

2017년 5월 20일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호와 성명, 문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 “7” 일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지를** 기입하여야 합니다.
5. 문제 1~4 번은 각 4 점, 문제 17~20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 m 중 가장 작은 것을 구하여라.

모든 양의 정수 n 에 대하여 $m^2 \geq \frac{14m}{n} + \frac{7}{n^2}$ 이다.

2. 8명의 학생을 2개의 모둠으로 나눌 때, 각 모둠의 인원이 2명 이상인 경우의 수를 구하여라.

3. 원에 내접하는 칠각형 $ABCDEFG$ 의 변 CD 와 변 AG 가 평행하고, 변 EF 와 변 AB 가 평행하다. $\angle AFB = 50^\circ$, $\angle AEG = 15^\circ$, $\angle CBD = 30^\circ$, $\angle EDF = 13^\circ$, $\angle DGE = x^\circ$ 일 때, x 의 값을 구하여라. (단, $0 < x < 180$)

4. 다음 세 조건을 모두 만족하는 세 자리 양의 정수를 큰 것부터 차례로 나열하였을 때, 여섯 번째 수를 구하여라.

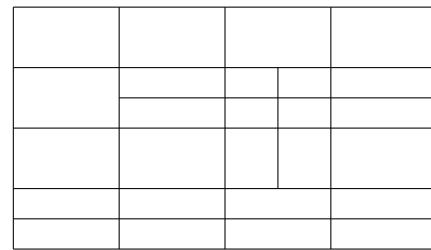
- (i) 어떤 자리의 수도 0이 아니다.
- (ii) 12의 배수이다.
- (iii) 십의 자리의 수와 백의 자리의 수를 서로 바꾸어 도 12의 배수이다.

5. 음 아닌 정수 a_1, \dots, a_{10} 이 다음을 만족한다.

$$a_1 + 2(a_1 + a_2) + 3(a_1 + a_2 + a_3) + \dots + 10(a_1 + \dots + a_{10}) = 63$$

이때 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 10a_{10}$ 의 값을 구하여라.

6. 서로 수직 혹은 평행인 선분으로 구성된 다음 도형에 있는 직사각형의 개수를 구하여라.



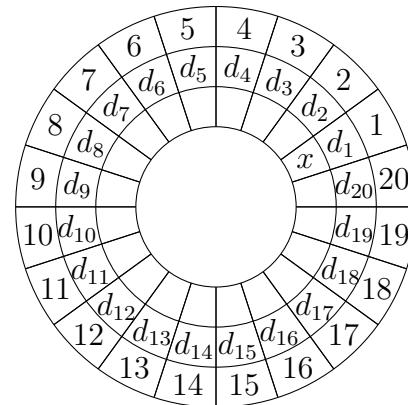
7. 예각삼각형 ABC 의 수심 H 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 D 라 하고 선분 DH 를 지름으로 하는 원과 직선 BH , CH 의 교점을 각각 $P(\neq H)$, $Q(\neq H)$ 라 하자. 직선 DH 와 PQ 의 교점을 E 라 하면, $\overline{HE} : \overline{ED} = 2 : 3$ 이고 삼각형 EHQ 의 넓이가 200이다. 직선 PQ 와 변 AB 의 교점을 R 이라 할 때, 삼각형 DQR 의 넓이를 구하여라.

8. 다음 연립방정식을 만족하는 실수해 x, y, z 의 합을 구하여라.

$$x^2 + y - 2z + 12 = 0$$

$$y^2 - 2z - 2x + 3 = 0$$

$$z^2 - 2x + 9y + 4 = 0$$

9. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 24x - n^2 = 0$ 이 정수해를 갖도록 하는 양의 정수 n 을 모두 더한 값을 구하여라.
10. 다음 세 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 구하여라.
 $a \geq b \geq c, \quad b \geq d, \quad a + 2b + 2c + d = 19$
11. 등변사다리꼴 $ABCD$ 의 마주보는 변 AD 와 BC 가 평행하고 $\overline{AD} = 6$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{AB} = 5$ 이다. 삼각형 ABD 의 내접원과 삼각형 BCD 의 내접원이 대각선 BD 와 접하는 점을 각각 E, F 라 하자. 삼각형 AEF 의 넓이를 S 라 할 때, $97S^2$ 을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.
12. 다음 조건을 만족하는 소수 p 를 모두 더한 값을 구하여라.
 $41pm - 42p^2 = m^3$ 을 만족하는 양의 정수 m 이 존재한다.
13. 두 이차식
 $(2x - 3)(3x - 7) = a, \quad (2x - 5)(3x - 10) = \frac{1050}{a}$
 을 모두 만족하는 실수 x 가 존재하도록 하는 0이 아닌 실수 a 를 모두 더한 것을 구하여라.
14. 14 이하의 양의 정수 중 서로 다른 3개를 뽑을 때, 뽑힌 어느 두 수도 서로소인 경우의 수를 구하여라. (단, 뽑는 순서는 고려하지 않는다.)
15. 10보다 작은 서로 다른 음 아닌 정수 a, b, c, d 가 다음 계산식을 만족한다. 이러한 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 구하여라.
- | | | |
|---|-------------|-------------|
| \boxed{a} | \boxed{b} | \boxed{a} |
| \times | \boxed{c} | \boxed{c} |
| $\boxed{d} \quad \boxed{d} \quad \boxed{d} \quad \boxed{d}$ | | |
- (예를 들어, $\boxed{5}\boxed{1}\boxed{9}$ 은 519을 의미한다.)
16. 정십이각형 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}$ 의 꼭짓점 A_1, A_2 를 지나는 직선과 꼭짓점 A_5, A_{11} 을 지나는 직선의 교점을 X 라 하자. $\overline{XA_2} \cdot \overline{A_1A_2} = 10$ 일 때, 이 정십이각형의 넓이를 구하여라.
17. 다음 두 식을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수를 구하여라.
 $a + b + c = de, \quad abc = d + e$
18. 60개의 칸이 있는 다음 그림에서 가장 바깥쪽 칸에 반시계방향으로 1부터 20까지 수가 적혀 있다.
- 
- 가장 안쪽 원을 이루는 20개 칸에 1부터 20까지 수를 시계방향으로 차례대로 적고, 가운데 칸 d_1, d_2, \dots, d_{20} 에는 이웃한 바깥쪽 칸과 안쪽 칸에 있는 두 수의 차를 적는다. 이때 다음 조건을 만족하도록 그림의 칸 x 에 적을 수 있는 수의 합을 구하여라.
- 칸 d_i 와 칸 d_{i+10} 에 적힌 수는 같다 ($i = 1, 2, \dots, 10$).
19. 각 C 가 직각이고 $\overline{AB} > 400$ 인 직각삼각형 ABC 의 외접원을 O_1 이라 하자. 반지름이 100인 원 O_2 가 원 O_1 에 점 A 에서 내접한다. 변 AC 와 O_2 가 만나는 점을 $D(\neq A)$ 라 하고, 점 D 와 원 O_1 의 중심을 지나는 직선이 직선 BC 와 만나는 점을 E 라 하자. $\overline{BC} : \overline{BE} = 5 : 4$ 일 때, 변 AB 의 길이를 구하여라.
20. 다음 세 수의 최대공약수를 구하여라.
- $$5^{2000} - 24 \times 999 - 25,$$
- $$5^{2002} - 24 \times 1000 - 25,$$
- $$5^{2004} - 24 \times 1001 - 25$$



제 31회 중등부 1차시험
한국수학올림피아드
 KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2017년 5월 20일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호와 성명, 문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
 예를 들면, 답이 “7” 일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지를** 기입하여야 합니다.
5. 문제 1~4 번은 각 4 점, 문제 17~20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

- | | |
|---|---|
| 1. 8명의 학생을 2개의 모둠으로 나눌 때, 각 모둠의 인원이 2명 이상인 경우의 수를 구하여라. | 6. 예각삼각형 ABC 의 수심 H 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 D 라 하고 선분 DH 를 지름으로 하는 원과 직선 BH, CH 의 교점을 각각 $P(\neq H), Q(\neq H)$ 라 하자. 직선 DH 와 PQ 의 교점을 E 라 하면, $\overline{HE} : \overline{ED} = 2 : 3$ 이고 삼각형 EHQ 의 넓이가 200이다. 직선 PQ 와 변 AB 의 교점을 R 이라 할 때, 삼각형 DQR 의 넓이를 구하여라. |
| 2. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 m 중 가장 작은 것을 구하여라.

모든 양의 정수 n 에 대하여 $m^2 \geq \frac{14m}{n} + \frac{7}{n^2}$ 이다. | 7. 서로 수직 혹은 평행인 선분으로 구성된 다음 도형에 있는 직사각형의 개수를 구하여라. |
| 3. 다음 세 조건을 모두 만족하는 세 자리 양의 정수를 큰 것부터 차례로 나열하였을 때, 여섯 번째 수를 구하여라.

(i) 어떤 자리의 수도 0이 아니다.
(ii) 12의 배수이다.
(iii) 십의 자리의 수와 백의 자리의 수를 서로 바꾸어 도 12의 배수이다. | |
| 4. 원에 내접하는 칠각형 $ABCDEFG$ 의 변 CD 와 변 AG 가 평행하고, 변 EF 와 변 AB 가 평행하다. $\angle AFB = 50^\circ$, $\angle AEG = 15^\circ$, $\angle CBD = 30^\circ$, $\angle EDF = 13^\circ$, $\angle DGE = x^\circ$ 일 때, x 의 값을 구하여라. (단, $0 < x < 180$) | 8. 다음 연립방정식을 만족하는 실수해 x, y, z 의 합을 구하여라. |
| 5. 음 아닌 정수 a_1, \dots, a_{10} 이 다음을 만족한다.

$\begin{aligned} a_1 + 2(a_1 + a_2) + 3(a_1 + a_2 + a_3) + \cdots \\ + 10(a_1 + \cdots + a_{10}) = 63 \end{aligned}$
이때 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 10a_{10}$ 의 값을 구하여라. | $\begin{aligned} x^2 + y - 2z + 12 &= 0 \\ y^2 - 2z - 2x + 3 &= 0 \\ z^2 - 2x + 9y + 4 &= 0 \end{aligned}$ |

9. 다음 세 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 구하여라.

$$a \geq b \geq c, \quad b \geq d, \quad a + 2b + 2c + d = 19$$

10. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 24x - n^2 = 0$ 의 정수해를 갖도록 하는 양의 정수 n 을 모두 더한 값을 구하여라.

11. 다음 조건을 만족하는 소수 p 를 모두 더한 값을 구하여라.

$$41pm - 42p^2 = m^3$$
 을 만족하는 양의 정수 m 이 존재한다.

12. 등변사다리꼴 $ABCD$ 의 마주보는 변 AD 와 BC 가 평행하고 $\overline{AD} = 6$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{AB} = 5$ 이다. 삼각형 ABD 의 내접원과 삼각형 BCD 의 내접원이 대각선 BD 와 접하는 점을 각각 E, F 라 하자. 삼각형 AEF 의 넓이를 S 라 할 때, $97S^2$ 을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

13. 14 이하의 양의 정수 중 서로 다른 3개를 뽑을 때, 뽑힌 어느 두 수도 서로소인 경우의 수를 구하여라. (단, 뽑는 순서는 고려하지 않는다.)

14. 두 이차식

$$(2x - 3)(3x - 7) = a, \quad (2x - 5)(3x - 10) = \frac{1050}{a}$$

을 모두 만족하는 실수 x 가 존재하도록 하는 0이 아닌 실수 a 를 모두 더한 것을 구하여라.

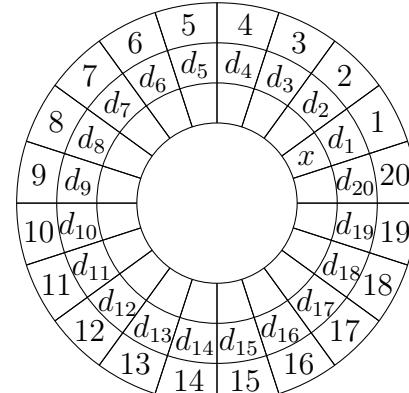
15. 10보다 작은 서로 다른 음 아닌 정수 a, b, c, d 가 다음 계산식을 만족한다. 이러한 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 구하여라.

$$\begin{array}{r} & \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{a} \\ \times & & \boxed{c} & \boxed{c} \\ \hline & \boxed{d} & \boxed{d} & \boxed{d} & \boxed{d} \end{array}$$

(예를 들어, $\boxed{5}\boxed{1}\boxed{9}$ 은 519을 의미한다.)

16. 정십이각형 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}$ 의 꼭짓점 A_1, A_2 를 지나는 직선과 꼭짓점 A_5, A_{11} 을 지나는 직선의 교점을 X 라 하자. $\overline{XA_2} \cdot \overline{A_1A_2} = 10$ 일 때, 이 정십이각형의 넓이를 구하여라.

17. 60개의 칸이 있는 다음 그림에서 가장 바깥쪽 칸에 반시계방향으로 1부터 20까지 수가 적혀 있다.



가장 안쪽 원을 이루는 20개 칸에 1부터 20까지 수를 시계방향으로 차례대로 적고, 가운데 칸 d_1, d_2, \dots, d_{20} 에는 이웃한 바깥쪽 칸과 안쪽 칸에 있는 두 수의 차를 적는다. 이때 다음 조건을 만족하도록 그림의 칸 x 에 적을 수 있는 수의 합을 구하여라.

칸 d_i 와 칸 d_{i+10} 에 적힌 수는 같다 ($i = 1, 2, \dots, 10$).

18. 다음 두 식을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수를 구하여라.

$$a + b + c = de, \quad abc = d + e$$

19. 다음 세 수의 최대공약수를 구하여라.

$$5^{2000} - 24 \times 999 - 25,$$

$$5^{2002} - 24 \times 1000 - 25,$$

$$5^{2004} - 24 \times 1001 - 25$$

20. 각 C 가 직각이고 $\overline{AB} > 400$ 인 직각삼각형 ABC 의 외접원을 O_1 이라 하자. 반지름이 100인 원 O_2 가 원 O_1 에 점 A 에서 내접한다. 변 AC 와 O_2 가 만나는 점을 $D(\neq A)$ 라 하고, 점 D 와 원 O_1 의 중심을 지나는 직선이 직선 BC 와 만나는 점을 E 라 하자. $\overline{BC} : \overline{BE} = 5 : 4$ 일 때, 변 AB 의 길이를 구하여라.