

## 제 24 회 한국수학올림피아드 - 2 차 시험

### 고등부

2010년 8월 22일 (오전)

1. 양의 정수  $7^{2^{20}} + 7^{2^{19}} + 1$ 은 소수인 약수를 21개 이상 가짐을 보여라.
2. 양의 실수  $a, b, c$ 가  $ab + bc + ca = 1$ 을 만족할 때 다음 부등식이 성립함을 보여라.
$$\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{c^2 + a^2 + \frac{1}{b^2}} \geq \sqrt{33}$$
3. 삼각형  $ABC$ 의 내접원  $I$ 가 변  $BC, CA, AB$ 와 각각  $P, Q, R$ 에서 접한다고 하자. 두 점  $B, C$ 를 지나는 원이 원  $I$ 와 점  $X$ 에서 접하고,  $C, A$ 를 지나는 원이 원  $I$ 와 점  $Y$ 에서 접하고,  $A, B$ 를 지나는 원이 원  $I$ 와 점  $Z$ 에서 접할 때, 세 직선  $PX, QY, RZ$ 가 한 점에서 만남을 보여라.
4. 총  $n$ 명( $n \geq 4$ )의 외교관들이 모여 있다. 임의의 네 외교관  $A, B, C, D$ 에 대하여,  $A$ 와  $B$ 가 약수를 했고  $B$ 와  $C$ 가 약수를 했으며  $C$ 와  $D$ 가 약수를 했다면, 세 쌍  $A$ 와  $C, A$ 와  $D, B$ 와  $D$  중에 약수를 했던 쌍이 반드시 존재한다. 이때, 다음을 증명하여라.
  - (a) 전체 외교관을 다음 성질을 만족하도록 공집합이 아닌 두 집합  $X, Y$ 로 나눌 수 있다:  $X$ 에 속한 모든 외교관이  $Y$ 에 속한 어떤 외교관과도 약수를 하지 않았거나,  $X$ 에 속한 모든 외교관이  $Y$ 에 속한 모든 외교관과 약수를 하였다.
  - (b) 어떤 두 외교관  $A, B$ 가 있어서  $A, B$  이외의 외교관 중에  $A$ 와 약수한 사람들의 모임과  $B$ 와 약수한 사람들의 모임이 같다.

제한 시간 2시간 30분

문항당 7점