

2012년 5월 19일; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 “7” 일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1~4 번은 각 4 점, 문제 17~20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 어떤 양의 정수를 2진법으로 표현하면 마지막 세 자리가 011 이고, 5진법으로 표현하면 마지막 세 자리가 101 이다. 이 수를 10진법으로 표현할 때 마지막 세 자리를 구하여라.
2. 다항식 $x^4 - 9x + n$ 이 두 개의 정수 계수 이차다항식의 곱이 되게 하는 정수 n 의 개수를 구하여라.
3. 삼각형의 각 변에 꼭짓점이 아닌 점이 네 개씩 주어 져 있다. 이 12개의 점 중 네 점을 꼭짓점으로 갖는 볼록사각형의 개수를 구하여라.
4. 각 B 와 각 C 가 모두 예각인 삼각형 ABC 의 꼭짓점 A 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 D 라 하고, 각 B 의 이등분선이 변 AD , AC 와 만나는 점을 각각 E, F 라 하자. $\overline{AE} : \overline{ED} = 3 : 2$ 이고 $\overline{AE} = \overline{AF}$ 일 때, $\frac{S(ABC)}{S(CEF)}$ 의 값을 구하여라. 단, $S(ABC)$ 는 삼각형 ABC 의 넓이다.
5. 숫자 9를 자릿수로 가지는 세 자리 양의 정수 중 3의 배수의 개수를 구하여라.
6. 양의 실수 x, y 가 $4x^2 + 9y^2 = 36x^2y^2$ 을 만족할 때 $\frac{1}{ax} + \frac{1}{by}$ 의 최댓값이 1이 되는 양의 실수 a, b 에 대하여 ab 의 최솟값을 구하여라.
7. 두 자리 양의 정수 중에서 양의 약수의 개수가 2의 거듭제곱인 수는 모두 몇 개인가?
8. 선분 AB 가 지름인 원에 사각형 $ABCD$ 가 내접한다. 선분 AB 위의 점 P 에서 변 CD 에 내린 수선의 발을 Q 라 할 때, $\overline{PA} = \overline{PQ}$ 이다. $\angle BCD = 145^\circ$, $\angle ADC = 110^\circ$, $\angle PQA = M^\circ$ 일 때, $10M$ 의 값을 구하여라.
9. 숫자 1, 2, 3을 각각 네 번씩 사용하여 만든 12자리 양의 정수 중, 213321231321과 같이 어떠한 두 개의 1 사이에도 2와 3이 모두 있는 것의 개수를 구하여라.
10. 방정식 $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor = x - 2$ 의 양수해 중 1000을 넘지 않는 것의 개수를 구하여라. 단 $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이다.
11. 중심이 G 이고 수심이 H 인 예각삼각형 ABC 의 외심 O 에서 변 BC 의 중점까지 거리가 6이다. 꼭짓점 A 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 D 라 하고, 직선 DG 가 삼각형 ABC 의 외접원과 만나는 점 중 직선 BC 를 기준으로 G 와 같은 쪽에 있는 점을 E 라 할 때, $\overline{HD} = 36$, $\overline{AE} = 36$ 이다. 선분 DG 의 길이를 구하여라.

12. 양의 실수 x, y 에 대하여

$$\frac{100xy}{4x + (x + y - 1)^2}$$

의 최댓값을 구하여라.

13. 각 자릿수가 1 또는 2인 10자리 양의 정수 중, 1211212212와 같이 2 바로 다음에 1이 나오는 경우가 정확히 세 번인 것의 개수를 구하여라.

14. 반지름이 12인 원 O 위의 한 점 A 에 대하여, 선분 OA 의 중점 M 을 지나고 OA 에 수직인 직선 l 이 원 O 와 만나는 점 중 하나를 B 라 하자. 점 C 는 호 AB 위의 점으로 직선 CM 이 원 O 와 만나는 점 $D (D \neq C)$ 에 대해 $\overline{CD} = 21$ 이다. 직선 AD 와 직선 l 이 만나는 점을 P 라 할 때, \overline{CP}^2 을 구하여라.

15. 양의 정수 M 에 대하여 M^5 의 약수 중 1보다 크고 $\sqrt{M^5}$ 보다 작은 것의 개수가 2012라 하자. 이러한 M 중 가장 작은 수를 P 라 할 때, P 의 양의 약수 중 32의 배수이고 \sqrt{P} 보다 작은 것의 개수를 구하여라.

16. $f(x) = x^2 - 2kx + 2k^2$ 이라 하자. $0 \leq a, b, c \leq 4$ 인 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 $f(a), f(b), f(c)$ 가 삼각형의 세 변을 이루도록 하는 양의 정수 k 중 가장 작은 것을 구하여라.

17. 양의 정수 n 을 두 개 이상의 연속한 양의 정수의 합으로 나타내는 방법을 생각하자. 예를 들어 15의 경우에는 $7 + 8, 4 + 5 + 6, 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ 의 세 가지 방법이 있다. 999를 이와 같이 나타내는 방법의 수를 구하여라.

18. 정수 x 중 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ 이 완전제곱수가 되게 하는 것들의 합을 구하여라.

19. 삼각형 ABC 의 내심 I 를 지나고 직선 AI 에 수직인 직선이 직선 BC 와 점 D 에서 만난다. $\overline{AB} = 30, \overline{CA} = 60, \overline{CD} = 50$ 일 때 선분 BC 의 길이를 구하여라.

20. 원 위에 서로 다른 n 개의 점 P_1, P_2, \dots, P_n 이 있다. 이 중 두 점을 잇는 선분들을 모두 그릴 때, 어떠한 세 선분도 원 내부의 한 점에서 만나지 않는다. 다음 조건을 만족하는 삼각형의 개수를 T_n 이라 하자.

삼각형의 각 변은 어떤 선분 $P_i P_j$ 에 포함된다.

예를 들어 $T_3 = 1, T_4 = 8$ 이다. T_7 을 구하여라.