

2017학년도 4월 고3 전국연합학력평가

정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[나형]

1	2	2	3	3	4	4	5	5
6	1	7	2	8	5	9	1	10
11	3	12	5	13	1	14	4	15
16	2	17	1	18	2	19	5	20
21	2	22	7	23	12	24	9	25
26	3	27	120	28	5	29	19	30

1. [출제의도] 지수 계산하기

$$4^{\frac{3}{2}} \times 4^{-1} = 4^{\frac{3}{2}-1} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

2. [출제의도] 집합의 연산 계산하기

$$A \cap B = \{2, 4, 6\}$$

$$\therefore n(A \cap B) = 3$$

3. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + n}{n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{5}{n^2}} = 7$$

4. [출제의도] 역함수 이해하기

$$f(8) = 2$$

$$\therefore f^{-1}(2) = 8$$

5. [출제의도] 등차수열의 합 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때,

$$S_{10} = \frac{10 \times \{2 \times 3 + (10-1) \times 2\}}{2} = 120$$

6. [출제의도] 무리함수의 그래프 이해하기

좌표평면에서 무리함수 $y = \sqrt{x+4} + a$ 의 그래프가 점 $(5, 7)$ 을 지나므로 $7 = \sqrt{5+4} + a$

$$\therefore a = 4$$

점 $(0, b)$ 를 지나므로 $b = \sqrt{0+4} + 4 = 6$

따라서 $a+b = 10$

7. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$f(0) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 + 0 = 2$$

8. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$$\alpha + \beta = 18, \quad \alpha\beta = 6$$

$$\log_2(\alpha + \beta) - 2\log_2\alpha\beta$$

$$= \log_2 18 - \log_2 6^2 = \log_2 \frac{18}{36} = \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

9. [출제의도] 이항정리 이해하기

다항식 $(x+3)^n$ 의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r x^r 3^{n-r}$

상수항이 81이므로 $r=0$ 일 때, ${}_nC_0 \times 3^n = 81$

따라서 $n=4$

$(x+3)^4$ 의 전개식에서 x 항은

$${}_4C_1 \times x \times 3^3 = 4 \times 27 \times x = 108x$$

따라서 x 의 계수는 108

10. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$$\sum_{n=1}^{10} (3a_n + b_n - 2) = 3 \sum_{n=1}^{10} a_n + \sum_{n=1}^{10} b_n - \sum_{n=1}^{10} 2$$

$$= 3 \times 9 + 7 - 2 \times 10$$

$$= 14$$

11. [출제의도] 자연수의 분할 이해하기

구하는 경우의 수는 9를 3개의 자연수로 분할하는 경우의 수와 같다.

$$9 = 7 + 1 + 1$$

$$= 6 + 2 + 1$$

$$= 5 + 3 + 1$$

$$= 5 + 2 + 2$$

$$= 4 + 4 + 1$$

$$= 4 + 3 + 2$$

$$= 3 + 3 + 3$$

따라서 구하는 경우의 수는 7

12. [출제의도] 수열의 극한의 성질 이해하기

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{3n} \times \frac{2n+3}{b_n} \right) = 12$$

$$\frac{a_n}{3n} \times \frac{2n+3}{b_n} = c_n \text{이라 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 12$$

$$\frac{a_n}{b_n} = c_n \times \frac{3n}{2n+3} \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(c_n \times \frac{3n}{2n+3} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n+3}$$

$$= 12 \times \frac{3}{2} = 18$$

13. [출제의도] 로그의 정의 이해하기

a 가 밑이므로 $a > 0, a \neq 1 \dots\dots \textcircled{1}$

진수 $x^2 + 2ax + 5a$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2ax + 5a > 0$ 이므로

판별식 $D = 4a^2 - 20a = 4a(a-5) < 0$

$$0 < a < 5 \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $0 < a < 5, a \neq 1$

따라서 정수 a 는 2, 3, 4이고 합은 9

14. [출제의도] 유리함수의 그래프 이해하기

유리함수 $y = \frac{4x+1}{2x+a}$ 은 $y = \frac{1-2a}{2x+a} + 2$ 이므로

두 점근선의 방정식은 $x = -\frac{a}{2}, y = 2$

두 점근선의 교점은 $\left(-\frac{a}{2}, 2\right)$

점 $\left(-\frac{a}{2}, 2\right)$ 가 직선 $y = x+1$ 위에 있으므로

$$2 = -\frac{a}{2} + 1$$

$$\therefore a = -2$$

15. [출제의도] 집합의 연산을 활용하여 문제해결하기

학생 50명 전체집합을 U 라 하면 $n(U) = 50$

헌혈을 희망한 학생들의 집합을 A 라 하면 $n(A) = 28$

환경보호활동을 희망한 학생들의 집합을 B 라 하면 $n(B^C) = 10$ 이므로 $n(B) = 40$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 28 + 40 - n(A \cup B)$$

$$= 68 - n(A \cup B)$$

$n(A \cup B)$ 는 $A \subset B$ 일 때, 최솟값 40을 갖는다.

따라서 $n(A \cap B)$ 의 최댓값은 28

$n(A \cup B)$ 는 $A \cup B = U$ 일 때, 최댓값 50을 갖는다.

따라서 $n(A \cap B)$ 의 최솟값은 18

$$\therefore M + m = 28 + 18 = 46$$

16. [출제의도] 급수와 일반항의 관계 이해하기

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n a_n - 2^{n+1}}{2^n + 1} = 1 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n a_n - 2^{n+1}}{2^n + 1} = 0$$

$$\frac{2^n a_n - 2^{n+1}}{2^n + 1} = b_n \text{이라 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$a_n = \frac{(2^n + 1)b_n + 2^{n+1}}{2^n} \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n + 1)b_n + 2^{n+1}}{2^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)b_n + 2 \right\} = 2$$

17. [출제의도] 지수법칙을 활용하여 추론하기

(i) $\sqrt{\frac{2^a \times 5^b}{2}} = 2^{\frac{a-1}{2}} \times 5^{\frac{b}{2}}$ 이 자연수이므로

$$a-1 = 2m, \quad a = 2m+1 (m \text{은 음이 아닌 정수})$$

$$a = 1, 3, 5, \dots$$

$$b = 2n (n \text{은 자연수})$$

$$b = 2, 4, 6, \dots$$

(ii) $\sqrt[3]{\frac{3^b}{2^{a+1}}} = \frac{3^{\frac{b}{3}}}{2^{\frac{a+1}{3}}}$ 이 유리수이므로

$$a+1 = 3k, \quad a = 3k-1 (k \text{는 자연수})$$

$$a = 2, 5, 8, \dots$$

$$b = 3l (l \text{은 자연수})$$

$$b = 3, 6, 9, \dots$$

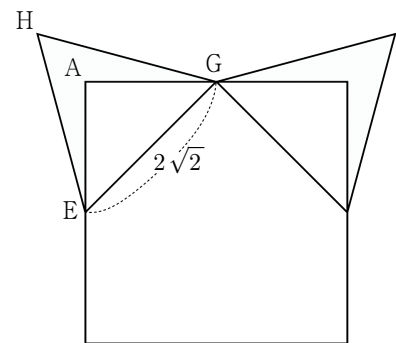
(i), (ii)에 의하여

a 의 최솟값은 5, b 의 최솟값은 6

따라서 $a+b$ 의 최솟값은 11

18. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제해결하기

그림 R_1 에서



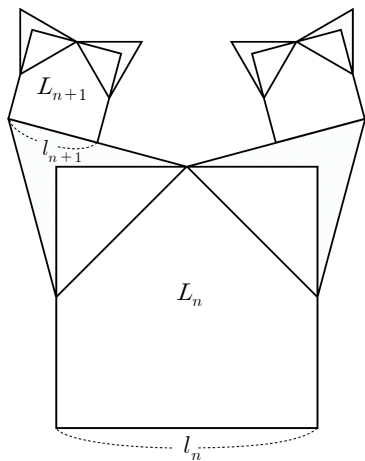
S_1 은 정삼각형 EGH의 넓이에서 삼각형 EGA의 넓이를 뺀 값의 2배이므로

$$S_1 = 2 \times \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right\}$$

$$= 2 \times (2\sqrt{3} - 2)$$

$$= 4(\sqrt{3} - 1)$$

다음은 그림 R_{n+1} 의 일부이다.



정사각형 L_n 의 한 변의 길이를 l_n 이라 하면

정사각형 L_{n+1} 의 한 변의 길이

$$l_{n+1} = \frac{l_n}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} l_n$$

정사각형 L_n 과 정사각형 L_{n+1} 은 서로 닮음이고

$$\text{닮음비는 } l_n : l_{n+1} = 1 : \frac{\sqrt{2}}{4}$$

그러므로 그림 R_n 과 R_{n+1} 에서 새로 얻어진

모양의 도형도 서로 닮음이고

$$\text{닮음비가 } 1 : \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ 이므로 넓이의 비는 } 1 : \frac{1}{8} \text{ 이다.}$$

또 새로 얻어지는 모양의 도형의 개수가 2배씩 늘어나므로

S_n 은 첫째항이 $4(\sqrt{3}-1)$ 이고 공비가 $\frac{1}{8} \times 2 = \frac{1}{4}$ 인

등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이다.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{4(\sqrt{3}-1)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{16}{3}(\sqrt{3}-1)$$

19. [출제의도] 명제를 활용하여 추론하기

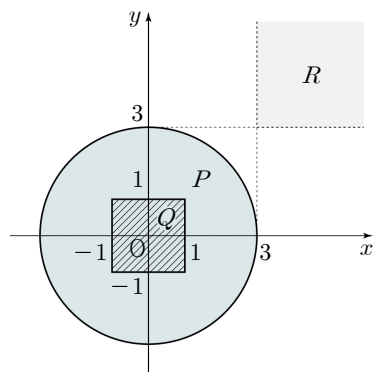
두 실수 x, y 에 대한 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$$P = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\},$$

$$Q = \{(x, y) \mid |x| \leq 1 \text{이고 } |y| \leq 1\},$$

$$R = \{(x, y) \mid x > 3 \text{이고 } y > 3\} \text{이므로}$$

P, Q, R 를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



ㄱ. $Q \subset P$ 이므로 $q \rightarrow p$ 는 참이다.

ㄴ. $P \subset R^C$ 이므로 $p \rightarrow \sim r$ 는 참이다.

ㄷ. $R \subset Q^C$ 이므로 $r \rightarrow \sim q$ 는 참이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. [출제의도] 순열 추론하기

(i) 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 모든 경우의 수는 216이다.

(ii) 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 홀수인 경우는 1, 3, 5 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택한 후 일렬로 배열하는 중복순열과 같으므로 이 경우의 수는 ${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$ 이다.

(iii) 6 이하의 짝수는 2, 4, 6이므로

세 수의 곱이 2인 경우의 수는 2, 1, 1을

일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로 $\frac{3!}{2!} = 3$

4인 경우의 수는 4, 1, 1 또는 2, 2, 1을

일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} = 3 + 3 = 6$$

6인 경우의 수는 6, 1, 1 또는 3, 2, 1을

일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!} + 3! = 3 + 6 = 9 \text{이다.}$$

그러므로 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는

눈의 수의 곱이 6 이하의 짝수인

경우의 수는 $3+6+9 = 18$ 이다.

따라서 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는

눈의 수의 곱이 8 이상의 짝수인 경우의 수는

$$216 - 27 - 18 = 171 \text{이다.}$$

$$\therefore a = 27, b = 18, c = 171$$

$$\text{따라서 } 3a + 2b + c = 288$$

21. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

삼각형 POQ가 이등변삼각형이므로

점 Q의 좌표는 $(2t, 0)$

삼각형 POQ의 넓이는

$$S(t) = \frac{1}{2} \times 2t \times t^2 = t^3$$

삼각형 PRO가 이등변삼각형이므로 선분 OP의 수직이등분선이 y 축과 만나는 점이 R이다.

선분 OP의 중점을 M이라 하면 $M\left(\frac{t}{2}, \frac{t^2}{2}\right)$ 이고

직선 MR의 기울기는 $-\frac{1}{t}$ 이므로

직선 MR의 방정식은

$$y - \frac{t^2}{2} = -\frac{1}{t}\left(x - \frac{t}{2}\right)$$

$$y = -\frac{1}{t}x + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore R\left(0, \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

삼각형 PRO의 넓이는

$$T(t) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right) \times t = \frac{1}{4}(t^3 + t)$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T(t) - S(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{4}(t^3 + t) - t^3}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(-\frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

22. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+6)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+6) = 7$$

23. [출제의도] 등차중항 이해하기

a_4 는 a_2 와 a_6 의 등차중항이므로

$$2a_4 = a_2 + a_6 = 8 + 16$$

$$\therefore a_4 = 12$$

24. [출제의도] 절대부등식 이해하기

$a > 0$ 이므로

$$(a+4)\left(\frac{1}{a}+1\right) = 1+a+\frac{4}{a}+4$$

$$\geq 5 + 2\sqrt{a \times \frac{4}{a}}$$

$$= 5 + 4 = 9$$

(단, 등호는 $a = 2$ 일 때 성립한다.)

따라서 최솟값은 9

25. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

$$a_{n+1} = 2(a_n + 2) \text{의 } n \text{에 } 1, 2, 3, 4 \text{를}$$

차례로 대입하면

$$a_2 = 2(a_1 + 2) = 2 \times (2 + 2) = 8$$

$$a_3 = 2(a_2 + 2) = 2 \times (8 + 2) = 20$$

$$a_4 = 2(a_3 + 2) = 2 \times (20 + 2) = 44$$

$$a_5 = 2(a_4 + 2) = 2 \times (44 + 2) = 92$$

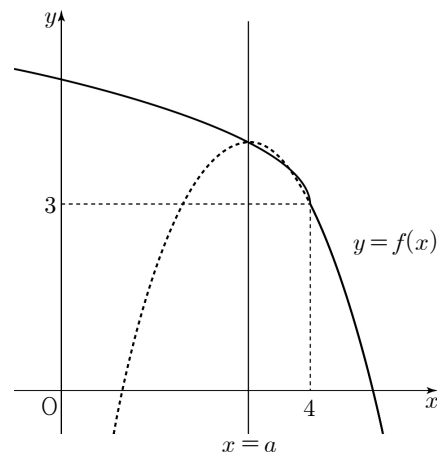
26. [출제의도] 일대일 대응을 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되기 위해서는

곡선 $y = -(x-a)^2 + 4$ 가 점 $(4, 3)$ 을

지나야 하고, 곡선 $y = -(x-a)^2 + 4$ 의

축이 $x = a$ 이므로 $a \leq 4$ 이다.



$$3 = -(4-a)^2 + 4$$

$$a^2 - 8a + 15 = 0$$

$$(a-3)(a-5) = 0$$

$$\therefore a = 3 \text{ 또는 } a = 5$$

$$a \leq 4 \text{이므로 } a = 3$$

27. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)a_k = n(n+1)(4n-1) = S_n \text{이라 하면}$$

수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여 $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} (2n-1)a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n(n+1)(4n-1) - (n-1)n(4n-5) \\ &= n(12n-6) \\ &= 6n(2n-1) \end{aligned}$$

$$a_n = 6n(n \geq 2), a_1 = S_1 = 6$$

$$\therefore a_n = 6n(n \geq 1)$$

$$\text{따라서 } a_{20} = 120$$

28. [출제의도] 수열의 극한을 활용하여 문제해결하기

직선 $x = 1$ 이 두 곡선 $y = \frac{4}{x}$, $y = -\frac{6}{x}$ 과 만나는

점 A의 좌표는 $(1, 4)$, 점 B의 좌표는 $(1, -6)$

직선 $x = n+1$ 이 곡선 $y = \frac{4}{x}$ 와 만나는

$$\text{점 } P_n \text{의 좌표는 } \left(n+1, \frac{4}{n+1}\right)$$

직선 $x = n+1$ 이 곡선 $y = -\frac{6}{x}$ 과 만나는

$$\text{점 } Q_n \text{의 좌표는 } \left(n+1, -\frac{6}{n+1}\right)$$

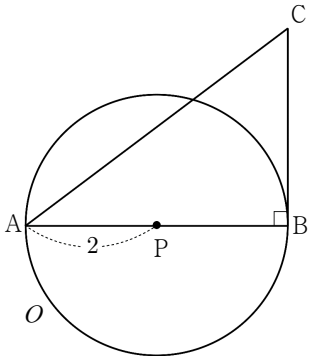
사다리꼴 ABQ_nP_n 의 넓이는

$$S_n = \frac{1}{2} \times n \times \left(10 + \frac{4}{n+1} + \frac{6}{n+1}\right) \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} \left(10 + \frac{10}{n+1}\right) = 5$$

29. [출제의도] 함수의 연속을 활용하여 문제해결하기

[그림1]과 같이 $x=2$ 일 때,
원 O 가 삼각형 ABC 와 만나는 서로 다른 점의
개수는 3이다.
 $\therefore f(2)=3$
 $0 < x < 2$ 에서 원 O 가 삼각형 ABC 와
만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.
 $\therefore f(x)=2(0 < x < 2)$



[그림1]

[그림2]와 같이 원 O 가 선분 AC 에 접할 때, 접하는
점을 H 라 하면 삼각형 AHP 와 삼각형 ABC 는
답음이므로

$$\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{HP}$$
$$5 : 3 = x : 2$$
$$x = \frac{10}{3}$$

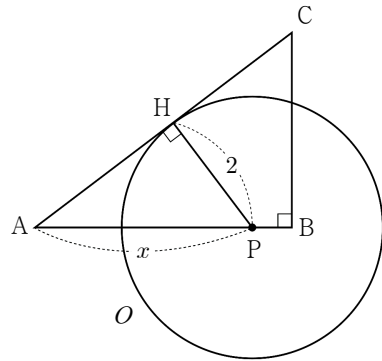
$$x = \frac{10}{3} \text{ 일 때, } f\left(\frac{10}{3}\right) = 3$$

$2 < x < \frac{10}{3}$ 에서 원 O 가 삼각형 ABC 와
만나는 서로 다른 점의 개수는 4이다.

$$\therefore f(x) = 4(2 < x < \frac{10}{3})$$

$\frac{10}{3} < x < 4$ 에서 원 O 가 삼각형 ABC 와
만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.

$$\therefore f(x) = 2(\frac{10}{3} < x < 4)$$

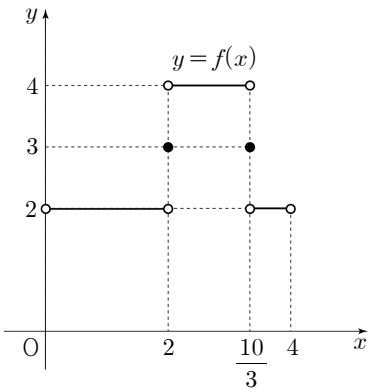


[그림2]

따라서

$$f(x) = \begin{cases} 2 & (0 < x < 2) \\ 3 & (x = 2) \\ 4 & (2 < x < \frac{10}{3}) \\ 3 & (x = \frac{10}{3}) \\ 2 & (\frac{10}{3} < x < 4) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$ 를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



함수 $f(x)$ 가 $x=2$, $x=\frac{10}{3}$ 에서 불연속이므로

모든 실수 a 의 값의 합은 $2 + \frac{10}{3} = \frac{16}{3}$ 이다.

$$\therefore p=3, q=16$$

$$\text{따라서 } p+q=19$$

30. [출제의도] 중복조합을 활용하여 추론하기

자연수 n 에 대하여 0부터 n 까지 정수가 하나씩
적힌 $(n+1)$ 개의 공이 들어 있는 상자에서
한 개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시
넣는 5번의 과정 중 m 번째 꺼낸 공에 적힌 수를
 $f(m)$ 이라 할 때,

조건 (가)에 의하여

$$f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)$$

조건 (나)에 의하여 $f(3)=f(1)+1$

$f(1)=a(a=0, 1, 2, \dots, n-1)$ 이라 하면

$$f(3)=a+1$$

$$a \leq f(2) \leq a+1 \leq f(4) \leq f(5)$$

(i) $a=0$ 일 때,

$$0 \leq f(2) \leq 1 \leq f(4) \leq f(5)$$

$f(2)$ 를 선택하는 경우는 0 또는 1의 두 가지이고

$f(4)$, $f(5)$ 를 선택하는 경우의 수는

1, 2, 3, \dots , n 중에서 중복을 허락하여 2개를
선택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_nH_2 = {}_{n+1}C_2$$

$$\therefore 2 \times {}_{n+1}C_2$$

(ii) $a=1$ 일 때,

$$1 \leq f(2) \leq 2 \leq f(4) \leq f(5)$$

$f(2)$ 를 선택하는 경우는 1 또는 2의 두 가지이고

$f(4)$, $f(5)$ 를 선택하는 경우의 수는

2, 3, 4, \dots , n 중에서 중복을 허락하여 2개를
선택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{n-1}H_2 = {}_nC_2$$

$$\therefore 2 \times {}_nC_2$$

(iii) $a=k$ 일 때,

$$k \leq f(2) \leq k+1 \leq f(4) \leq f(5)$$

$f(2)$ 를 선택하는 경우는 k 또는 $k+1$ 의 두 가지이고

$f(4)$, $f(5)$ 를 선택하는 경우의 수는

$k+1$, $k+2$, $k+3$, \dots , n 중에서 중복을 허락하여
2개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{n-k}H_2 = {}_{n-k+1}C_2$$

$$\therefore 2 \times {}_{n-k+1}C_2$$

$0 \leq k \leq n-1$ 이므로

$$a_n = 2({}_{n+1}C_2 + {}_nC_2 + {}_{n-1}C_2 + \dots + {}_3C_2 + {}_2C_2)$$

$$= 2({}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \dots + {}_nC_2 + {}_{n+1}C_2)$$

$$= 2({}_3C_3 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \dots + {}_nC_2 + {}_{n+1}C_2)$$

한편, ${}_nC_{r-1} + {}_nC_r = {}_{n+1}C_r (1 \leq r \leq n)$ 이므로

$$a_n = 2 \times {}_{n+2}C_3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{18} \frac{a_n}{n+2} = \sum_{n=1}^{18} \frac{n(n+1)}{3} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{18} (n^2 + n)$$
$$= \frac{1}{3} \left(\frac{18 \times 19 \times 37}{6} + \frac{18 \times 19}{2} \right) = 760$$

[다른 풀이]

자연수 n 에 대하여 0부터 n 까지 정수가 하나씩
적힌 $(n+1)$ 개의 공이 들어 있는 상자에서
한 개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시
넣는 5번의 과정 중 m 번째 꺼낸 공에 적힌 수를
 $f(m)$ 이라 할 때,

조건 (가)에 의하여

$$f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)$$

조건 (나)에 의하여 $f(3)=f(1)+1$

$f(1)=a(a=0, 1, 2, \dots, n-1)$ 이라 하면

$$f(3)=a+1$$

$$a \leq f(2) \leq a+1 \leq f(4) \leq f(5)$$

(i) $f(2)$ 를 선택하는 경우는

$$f(2)=a \text{ 또는 } f(2)=a+1 \text{ 이므로}$$

이 경우의 수는 2 $\dots\dots$ ㉠

(ii) $f(3)$ 이 결정되면 $f(1)$ 은 유일하므로

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 를 선택하는 경우만 고려하면 된다.

$$f(3)=a+1 \geq 1 \text{ 이므로}$$

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 를 선택하는 경우는

1부터 n 까지 수 중에서 중복을 허락하여 3개를
선택하는 중복조합의 수와 같다.

이 경우의 수는 ${}_nH_3 \dots\dots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$$a_n = 2 \times {}_nH_3 = 2 \times {}_{n+2}C_3 = 2 \times \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{18} \frac{a_n}{n+2} = 760$$