

## 제 24회 한국수학올림피아드 최종시험

2011년 3월 27일 - 제 2 일

4. 음이 아닌 실수  $a, b, c$ 가  $a + b + c = 1$ 을 만족할 때,

$$\frac{1}{a^2 - 4a + 9} + \frac{1}{b^2 - 4b + 9} + \frac{1}{c^2 - 4c + 9}$$

의 최댓값을 구하여라.

5. 조건  $AC < AB < BC$ 를 만족하는 삼각형  $ABC$ 에 대하여  $AC = AD$ 가 되는 변  $AB$  위의 점을  $D$ 라 하자. 삼각형  $ABC$ 의 외접원이 각  $A$ 의 이등분선과 만나는 점을  $E$  ( $\neq A$ ) 라 하고, 삼각형  $ABC$ 의 외접원이  $CD$ 와 만나는 점을  $F$  ( $\neq C$ )라 하자.  $BC$ 와  $DE$ 의 교점을  $K$ 라 할 때,  $DK \cdot EF = AC \cdot DF$ 일 필요충분조건은  $CK = AC$ 임을 보여라.

6. 가로로  $m$ 칸, 세로로  $n$ 칸, 총  $mn$ 칸이 있는 직사각형 모양의 바둑판을 생각하자. 바둑판의 각 칸에 정수를 하나씩 써넣는다. 하나 이상의 칸으로 이루어진 직사각형  $R$ 에 대하여 다음 두 조건을 만족하는 정수  $h$ 가 존재하면,  $R$ 을 ‘선반’이라 하자. (단, 직사각형  $R$ 의 내부에 빠진 칸은 없다.)

1. 직사각형  $R$ 에 속한 모든 칸에 적힌 수는  $h$ 보다 크다.
2. 직사각형  $R$ 의 외부의 칸 중에서,  $R$ 에 속한 칸과 꼭지점이나 변을 공유하는 모든 칸에 적힌 수는  $h$  이하이다.

선반의 개수가 최대가 되도록 정수를 써넣는다면, 그때 선반의 개수는 모두 몇 개인가?

\* 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점 \*