

제 3 교 시

2018학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

가형

성명		수험번호								
----	--	------	--	--	--	--	--	--	--	--

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며, ‘0’이 포함된 경우에는 ‘0’을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

1. 두 벡터 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-1, k)$ 에 대하여 두 벡터 \vec{a} , $\vec{a} - \vec{b}$ 가 서로 수직일 때, k 의 값은?

[2점]

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

2. 확률변수 X 가 이항분포 $B\left(50, \frac{1}{4}\right)$ 을 따를 때, $V(4X)$ 의 값은? [2점]

① 50

② 75

③ 100

④ 125

⑤ 150

3. 함수 $f(x) = x^2 e^{x-1}$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{\ln 2}{2}$ ② $\frac{\ln 3}{2}$ ③ $\ln 2$ ④ $\ln 3$ ⑤ $2 \ln 2$

5. 좌표공간의 두 점 $A(1, 2, -1)$, $B(3, 1, -2)$ 에 대하여 선분 AB 를 $2:1$ 로 외분하는 점의 좌표는? [3점]

- ① $(5, 0, -3)$ ② $(5, 3, -4)$ ③ $(4, 0, -3)$ ④ $(4, 3, -3)$ ⑤ $(3, 0, -4)$

6. 함수 $f(x) = a \sin bx + c$ ($a > 0$, $b > 0$)의 최댓값은 4, 최솟값은 -2 이다. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+p)=f(x)$ 를 만족시키는 양수 p 의 최솟값이 π 일 때, abc 의 값을?
(단, a , b , c 는 상수이다.) [3점]

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

7. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

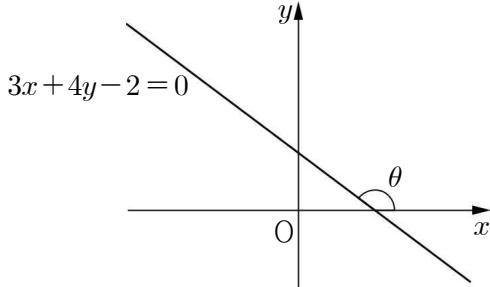
$$\int_1^x (x-t)f(t) dt = e^{x-1} + ax^2 - 3x + 1$$

을 만족시킬 때, $f(a)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [3점]

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

8. 그림과 같이 직선 $3x + 4y - 2 = 0$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때,

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$$
의 값은? [3점]



- ① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{3}{14}$ ④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{5}{14}$

9. 함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ f(x) \ln \left(1 + \frac{1}{2x} \right) \right\} = 4$ 를 만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x-3}$ 의 값은? [3점]

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

10. 상자 A에는 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있고, 상자 B에는 흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있다. 한 개의 동전을 던져 앞면이 나오면 상자 A를, 뒷면이 나오면 상자 B를 택하고, 택한 상자에서 임의로 두 개의 공을 동시에 꺼내기로 한다. 이 시행을 한 번 하여 꺼낸 공의 색깔이 서로 같았을 때, 상자 A를 택하였을 확률은? [3점]

- ① $\frac{11}{29}$ ② $\frac{12}{29}$ ③ $\frac{13}{29}$ ④ $\frac{14}{29}$ ⑤ $\frac{15}{29}$

11. 다음 표는 어느 고등학교의 수학 점수에 대한 성취도의 기준을 나타낸 것이다.

성취도	A	B	C	D	E
수학 점수	89 점 이상	79 점 이상 ~89 점 미만	67 점 이상 ~79 점 미만	54 점 이상 ~67 점 미만	54 점 미만

예를 들어, 어떤 학생의 수학 점수가 89점 이상이면 성취도는 A이고, 79점 이상이고 89점 미만이면 성취도는 B이다. 이 학교 학생들의 수학 점수는 평균이 67점, 표준편차가 12점인 정규분포를 따른다고 할 때, 이 학교의 학생 중에서 수학 점수에 대한 성취도가 A 또는 B인 학생의 비율을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

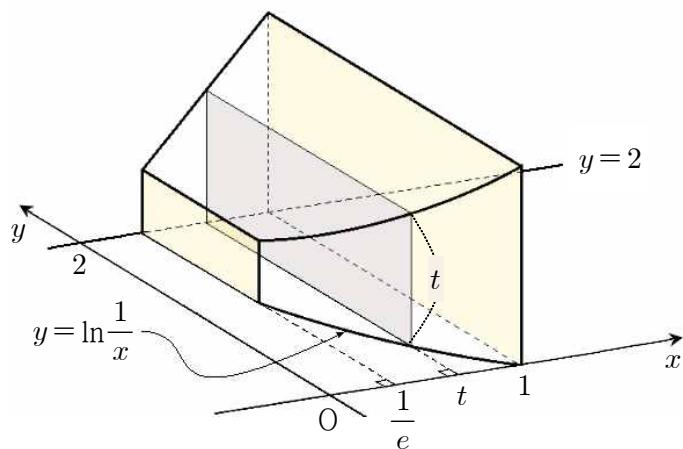
- ① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587 ④ 0.1915 ⑤ 0.3085

12. 좌표공간에서 점 $(0, a, b)$ 를 지나고 평면 $x+3y-z=0$ 에 수직인 직선이

구 $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$ 과 두 점 A, B에서 만난다. $\overline{AB}=2$ 일 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

13. 그림과 같이 곡선 $y = \ln \frac{1}{x}$ ($\frac{1}{e} \leq x \leq 1$)과 직선 $x = \frac{1}{e}$, 직선 $x = 1$ 및 직선 $y = 2$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축 위의 $x = t$ ($\frac{1}{e} \leq t \leq 1$) 인 점을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 한 변의 길이가 t 인 직사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



- ① $\frac{1}{2} - \frac{1}{3e^2}$ ② $\frac{1}{2} - \frac{1}{4e^2}$ ③ $\frac{3}{4} - \frac{1}{3e^2}$ ④ $\frac{3}{4} - \frac{1}{4e^2}$ ⑤ $\frac{3}{4} - \frac{1}{5e^2}$

14. 집합 $S = \{a, b, c, d\}$ 의 공집합이 아닌 모든 부분집합 중에서 임의로 한 개씩 두 개의 부분집합을 차례로 택한다. 첫 번째로 택한 집합을 A , 두 번째로 택한 집합을 B 라 할 때, $n(A) \times n(B) = 2 \times n(A \cap B)$ 가 성립할 확률은? (단, 한 번 택한 집합은 다시 택하지 않는다.) [4점]

① $\frac{2}{35}$

② $\frac{3}{35}$

③ $\frac{4}{35}$

④ $\frac{1}{7}$

⑤ $\frac{6}{35}$

15. 평면 α 위에 있는 서로 다른 두 점 A, B 와 평면 α 위에 있지 않은 점 P 에 대하여

삼각형 PAB는 $\overline{PB}=4$, $\angle PAB = \frac{\pi}{2}$ 인 직각이등변삼각형이고, 평면 PAB 와 평면 α 가 이루는

각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$ 이다. 점 P 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, 사면체 PHAB 의 부피는? [4점]

① $\frac{\sqrt{6}}{6}$

② $\frac{\sqrt{6}}{3}$

③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

④ $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

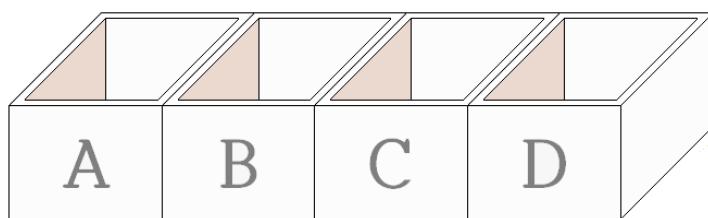
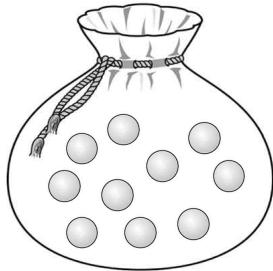
⑤ $\frac{5\sqrt{6}}{6}$

16. 그림과 같이 10개의 공이 들어 있는 주머니와 일렬로 나열된 네 상자 A, B, C, D가 있다.

이 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내어 이웃한 두 상자에 각각 한 개씩 넣는 시행을 5회 반복할 때, 네 상자 A, B, C, D에 들어 있는 공의 개수를 각각 a , b , c , d 라 하자.

a , b , c , d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는? (단, 상자에 넣은 공은 다시 꺼내지 않는다.)

[4점]



- ① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

17. 1부터 $(2n-1)$ 까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 $(2n-1)$ 장의 카드가 있다. 이 카드 중에서 임의로 서로 다른 3장의 카드를 택할 때, 택한 3장의 카드 중 짝수가 적힌 카드의 개수를 확률변수 X 라 하자. 다음은 $E(X)$ 를 구하는 과정이다. (단, n 은 4 이상의 자연수이다.)

정수 k ($0 \leq k \leq 3$)에 대하여 확률변수 X 의 값이 k 일 확률은 짝수가 적혀 있는 카드 중에서 k 장의 카드를 택하고, 홀수가 적혀 있는 카드 중에서 $\boxed{(\text{가})} - k$ 장의 카드를 택하는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나눈 값이므로

$$P(X=0) = \frac{n(n-2)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

$$P(X=1) = \frac{3n(n-1)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

$$P(X=2) = \boxed{(\text{나})}$$

$$P(X=3) = \frac{(n-2)(n-3)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

이다. 그러므로

$$E(X) = \sum_{k=0}^3 \{k \times P(X=k)\}$$

$$= \frac{\boxed{(\text{다})}}{2n-1}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 a 라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때,
 $a \times f(5) \times g(8)$ 의 값은? [4점]

① 22

② $\frac{45}{2}$

③ 23

④ $\frac{47}{2}$

⑤ 24

18. 좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 정사각형의 개수를 a_n 이라 하자.

- (가) 한 변의 길이가 n 이고 네 꼭짓점의 x 좌표와 y 좌표가 모두 자연수이다.
(나) 두 곡선 $y = \log_2 x$, $y = \log_{16} x$ 와 각각 서로 다른 두 점에서 만난다.

$a_3 + a_4$ 의 값은? [4점]

① 21

② 23

③ 25

④ 27

⑤ 29

19. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시작 $t(t > 0)$ 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = t^3 + 2t, \quad y = \ln(t^2 + 1)$$

이다. 점 P에서 직선 $y = -x$ 에 내린 수선의 발을 Q라 하자. $t = 1$ 일 때, 점 Q의 속력은? [4점]

① $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

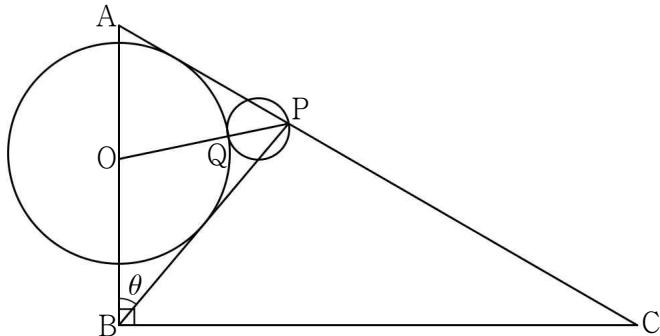
② $2\sqrt{2}$

③ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

④ $3\sqrt{2}$

⑤ $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

20. 그림과 같이 $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 CA 위의 점 P에 대하여 $\angle ABP = \theta$ 라 할 때, 선분 AB 위의 점 O를 중심으로 하고 두 선분 AP, BP에 동시에 접하는 원의 넓이를 $f(\theta)$ 라 하자. 이 원과 선분 PO가 만나는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ를 지름으로 하는 원의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta) + g(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{17-5\sqrt{3}}{3}\pi$ ② $\frac{18-5\sqrt{3}}{3}\pi$ ③ $\frac{19-5\sqrt{3}}{3}\pi$ ④ $\frac{18-4\sqrt{3}}{3}\pi$ ⑤ $\frac{19-4\sqrt{3}}{3}\pi$

21. 자연수 n 에 대하여 한 개의 주사위를 반복하여 던져서 나오는 눈의 수에 따라 다음과 같은 규칙으로 a_n 을 정한다.

(가) $a_1 = 0$ 이고, a_n ($n \geq 2$)는 세 수 $-1, 0, 1$ 중 하나이다.
(나) 주사위를 n 번째 던져서 나온 눈의 수가 짝수이면 a_{n+1} 은 a_n 이 아닌 두 수 중에서 작은 수이고, 홀수이면 a_{n+1} 은 a_n 이 아닌 두 수 중에서 큰 수이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

— <보 기> —

- ㄱ. $a_2 = 1$ 일 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.
ㄴ. $a_3 = 1$ 일 확률과 $a_4 = 0$ 일 확률은 서로 같다.
ㄷ. $a_9 = 0$ 일 확률이 p 이면 $a_{11} = 0$ 일 확률은 $\frac{1-p}{4}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. $(2x+1)^5$ 의 전개식에서 x^3 의 계수를 구하시오. [3점]

23. 직선 $y = -4x$ 가 곡선 $y = \frac{1}{x-2} - a$ 에 접하도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합을 구하시오. [3점]

24. 좌표평면에서 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 초점을 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)이라 하자. 이 타원 위의 제1사분면에 있는 점 P 에 대하여 점 F' 을 중심으로 하고 점 P 를 지나는 원과 직선 PF' 이 만나는 점 중 P 가 아닌 점을 Q 라 하고, 점 F 를 중심으로 하고 점 P 를 지나는 원과 직선 PF 가 만나는 점 중 P 가 아닌 점을 R 라 할 때, 삼각형 PQR 의 둘레의 길이를 구하시오.

[3점]

25. 도함수가 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 이다.

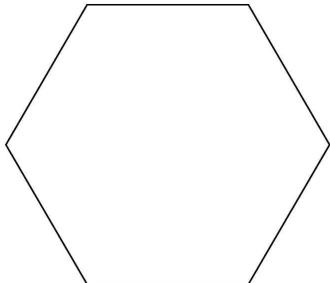
(나) $f(\pi) = 0$

(다) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 f'(x) dx = -8\pi$

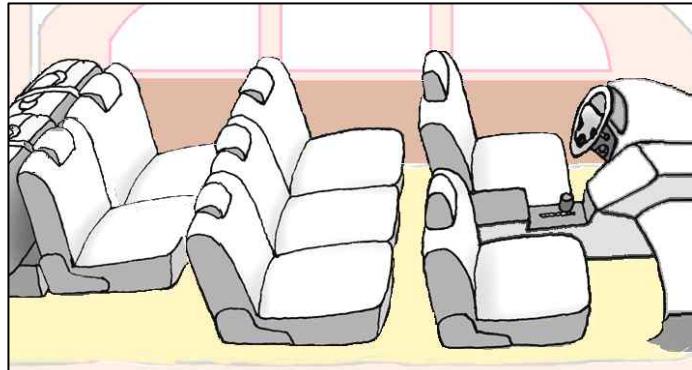
$$\int_{-\pi}^{\pi} (x + \cos x) f(x) dx = k\pi \text{ 일 때, } k \text{ 의 값을 구하시오. [3점]}$$

26. 한 변의 길이가 1인 정육각형의 6개의 꼭짓점 중에서 임의로 서로 다른 3개의 점을 택하여 이 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 만들 때, 이 삼각형의 넓이를 확률변수 X 라 하자.

$$P\left(X \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{q}{p} \text{ 일 때, } p+q \text{ 의 값을 구하시오. (단, } p \text{ 와 } q \text{ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]}$$



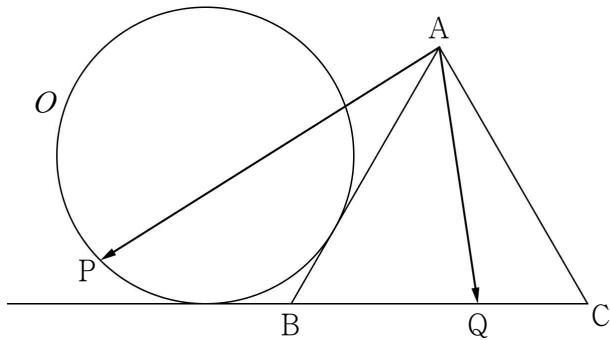
27. 그림과 같이 7개의 좌석이 있는 차량에 앞줄에 2개, 가운데 줄에 3개, 뒷줄에 2개의 좌석이 배열되어 있다. 이 차량에 1학년 생도 2명, 2학년 생도 2명, 3학년 생도 2명이 탑승하려고 한다. 이 7개의 좌석 중 6개의 좌석에 각각 한 명씩 생도 6명이 앉는다고 할 때, 3학년 생도 2명 중 한 명은 운전석에 앉고 1학년 생도 2명은 같은 줄에 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오. [4점]



28. 함수 $f(x) = (x^3 - a)e^x$ 과 실수 t 에 대하여 방정식 $f(x) = t$ 의 실근의 개수를 $g(t)$ 라 하자.

함수 $g(t)$ 가 불연속인 점의 개수가 2가 되도록 하는 10 이하의 모든 자연수 a 의 값의 합을 구하시오. (단, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$) [4점]

29. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC 와 반지름의 길이가 1이고 선분 AB 와 직선 BC에 동시에 접하는 원 O가 있다. 원 O 위의 점 P와 선분 BC 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 $a+b\sqrt{3}$ 이다. a^2+b^2 의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이고, 원 O의 중심은 삼각형 ABC의 외부에 있다.) [4점]



30. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 - ax - a$ 의 역함수가 존재할 때, $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 자연수 n 에 대하여 $n \times g'(n) = 1$ 을 만족시키는 실수 a 의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{27} a_n$ 의 값을 구하시오.

[4점]