



제 37 회 최종시험 첫째날
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2024년 3월 23일 ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

1. 양의 홀수 a, b, c, d 에 대하여, 이 중 어느 두 개를 골라도 서로소라고 하자. 양의 정수 n 에 대하여

$$f(n) = \left[\frac{n}{a} \right] + \left[\frac{n}{b} \right] + \left[\frac{n}{c} \right] + \left[\frac{n}{d} \right]$$

이라 할 때, 다음 등식을 증명하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 가장 큰 정수)

$$\sum_{n=1}^{abcd} (-1)^{f(n)} = 1$$

2. 양의 정수 $n (\geq 2)$ 에 대하여 $2n$ 개의 사탕이 있다. 갑은 이 $2n$ 개의 사탕 모두를 $4n$ 개의 상자 B_1, B_2, \dots, B_{4n} 에 나누어 넣는다. 을은 갑이 각 상자에 넣은 사탕의 개수를 확인한 후에, 다음 조건을 만족하도록 $4n$ 개의 상자 중 정확히 $2n$ 개의 상자 $B_{k_1}, B_{k_2}, \dots, B_{k_{2n}}$ 을 골라 그 안에 있는 사탕을 모두 가져간다.

(조건) 각 $i = 1, 2, \dots, 2n$ 에 대하여 $k_i - k_{i-1}$ 은 1 또는 3이며, $k_{2n} = 4n$ 이다. (단, $k_0 = 0$)

갑은 을이 선택하지 않은 $2n$ 개의 상자에 들어있는 사탕을 모두 가져간다. 갑과 을이 각자 최대한 많은 사탕을 가져가기 위하여 모두 최선의 전략을 사용한다면, 갑은 몇 개의 사탕을 가져갈 수 있겠는가?

3. 다음 조건을 만족하는 가장 작은 양의 실수 $p (\leq 1)$ 을 구하여라.

(조건) 실수 $x_1, x_2, \dots, x_{2024}, y_1, y_2, \dots, y_{2024}$ 에 대하여

- $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2024} \leq 1$,
- $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{2024} \leq 1$,
- $\sum_{i=1}^{2024} x_i = \sum_{i=1}^{2024} y_i = 2024p$ 이면

부등식 $\sum_{i=1}^{2024} x_i(y_{2025-i} - y_{2024-i}) \geq 1 - p$ 가 성립한다. (단, $y_0 = 0$)