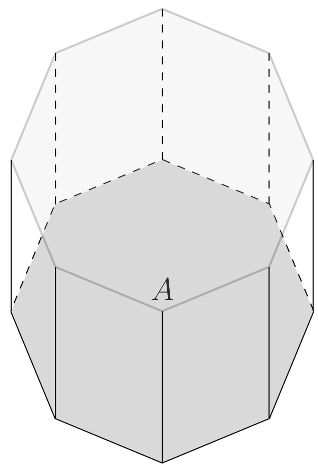
을 만족할 때 $p+m$의 값을 구하여라.

17. 양의 실수 a, b, c가

$$\frac{\sqrt{a+6b+1}+\sqrt{2b+5c+3}+\sqrt{3c+7a+5}}{a+b+c}=4$$

를 만족할 때 $100(a+b+c)$의 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

18. 팔각기둥의 한 꼭짓점 A에서 출발하여 모서리를 따라 이동하면서 다른 모든 꼭짓점을 한 번씩 지나 다시 A로 돌아오는 경로의 개수를 구하여라.



19. 삼각형 ABC의 내심을 I, 직선 CI와 삼각형 ABC의 외접원 O가 만나는 점을 $D(\neq C)$라 하자. 직선 BD가 삼각형 ABI의 외접원과 점 $E(\neq B)$에서 만나고 직선 AE가 원 O와 점 $F(\neq A)$에서 만난다. 원 O의 지름이 10이고 삼각형 ABI의 외접원의 반지름은 4이다. 원 O의 중심과 삼각형 EBF의 외심 사이의 거리를 x라 할 때 $21x^2$의 값을 구하여라.

20. 양의 정수 m에 대하여 2015를 m번 반복하여 써서 얻은 $4m$ 자릿수 $20152015\cdots2015$를 a_m이라 하자. 1000보다 작은 양의 정수 k 중 어떤 a_m의 약수가 될 수 있는 것의 개수를 구하여라.

(끝)