

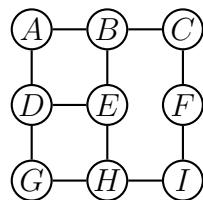
2018년 11월 11일 (오후); 제한시간 3시간; 문항당 7점

5. 볼록사각형 $ABCD$ 에서 각 A 의 이등분선이 각 B 의 이등분선, 각 D 의 이등분선과 만나는 점을 각각 P, Q 라 하고, 각 C 의 이등분선이 각 D 의 이등분선, 각 B 의 이등분선과 만나는 점을 각각 R, S 라 하자. 이때 네 점 P, Q, R, S 는 모두 다른 점이고, 두 선분 PR 과 QS 가 점 Z 에서 수직으로 만난다. 각 A, B, C, D 의 외각의 이등분선을 각각 $\ell_A, \ell_B, \ell_C, \ell_D$ 라 하고, ℓ_A 와 ℓ_B 의 교점을 E, ℓ_B 와 ℓ_C 의 교점을 F, ℓ_C 와 ℓ_D 의 교점을 G, ℓ_D 와 ℓ_A 의 교점을 H 라 하자. 사각형 $EFGH$ 의 네 변 FG, GH, HE, EF 의 중점을 각각 K, L, M, N 이라 할 때, 사각형 $KLMN$ 의 넓이는 $\overline{ZM} \cdot \overline{ZK} + \overline{ZL} \cdot \overline{ZN}$ 임을 보여라.

6. 서로 다른 n 개의 양의 정수로 이루어진 집합 S 에 대하여, 다음 조건을 만족하는 일대일 대응 $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow S$ 가 항상 존재함을 보여라. (단, n 은 3 이상인 정수이다.)

모든 $1 \leq i < j < k \leq n$ 에 대하여, $(f(j))^2 \neq f(i) \cdot f(k)$ 이다.

7. 아래 그림과 같이 9개의 작은 원판 A, B, \dots, I 와 11개의 선분으로 이루어진 도형이 있다. 모든 원판에 실수를 하나씩 쓰고, 각 선분에는 선분의 양 끝 원판에 적힌 두 실수의 차의 제곱을 적는다. 원판 A 에는 0, 원판 I 에는 1을 쓰자. 이때 모든 선분에 적힌 수의 합이 될 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라.



8. 양의 정수 a, c 에 대하여 b 는 $ac - 1$ 의 양의 약수이다. 1보다 작은 양의 유리수 r 에 대하여, 집합 $A(r)$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$A(r) = \{m(r - ac) + nab \mid m, n \text{은 정수}\}$$

이때 $A(r)$ 의 원소 중 가장 작은 양의 유리수가 $\frac{ab}{a+b}$ 이상이 되는 r 을 모두 구하여라.