제 33 회 고등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2019년 11월 16일 (오전); 제한시간 3시간; 문항당 7점

1. 수열 $\{a_1, a_2, \dots, a_{2019}\}$가 다음 식을 만족한다.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2019a_n + 1 \ (1 \le n \le 2018)$$

실수 $x_1, x_2, \dots, x_{2019}$ 중 $x_1 = a_{2019}$, $x_{2019} = a_1$일 때 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\sum_{k=1}^{2018}(x_{k+1} - 2019x_k - 1)^2 \ge \sum_{k=1}^{2018}(a_{2019-k} - 2019a_{2020-k} - 1)^2$$

2. 세 변의 길이가 모두 다른 예각삼각형 ABC의 내심을 I라 하고 외접원을 Ω라 하자. 삼각형 ABC의 꼭지점 A에 대한 방심을 E라 하고 점 E를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원을 Γ라 하자. 두 원 Ω와 Γ의 교점을 $D(\neq A)$, 점 A를 지나고 BC와 수직인 직선이 원 Γ와 만나는 점을 $K(\neq A)$, 점 I에서 AC에 내린 수선의 발을 L이라 하자. 직선 AE와 DK의 교점을 F라 할 때, $\overline{BE} \cdot \overline{CI} = 2 \cdot \overline{CF} \cdot \overline{CL}$임을 보여라.

3. 양의 정수 k, m, n이 다음 두 등식을 모두 만족한다.

$$m^2 + 1 = 2n^2, \quad 2m^2 + 1 = 11k^2$$

이때 n을 17로 나눈 나머지를 구하여라.

4. 정수들의 순서쌍 19개를 각각 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_{19}, y_{19}, z_{19})$라 하자. 이 중 다음을 만족하는 서로 다른 i, j, k가 존재함을 보여라.

$x_i + x_j + x_k$, $y_i + y_j + y_k$, $z_i + z_j + z_k$는 모두 3의 배수

제 33 회 고등부 2차시험
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2019년 11월 16일 (오후); 제한시간 3시간; 문항당 7점

5. 다음 조건을 만족하는 함수 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 모두 구하여라. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합)

(조건) 모든 실수 x, y에 대하여 $f(f(x) - x + y^2) = yf(y)$ 이다.

6. 예각삼각형 ABC에서 $\overline{AB} > \overline{AC}$이다. 삼각형 ABC의 내심을 I라 하고 외접원을 Ω라 하자. 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D, 직선 AI가 Ω와 만나는 점을 M $(\neq A)$, M을 지나고 AM에 수직인 직선이 직선 AD와 만나는 점을 E, I에서 AD에 내린 수선의 발을 F라 하자. 등식 $\overline{ID} \cdot \overline{AM} = \overline{IE} \cdot \overline{AF}$가 성립함을 보여라.

7. 소수 p는 7로 나누어 나머지가 1인 소수이다. 이때 $m^3 + m^2 - 2m - 1$이 p의 배수가 되는 양의 정수 m이 존재함을 보여라.

8. 두 나라 A, B가 있고 각 나라마다 n (≥ 2) 개의 공항이 있다. 두 나라 A, B의 공항들은 서로 다른 직항로로 연결되어 있고, 각 공항에는 정확히 3개의 직항로가 있다. 이때 두 공항 사이에 여러 개의 직항로도 있을 수 있고, 같은 나라의 두 공항 사이에는 직항로가 존재하지 않는다. 한 여행사에서 정확히 $2n$개의 직항로만을 이용하여 A, B 나라의 모든 공항을 정확히 한 번씩 지나고 처음의 공항으로 돌아오는 "이색 여행 상품"을 계획하려 한다. 이때 가능한 "이색 여행 상품"의 개수를 N이라 할 때, $\frac{N}{4n}$이 짝수임을 보여라. 단, 출발공항이 다르면 다른 여행상품으로 간주하고, 모든 직항로는 양방향으로 운항 가능하다.