



제 32회 중등부 1차시험  
한국수학올림피아드  
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2018년 5월 12일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명, 문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.  
예를 들면, 답이 “7”일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지를** 기입하여야 합니다.
5. 문제 1~4 번은 각 4 점, 문제 17~20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수  $A$ 와  $B$ 에 대하여  
 $A + 16B$ 의 값 중 가장 큰 것을 구하여라.
  - (i)  $A - 2B = -7$
  - (ii)  $A + 4B < 30$
2. 십의 자리의 수가 3인 네 자리 양의 정수 중 9의 배수의 개수를 구하여라.
3. 삼각형  $ABC$ 가  $\angle BAC > 90^\circ$ ,  $\overline{AB} = 12$ ,  $\overline{CA} = 20$ 을 만족한다. 변  $BC$ 의 중점을  $M$ , 변  $CA$ 의 중점을  $N$ 이라 하자. 두 점  $A$ 와  $N$ 을 지나고 직선  $AM$ 에 접하는 원을  $O$ 라 하고, 직선  $AB$ 와 원  $O$ 가 만나는 점을  $P(\neq A)$ 라 하자. 삼각형  $ABC$ 의 넓이를  $x$ , 삼각형  $ANP$ 의 넓이를  $y$ 라 할 때,  $\frac{x}{y} \times 200$ 의 값을 구하여라.
4.  $2p - 1, 10p - 1$ 이 모두 소수가 되도록 하는 소수  $p$ 를 모두 더한 값을 구하여라.
5. 한 자리 양의 정수  $A, B, C, D$ 가 다음 계산식을 만족할 때,  
 $A + B + C + D$ 의 값을 구하여라.
 
$$\begin{array}{r}
 \boxed{A} \quad \boxed{B} \quad \boxed{C} \\
 \times \quad \quad \quad \boxed{B} \quad \boxed{C} \\
 \hline
 \boxed{D} \quad \boxed{A} \quad \boxed{B} \quad \boxed{C}
 \end{array}$$

(예를 들어,  $\boxed{5}\boxed{1}\boxed{2}$ 는 512를 의미한다.)
6. 8명의 학생을 각 모둠의 인원이 2명 이상인 3개의 모둠으로 나누는 방법의 수를 구하여라. (단, 각 학생은 단 하나의 모둠에만 속한다.)
7. 삼각형  $ABC$ 의 세 변의 길이가 각각  $\overline{AB} = 4$ ,  $\overline{BC} = 5$ ,  $\overline{CA} = 6$ 이다. 삼각형  $ABC$ 의 수심을  $H$ , 외심을  $O$ 라 하고 직선  $AO$ 와 직선  $BH, CH$ 의 교점을 각각  $X, Y$ 라고 하자.  $\frac{\overline{XY}}{\overline{HX}} \times 120$ 의 값을 구하여라.
8. 양의 정수  $a, b$ 가 다음 조건을 만족할 때,  $a + b$ 가 가질 수 있는 가장 작은 값을 구하여라.
 
$$\frac{339}{47} < \frac{b}{a} < \frac{239}{33}$$
9. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수  $A, B, C$ 에 대하여  
 $A + B + C$ 가 될 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라.
  - (i)  $A > B > C$
  - (ii)  $12B > 13C > 11A$
10. 다음 두 조건을 모두 만족하는 집합  $A, B, C$ 의 순서쌍  $(A, B, C)$ 의 개수를 구하여라.
  - (i) 집합  $A, B, C$ 는 집합  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 서로 다른 세 부분집합이다.
  - (ii) 집합  $A, B, C, A \cap B, B \cap C, C \cap A$ 의 원소의 개수는 모두 짝수이다. (단, 0은 짝수)



11. 이등변삼각형  $ABC$  ( $\overline{AB} = \overline{AC}$ )의 변  $BC$ 의 중점을  $M$ 이라 하자. 점  $P, Q, R, S$ 가 각각 선분  $AC, CM, BM, AB$  위에 있는 점으로 다음 조건을 모두 만족한다.

$$\angle CPQ = \angle QRS = 90^\circ, \quad \overline{CP} = 9, \\ \overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS}, \quad \overline{BS} = 11$$

직선  $PR$ 과  $QS$ 의 교점을  $X$ 라 할 때,  $\overline{MX} = x$ 이다.  $(x+1)^2$ 의 값을 구하여라.

12. 양의 정수  $a, b$ 가 다음 두 조건을 모두 만족할 때,  $a+b$ 의 값을 구하여라.

(i)  $a^2 + b^2 + \gcd(a, b) = 582$

(ii)  $ab + \text{lcm}(a, b) = 432$

(단,  $\gcd(x, y)$ 는  $x, y$ 의 최대공약수,  $\text{lcm}(x, y)$ 는  $x, y$ 의 최소공배수)

13. 음이 아닌 정수에 대하여 정의된 함수  $f$ 가  $f(0) = 0$ 이고, 각 양의 정수  $n$ 에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족한다.

(i)  $f(3n-2) = 4f(n-1) + 3$

(ii)  $f(3n-1) = 4f(n-1) + 2$

(iii)  $f(3n) = 2f(n) + 1$

$f(n) = 253$ 을 만족하는 정수  $n$ 을 모두 더한 값을 구하여라.

14. 다음 두 조건을 모두 만족하는 정수  $m, n$ 의 순서쌍  $(m, n)$ 의 개수를 구하여라.

(i)  $|m| \leq 15, |n| \leq 15$

(ii)  $\max(|m|, |n|) \neq \max(|m-2|, |n|)$

(단,  $\max(a, b)$ 는  $a$ 와  $b$ 중에서 작지 않은 값)

15. 삼각형  $ABC$ 의 외심을  $O$ 라 하고 삼각형  $OAC$ 와  $OBC$ 의 외심을 각각  $O_1, O_2$ 라 하자. 삼각형  $ABC$ 의 외접원의 반지름이  $10$ 이고  $\angle A = 45^\circ, \angle B = 60^\circ$ 일 때,  $\overline{O_1O_2} = d$ 이다.  $(d-5)^2$ 의 값을 구하여라.

16. 두 소수  $p, q$ 가 다음 두 조건을 모두 만족할 때,  $p$ 가 가지 수 있는 가장 큰 값을 구하여라.

(i)  $5 < p < q < 2p + 100$

(ii)  $p^2 + 5(q+2)p + 25$ 는 완전제곱수

17. 양의 실수  $a, b, c$ 가 다음 세 조건을 모두 만족할 때,  $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

(i)  $c > a$

(ii)  $10c = 7a + 4b + 2024$

(iii)  $\frac{(a+c)^2}{a} + \frac{(c-a)^2}{b} = 2024$

18. 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수  $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 의 개수를 구하여라.

(i) 서로 다른  $x, y$ 에 대하여  $f(x) \neq f(y)$ 이다.

(ii)  $f(x)^2 = x^2$ 인  $x$ 가 존재한다.

19. 예각삼각형  $ABC$ 에서 각  $A$ 의 이등분선이 변  $BC$ 와 만나는 점을  $D$ , 삼각형  $ABC$ 의 내심을  $I$ , 삼각형  $ABC$ 의 방접 원 중 변  $BC$ 에 접하는 것의 중심을  $J$ 라 하자.  $\overline{AJ} = 90$ ,  $\overline{DJ} = 60$ 일 때, 삼각형  $BCI$ 의 외접원의 반지름의 길이를 구하여라.

20. 다음 조건을 만족하는 양의 정수  $n$  중 가장 작은 값을 구하여라.

$n^3 + 7$ 과  $3n^2 + 3n + 1$ 이 서로소가 아니다.



제 32회 중등부 1차시험  
한국수학올림피아드  
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2018년 5월 12일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명, 문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.  
예를 들면, 답이 “7”일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지를** 기입하여야 합니다.
5. 문제 1~4 번은 각 4 점, 문제 17~20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 십의 자리의 수가 3인 네 자리 양의 정수 중 9의 배수의 개수를 구하여라.

6. 한 자리 양의 정수  $A, B, C, D$ 가 다음 계산식을 만족할 때,  
 $A + B + C + D$ 의 값을 구하여라.

$$\begin{array}{r} \boxed{A} \quad \boxed{B} \quad \boxed{C} \\ \times \quad \quad \quad \boxed{B} \quad \boxed{C} \\ \hline \boxed{D} \quad \boxed{A} \quad \boxed{B} \quad \boxed{C} \end{array}$$

(예를 들어,  $\boxed{5}\boxed{1}\boxed{2}$ 는 512를 의미한다.)

2. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수  $A$ 와  $B$ 에 대하여  
 $A + 16B$ 의 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

(i)  $A - 2B = -7$

(ii)  $A + 4B < 30$

7. 양의 정수  $a, b$ 가 다음 조건을 만족할 때,  $a + b$ 가 가질 수 있는 가장 작은 값을 구하여라.

$$\frac{339}{47} < \frac{b}{a} < \frac{239}{33}$$

3.  $2p - 1, 10p - 1$ 이 모두 소수가 되도록 하는 소수  $p$ 를 모두 더한 값을 구하여라.

8. 삼각형  $ABC$ 가  $\angle BAC > 90^\circ$ ,  $\overline{AB} = 12$ ,  $\overline{CA} = 20$ 을 만족한다. 변  $BC$ 의 중점을  $M$ , 변  $CA$ 의 중점을  $N$ 이라 하자. 두 점  $A$ 와  $N$ 을 지나고 직선  $AM$ 에 접하는 원을  $O$ 라 하고, 직선  $AB$ 와 원  $O$ 가 만나는 점을  $P(\neq A)$ 라 하자. 삼각형  $ABC$ 의 넓이를  $x$ , 삼각형  $ANP$ 의 넓이를  $y$ 라 할 때,  $\frac{x}{y} \times 200$ 의 값을 구하여라.

4. 삼각형  $ABC$ 가  $\angle BAC > 90^\circ$ ,  $\overline{AB} = 12$ ,  $\overline{CA} = 20$ 을 만족한다. 변  $BC$ 의 중점을  $M$ , 변  $CA$ 의 중점을  $N$ 이라 하자. 두 점  $A$ 와  $N$ 을 지나고 직선  $AM$ 에 접하는 원을  $O$ 라 하고, 직선  $AB$ 와 원  $O$ 가 만나는 점을  $P(\neq A)$ 라 하자. 삼각형  $ABC$ 의 넓이를  $x$ , 삼각형  $ANP$ 의 넓이를  $y$ 라 할 때,  $\frac{x}{y} \times 200$ 의 값을 구하여라.

5. 8명의 학생을 각 모둠의 인원이 2명 이상인 3개의 모둠으로 나누는 방법의 수를 구하여라. (단, 각 학생은 단 하나의 모둠에만 속한다.)

9. 다음 두 조건을 모두 만족하는 집합  $A, B, C$ 의 순서쌍  $(A, B, C)$ 의 개수를 구하여라.

(i) 집합  $A, B, C$ 는 집합  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 서로 다른 세 부분집합이다.

(ii) 집합  $A, B, C, A \cap B, B \cap C, C \cap A$ 의 원소의 개수는 모두 짝수이다. (단, 0은 짝수)



제 32회 중등부 1차시험  
한국수학올림피아드  
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

10. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수  $A, B, C$ 에 대하여  $A + B + C$ 가 될 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

- (i)  $A > B > C$   
(ii)  $12B > 13C > 11A$

11. 양의 정수  $a, b$ 가 다음 두 조건을 모두 만족할 때,  $a + b$ 의 값을 구하여라.

- (i)  $a^2 + b^2 + \gcd(a, b) = 582$   
(ii)  $ab + \text{lcm}(a, b) = 432$

(단,  $\gcd(x, y)$ 는  $x, y$ 의 최대공약수,  $\text{lcm}(x, y)$ 는  $x, y$ 의 최소공배수)

12. 이등변삼각형  $ABC$  ( $\overline{AB} = \overline{AC}$ )의 변  $BC$ 의 중점을  $M$ 이라 하자. 점  $P, Q, R, S$ 가 각각 선분  $AC, CM, BM, AB$  위에 있는 점으로 다음 조건을 모두 만족한다.

$$\angle CPQ = \angle QRS = 90^\circ, \quad \overline{CP} = 9, \\ \overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS}, \quad \overline{BS} = 11$$

직선  $PR$ 과  $QS$ 의 교점을  $X$ 라 할 때,  $\overline{MX} = x$ 이다.  $(x+1)^2$ 의 값을 구하여라.

13. 다음 두 조건을 모두 만족하는 정수  $m, n$ 의 순서쌍  $(m, n)$ 의 개수를 구하여라.

- (i)  $|m| \leq 15, |n| \leq 15$   
(ii)  $\max(|m|, |n|) \neq \max(|m-2|, |n|)$

(단,  $\max(a, b)$ 는  $a$ 와  $b$ 중에서 작지 않은 값)

14. 음이 아닌 정수에 대하여 정의된 함수  $f$ 가  $f(0) = 0$ 이고, 각 양의 정수  $n$ 에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족한다.

- (i)  $f(3n-2) = 4f(n-1) + 3$   
(ii)  $f(3n-1) = 4f(n-1) + 2$   
(iii)  $f(3n) = 2f(n) + 1$

$f(n) = 253$ 을 만족하는 정수  $n$ 을 모두 더한 값을 구하여라.

15. 두 소수  $p, q$ 가 다음 두 조건을 모두 만족할 때,  $p$ 가 가질 수 있는 가장 큰 값을 구하여라.

- (i)  $5 < p < q < 2p + 100$   
(ii)  $p^2 + 5(q+2)p + 25$ 는 완전제곱수

16. 삼각형  $ABC$ 의 외심을  $O$ 라 하고 삼각형  $OAC$ 와  $OBC$ 의 외심을 각각  $O_1, O_2$ 라 하자. 삼각형  $ABC$ 의 외접원의 반지름이  $10$ 이고  $\angle A = 45^\circ, \angle B = 60^\circ$ 일 때,  $\overline{O_1O_2} = d$ 이다.  $(d-5)^2$ 의 값을 구하여라.

17. 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수  $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 의 개수를 구하여라.

- (i) 서로 다른  $x, y$ 에 대하여  $f(x) \neq f(y)$ 이다.  
(ii)  $f(x)^2 = x^2$ 인  $x$ 가 존재한다.

18. 양의 실수  $a, b, c$ 가 다음 세 조건을 모두 만족할 때,  $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

- (i)  $c > a$   
(ii)  $10c = 7a + 4b + 2024$   
(iii)  $\frac{(a+c)^2}{a} + \frac{(c-a)^2}{b} = 2024$

19. 다음 조건을 만족하는 양의 정수  $n$  중 가장 작은 값을 구하여라.

$n^3 + 7$ 과  $3n^2 + 3n + 1$ 이 서로소가 아니다.

20. 예각삼각형  $ABC$ 에서 각  $A$ 의 이등분선이 변  $BC$ 와 만나는 점을  $D$ , 삼각형  $ABC$ 의 내심을  $I$ , 삼각형  $ABC$ 의 방접 원 중 변  $BC$ 에 접하는 것의 중심을  $J$ 라 하자.  $\overline{AJ} = 90, \overline{DJ} = 60$ 일 때, 삼각형  $BCI$ 의 외접원의 반지름의 길이를 구하여라.