

2013년 11월 10일 (오전); 제한시간 2시간 30분; 문항당 7점

1. 다음 세 수의 크기를 비교하여라.

$$\sqrt[3]{\frac{25}{3}}, \quad \sqrt[3]{\frac{1148}{135}}, \quad \frac{\sqrt[3]{25}}{3} + \sqrt[3]{\frac{6}{5}}$$

2. 원  $O$ 에 내접하는 오각형  $ABCDE$ 가 다음 조건을 모두 만족한다.

(i)  $AB = BC, AE = DE$

(ii) 점  $E$ 에서 직선  $DE$ 에 접하고 점  $A$ 를 지나는 원이 선분  $EC$ 와 점  $F$ 에서 만나고 직선  $BF$ 와는 점  $G(\neq F)$  에서 만난다.

직선  $DG$ 와 원  $O$ 의 교점을  $H(\neq D)$ 라 할 때, 점  $E$ 에서의 원  $O$ 의 접선이 직선  $HA$ 와 직교함을 보여라.

3. 양의 정수로 이루어진 수열  $a_1, a_2, a_3, \dots$ 이 식  $a_{i+2} = a_{i+1} + a_i$  ( $i \geq 1$ ) 을 항상 만족할 때, 모든 양의 정수  $n$ 에 대하여 다음의 값이 양의 정수임을 보여라.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{4n-2}}{a_{2n+1}}$$

4. 다음 조건을 만족하는 소수  $p$ 가 존재함을 보여라.

$2^n - 1$ 이  $p$ 의 배수가 되는 양의 정수  $n$  중 가장 작은 것은  $3^{2013}$ 이다.