

제 2 교시

수학 영역 (가형)

5 지 선 다 형

1. $2 \times \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2. 두 집합

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{3, 4, 5, 6\}$

에 대하여 $n(A \cup B)$ 의 값은? [2점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\sqrt{n^2+2}}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 함수 $f(x)=x^4-3x^2+4$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 첫째항이 2인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n)^2 + 2$$

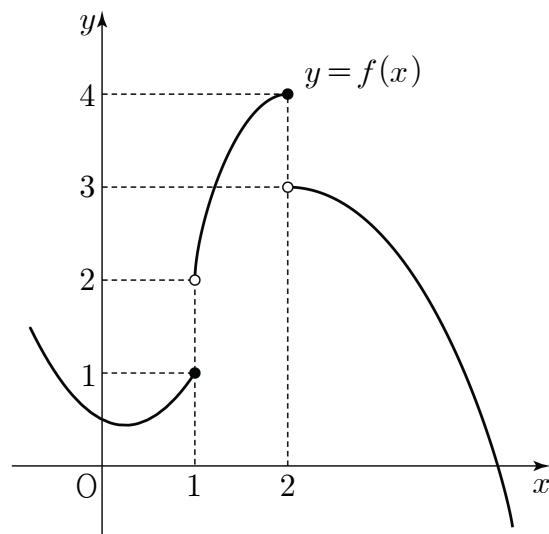
를 만족시킬 때, a_4 의 값은? [3점]

- ① 52 ② 54 ③ 56 ④ 58 ⑤ 60

6. 이차함수 $f(x) = x^2 - x + 5$ 의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식이 $y = 3x + b$ 일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은? [3점]

- ① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

7. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

8. 자연수 k 에 대한 조건

‘모든 자연수 x 에 대하여 $x > k-5$ 이다.’

가 참인 명제가 되도록 하는 모든 k 의 값의 합은? [3점]

- ① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

9. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{7n}{3n+2}\right)$ 이 수렴할 때,

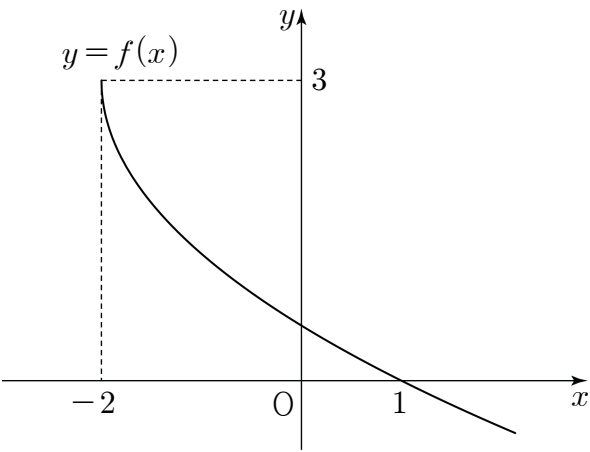
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+5)a_n}{n+3}$ 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

10. 정의역이 $\{x \mid x \geq -2\}$ 인 무리함수

$f(x) = -\sqrt{ax+b}+3$

의 그래프가 그림과 같다.



함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(1, 0)$ 을 지날 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은? [3점]

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

11. 두 집합

$$X = \{x \mid -3 \leq x \leq 5\}, \quad Y = \{y \mid |y| \leq a, a > 0\}$$

에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = 2x + b$ 가 일대일 대응이다. 두 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값은? [3점]

- ① 66 ② 68 ③ 70 ④ 72 ⑤ 74

12. 첫째항이 1이고 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때,

$$\frac{S_6 - S_4}{3} = \frac{a_6 - a_4}{2}$$

가 성립한다. 양수 r 의 값은? [3점]

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

13. 함수 $f(x)=3x^2+2$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1+\frac{2k}{n}\right) \frac{1}{n}$ 의 값은?
[3점]

- ① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

14. 1 보다 큰 세 자연수 a, b, c 에 대하여 세 수
 $\log a, \log b, \log c$

가 이 순서대로 공차가 자연수인 등차수열을 이룬다.

$\log abc=15$ 일 때, $\log \frac{ac^2}{b}$ 의 최댓값은? [4점]

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

15. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여
함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_2^x (t-2)f'(t) dt$$

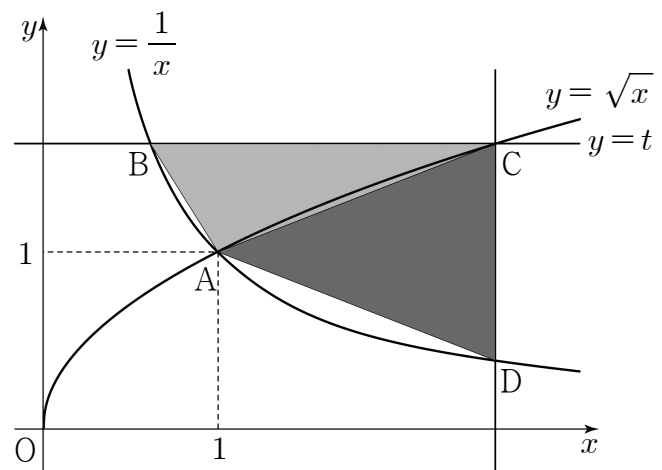
라 하자. 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서만 극값을 가질 때, $g(0)$ 의
값은? [4점]

- ① -2 ② $-\frac{5}{2}$ ③ -3 ④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ -4

16. 그림과 같이 두 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 과 $y = \sqrt{x}$ 가 점 $A(1, 1)$ 에서

만난다. 직선 $y = t$ ($t > 1$) 이 두 곡선 $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$ 와
만나는 점을 각각 B, C 라 하자. 점 C 를 지나고 y 축과 평행한
직선이 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 과 만나는 점을 D 라 하자. 삼각형 ACB 의
넓이를 $f(t)$, 삼각형 ADC 의 넓이를 $g(t)$ 라 할 때,

$\lim_{t \rightarrow 1+} \frac{g(t)}{f(t)}$ 의 값은? [4점]



- ① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

17. 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의
시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도가 각각

$f(t)=t^2-t, g(t)= -3t^2+6t$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

————<보 기>————

ㄱ. 점 P는 출발 후 운동방향을 1번 바꾼다.
ㄴ. $t=2$ 에서 두 점 P, Q의 가속도를 각각 p, q 라 할 때,
 $pq < 0$ 이다.
ㄷ. $t=0$ 부터 $t=3$ 까지 점 Q가 움직인 거리는 8이다.

- ① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 다음은 3이 아닌 양수 p 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n+3p^{n-1}+3^2p^{n-2}+\cdots+3^{n-1}p+3^n}{(p+3)^n}=\frac{p^2+3p+\boxed{\text{다}}}{3p}$$

가 성립함을 보이는 과정이다.

$p^n+3p^{n-1}+3^2p^{n-2}+\cdots+3^{n-1}p+3^n$ 은
첫째항이 p^n , 공비가 $\boxed{\text{가}}$ 인 등비수열의 첫째항부터
제 $(n+1)$ 항까지의 합이고, $p \neq 3$ 이므로

$$\begin{aligned} & p^n+3p^{n-1}+3^2p^{n-2}+\cdots+3^{n-1}p+3^n \\ &= \frac{p^{n+1}-3^{n+1}}{\boxed{\text{나}}} \end{aligned}$$

이다.

$0 < \frac{p}{p+3} < 1, 0 < \frac{3}{p+3} < 1$ 이므로

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n+3p^{n-1}+3^2p^{n-2}+\cdots+3^{n-1}p+3^n}{(p+3)^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n+1}-3^{n+1}}{\boxed{\text{나}} \times (p+3)^n} \\ &= \frac{1}{\boxed{\text{나}}} \left\{ p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p}{p+3} \right)^n - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{p+3} \right)^n \right\} \\ &= \frac{p^2+3p+\boxed{\text{다}}}{3p} \end{aligned}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(p), g(p)$ 라 하고,
(다)에 알맞은 수를 k 라 할 때, $f(k) \times g(k)$ 의 값은? [4점]

- ① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

19. 최고차항의 계수가 1인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x) = -f(x), g(-x) = -g(x)$$

를 만족시킨다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x^2 g'(x)} = 3, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = -1$$

일 때, $f(2)+g(3)$ 의 값은? [4점]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

20. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 하고, 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle POA = \angle BOQ = 30^\circ$ 가 되도록 잡는다.



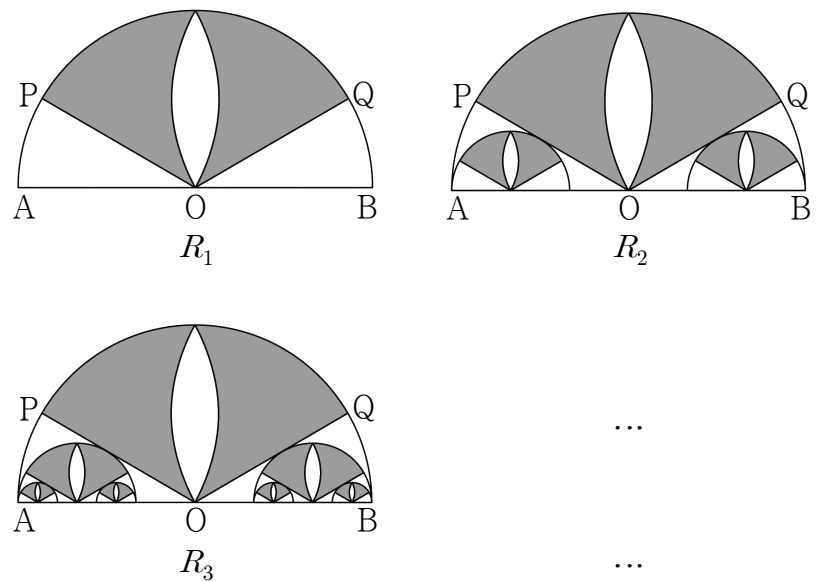
부채꼴 POQ의 내부에서 점 P를 중심으로 하고 선분 PO를 반지름으로 하는 원의 내부와 점 Q를 중심으로 하고 선분 QO를 반지름으로 하는 원의 내부의 공통부분을 제외한  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

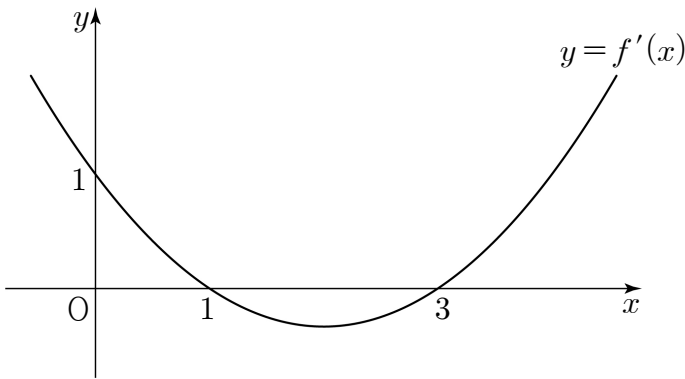
그림 R_1 에서 지름의 양 끝점이 선분 AB 위에 있고 선분 PO와 선분 QO에 각각 접하는 가장 큰 반원을 그린다. 새로 그려진 2개의 반원에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로  모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{15\sqrt{3}}{7}$ ② $\frac{16\sqrt{3}}{7}$ ③ $\frac{17\sqrt{3}}{7}$
 ④ $\frac{18\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\frac{19\sqrt{3}}{7}$

21. $f(0)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 의 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



실수 k 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} (x-k)+f(k) & (x \leq k) \\ f(x) & (x > k) \end{cases}$$

라 하자. $x \leq k$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(k)$ 라 할 때, $\sum_{k=1}^7 h(k)$ 의 값은?
(단, $f'(0)=1$, $f'(1)=f'(3)=0$) [4점]

- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

단 답 형

22. $\log_2 48 - \log_2 3$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. $\int_0^2 (5x^4 - 6x^2 + 1) dx$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 일차함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자.

$f(14)=3$, $g(2)=11$ 일 때, $g(6)$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 일차함수 $f(x)=3x+a$ 와 함수

$$g(x) = \begin{cases} -x+2 & (x \leq -1) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}+3}{x^{2n}+1} & (x > -1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(11)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.) [4점]

25. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 부분집합

$A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{의 약수}\}$ 에 대하여

$$(X-A) \subset (A-X)$$

를 만족시키는 U 의 모든 부분집합 X 의 개수를 구하시오.

[3점]

27. 곡선 $y = \frac{2}{x}$ 와 직선 $y = -x + k$ 가 제1사분면에서 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B 라 하자. $\angle ABC = 90^\circ$ 인 점 C 가 곡선 $y = \frac{2}{x}$ 위에 있다. $\overline{AC} = 2\sqrt{5}$ 가 되도록 하는 상수 k 에 대하여 k^2 의 값을 구하시오. (단, $k > 2\sqrt{2}$) [4점]

28. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$ 과 S_n 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $S_k > S_{k+1}$ 을 만족시키는 가장 작은 자연수 k 에 대하여 $S_k = 102$ 이다.
- (나) $a_8 = -\frac{5}{4}a_5$ 이고 $a_5 a_6 a_7 < 0$ 이다.

a_2 의 값을 구하시오. [4점]

29. 자연수 n 에 대하여 두 집합 A_n, B_n 이

$$A_n = \{ (x, y) \mid (x+n)^2 + y^2 \leq (n+1)^2, x, y \text{는 정수} \},$$

$$B_n = \{ (x, y) \mid (x-n)^2 + y^2 \leq (n+1)^2, x, y \text{는 정수} \}$$

일 때, 집합 $A_n \cap B_n$ 의 모든 원소의 개수를 a_n 이라 하자.

$\sum_{n=1}^{18} a_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 양수 k 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \frac{f(x) + |f(x) - k|}{2}$$

라 하자. 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서만 미분가능하지 않다.

(나) $g(0) = g(2)$

(다) $\int_0^2 |f(x) - g(x)| dx = 8$

$g(1) + g(-1)$ 의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.