



2020년 9월 12일 ; 제한시간 3시간

- A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
- B. 이 시험은 총 25개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
- C. 문제 1~7 번은 각 3점, 문제 8~18 번은 각 4점, 문제 19~25 번은 각 5점입니다.

1. <정답. 10>

삼각형 ABC 에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이고 $\angle B = 40^\circ$ 이다. 변 BC 위의 점 D 를 $\angle ADC = 120^\circ$ 가 되도록 잡고, 각 C 의 이등분선과 변 AB 의 교점을 E 라 하자. $\angle DEC$ 는 몇 도인가?

2. <정답. 91>

등식 $x + 2y = 40$ 을 만족하는 양의 정수 x, y 에 대하여, $|(x - 33)(y - 17)|$ 의 최댓값을 구하여라.

3. <정답. 20>

예각삼각형 ABC 의 외심을 O , 각 A 의 이등분선과 변 BC 가 만나는 점을 D , 삼각형 ABD 의 외접원과 선분 OA 의 교점을 $E(\neq A)$ 라 하자. $\angle OCB = 14^\circ$ 이고 $\angle OCA = 18^\circ$ 일 때, $\angle DBE$ 는 몇 도인가?

4. <정답. 560>

정수 계수 이차다항식 $f(x)$ 중 다음 조건을 모두 만족하는 것의 개수를 구하여라.

$$f(-5) = -5, \quad f(11) = 11, \quad f(18) \text{은 다섯자리 양의 정수}$$

5. <정답. 31>

다음은 봉사활동에 지원한 4명의 학생 A, B, C, D가 활동할 수 있는 요일을 O 기호로 표시한 것이다. 4명의 학생 중 3명을 선발하여 서로 다른 3개의 요일에 배치하는 경우의 수는? (단, 선발된 학생은 일주일 중에서 하루만 작업한다.)

	월	화	수	목	금	토	일
A	O		O				
B	O	O					
C				O		O	
D				O		O	O

6. <정답. 21>

이차함수 $y = f(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

$$f(f(-1)) = f(f(5)) = f(f(17))$$

이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표로 가능한 수를 모두 더한 값을 구하여라.

7. <정답. 90>

직사각형 $ABCD$ 에서 $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 3$ 이다. 변 CD 위의 점 E 를 $\overline{BA} = \overline{BE}$ 가 되도록 잡자. 삼각형 ABE 의 내접원의 반지름을 $a + b\sqrt{10}$ 이라 할 때, $60(a + b)$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수)

8. <정답. 169>

다음 식의 값을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라. (단, $[a]$ 는 a 를 넘지 않는 최대정수)

$$\left[\frac{1^2}{12} \right] + \left[\frac{2^2}{12} \right] + \left[\frac{3^2}{12} \right] + \cdots + \left[\frac{99^2}{12} \right] + \left[\frac{100^2}{12} \right]$$

9. <정답. 93>

3의 배수인 세 자리수를 모두 나열했을 때 숫자 7은 몇 번 나타나는가?

10. <정답. 97>

양의 정수 n 에 대하여 $a_n = \frac{n^2 - 2}{n^2 - 3 + 2\sqrt{2}}$ 라 하자.

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{10} = \frac{p + q\sqrt{2}}{11 - \sqrt{2}}$$

일 때, $p^2 + q^2$ 의 값을 구하여라. (단, p, q 는 유리수)



11. <정답. 15>

이등변삼각형 ABC 에서 $\overline{AB} = \overline{AC} = 60$, $\overline{BC} = 45$ 이다. 변 AC 위에 $\overline{CD} = 10$ 이 되도록 점 D 를 잡자. 점 D 와 변 BC 의 중점을 연결한 직선이 직선 AB 와 만나는 점을 E 라 할 때, 선분 BE 의 길이를 구하여라.

15. <정답. 160>

직사각형 $ABCD$ 에서 $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 12$ 이다. 변 AB , BC , AD 의 중점을 각각 E , F , G 라 하고, 선분 AG 와 GD 의 중점을 각각 J , K 라 하자. 선분 DE 와 선분 JF , KF 의 교점을 각각 P , Q 라 할 때, $\left(\frac{21}{8} \times \overline{PQ}\right)^2$ 의 값을 구하여라.

12. <정답. 201>

양의 정수 n 에 대하여 1부터 n 까지 더하기를 하는데 두 수를 제외하고 더하였더니 결과가 20000이었다. 가능한 n 중 가장 큰 것을 구하여라.

16. <정답. 9>

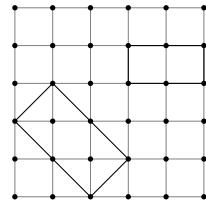
소수가 아닌 양의 정수 n 중 다음 두 조건을 모두 만족하는 것의 개수를 구하여라.

$$(1) 4 \leq n \leq 50$$

$$(2) n \text{의 모든 소인수 } p \text{에 대하여 } p - 1 \text{은 } n - 1 \text{의 약수이다.}$$

13. <정답. 82>

다음 모눈종이에 네 꼭지점이 모두 가로줄과 세로줄이 만나는 점에 있도록 사각형을 만들 때, 이웃한 변의 길이의 비가 1 : 2 인 직사각형의 개수를 구하여라.



17. <정답. 43>

칠판에 다음과 같이 1부터 9까지의 양의 정수가 적혀 있다.

$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9$$

8개의 각 네모 상자에 +와 - 중 하나를 골라서 적고 그 값을 계산할 때, 가능한 값의 개수를 구하여라.

18. <정답. 63>

세 정수 a , b , c 가 $-5 \leq a < b < c \leq 5$ 를 만족한다. $ab+bc+ca$ 의 값 중 두 번째로 큰 값을 M , 가장 작은 값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.



19. <정답. 80>

이등변삼각형 ABC 에서 $\overline{AB} = \overline{AC} = 20$, $\overline{BC} = 30$ 이다. 선분 AC 의 A 쪽 연장선 위에 $\overline{AD} = 60$ 이 되도록 점 D 를 잡고, 선분 AB 의 B 쪽 연장선 위에 $\overline{BE} = 80$ 이 되도록 점 E 를 잡자. 선분 AE 의 중점 F 와 삼각형 CDE 의 무게중심 G 를 연결한 직선 FG 와 $\angle DAE$ 의 이등분선이 만나는 점을 K 라 할 때, $6\overline{GK}$ 의 값 구하여라.

20. <정답. 600>

다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 중 가장 큰 것과 가장 작은 것의 합을 구하여라.

(조건) $\sqrt{n^2 - 33^2}$ 이 양의 정수이다.

21. <정답. 81>

빨간색 공, 노란색 공, 파란색 공이 각각 2개씩 있다. 이 6개의 공을 서로 다른 상자 A , B , C 에 남김없이 넣을 때, 각 상자는 공을 하나도 포함하지 않거나, 적어도 두 개의 공을 포함하도록 넣는 경우의 수를 구하여라. (단, 같은 색의 공들은 서로 구별하지 않는다.)

22. <정답. 28>

양의 실수 a , b , c , d 가 $a \geq b \geq c$ 와 $4(a+b) \leq 9(c+d)$ 를 모두 만족할 때, $36\left(\frac{c}{a} + \frac{d}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

23. <정답. 25>

삼각형 ABC 에서 $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $\overline{BC} = 20$ 이다. 변 BC 를 지름으로 하는 원이 변 AB , AC 와 만나는 점을 각각 $D(\neq B)$, $E(\neq C)$ 라 하고, 선분 BD , BE , CE , CD 의 중점을 각각 P , Q , R , S 라 하자. 사각형 $PQRS$ 의 넓이를 $a + b\sqrt{3}$ 이라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수)

24. <정답. 900>

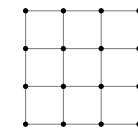
다음 두 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

$$(1) 1 \leq x \leq 1000, 1 \leq y \leq 1000$$

$$(2) \frac{101x^2 - 5y^2}{2020} \text{은 정수이다.}$$

25. <정답. 172>

그림과 같이 9개의 단위 정사각형으로 이루어진 도형이 있다.



이 도형 위의 16개의 점 각각에 빨강, 주황, 노랑, 파랑 중 하나의 색을 칠할 때, 다음 조건을 만족하는 경우의 수를 구하여라.

(조건) 각각의 단위 정사각형의 네 꼭지점은 모두 다른색이거나, 모두 같은색이다.