중등부

제 25 회 2 차시험 (중등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2011년 8월 21일 (오전); 제한시간 2시간 30분; 문항당 7점

1. 실수 a, b, c(단 $a, b, c \neq 1$)가 다음 두 조건을 모두 만족한다고 하자.

(1) $abc = 1$

(2) $a^2 + b^2 + c^2 - \left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right) = 8(a+b+c) - 8(ab+bc+ca)$

이때 $\dfrac{1}{a-1} + \dfrac{1}{b-1} + \dfrac{1}{c-1}$ 의 값으로 가능한 수를 모두 구하여라.

2. 원 O에 내접하는 사각형 $ABCD$가 있다. 점 A에서의 원 O의 접선과 직선 BC의 교점을 S, 점 B에서의 원 O의 접선과 직선 CD의 교점을 T라 하자. 중심이 S이고 점 A를 지나는 원이 변 BC와 만나는 점을 E, AE의 연장선이 원 O와 만나는 점을 $F(\neq A)$라 하자. 중심이 T이고 점 B를 지나는 원이 변 CD와 만나는 점을 K, BK와 AC의 교점을 P라 할 때, 점 P, F, D가 일직선 위에 있을 필요충분조건은 $AB = AP$임을 보여라.

3. 서로소인 두 양의 정수 x, y에 대하여, $x + 3y^2$ 이 완전제곱수이면 $x^2 + 9y^4$ 이 완전제곱수가 아님을 보여라.

4. 양의 정수 $n(\geq 2)$에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족하는 좌표평면 위의 $2n+1$개의 점 $P_0, P_1, \ldots, P_{2n}$ 으로 이루어진 집합의 개수를 구하여라.

(1) $P_0 = (0, 0)$, $P_{2n} = (n, n)$.

(2) 모든 $i = 0, 1, \ldots, 2n-1$에 대하여 선분 P_iP_{i+1}은 x축이나 y축에 평행하며 길이가 1이다.

(3) 선분 $P_0P_1, P_1P_2, \ldots, P_{2n-1}P_{2n}$ 중에서 $y \leq x$인 영역에 포함되는 것은 정확히 4개이다.