

2024년 5월 18일; 제한시간 2시간 30분

- A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
- B. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
- C. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 “7”일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
- D. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
- E. 문제 1~4 번은 각 4 점, 문제 17~20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. [정답. 72]

이등변삼각형 ABC 에서 $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$, $\overline{BC} = 6$ 이다. 점 D 와 E 는 선분 AC 위의 점으로 $\overline{AD} = 1$, $\overline{EC} = 2$ 이다. 삼각형 BDE 의 넓이를 S 라 할 때, $15S$ 의 값을 구하여라.

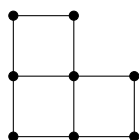
2. [정답. 405]

다음 식의 값을 구하여라.

$$\left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{6}\right) \left(1 + \frac{1}{7}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2023}\right) \left(1 + \frac{1}{2024}\right)$$

3. [정답. 51]

다음과 같이 1×1 정사각형 3개를 붙여서 만든 도형이 있다. 이 도형의 8개의 점 중에서 3개를 꼭짓점으로 갖는 삼각형의 개수를 구하여라.



4. [정답. 49]

다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수 m , n 의 순서쌍 (m, n) 의 개수를 구하여라.

(i) $m < n$

(ii) $2m$ 이상 $2n$ 이하의 짝수의 합은 $2m$ 이상 $2n$ 이하의 홀수의 합보다 100 크다.

5. [정답. 40]

다음 조건을 만족하는 모든 양의 정수 n 의 합을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(조건) $\frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{30}{\sqrt{n}}$ 의 값이 정수이다.

6. [정답. 199]

다음 식을 만족하는 $\frac{1}{100}$ 이상 100 이하의 실수 x 의 개수를 구하여라. (단, $[a]$ 는 a 를 넘지 않는 가장 큰 정수)

$$x - \frac{1}{x} = [x] - \left[\frac{1}{x}\right]$$

7. [정답. 864]

직선 위에 네 개의 점 A, B, C, D 가 순서대로 놓여 있고, $\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{\overline{CD}}{4} = \sqrt{5}$ 이다. 선분 AC 를 지름으로 하는 원과 선분 BD 를 지름으로 하는 원의 두 교점을 E, F 라 하자. 사각형 $EAFD$ 의 넓이를 S 라 할 때, S^2 의 값을 구하여라.

8. [정답. 294]

다음 두 조건을 모두 만족하는 네 자리 양의 정수 n 의 개수를 구하여라.

(i) n 의 각 자리의 수는 6 이하이다.

(ii) n 은 3의 배수이지만, 6의 배수는 아니다.

9. [정답. 11]

1000 이하인 양의 정수 중에서 완전제곱수인 약수의 개수가 정확히 6인 것의 개수를 구하여라.

10. [정답. 16]

다음 조건을 만족하도록 정삼각형의 각 꼭짓점에 1, 2, 3, 4, 5 중 하나의 수를 적는 경우의 수를 구하여라. (단, 회전하여 같은 것은 한 가지로 세며, 같은 수를 여러 번 적을 수 있다.)

(조건) 정삼각형의 각 변의 양 끝점에 적힌 두 수의 곱은 짝수이다.

11. [정답. 820]

정사각형 $ABCD$ 에서 변 AB 위의 점 P 와 변 AD 위의 점 Q 는 $\overline{AP} = \overline{AQ} = \frac{\overline{AB}}{5}$ 를 만족한다. 점 A 에서 선분 PD 에 내린 수선의 발을 H 라 하자. 삼각형 APH 의 넓이가 20일 때, 삼각형 HCQ 의 넓이를 구하여라.

12. [정답. 25]

실수 x, y 에 대하여 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$\frac{-x^2 - y^2 - 2xy + 30x + 30y + 75}{3x^2 - 12xy + 12y^2 + 12}$$

13. [정답. 982]

다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 의 개수를 구하여라. (단, $[a]$ 는 a 를 넘지 않는 가장 큰 정수)

(조건) $n = \left\lfloor \frac{m^3}{2024} \right\rfloor$ 을 만족하는 1000 이하의 양의 정수 m 이 존재한다.

14. [정답. 996]

다음 두 조건을 모두 만족하는 0이 아닌 실수 a_1, a_2, \dots, a_{20} 이 존재하는 1000 이하의 양의 정수 x 의 개수를 구하여라.

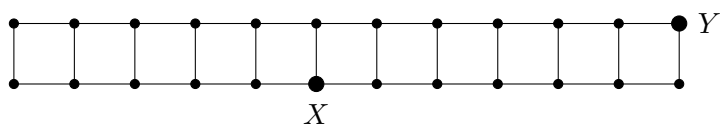
(i) $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = x$

(ii) 4 이상 20 이하의 양의 정수 n 에 대하여

$$a_n = a_{n-3} + \frac{(-2)^n}{a_{n-1}a_{n-2}}$$

15. [정답. 224]

다음 그림에서 점 X 에서 출발해서 선분을 따라 1칸씩 이동하면서 점 Y 에 도착한다. 한 번 지나간 점은 다시 지나지 않을 때 X 에서 Y 로 이동하는 경우의 수를 구하여라. (단, 출발점 X 는 지나간 것으로 간주한다.)



16. [정답. 300]

등변사다리꼴 $ABCD$ 에서 $\overline{AB} = 60, \overline{BC} = \overline{DA} = 36, \overline{CD} = 108$ 이다. 선분 AB 의 중점 M 에 대하여 선분 AM 위의 점 P 는 $\overline{AP} = 10$ 을 만족한다. 점 P 에서 선분 BD 에 내린 수선의 발을 E , 두 대각선 AC 와 BD 의 교점을 F 라 하자. 점 X 는 $\overline{MX} = \overline{ME}$ 인 선분 AF 위의 점일 때, $\overline{AX} \cdot \overline{AF}$ 의 값을 구하여라.

17. [정답. 22]

다음 조건을 만족하는 1000 이하의 양의 정수 n 의 개수를 구하여라.

(조건) 방정식 $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz = 2n$ 의

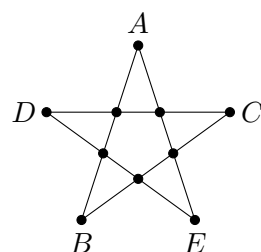
정수해 (x, y, z) 의 개수는 4의 배수가 아니다.

18. [정답. 14]

다음 그림과 같이 5개의 선분 AB, BC, CD, DE, EA 와 이 5개 선분의 교점 10개로 구성된 도형이 있다. 다음 조건을 만족하도록 10개의 교점 각각에 1 또는 2를 적는 방법의 수를 구하여라.

(조건) 각 선분 AB, BC, CD, DE, EA 위에 적힌

네 개의 수들의 합이 모두 같다.



19. [정답. 95]

다음 세 조건을 모두 만족하는 정수 a_0, a_1, \dots, a_{100} 에 대하여 $a_5 - 2a_{40} + 3a_{60} - 4a_{95}$ 가 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

(i) $a_0 = a_{100} = 0$

(ii) 모든 $i = 0, 1, \dots, 99$ 에 대하여 $|a_{i+1} - a_i| \leq 1$

(iii) $a_{10} = a_{90}$

20. [정답. 512]

각 C 가 직각인 직각삼각형 ABC 에서 $\overline{AB} = 36$ 이다. 삼각형 ABC 의 외접원의 호 BC 중 A 를 포함하지 않는 호 위의 점 D 가 $2\angle CAD = \angle BAD$ 를 만족한다. 선분 AD 와 BC 의 교점 E 에 대하여 $\overline{AE} = 20$ 일 때, $(\overline{BD})^2$ 의 값을 구하여라.