

수학 영역(가형)

제 2 교시

1

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{3x}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

2. 함수 $y = 2\sin x + 1$ 의 최댓값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\int_0^1 (e^x + 1)dx$ 의 값은? [2점]

- ① $e - 2$ ② $e - 1$ ③ e ④ $e + 1$ ⑤ $e + 2$

4. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 주축의 길이는? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

5. 함수 $f(x)=\cos x$ 에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 의 값은? [3점]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

7. 같은 종류의 컴퓨터용 사인펜 9자루를 같은 종류의 필통 3개에 나누어 넣을 때, 빈 필통이 없도록 넣는 경우의 수는? [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

6. 방정식 $\left(\frac{1}{8}\right)^{2-x} = 2^{x+4}$ 을 만족시키는 실수 x 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8. 함수 $f(x)=x^3+3x$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x)-g(4)}{x-4}$$

의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$
- ② $\frac{1}{5}$
- ③ $\frac{1}{4}$
- ④ $\frac{1}{3}$
- ⑤ $\frac{1}{2}$

9. $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식

$$|\sin 2x| = \frac{1}{2}$$

의 모든 실근의 개수는? [3점]

- ① 2
- ② 4
- ③ 6
- ④ 8
- ⑤ 10

10. 좌표평면 위의 곡선 $y = \sqrt{x}-3$ 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인
부분의 넓이는? [3점]

- ① 7
- ② $\frac{15}{2}$
- ③ 8
- ④ $\frac{17}{2}$
- ⑤ 9

11. 좌표평면에서 곡선 $y = e^{x-2}$ 위의 점 $(3, e)$ 에서의 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

- ① e ② $\frac{3}{2}e$ ③ $2e$ ④ $\frac{5}{2}e$ ⑤ $3e$

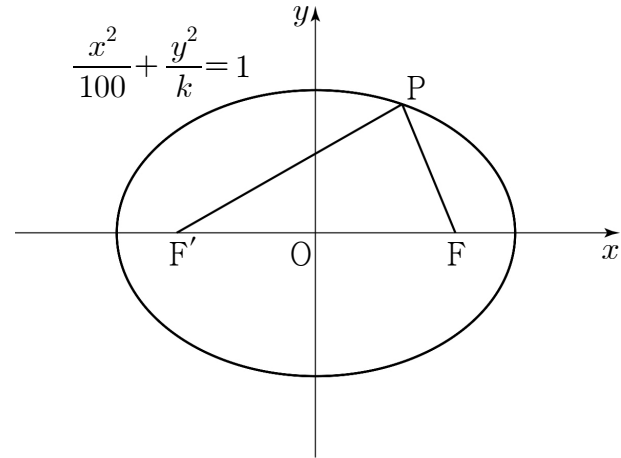
12. 집합 $X = \{1, 2\}$ 에서 집합 $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 으로의 함수 f 중에서 $f(1) + f(2)$ 가 4의 배수가 되도록 하는 함수 f 의 개수는? [3점]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

13. 함수 $f(x)=12x\ln x-x^3+2x$ 에 대하여 $f''(a)=0$ 인 실수 a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

14. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{k}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P와 두 초점 F, F'에 대하여 삼각형 PF'F의 둘레의 길이가 34일 때, 상수 k 의 값은? (단, $0 < k < 100$) [4점]



- ① 36 ② 41 ③ 46 ④ 51 ⑤ 56

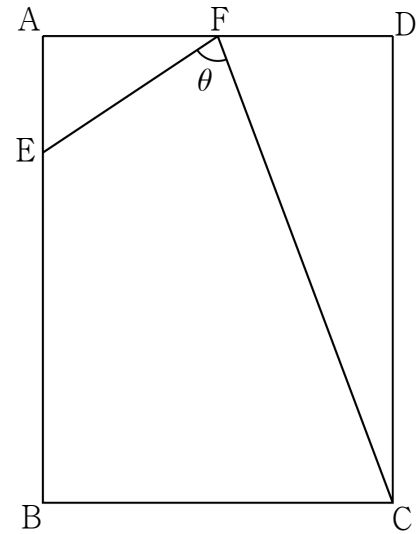
15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos x dx$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{3}{4}\pi$ ④ π ⑤ $\frac{5}{4}\pi$

16. 그림과 같이 선분 AB의 길이가 8, 선분 AD의 길이가 6인

직사각형 ABCD가 있다. 선분 AB를 1:3으로 내분하는 점을 E, 선분 AD의 중점을 F라 하자. $\angle EFC = \theta$ 라 할 때, $\tan \theta$ 의 값은?

[4점]



- ① $\frac{22}{7}$ ② $\frac{26}{7}$ ③ $\frac{30}{7}$ ④ $\frac{34}{7}$ ⑤ $\frac{38}{7}$

17. 두 집합

$A = \{x \mid x^2 - 5x + 4 \leq 0\},$

$B = \{x \mid (\log_2 x)^2 - 2k \log_2 x + k^2 - 1 \leq 0\}$

에 대하여 $A \cap B \neq \emptyset$ 을 만족시키는 정수 k 의 개수는? [4점]

- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

18. 다음은 자연수 n 에 대하여 부등식 $\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{k+1} \times {}_n C_k\right) < 100$ 을 만족시키는 n 의 최댓값을 구하는 과정이다.

이항정리를 이용하여 $(1+x)^n$ 을 전개하면

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \left(\boxed{\text{가}} \times x^k\right) \quad \dots\dots \text{㉠}$

위 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$2^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \dots + {}_n C_n \quad \dots\dots \text{㉡}$

㉠의 양변을 0에서 1까지 적분하여

$$\frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} = {}_n C_0 + \frac{1}{2} {}_n C_1 + \frac{1}{3} {}_n C_2 + \dots + \frac{1}{n+1} {}_n C_n$$

$\dots\dots \text{㉢}$

을 얻는다.

㉡과 ㉢에서

$$\boxed{\text{나}} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} {}_n C_1 + \frac{2}{3} {}_n C_2 + \frac{3}{4} {}_n C_3 + \dots + \frac{n}{n+1} {}_n C_n$$
$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{k+1} \times {}_n C_k\right) \text{이므로}$$

부등식 $\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{k+1} \times {}_n C_k\right) < 100$ 을 만족시키는 n 의 최댓값은

$\boxed{\text{다}}$ 이다.

위의 과정에서 (가)에 알맞은 식에 대하여 $k=1$ 일 때의 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$, (다)에 알맞은 수를 p 라 할 때, $f(6) \times g(5) + p$ 의 값은? [4점]

- ① 115
- ② 120
- ③ 125
- ④ 130
- ⑤ 135

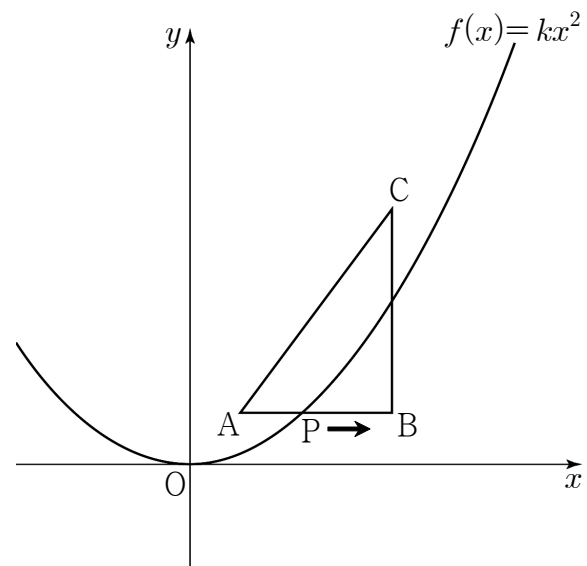
19. 좌표평면에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 점근선의 방정식이

$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 이고 한 초점이 $F(4\sqrt{3}, 0)$ 이다. 점 F를 지나고 x 축에 수직인 직선이 이 쌍곡선과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. 쌍곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기는?
(단, a, b 는 상수이다.) [4점]

- ① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

20. 그림과 같이 세 점 $A(1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(4, 5)$ 를 꼭짓점으로

하는 삼각형 ABC가 있다. 점 P는 점 A를 출발하여 삼각형 ABC의 변을 따라 점 B를 지나 점 C까지 매초 1의 일정한 속력으로 움직이고 이차함수 $f(x) = kx^2$ 의 그래프가 점 P를 지난다. t 초 후 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기를 $g(t)$ 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, 점 P는 한 번 지나간 점은 다시 지나가지 않는다.) [4점]



< 보 기 >

ㄱ. $0 \leq t < 3$ 일 때 점 P의 좌표는 $(t+1, 1)$

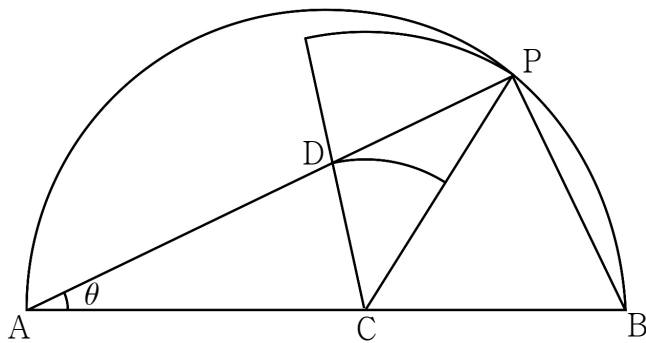
ㄴ. $g(t) = \frac{2}{t+1}$ ($0 \leq t < 3$)

ㄷ. $\int_0^7 g(t)dt = 6 + 4\ln 2$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다.

호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{BP} = \overline{BC}$ 가 되도록 선분 AB 위의 점 C를 잡고, $\overline{AC} = \overline{AD}$ 가 되도록 선분 AP 위의 점 D를 잡는다. $\angle PAB = \theta$ 에 대하여 선분 CD를 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\angle PCD$ 인 부채꼴의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 CP를 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\angle PCD$ 인 부채꼴의 넓이를 $T(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{T(\theta) - S(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이고 $\angle PCD$ 는 예각이다.) [4점]



- ① $\frac{\pi}{16}$ ② $\frac{\pi}{8}$ ③ $\frac{3}{16}\pi$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}\pi$

단답형

22. ${}_5\Pi_2$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ 에 대하여 $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 매개변수 $t(t > 0)$ 로 나타내어진 함수

$$x = t + 2\sqrt{t}, \quad y = 4t^3$$

에 대하여 $t = 1$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 좌표평면에서 점 $(2, 0)$ 을 지나고 기울기가 양수인 직선이

포물선 $y^2 = 8x$ 와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자.

선분 PQ의 길이가 17일 때, 두 점 P, Q의 x 좌표의 합을 구하시오.

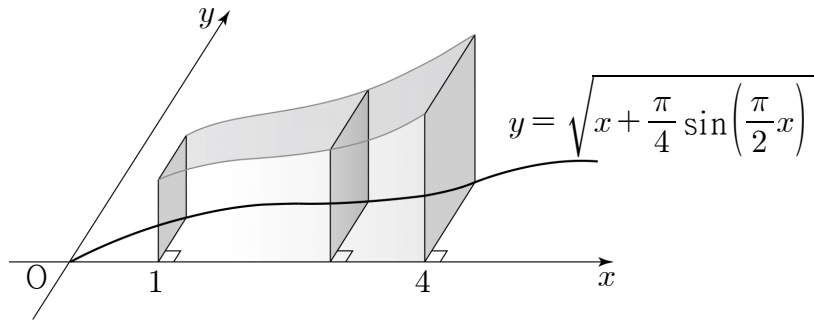
[3점]

26. 네 개의 자연수 2, 3, 5, 7 중에서 중복을 허락하여 8개를

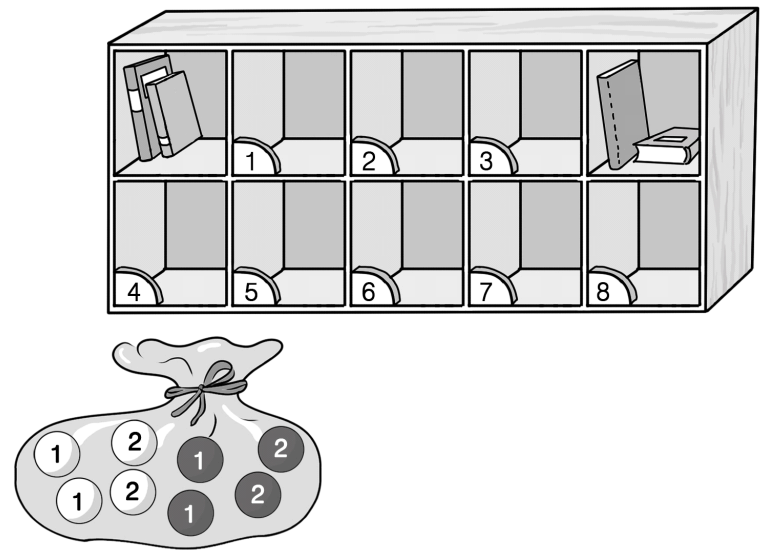
선택할 때, 선택된 8개의 수의 곱이 60의 배수가 되도록 하는

경우의 수를 구하시오. [4점]

27. 그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{x + \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$ 와 x 축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하시오. [4점]



28. 그림과 같이 주머니에 숫자 1이 적힌 흰 공과 검은 공이 각각 2개, 숫자 2가 적힌 흰 공과 검은 공이 각각 2개가 들어 있고, 비어 있는 8개의 칸에 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 진열장이 있다.



- 숫자가 적힌 8개의 칸에 주머니 안의 공을 한 칸에 한 개씩 모두 넣을 때, 숫자 4, 5, 6이 적힌 칸에 넣는 세 개의 공이 적힌 수의 합이 5이고 모두 같은 색이 되도록 하는 경우의 수를 구하시오. (단, 모든 공은 크기와 모양이 같다.) [4점]

29. 좌표평면에서 2 이상의 자연수 n 에 대하여 두 곡선 $y = 3^x - n$, $y = \log_3(x+n)$ 으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x 좌표와 y 좌표가 모두 자연수인 점의 개수가 4가 되도록 하는 자연수 n 의 개수를 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$ 와 함수

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근은 0과 2뿐이고 허근은 존재하지 않는다.
 (나) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^3}{f(x)}$ 이 존재한다.
 (다) 함수 $\left| \frac{g(x)}{x} \right|$ 는 $x = \frac{5}{4}$ 에서 연속이고 미분가능하지 않다.

함수 $g(x)$ 의 극솟값을 k 라 할 때, $27k$ 의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.