

## • 2교시 수학 영역 •

1	(3)	2	(5)	3	(4)	4	(4)	5	(1)
6	(2)	7	(3)	8	(5)	9	(1)	10	(3)
11	(2)	12	(1)	13	(5)	14	(2)	15	(5)
16	(4)	17	(1)	18	(2)	19	(3)	20	(4)
21	(3)	22	8	23	7	24	34	25	6
26	385	27	54	28	22	29	48	30	75

### 1. [출제의도] 지수법칙 계산하기

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{4})^2 \times 2^{\frac{2}{3}} &= \left(\frac{2}{2^{\frac{2}{3}}}\right)^2 \times 2^{\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{4+2}{3}} \\ &= 2^2 = 4 \end{aligned}$$

### 2. [출제의도] 미분계수 이해하기

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \times \frac{1}{x + 2} \\ &= \frac{f'(2)}{4} = 3 \end{aligned}$$

따라서  $f'(2) = 3 \times 4 = 12$

### 3. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$$\text{함수 } y = \cos \frac{\pi}{4} x \text{의 주기는 } \left| \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} \right| = 8$$

### 4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3 + 1 = 4$$

### 5. [출제의도] 함수의 극한의 성질 이해하기

$$x > \frac{1}{2} \text{ 일 때 모든 실수 } x \text{에 대하여}$$

$$\frac{3}{2x+1} < f(x) < \frac{3}{2x-1} \text{ 이므로}$$

$$\frac{3x}{2x+1} < xf(x) < \frac{3x}{2x-1}$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{2x-1} = \frac{3}{2} \text{ 이므로}$$

$$\text{함수의 극한의 대소 관계에 의하여 } \lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = \frac{3}{2}$$

### 6. [출제의도] 등차수열 이해하기

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차가 3이므로

$$\begin{aligned} a_2 \times a_4 &= (a_3 - 3)(a_3 + 3) \\ &= a_3^2 - 9 = 72 \end{aligned}$$

에서  $a_3 = 9$  또는  $a_3 = -9$

$$a_3 = -9 \text{ 일 때 } a_1 = a_3 - 6 = -15 < 0$$

따라서  $a_3 = 9$

### 7. [출제의도] 미분계수 이해하기

함수  $f(x)$ 가  $x = 2$ 에서 미분가능하므로

함수  $f(x)$ 는  $x = 2$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \text{ 이므로}$$

$$2 - a = 4 + 2b + a, \quad b = -a - 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - a) - (2 - a)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{x - 2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x^2 + bx + a) - (2 - a)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - (a+1)x + 2(a-1)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-a+1)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-a+1) = 3-a \end{aligned}$$

함수  $f(x)$ 가  $x = 2$ 에서 미분가능하므로

$$1 = 3 - a \text{에서 } a = 2, \quad b = -3$$

따라서  $f(2) = 0$

### 8. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계 이해하기

$$a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_5 = S_5 - S_4 = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30}$$

$$\text{따라서 } a_1 + a_5 = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{30}\right) = \frac{7}{15}$$

### 9. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수  $f(x) = \log_2(x+a)+1$ 의 밑이 1보다 크므로

$x$ 의 값이 증가하면  $f(x)$ 의 값도 증가한다.

그러므로 함수  $f(x)$ 는 닫힌구간  $[a, 5]$ 에서  $x=a$ 일 때 최솟값 3을 갖는다.

$$f(a) = \log_2 2a + 1 = 3 \text{에서 } a = 2$$

$$\text{따라서 } f(a+4) = f(6) = \log_2 8 + 1 = 3 + 1 = 4$$

### 10. [출제의도] 등비수열의 합 이해하기

등비수열  $\{a_n\}$ 의 공비를  $r(r \neq 0)$ 이라 하자.

$$a_1 = 0 \text{ 일 때 } \sum_{k=1}^5 a_k = 0 \neq 33 \text{ 이므로 } a_1 \neq 0$$

$$a_3 + 2a_4 = a_1 r^2 + 2a_1 r^3 = a_1 r^2 (1 + 2r) = 0$$

$$\text{에서 } r = -\frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^5 a_k = \frac{a_1 \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{11}{16} a_1 = 33$$

$$\text{따라서 } a_1 = 48$$

### 11. [출제의도] 삼각함수의 성질을 활용하여 문제해결하기

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) = -\sin\theta, \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \text{ 이므로}$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) \times \tan\theta = -\sin\theta \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= -\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{8}{3}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \text{ 이므로 } \frac{\cos^2\theta - 1}{\cos\theta} = \frac{8}{3}$$

$$3\cos^2\theta - 8\cos\theta - 3 = 0$$

$$(3\cos\theta - 1)(3\cos\theta + 1) = 0$$

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1 \text{ 이므로 } \cos\theta = -\frac{1}{3}$$

### 12. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

$$a_{2n} = \sum_{k=1}^{2n-1} (k - a_k) = \sum_{k=1}^{2n-1} k - \sum_{k=1}^{2n-1} a_k$$

$$a_{2n} + \sum_{k=1}^{2n-1} a_k = \sum_{k=1}^{2n-1} k \text{에서 } \sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{2n-1} k$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^9 k = \frac{9 \times 10}{2} = 45$$

### 13. [출제의도] 삼각함수의 정의 이해하기

점 P의 x좌표를  $a(a > 0)$ 이라 하면 점 P의 좌표는

$$P(a, a+1)$$

각의 크기  $\theta$ 를 나타내는 동경과 각의 크기  $7\theta$ 를

나타내는 동경이 일치하므로

$$7\theta = \theta + 2n\pi(n \text{은 정수})$$

$$\theta = \frac{n}{3}\pi$$

이때 점 P는 제1사분면 위의 점이고

$$0 < \theta < 2\pi \text{ 이므로 } n=1, \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{a+1}{a} \text{에서 } \sqrt{3}a = a+1, (\sqrt{3}-1)a = 1$$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

### 14. [출제의도] 함수의 연속을 활용하여 문제해결하기

조건 (가)의 식의 양변에  $x=0$ 을 대입하면

$$0 \times f(0) = b \text{에서 } b = 0$$

조건 (가)의 식의 양변에  $x=4$ 를 대입하면

$$2f(4) = 16 + 4a$$

조건 (나)에 의하여  $4 = 16 + 4a$ 에서  $a = -3$

그러므로  $x \geq -\frac{1}{2}$  이고  $x \neq 0$ 인 모든 실수  $x$ 에

$$\text{대하여 } f(x) = \frac{x(x-3)}{\sqrt{2x+1}-1}$$

함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 연속이다.

$$\text{따라서 } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-3)}{\sqrt{2x+1}-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-3)(\sqrt{2x+1}+1)}{(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-3)(\sqrt{2x+1}+1)}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-3)(\sqrt{2x+1}+1)}{2}$$

$$= \frac{-3 \times 2}{2} = -3$$

### 15. [출제의도] 거듭제곱근의 정의 이해하기

(i)  $n$ 이 홀수일 때

$$f(n) = 1 \text{이므로 } f(3) = f(5) = f(7) = f(9) = 1$$

(ii)  $n$ 이 짝수일 때

$$n=2, 4 \text{ 일 때 } \sin \frac{n}{5}\pi > 0 \text{ 이므로 } f(2) = f(4) = 2$$

$$n=6, 8 \text{ 일 때 } \sin \frac{n}{5}\pi < 0 \text{ 이므로 } f(6) = f(8) = 0$$

$$n=10 \text{ 일 때 } \sin \frac{10}{5}\pi = 0 \text{ 이므로 } f(10) = 1$$

$$(i), (ii)에 의하여 \sum_{n=2}^{10} f(n) = 1 \times 4 + 2 \times 2 + 1 = 9$$

### 16. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 문제해결하기

$$\log_n 4 \times \left( \frac{4}{\log_m 2} + \log_2 n \right)$$

$$= 2 \log_n 2 \times (4 \log_2 m + \log_2 n)$$

$$= 8 \log_n 2 \times \log$$

$$n=2^4 \text{이면 } m=(2^4)^{\frac{3}{4}}=2^3=8 \text{이므로}$$

$$m+n=8+16=24$$

$$n=3^4 \text{이면 } m=(3^4)^{\frac{3}{4}}=3^3=27 \text{이므로}$$

$$m+n=27+81=108$$

따라서  $m+n$ 의 최댓값은 108

### 17. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 추론하기

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2 x - \sin x - 1 \\ &= (1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 \\ &= -\sin^2 x - \sin x = -\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$f(\pi)=0$ 이고  $\pi$ 가 구간  $(\pi, a]$ 에 속하지 않으므로 구간  $(\pi, a]$ 에서 함수  $f(x)$ 가 최솟값을 갖기 위해서는  $f(x) \leq 0$ 을 만족시키는  $x$ 의 값이 구간  $(\pi, a]$ 에 존재해야 한다.

$f(x) \leq 0$ 에서  $\sin x = -1$  또는  $\sin x \geq 0$

$x > \pi$ 에서  $\sin x = -1$ 인  $x$ 의 최솟값은  $\frac{3}{2}\pi$

$x > \pi$ 에서  $\sin x \geq 0$ 인  $x$ 의 최솟값은  $2\pi$

그러므로  $p = \frac{3}{2}\pi$

한편 구간  $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$ 에서  $-1 \leq \sin x < 0$ 이므로

$$f(x) = -\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

그러므로  $M = \frac{1}{4}$

따라서  $p \times M = \frac{3}{8}\pi$

### 18. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

점 A의 좌표를  $A(p, 3p+2)$ 라 하면

점 B는 선분 DA를 2:1로 외분하는 점이므로

점 B의 좌표는  $B(2p, 6p+2)$ 이다.

함수  $y=a^x+k$ 의 그래프와 함수  $y=\log_a(x-k)$ 의

그래프는 직선  $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이고,

곡선  $y=a^x+k$  위의 점 B와 곡선  $y=\log_a(x-k)$

위의 점 C를 지나는 직선이 직선  $y=x$ 와

서로 수직이므로 점 C는 점 B를 직선  $y=x$ 에

대하여 대칭이동시킨 점이다.

그러므로 점 C의 좌표는  $C(6p+2, 2p)$ 이다.

삼각형 CBD는 이등변삼각형이므로

두 직선 BD, AC는 서로 수직이다.

직선 BD의 기울기가 3이므로

직선 AC의 기울기는

$$\frac{2p-(3p+2)}{(6p+2)-p} = \frac{-p-2}{5p+2} = -\frac{1}{3} \text{이므로 } p=2$$

그러므로  $A(2, 8)$ ,  $B(4, 14)$

점 A가 곡선  $y=a^x+k$  위의 점이므로  $a^2+k=8$

점 B가 곡선  $y=a^x+k$  위의 점이므로  $a^4+k=14$

두 식을 연립하면

$$a^4 - a^2 - 6 = 0, (a^2+2)(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})=0$$

$$a > 1 \text{이므로 } a = \sqrt{3}, k=5$$

따라서  $a \times k = 5\sqrt{3}$

### 19. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제해결하기

두 호 AD, DE의 길이가 같으므로

두 호 AD, DE에 대한 원주각의 크기가 같다.

$\angle DBA = \angle EBD = \theta$ ,  $\overline{AD} = k$ 라 하면

$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{CD}$ 이므로  $\overline{CD} = 2k$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$k^2 = 2^2 + \sqrt{6}^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{6} \times \cos \theta$$

$$k^2 = 10 - 4\sqrt{6} \cos \theta \dots \textcircled{1}$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$(2k)^2 = \sqrt{6}^2 + 4^2 - 2 \times \sqrt{6} \times 4 \times \cos \theta$$

$$2k^2 = 11 - 4\sqrt{6} \cos \theta \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하면 } k=1, \cos \theta = \frac{3}{8}\sqrt{6}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{8}\sqrt{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{8}$$

원 C의 반지름의 길이를 R이라 하면

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin \theta} = 2R \text{에서 } R = \frac{2}{5}\sqrt{10}$$

$$\text{따라서 원 } C \text{의 넓이는 } \pi \times \left(\frac{2}{5}\sqrt{10}\right)^2 = \frac{8}{5}\pi$$

### 20. [출제의도] 평균변화율을 이용하여 추론하기

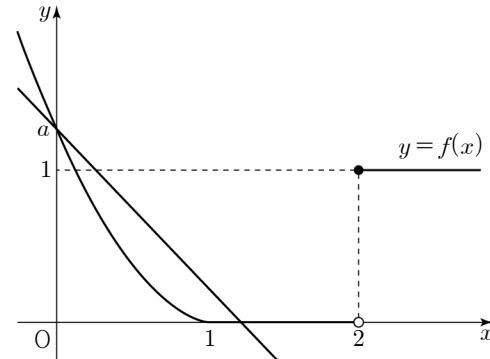
$f(0)=a$ 이므로 양수  $t$ 에 대하여

$$g(t) = \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \frac{f(t)-a}{t}$$

이고, 함수  $g(t)$ 의 값은 두 점  $(0, a)$ ,  $(t, f(t))$ 를 지나는 직선의 기울기와 같다.

$$\text{i). } a=1 \text{일 때 } g(1) = \frac{f(1)-1}{1} = -1 \text{ (첨)}$$

ii). (i)  $a \geq 1$ 일 때

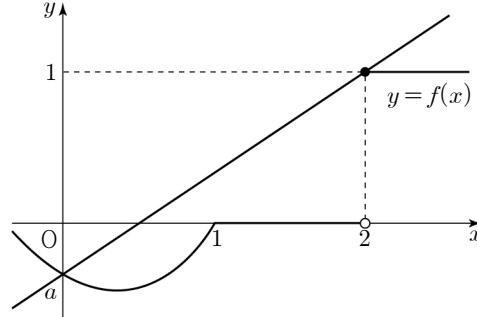


모든 양수  $t$ 에 대하여

$$f(t) \leq a \text{이므로 } g(t) = \frac{f(t)-a}{t} \leq 0$$

그러므로 함수  $g(t)$ 의 최댓값은 1이 될 수 없다.

(ii)  $-1 < a < 1$ 일 때

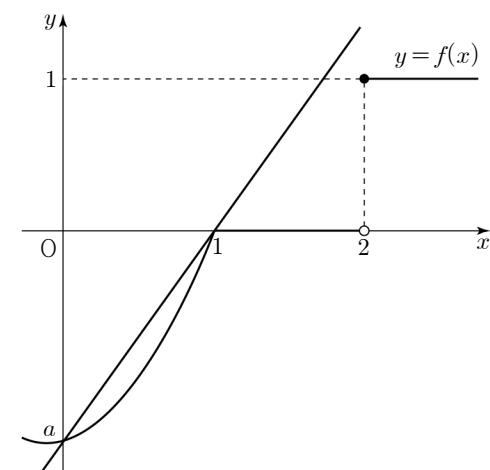


함수  $g(t)$ 는  $t=2$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$$g(2) = \frac{f(2)-a}{2} = \frac{1-a}{2} < 1$$

그러므로 함수  $g(t)$ 의 최댓값은 1보다 작다.

(iii)  $a \leq -1$ 일 때



함수  $g(t)$ 는  $t=1$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$$g(1) = \frac{f(1)-a}{1} = -a$$

함수  $g(t)$ 의 최댓값이 1이기 위해서는

$$a=-1$$

$$\text{이 때 } g(2) = \frac{f(2)-a}{2} = \frac{1-(-1)}{2} = 1$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

함수  $g(t)$ 의 최댓값이 1일 때,  $g(2)=1$  (거짓)

iii).  $0 < k < 2$ 인  $k$ 에 대하여

두 점  $(0, a)$ ,  $(k, f(k))$ 를 지나는 직선을  $l$ 이라 하자.  $g(k)=g(k+1)=g(k+2)$ 인

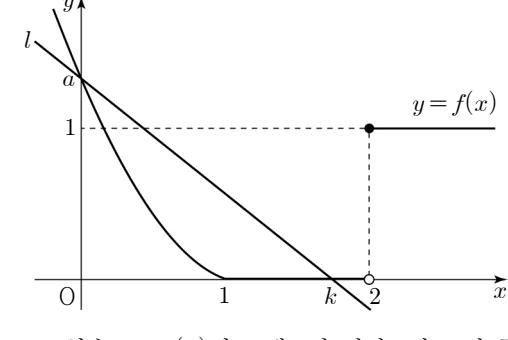
양수  $k$  ( $0 < k < 2$ )가 존재하기 위해서는

함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $l$ 의 교점 중

$(0, a)$ 가 아닌 점이 3개이어야 하고,

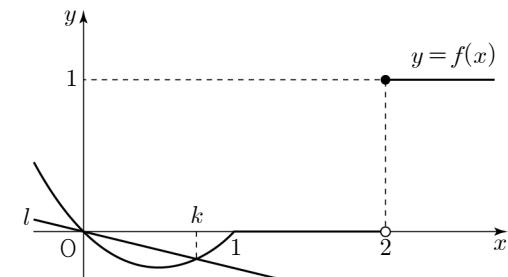
이 세 교점의  $x$ 좌표는  $k, k+1, k+2$ 이어야 한다.

(i)  $a > 0$ 일 때



함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $l$ 의 교점 중  $x$ 좌표가 양수인 점은  $(k, f(k))$ 뿐이므로  $g(k)=g(k+1)=g(k+2)$ 인  $k$ 가 존재하지 않는다.

(ii)  $a=0$ 일 때



$0 < k < 1$ 일 때, 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $l$ 의 교점 중  $x$ 좌표가 양수인 점은  $(k, f(k))$ 뿐이므로  $g(k)=g(k+1)=g(k+2)$ 인  $k$ 가 존재하지 않는다.

$1 \leq k < 2$ 일 때, 직선  $l$ 의 기울기가 0이므로  $g(k)=0$

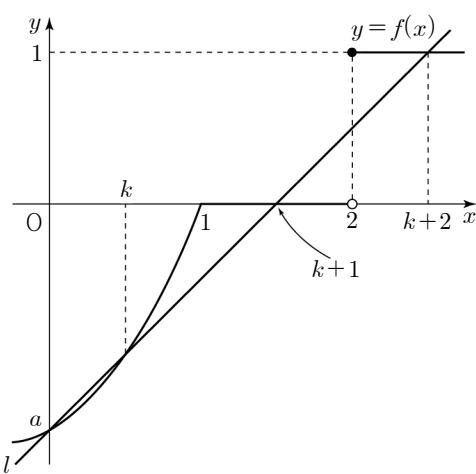
$$\text{이 때 } g(k+1) = \frac{1-0}{(k+1)-0} = \frac{1}{k+1} > 0 \text{이므로}$$

$$g(k) \neq g(k+1)$$

그러므로  $g(k)=g(k+1)=g(k+2)$ 인  $k$ 가

존재하지 않는다.

(iii)  $a < 0$  일 때



함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 직선  $l$ 의 교점 중  $(0, a)$ 가 아닌 점이 3개이기 위해서는  $0 < k < 1$ 이고

$f(k+1)=0$ ,  $f(k+2)=1$ 이어야 한다.

$$\frac{1-0}{(k+2)-(k+1)}=1 \text{이므로 직선 } l \text{의 기울기는 } 1$$

직선  $l$  위의 두 점  $(k, f(k))$ ,  $(k+1, 0)$ 에 대하여  $\frac{0-f(k)}{(k+1)-k}=1$ 에서  $f(k)=-1$

즉,  $(k-1)(k-a)=-1 \dots \textcircled{1}$

직선  $l$  위의 두 점  $(0, a)$ ,  $(k, f(k))$ 에 대하여  $\frac{f(k)-a}{k-0}=\frac{-1-a}{k}=1$ 에서

$a=-k-1 \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하면

$$(k-1)(2k+1)=-1, 2k^2-k=0$$

$$0 < k < 1 \text{이므로 } k=\frac{1}{2}, a=-\frac{3}{2}$$

그러므로

$$f(x)=\begin{cases} (x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right) & (x < 1) \\ 0 & (1 \leq x < 2) \\ 1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

이때

$$(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \\ =\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{25}{16} \geq -\frac{25}{16}$$

함수  $y=f(x)$ 의 최솟값  $-\frac{25}{16}$  가  $-\frac{3}{2}$  보다

작으므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와

직선  $y=-\frac{3}{2}$ 은 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

## 21. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

$a_1 \geq 2$ 이므로 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n > 0$

$$a_2=\frac{1}{2}a_1 \geq 1 \text{이므로 } a_3=\frac{1}{4}a_1$$

$a_5 < 1$ 이라 하면  $a_6=\frac{1}{2}(a_5+a_1)$ 에서

$$a_5+2a_6=2a_5+a_1 > 2 \text{이므로 } a_5 \geq 1$$

그러므로  $a_6=\frac{1}{2}a_5$ 이고  $a_5+2a_6=2a_5=2$ 에서

$$a_5=1$$

$a_4 < 1$ 이라 하면  $a_5=\frac{1}{2}(a_4+a_1)=1$ 에서

$$a_4=2-a_1 \leq 0 \text{이므로 } a_4 \geq 1$$

그러므로  $a_5=\frac{1}{2}a_4=1$ 에서  $a_4=2$

(i)  $a_1 \geq 4$ 일 때

$$a_3=\frac{1}{4}a_1 \geq 1 \text{이므로 } a_4=\frac{1}{8}a_1=2 \text{에서} \\ a_1=16$$

(ii)  $a_1 < 4$ 일 때

$$a_3=\frac{1}{4}a_1 < 1 \text{이므로} \\ a_4=\frac{1}{2}(a_3+a_1)=\frac{5}{8}a_1=2 \text{에서 } a_1=\frac{16}{5}$$

(i), (ii)에 의하여 모든  $a_1$ 의 값의 합은

$$16+\frac{16}{5}=\frac{96}{5}$$

## 22. [출제의도] 지수방정식 계산하기

방정식  $(\sqrt{3})^{x-2}=27$ 에서

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}=3^3, 3^{\frac{x-2}{2}}=3^3$$

$$\frac{x-2}{2}=3 \text{에서 } x=8$$

## 23. [출제의도] 호도법 이해하기

$$\frac{1}{2} \times 8 \times a\pi = 28\pi \text{에서 } a=7$$

## 24. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$f(x)$ 가 다항함수이고  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-2x^3}{x^2}=3$ 이므로

$$f(x)=2x^3+3x^2+ax+b (a, b \text{는 상수})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}=3 \text{이고 } \lim_{x \rightarrow 0} x=0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)=0$$

그러므로  $b=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3+3x^2+ax}{x} \\ =\lim_{x \rightarrow 0} (2x^2+3x+a) \\ =a=3$$

$$\text{그러므로 } f(x)=2x^3+3x^2+3x$$

$$\text{따라서 } f(2)=34$$

## 25. [출제의도] 로그의 정의 이해하기

$\log_{|a|}(-a^2-4a+21)$ 의 밑이  $|a|$ 이므로

$|a|>0$ 이고  $|a| \neq 1 \dots \textcircled{1}$

$\log_{|a|}(-a^2-4a+21)$ 의 진수가  $-a^2-4a+21$ 이므로

$$-a^2-4a+21>0$$

$$a^2+4a-21=(a+7)(a-3)<0 \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 정수  $a$ 는

$$-6, -5, -4, -3, -2, 2$$

따라서 구하는 정수  $a$ 의 개수는 6

## 26. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

$n \geq 2$ 인 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}) \\ = (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}) + (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}) + \dots \\ + (\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_n}) \\ = \sqrt{a_1} - \sqrt{a_n} = \frac{n-1}{n}$$

$$a_1=1 \text{이므로 } n \geq 2 \text{일 때 } \sqrt{a_n}=1-\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$$

$$\text{그러므로 모든 자연수 } n \text{에 대하여 } a_n=\frac{1}{n^2}$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$$

## 27. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$$\frac{2t}{x} = -\frac{1}{t}x+3 \text{에서 } 2t^2 = -x^2+3tx$$

$$x^2-3tx+2t^2=0, (x-t)(x-2t)=0$$

그러므로 두 점 A, B의 좌표는 A( $t, 2$ ), B( $2t, 1$ )

$$OA=\sqrt{t^2+4}, OB=\sqrt{4t^2+1}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{OB-OA}{t-1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{4t^2+1}-\sqrt{t^2+4}}{t-1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{4t^2+1}-\sqrt{t^2+4})(\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2+4})}{(t-1)(\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2+4})}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{3(t^2-1)}{t-1} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$$

$$\text{따라서 } 30 \times k^2 = 30 \times \left(\frac{3}{5}\sqrt{5}\right)^2 = 54$$

## 28. [출제의도] 등차수열을 이용하여 추론하기

$$a_k+a_{k+1}+a_{k+2}=3a_{k+1}=21 \text{에서 } a_{k+1}=7$$

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$  ( $d$ 는 자연수)라 하자.

$$a_1=a_{k+1}-dk=7-dk,$$

$$a_{k+4}=a_{k+1}+3d=7+3d \text{이므로}$$

$$S_{k+4}=\frac{(k+4)(a_1+a_{k+4})}{2} \\ =\frac{(k+4)\{14+(3-k)d\}}{2}=11$$

$$\text{에서 } (k+4)\{14+(3-k)d\}=22$$

$k+4$ 는 4보다 큰 자연수이므로

$$k+4=11 \text{ 또는 } k+4=22$$

$$\text{즉, } k=7 \text{ 또는 } k=18$$

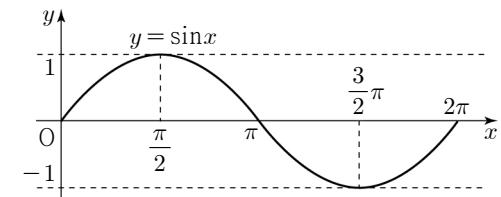
$$k=7 \text{일 때, } 14+(3-7)d=2 \text{에서 } d=3$$

$$k=18 \text{일 때, } 14+(3-18)d=1 \text{에서 } d=\frac{13}{15}$$

$d$ 는 자연수이므로  $d=3, k=7$

$$\text{따라서 } a_{k+6}=a_{k+1}+5d=7+5 \times 3=22$$

## 29. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 추론하기



$$\frac{1}{4}k=-\frac{1}{4}k^2+\frac{3}{4}k \text{에서 } k(k-2)=0$$

$$k=0 \text{ 또는 } k=2$$

(i)  $k=0$  또는  $k=2$ 일 때

$$\text{방정식 } \left(\sin x - \frac{1}{4}k\right)\left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k\right)=0 \text{의}$$

서로 다른 해의 개수는 방정식  $\sin x = \frac{1}{4}k$ 의

서로 다른 해의 개수와 같다.

$$\text{방정식 } \sin x = \frac{1}{4}k \text{의 서로 다른 해의 개수는 } k=0 \text{일 때 } 3 \text{이고 } k=2 \text{일 때 } 2 \text{이다.}$$

그러므로

$$\text{방정식 } \left(\sin x - \frac{1}{4}k\right)\left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k\right)=0 \text{의}$$

서로 다른 해의 개수가 2가 되도록 하는  
k의 값은 2이다.

(ii)  $k \neq 0$ 이고  $k \neq 2$ 일 때

$$\text{방정식 } (\sin x - \frac{1}{4}k)(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k) = 0 \text{의}$$

서로 다른 해의 개수는

$$\text{방정식 } \sin x = \frac{1}{4}k \text{의 서로 다른 해의 개수와}$$

$$\text{방정식 } \sin x = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k \text{의 서로 다른 해의 개수의 합과 같다.}$$

(a) 방정식  $\sin x = \frac{1}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수가 0일 때

$$|k| > 4 \text{일 때}$$

$$|k| > 4 \text{일 때 방정식 } \sin x = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k \text{의}$$

서로 다른 해의 개수는 0이다.

그러므로

$$\text{방정식 } (\sin x - \frac{1}{4}k)(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k) = 0 \text{의}$$

서로 다른 해의 개수는 0이다.

(b) 방정식  $\sin x = \frac{1}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수가 1일 때

$$|k| = 4 \text{일 때 } k = 4 \text{ 또는 } k = -4$$

$$\text{방정식 } \sin x = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k \text{의 서로 다른 해의 개수는}$$

$$k = 4 \text{일 때 } 1 \text{이고 } k = -4 \text{일 때 } 0 \text{이므로}$$

$$\text{방정식 } (\sin x - \frac{1}{4}k)(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k) = 0 \text{의}$$

서로 다른 해의 개수가 2가 되도록 하는 k의 값은 4이다.

(c) 방정식  $\sin x = \frac{1}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수가 2일 때

$$|k| < 4 \dots \textcircled{1}$$

$$\text{방정식 } (\sin x - \frac{1}{4}k)(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k) = 0 \text{의}$$

서로 다른 해의 개수가 2가 되기 위해서는

$$\text{방정식 } \sin x = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k \text{의 서로 다른 해의 개수가 } 0 \text{이어야 하므로 } k < -1, k > 4 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 동시에 만족시키는 정수 } k \text{는 } -3, -2$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 정수 k는

$$-3, -2, 2, 4 \text{이므로 모든 정수 } k \text{의 값의 합은}$$

$$-3 \times (-2) \times 2 \times 4 = 48$$

### 30. [출제의도] 함수의 연속을 이용하여 추론하기

$$y = \frac{bx}{x+a} = -\frac{ab}{x+a} + b \text{이므로}$$

함수  $y = \frac{bx}{x+a}$ 의 그래프의 점근선은

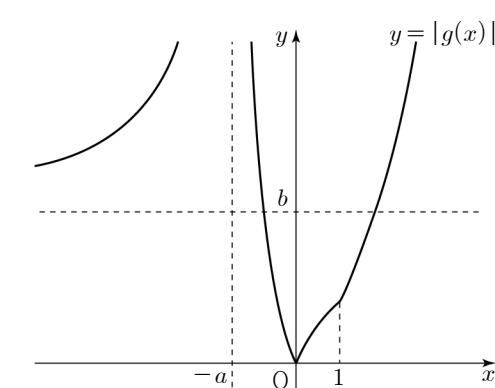
$$x = -a, y = b$$

함수  $g(x)$ 는  $x=1$ 에서 연속이므로

$$g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{bx}{x+a} = \frac{b}{1+a} < b$$

이차함수  $f(x)$ 의 꼭짓점의 x좌표를 k라 하자.

$k \leq 1$ 일 때, 함수  $y = |g(x)|$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



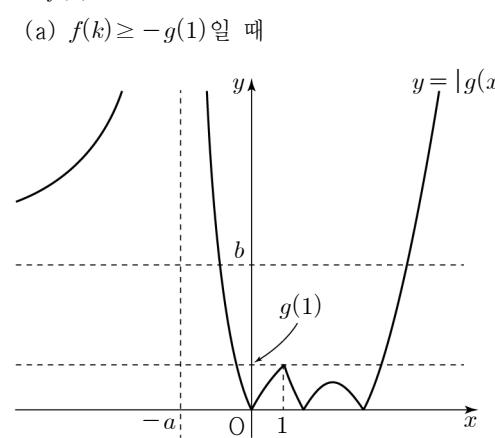
$0 < t \leq b$ 인 t에 대하여  $h(t) = 2$ 이고

$t > b$ 인 t에 대하여  $h(t) = 3$ 이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로  $k > 1$

(i)  $f(k) > -b$ 일 때



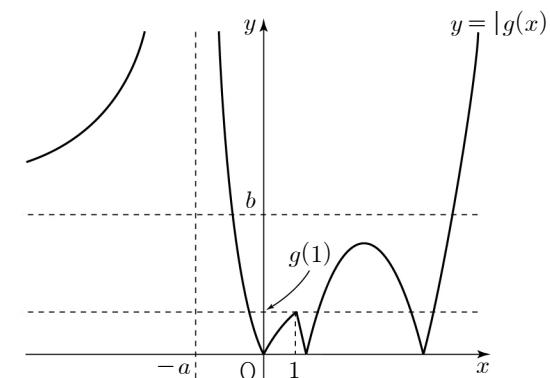
$|f(k)| \leq g(1)$ 이므로

$g(1) < t \leq b$ 인 t에 대하여  $h(t) = 2$ 이고

$t > b$ 인 t에 대하여  $h(t) = 3$ 이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(b)  $-b < f(k) < -g(1)$ 일 때



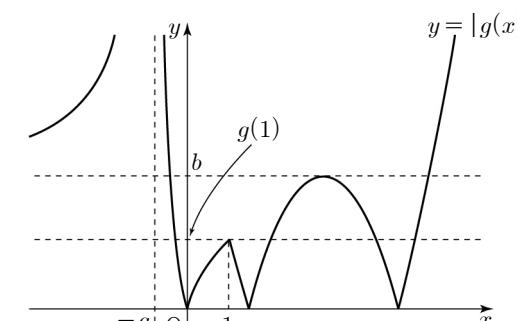
$g(1) < -f(k) < b$ 이므로

$-f(k) < t \leq b$ 인 t에 대하여  $h(t) = 2$ 이고

$t > b$ 인 t에 대하여  $h(t) = 3$ 이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii)  $f(k) = -b$ 일 때



$t < 0$ 일 때,  $h(t) = 0$

$t = 0$ 일 때,  $h(0) = 3$

$0 < t < g(1)$ 일 때,  $h(t) = 6$

$t = g(1)$ 일 때,  $h(g(1)) = 5$

$g(1) < t < b$ 일 때,  $h(t) = 4$

$t \geq b$ 일 때,  $h(t) = 3$

그러므로

$$h(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 3 & (t = 0, t \geq b) \\ 4 & (g(1) < t < b) \\ 5 & (t = g(1)) \\ 6 & (0 < t < g(1)) \end{cases}$$

이며 함수  $h(t)$ 는 조건 (가)를 만족시킨다.

함수  $h(t)$ 가  $t=0$ ,  $t=g(1)$ ,  $t=b$ 에서만 불연속이므로 조건 (나)에 의하여

$$\alpha = g(1), \beta = b$$

$$g(1) = \alpha = h(0) = 3 \text{이므로 } g(1) = \frac{b}{1+a} = 3$$

$$h(\alpha) = h(g(1)) = 5 \text{이고}$$

$$h(\alpha) = \beta - 1 = b - 1 \text{이므로 } b = 6, a = 1$$

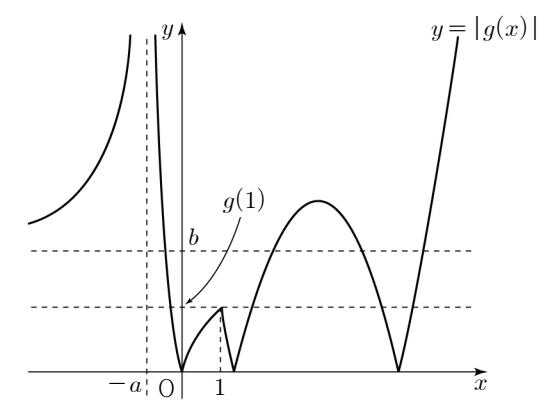
$$f(k) = -6 \text{이므로 } f(x) = (x-k)^2 - 6$$

$$f(1) = g(1) = 3 \text{이므로}$$

$$(1-k)^2 - 6 = 3 \text{에서 } k = 4$$

$$\text{그러므로 } f(x) = (x-4)^2 - 6$$

(iii)  $f(k) < -b$ 일 때



$-f(k) > b$ 이므로

$g(1) < t \leq b$ 인 t에 대하여  $h(t) = 2$ 이고

$b < t < -f(k)$ 인 t에 대하여  $h(t) = 5$ 이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$f(a-b) = f(1-6) = (-5-4)^2 - 6 = 75$$