



제 35 회 중등부 1차시험

한국수학올림피아드

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2021년 6월 12일 ; 제한시간 2시간 30분(1교시 1시간 15분, 2교시 1시간 15분)

- A. 답안지에 **수험번호와 성명, 문제유형**을 반드시 기입하십시오.
 B. 이 시험은 총 20개(오전 10개, 오후 10개)의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.

1. 실수 a, b 가 다음 두 식을 모두 만족한다. $18(a+b)^2$ 의 값을 구하여라.

$$5a^2 + ab + 8a = -2, \quad 2b^2 + ab + 8b + 2a = -8$$

답: 98

2. 다음 조건을 만족하는 정수 계수 이차다항식 $f(x) = x^2 + ax + b$ 의 개수를 구하여라.

(조건) 모든 양의 정수 n 에 대하여 $0 \leq f(2n+1) - 2f(n) - 2f(n-1) \leq 4n+3$ 이다.

답: 8

3. 유리수 a 는 0과 1 사이의 수로 다음 조건을 만족한다.

(조건) 등식 $[x] = ax$ 를 만족하는 양의 실수 x 의 개수가 98이다.

이러한 a 의 값 중 가장 큰 것을 분수로 나타내면 $\frac{q}{p}$ (p 와 q 는 서로소인 양의 정수)이다. $p+q$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 가장 큰 정수)

답: 199

4. 선분 AB 가 지름인 반원의 호 위에 점 C 와 D 가 있다. 선분 CD 를 지름으로 하는 원이 점 E 에서 선분 AB 에 접한다. 선분 AB 의 중점 O 에서 E 까지 거리는 1이다. $\overline{CD} = 12$ 일 때, $(\overline{AB})^2$ 의 값을 구하여라.

답: 292

5. 사각형 $ABCD$ 가 지름이 AC 인 원 Γ 에 내접한다. 원 Γ 의 현 XY 는 직선 AC 에 수직이고 변 BC, DA 와 각각 점 Z, W 에서 만난다. $\overline{BY} = 5\overline{BX}, \overline{DX} = 10\overline{DY}, \overline{ZW} = 98$ 일 때, 선분 XY 의 길이를 구하여라.

답: 132

6. 1000 이하의 양의 정수 중에서 1000과의 최대공약수가 5인 모든 수들의 합을 구하여라.

답: 40000

7. 음이 아닌 정수 a, b, c 가 등식 $3^a \times 5^b + 1 = 2^c$ 을 만족할 때, 식 $100a + 10b + c$ 가 가질 수 있는 값을 모두 더한 것을 구하여라.

답: 217



제 35 회 중등부 1차시험

한국수학올림피아드

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

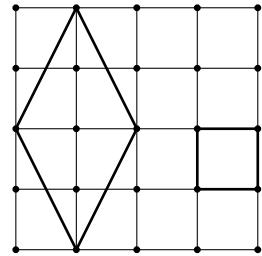
8. 54개의 구슬을 나이가 서로 다른 세 형제에게 남김없이 나누어 줄 때, 모든 형제가 1개 이상의 구슬을 받으면서 형이 동생보다 더 많은 구슬을 받도록 나누어 주는 경우의 수를 구하여라. (단, 구슬들은 서로 구별하지 않는다.)

답: 217

9. 4의 배수인 네 자리수를 모두 나열했을 때 숫자 4는 몇 번 나타나는가?

답: 1195

10. 다음과 같이 1×1 정사각형 16개를 붙여서 정사각형을 만들었다. 이 도형의 25개의 꼭짓점 중에서 4개의 점을 꼭짓점으로 가지는 마름모의 개수를 구하여라.



답: 66

11. 차수가 1 이상이고 계수가 모두 실수인 다항식 $p(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$(x - 32)p(2x) = 32(x - 1)p(x)$$

를 만족한다. $\frac{24 \times p(24)}{p(0)}$ 의 값을 구하여라.

답: 330

12. 양의 정수에 대하여 정의된 함수 f 가 $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ 이고, 각 양의 정수 n 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족한다.

$$(i) \quad f(3n) = f(n)$$

$$(ii) \quad f(3n+2) = f(3n+1) = f(3n) + 1$$

합수 $f(1), f(2), f(3), \dots, f(10000)$ 중 가장 큰 값을 구하여라.

답: 9

13. 선분 AB 위의 점 C 가 $\overline{AC} = 10$, $\overline{CB} = 8$ 을 만족한다. 점 B 를 지나고 직선 AB 와 수직한 직선을 ℓ 이라 하자. ℓ 위의 점 P 중 $\angle APC$ 의 크기가 가장 크게 되도록 하는 점을 P_0 이라 할 때, $\overline{BP_0}$ 의 값을 구하여라.

답: 12

14. 평행사변형 $ABCD$ 에서 $\angle BAD = 120^\circ$, $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$, $\overline{AD} = 3 + \sqrt{3}$ 이다. 점 E 와 F 는 각각 변 AB 와 AD 위의 점으로 $\overline{AE} = \overline{AF} = \sqrt{3}$ 을 만족한다. 각 BCD 의 이등분선이 선분 DE 와 만나는 점을 P , 직선 FP 와 BC 의 교점을 Q 라 할 때, $(\overline{PQ} + 3)^2$ 의 값을 구하여라.

답: 27



제 35 회 중등부 1차시험

한국수학올림피아드

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

15. 원에 내접하는 오각형 $ABCDE$ 가 다음 두 조건을 모두 만족 한다.

(i) 선분 AD 와 CE 의 교점을 F 라 할 때, $\angle AFE = 90^\circ$ 이고 $\overline{AF} : \overline{FD} = \overline{CF} : \overline{FE} = 2 : 1$ 이다.

(ii) 직선 BE 는 선분 AF 의 중점을 지난다.

$\overline{AB} = 3$ 일 때, $(\overline{BE})^2$ 의 값을 구하여라.

답: 72

16. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 a, b 에 대하여, $a + b$ 가 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

(조건) 모든 양의 정수 n 에 대하여, $\frac{115n + a}{bn + 2}$ 는 양의 정수이다.

답: 231

17. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 m, n 에 대하여, $m + n$ 의 값을 구하여라.

(조건) 실수 $\frac{\sqrt{m} - 1}{\sqrt{m} + 7}$ 은 이차방정식 $x^2 - nx + 25 = 0$ 의 해이다.

답: 109

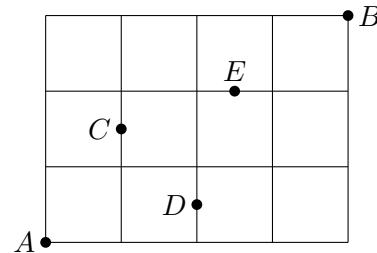
18. 다섯 개의 양의 정수 2, 3, 5, 7, 11 중에서 서로 다른 2개를 곱하여 얻을 수 있는 수를 모두 더한 값을 a 라 하고, 서로 다른 4개를 곱하여 얻을 수 있는 수를 모두 더한 값을 b 라 하자. $a + b$ 의 값을 구하여라.

답: 3215

19. 여덟 개의 양의 정수 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9를 원형으로 배열할 때, 이웃한 두 수의 최소공배수가 13 이상이 되도록 배열하는 경우의 수를 구하여라.

답: 6

20. 다음 그림에서 A 에서 출발해서 오른쪽 혹은 위쪽으로 1 칸씩 이동하면서 B 에 도착한다. 점 C, D, E 중 정확히 하나만 지나면서 A 에서 B 로 이동하는 경우의 수를 구하여라.



답: 14