제 28 회 고등부 수행평가

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

유형 가

2014년 5월 24일. 제한시간 4시간

- 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
- 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
- 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
  예를 들면, 답이 “7”일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
- 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.
- 문제 1 ∼ 4 번은 각 4 점, 문제 17 ∼ 20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 다항식 $f(x)$와 실수 a, b, c에 대하여

$$f(x)(x-1)^{20} = (x^2+ax+1)^{30} + (x^2+bx+c)^{10}$$

일 때, $f(1)+a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

2. 아래와 같은 2×6 격자의 각 칸에 1 또는 2 중 하나를 써 넣으려고 한다. 각 $i=1,2,3,4,5,6$에 대하여 i 번째 열의 두 수의 곱을 c_i라 할 때, $c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6$이 짝수가 되도록 하는 방법의 수를 구하여라.

3. 양의 정수 중 6의 배수가 아니고 2014 이하인 수들의 곱을 a라 하자. $\frac{a}{5^k}$가 정수가 되도록 하는 양의 정수 k 중 가장 큰 것을 구하여라.

4. 선분 AB 위에 $\overline{AS}=3$, $\overline{SB}=4$인 점 S가 있다. $\angle XBS = \angle AXS$를 만족하는 점 X에서 직선 AB까지 거리를 d라 할 때, d^2의 최댓값을 구하여라.

5. 집합 $\{1,2,3,\ldots,8\}$의 부분집합 중에서 연속한 4개의 수를 포함한 것의 개수를 구하여라.

6. 최고차항의 계수가 1인 4차 다항식 $f(x)$가

$$f(2^n+1) = 8^n+1 \qquad (n=1,2,3,4)$$

을 만족할 때, $f(1)$의 값을 구하여라.

7. 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=7$, $\overline{CA}=8$이다. 직선 AB까지의 거리가 3이고 직선 BC까지의 거리가 2인 점이 여러 개 있다. 이러한 점들에서 직선 CA까지 거리의 총합을 x라 할 때, x^2의 값을 구하여라.

8. 다음 조건을 만족하는 정수 n중 가장 큰 것을 구하여라.

> n은 정수의 세제곱이 아니며, n^2은 $([\sqrt[3]{n}])^5$의 배수이다.

(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 가장 큰 정수이다.)

9. 내심이 I인 삼각형 ABC의 내접원이 변 BC, CA, AB와 각각 점 D, E, F에서 접할 때, 직선 EF와 BC가 점 J에서 만나고 $\overline{BJ}=100$, $\overline{CJ}=60$이다. 삼각형 ABC의 한 방접원이 변 BC와 점 K에서 접하고, 직선 IK가 변 CA를 $5:3$으로 내분하는 점 L을 지난다. 삼각형 ABC의 내접원의 반지름을 r이라 할 때, r^2의 값을 구하여라.

10. 한 변의 길이가 1인 정20각형 $P_1P_2\cdots P_{20}$의 꼭짓점 다섯 개로 이루어진 오각형 중 모든 변의 길이가 2보다 큰 것의 개수를 구하여라. (단, 두 오각형을 이루는 꼭짓점이 하나라도 다르면 다른 것으로 본다.)

(뒷면에 계속)

11. 정수 $(m+164)(m^2+164^2)$ 이 어떤 정수의 제곱이 되도록 하는 양의 홀수 m 중 가장 작은 것을 구하여라.

12. 모든 실수 $x>1$ 에 대하여 부등식

$$x^{100}-ax^{51}+ax^{49}\geq 1$$

이 항상 성립하게 하는 실수 a 중 가장 큰 것을 구하여라.

13. 변의 길이가 모두 양의 정수이며 다음 조건을 모두 만족하는 육각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

(i) 내각의 크기가 모두 같다.

(ii) 두 변이 평행하면 그 길이가 같다.

(iii) 이웃한 두 변의 길이는 다르다.

(iv) 넓이는 $12\sqrt{3}$ 이하이다.

14. $f(m)=6^m$ 일 때, 분수식

$$\sum_{n=1}^{20}\frac{x^{f(n)}\left(1-x^{f(20n)}\right)}{1-x^{f(n)}}\qquad(x\neq\pm1)$$

을 간단히 하면 정수 계수 다항식을 얻는다. 이 다항식에서 $x^{1\times2\times3\times\cdots\times20}$ 의 계수를 구하여라.

15. 모든 $m,n,k\geq 0$ 에 대하여

$$0<a_{m+n+k}\leq 3\max\{a_m,a_n,a_k\}$$

를 만족하는 임의의 수열 $a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots$ 에 대하여

$$\frac{a_{i_1+\cdots+i_{201}}}{\max\{a_{i_1},\ldots,a_{i_{201}}\}}$$

이 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 구하여라.
(단, $\max\{x_1,\ldots,x_\ell\}$ 은 $x_1,\ldots,x_\ell$ 중 가장 큰 수이다.)

16. 양의 정수 m, n $(m<n)$ 에 대하여 m 이상 n 이하인 정수의 집합을 $[m,n]$ 이라 하자. 8 이하인 양의 정수 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 을 고를 때, $a_1<a_2<a_3$ 을 만족하고, $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, $[a_3,b_3]$ 중 어느 것도 다른 것의 부분집합이 아닌 경우의 수를 구하여라. (단, $a_1<b_1$, $a_2<b_2$, $a_3<b_3$)

17. 모든 $-1\leq x\leq 1$ 에 대하여 $0\leq f(x)\leq 1$ 인 6차 다항식 $f(x)$ 에서 x^6 의 계수가 될 수 있는 수 중 가장 큰 것을 구하여라.

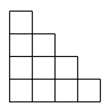
18. 각 A 가 예각인 삼각형 ABC 에 대하여 각 B 의 이등분선이 변 AC 와 만나는 점을 D, 각 C 의 이등분선이 변 AB 와 만나는 점을 E 라 하자. 선분 DE 의 중점 F 에서 직선 AB 와 BC 에 내린 수선의 발을 각각 J 와 K 라 하면, $\overline{AD}=30$, $\overline{FJ}=12$, $\overline{FK}=20$ 이다. $\overline{DE}=x$ 일 때, x^2 의 값을 구하여라.

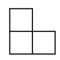
19. 수열 $\{a_n\}$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$a_1=1,\qquad a_{n+1}=\frac{1}{2[a_n]-a_n+1}\qquad(n\geq 1)$$

$a_{2014}=\dfrac{q}{p}$ (p, q 는 서로소인 양의 정수) 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 가장 큰 정수이다.)

20. 두 종류의 타일 □과 □□을 겹치지 않게 배치하여 아래 모양을 만드는 방법의 수를 구하여라.



예를 들어,  모양은 세 가지 방법으로 만들 수 있다.

(끝)