2018학년도 7월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

수학 영역

가형 정답

1	⑤	2	②	3	④	4	②	5	①
6	③	7	⑤	8	④	9	①	10	①
11	④	12	③	13	⑤	14	②	15	①
16	⑤	17	④	18	③	19	③	20	①
21	②	22	4	23	6	24	24	25	15
26	100	27	26	28	8	29	486	30	125

가형 해설

1. [출제의도] 평면벡터의 성분의 합 계산하기

$2\vec{a}-\vec{b}=2(4,\ 5)-(-3,\ 2)=(11,\ 8)$

따라서 모든 성분의 합은 $11+8=19$

2. [출제의도] 지수함수의 극한 계산하기

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}=\frac{3}{2}\times\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}=\frac{3}{2}$

3. [출제의도] 좌표공간에서 선분의 내분점의 좌표 계산하기

선분 OA 를 $1:2$ 로 내분하는 점 P 의 좌표는

$\left(\frac{1\times 6+2\times 0}{1+2},\ \frac{1\times 3+2\times 0}{1+2},\ \frac{1\times 9+2\times 0}{1+2}\right)$

이므로 $(2,\ 1,\ 3)$

따라서 $a+b+c=6$

4. [출제의도] 사건의 독립 이해하기

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

5. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기

함수 $f(x)=x\ln x$ 에서 $f'(x)=\ln x+1$ 이므로

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=1$

6. [출제의도] 원순열을 활용하여 확률 문제해결하기

A, B 를 포함한 6명이 원형의 탁자에 일정한 간격을 두고 앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

A, B 가 이웃하여 6명이 원형의 탁자에 일정한 간격을 두고 앉는 경우의 수는

$2!\times(5-1)!=2!\times 4!=48$

따라서 구하는 확률은 $\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$

7. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법 이해하기

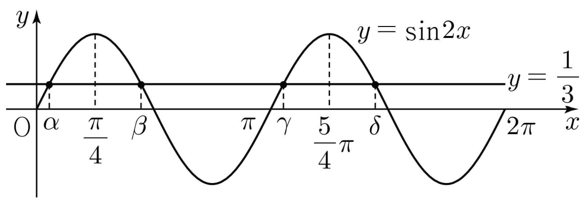
$\frac{dx}{dt}=2e^{2t-6}$, $\frac{dy}{dt}=2t-1$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-1}{2e^{2t-6}}$

따라서 $t=3$ 일 때, $\frac{dy}{dx}=\frac{5}{2e^0}=\frac{5}{2}$

8. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$0\le x\le 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin 2x=\frac{1}{3}$ 을 만족시키는 해는 두 함수 $y=\sin 2x$, $y=\frac{1}{3}$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.



네 교점의 x 좌표 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$에 대하여

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4}$ 이고 $\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{5}{4}\pi$ 이므로

방정식의 모든 해의 합은

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=3\pi$

9. [출제의도] 분수함수의 정적분 이해하기

$$\int_3^6\frac{2}{x^2-2x}dx=\int_3^6\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\Big[\ln|x-2|-\ln|x|\Big]_3^6$$
$$=\ln 2$$

10. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제해결하기

역사 동아리 학생 중 임의로 선택한 1명이 박물관 A 를 선택한 학생인 사건을 X, 1학년 학생인 사건을 Y라 하면

$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{9}{32}}{\frac{24}{32}}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$

11. [출제의도] 조합을 활용하여 문제해결하기

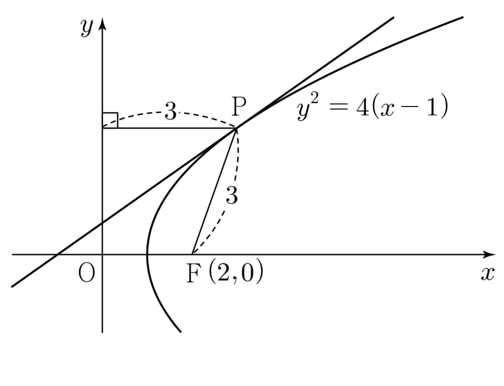
남학생 4명을 세 개의 모둠으로 나누는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1\times\frac{1}{2!}=6$

모든 모둠에 남학생과 여학생이 각각 1명 이상 포함되도록 세 개의 모둠으로 나누는 경우의 수는

$6\times 3!=36$

12. [출제의도] 포물선의 정의와 음함수의 미분법 이해하기



포물선 $y^2=4(x-1)$ 의 초점은 $\mathrm{F}(2,\ 0)$, 준선은 $x=0$ 이다.

$\overline{\mathrm{PF}}=3$ 이므로 점 P 에서 준선 $x=0$ 에 내린 수선의 발까지의 거리는 3

점 P 의 좌표는 $(3,\ 2\sqrt{2})$

$y^2=4(x-1)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$2y\frac{dy}{dx}=4$ 이므로

$x=3$, $y=2\sqrt{2}$ 를 대입하면

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 점 P 에서의 접선의 기울기는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

13. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

곡선 $y=e^x$ 과 접선 l 이 만나는 접점의 x 좌표를 t 라 하면 점 $(t,\ e^t)$ 에서의 접선의 기울기는 e^t 이므로 접선 l 의 방정식은

$y=e^t(x-t)+e^t$

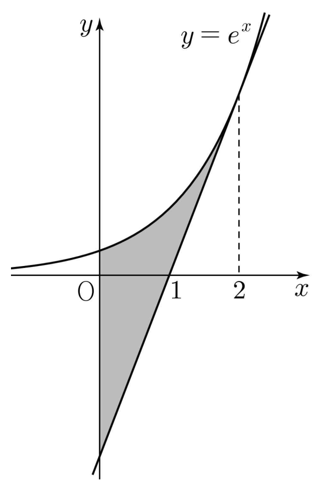
접선 l 이 점 $(1,\ 0)$ 을 지나므로

$e^t(1-t)+e^t=0$

$(2-t)e^t=0$

$t=2$

곡선 $y=e^x$ 과 y 축 및 직선 l 으로 둘러싸인 부분은 다음 그림의 색칠된 부분과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^2\{e^x-(e^2x-e^2)\}dx$$
$$=\int_0^2(e^x-e^2x+e^2)dx$$
$$=\left[e^x-\frac{e^2}{2}x^2+e^2x\right]_0^2=e^2-1$$

14. [출제의도] 역함수 미분법 이해하기

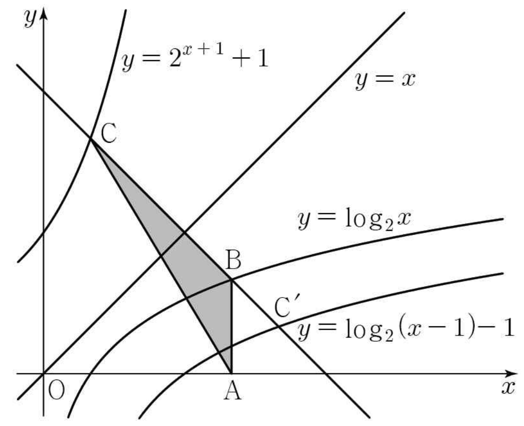
$f(1)=0$ 이므로 $g(0)=1$

$f'(x)=\frac{2x\times x-(x^2-1)}{x^2}=\frac{x^2+1}{x^2}$

$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$ 이므로

$g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2}$

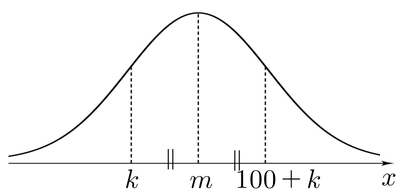
15. [출제의도] 지수함수와 로그함수 이해하기



점 A$(4,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점은 B$(4,\ 2)$이다.
점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x+1}+1$과 만나는 점을 C$(a,\ b)$라 하자.
점 C를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 C$'(b,\ a)$는 곡선 $y=\log_2(x-1)-1$ 위에 있다.
점 C$'$을 x축 방향으로 -1만큼, y축 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점 $(b-1,\ a+1)$은 B이다.
$a+1=2$, $b-1=4$이므로
$a=1$, $b=5$
따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\times 3=3$

16. [출제의도] 표준정규분포를 활용하여 문제해결하기

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 8^2)$을 따른다.
조건 (가)를 만족시키는 정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.



$m-k=(100+k)-m$, $k=m-50$

$\mathrm{P}(X\geq 2k)=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{m-100}{8}\right)=0.0668$

$0.5-\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{m-100}{8}\right)$

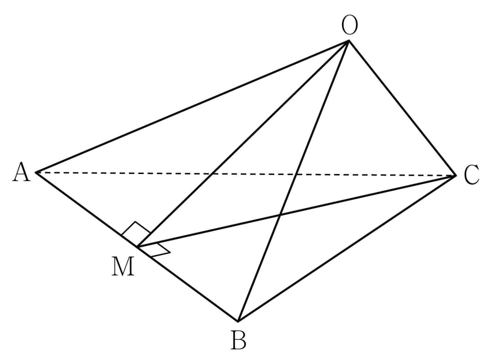
$=\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{m-100}{8}\right)=0.4332$

$\frac{m-100}{8}=1.5$

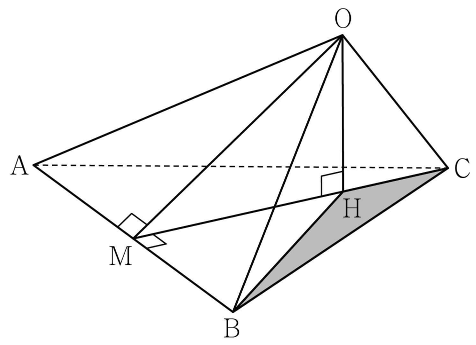
따라서 $m=112$

17. [출제의도] 정사영 이해하기

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하자.



$\overline{\mathrm{OC}}\perp$(평면 OAB), $\overline{\mathrm{CM}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이므로
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{OM}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이고
$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$이다.
$\overline{\mathrm{MC}}=3\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{OM}}=3\sqrt{2}$
점 O에서 선분 MC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{OH}}\perp$(평면 ABC)이므로 점 O의 평면 ABC 위로의 정사영은 점 H이다.



$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OM}}\times\overline{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{MC}}\times\overline{\mathrm{OH}}$이므로
$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{6}$, $\overline{\mathrm{HC}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{MH}}=2\sqrt{3}$
삼각형 OBC의 평면 ABC 위로의 정사영은 삼각형 HBC이고 점 H는 선분 CM을 $1:2$로 내분한다.

($\triangle$HBC의 넓이)$=\frac{1}{6}\times$($\triangle$ABC의 넓이)

따라서 정사영의 넓이는 $\frac{1}{6}\times 9\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

18. [출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정 추론하기

공에 번호를 부여하는 모든 경우의 수를 N이라 하면 N은 서로 같은 흰 공 4개와 서로 같은 검은 공 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$N=\boxed{35}$이고, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이다.

(ⅰ) $X=2$일 때,
번호 2가 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개, 번호 2가 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2개와 검은 공 3개를 나열하는 경우의 수는
$1\times\frac{5!}{2!\times 3!}$이므로
$\mathrm{P}(X=2)=\frac{10}{N}$

(ⅱ) $X=3$일 때,
번호 3이 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개와 검은 공 1개, 번호 3이 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2개와 검은 공 2개를 나열하는 경우의 수는 $2!\times\frac{4!}{2!\times 2!}$이므로
$\mathrm{P}(X=3)=\frac{12}{N}$

(ⅲ) $X=4$일 때,
번호 4가 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개와 검은 공 2개, 번호 4가 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2개와 검은 공 1개를 나열하는 경우의 수는 $\boxed{9}$이므로
$\mathrm{P}(X=4)=\boxed{\frac{9}{N}}$

(ⅳ) $X=5$일 때,
확률질량함수의 성질에 의하여
$\mathrm{P}(X=5)=1-\{\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)\}$

따라서 $\mathrm{E}(X)=\sum_{k=2}^{5}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}=\boxed{\frac{16}{5}}$

$a=\frac{7!}{4!\times 3!}=35$, $b=\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}=9$
확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{10}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$c=2\times\frac{10}{35}+3\times\frac{12}{35}+4\times\frac{9}{35}+5\times\frac{4}{35}=\frac{16}{5}$
따라서 $a+b+5c=60$

19. [출제의도] 미분을 활용하여 함수의 그래프 추론하기

ㄱ. $g'(x)=\frac{1}{\ln 3}\times\frac{4x^3}{x^4+2n}$이므로
$g'(f(1))=g'(0)=0$
$h'(1)=g'(f(1))f'(1)=0$ (참)

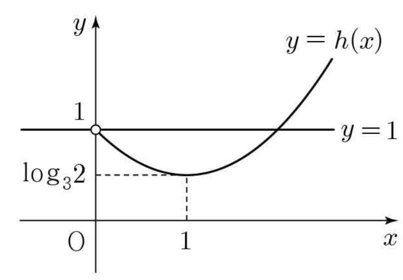
ㄴ. $h(x)=g(f(x))=\log_3\left[\{f(x)\}^4+2n\right]$

$h'(x)=\frac{1}{\ln 3}\times\frac{4\{f(x)\}^3f'(x)}{\{f(x)\}^4+2n}$

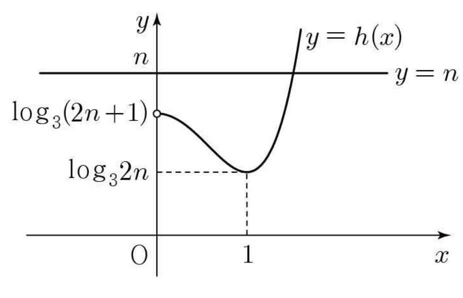
$=\frac{1}{\ln 3}\times\frac{4nx^{n-1}(x^n-1)^3}{(x^n-1)^4+2n}$

열린 구간 $(0,\ 1)$에서
$-1<x^n-1<0$이므로 $h'(x)<0$이다.
열린 구간 $(0,\ 1)$에서
함수 $h(x)$는 감소한다. (거짓)

ㄷ. $x>0$에서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $\log_3 2n$을 갖는다.
함수 $h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.
(ⅰ) $n=1$일 때,



(ⅱ) $n\geq 2$일 때,



(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 방정식 $h(x)=n$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

20. [출제의도] 여러 가지 함수의 정적분을 활용하여 문제해결하기

$u'(x)=x$, $v(x)=g(x)$라 하면

$u(x)=\frac{1}{2}x^2$, $v'(x)=g'(x)$

조건 (가)에 의하여 $g(1)=0$,

$g'(x)=\frac{f(x^2+1)}{x}$

$\int_1^2 xg(x)dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 g(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 g'(x)dx$

$= 2g(2) - \frac{1}{2}g(1) - \int_1^2 \left\{\frac{1}{2}x^2 \times \frac{f(x^2+1)}{x}\right\}dx$

$= 2\times3 - \frac{1}{2}\times0 - \frac{1}{2}\int_1^2 xf(x^2+1)dx$

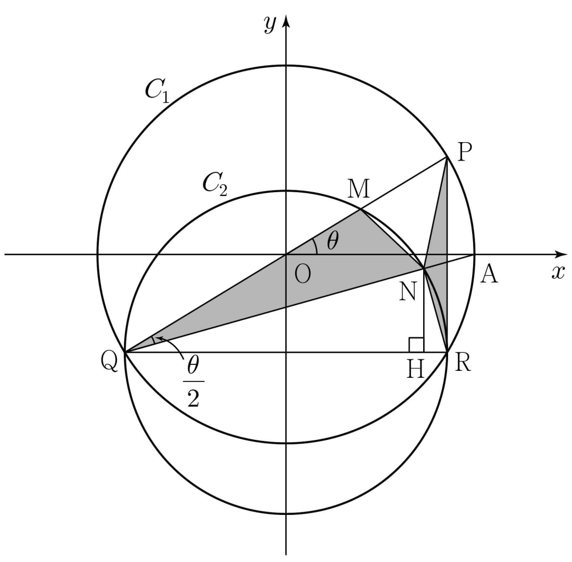
$x^2+1=t$ 라 하자.

$\int_1^2 xg(x)dx$

$= 6 - \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{1}{2}f(t)dt$

$= 6 - \frac{1}{4}\times16 = 2$

21. [출제의도] 삼각함수의 극한값 추론하기



원 C_1 위의 점 P 에 대하여 $\overset{\frown}{\mathrm{PA}} = \overset{\frown}{\mathrm{AR}}$ 이므로

$\angle\mathrm{PQA} = \angle\mathrm{AQR} = \frac{\theta}{2}$

$\angle\mathrm{PRQ} = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{PR}} = 2\sin\theta$, $\overline{\mathrm{QR}} = 2\cos\theta$

$\angle\mathrm{QMR} = \angle\mathrm{QNR} = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{QM}} = 2\cos\theta\cos\theta$, $\overline{\mathrm{QN}} = 2\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}$

$S(\theta) = \frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QM}}\times\overline{\mathrm{QN}}\times\sin\frac{\theta}{2}$

$= \frac{1}{2}\times2\cos^2\theta\times2\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\times\sin\frac{\theta}{2}$

$= 2\cos^3\theta\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

점 N 에서 선분 QR 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $T(\theta) = \frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PR}}\times\overline{\mathrm{HR}}$

$\overline{\mathrm{HR}} = \overline{\mathrm{QR}} - \overline{\mathrm{QH}} = 2\cos\theta - \overline{\mathrm{QN}}\cos\frac{\theta}{2}$

$= 2\cos\theta - 2\cos\theta\cos^2\frac{\theta}{2}$

$= 2\cos\theta\left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$

$= 2\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}$

$T(\theta) = \frac{1}{2}\times2\sin\theta\times2\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}$

$= 2\sin\theta\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}$

$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\times S(\theta)}{T(\theta)}$

$= \lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\times2\cos^3\theta\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\theta\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$= \lim_{\theta\to0+}\left(\cos^2\theta\cos\frac{\theta}{2}\right)\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2}{\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}$

$= 1\times\lim_{\theta\to0+}\left(2\times\frac{\theta}{\sin\theta}\times\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$

$= 2$

22. [출제의도] 자연수의 분할 계산하기

자연수 7 을 3 개의 자연수로 분할하는 경우는

$7 = 1+1+5$
$\quad = 1+2+4$
$\quad = 1+3+3$
$\quad = 2+2+3$

따라서 경우의 수는 4

23. [출제의도] 지수부등식 계산하기

$(2^x)^2 - 10\times2^x + 16 \le 0$

$(2^x-2)(2^x-8) \le 0$

$2 \le 2^x \le 8$

$1 \le x \le 3$

만족시키는 자연수는 1, 2, 3 이다.

$1+2+3=6$

24. [출제의도] 벡터의 내적 이해하기

$\vec{a}+\vec{b} = \left(4t,\ \frac{3}{t}\right)$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = 16t^2 + \frac{9}{t^2}$ 이고 $t^2>0$ 이므로

절대부등식의 성질에 의하여

$16t^2 + \frac{9}{t^2} \ge 2\sqrt{16t^2\times\frac{9}{t^2}} = 24$

따라서 $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때, $|\vec{a}+\vec{b}|^2$ 의 최솟값은 24

25. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리 이해하기

$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{7}{8}$

$\frac{\tan\alpha - 1}{1+\tan\alpha} = \frac{7}{8}$

$8(\tan\alpha - 1) = 7(1+\tan\alpha)$

$\tan\alpha = 15$

26. [출제의도] 중복조합 이해하기

9 이하의 음이 아닌 정수 a, b, c, d 에 대하여 네 자리 이하의 자연수를 $a\times10^3 + b\times10^2 + c\times10 + d$ 라 하자.

3000 보다 작은 네 자리 자연수 중 각 자리의 수의 합이 10 이므로

$1 \le a \le 2$ 이고 $a+b+c+d = 10$

(i) $a=1$ 인 경우

$b+c+d=9$ 를 만족시키는 음이 아닌 세 정수 b, c, d 의 순서쌍 $(b,\ c,\ d)$ 의 개수는

${}_3\mathrm{H}_9 = {}_{11}\mathrm{C}_9 = 55$

(ii) $a=2$ 인 경우

$b+c+d=8$ 을 만족시키는 음이 아닌 세 정수 b, c, d 의 순서쌍 $(b,\ c,\ d)$ 의 개수는

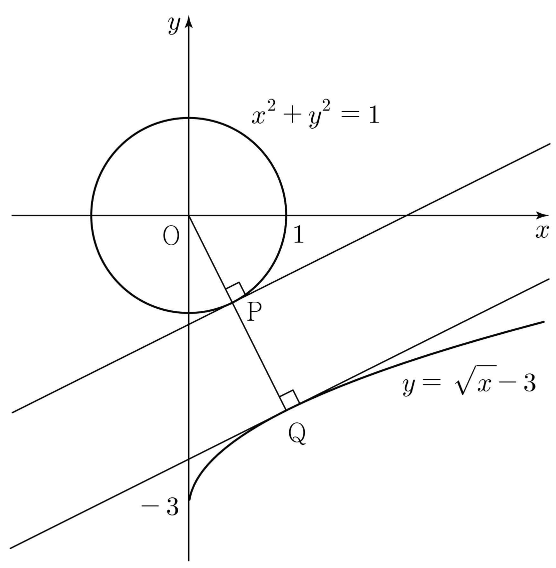
${}_3\mathrm{H}_8 = {}_{10}\mathrm{C}_8 = 45$

(i), (ii)에 의하여 경우의 수는 100

27. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

곡선 $y=\sqrt{x}-3$ 위의 임의의 점 Q 의 좌표를 $(t,\ \sqrt{t}-3)$ $(t\ge0)$이라 하고, 원점을 O 라 하자.

선분 PQ 의 길이가 최소가 되려면 점 Q 에 대하여 선분 OQ 와 원 $x^2+y^2=1$ 이 만나는 점이 P 이고, 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P 에서의 접선의 기울기와 곡선 $y=\sqrt{x}-3$ 위의 점 Q 에서의 접선의 기울기가 같아야 한다.



곡선 $y=\sqrt{x}-3$ 위의 점 $\mathrm{Q}(t,\ \sqrt{t}-3)$ $(t>0)$ 에서의 접선과 직선 OQ 는 수직이다.

$\frac{1}{2\sqrt{t}}\times\frac{\sqrt{t}-3}{t} = -1$

$2(\sqrt{t})^3 + \sqrt{t} - 3 = 0$

$(\sqrt{t}-1)(2t+2\sqrt{t}+3) = 0$

$t=1$ 이므로 $\mathrm{Q}(1,\ -2)$ 이다.

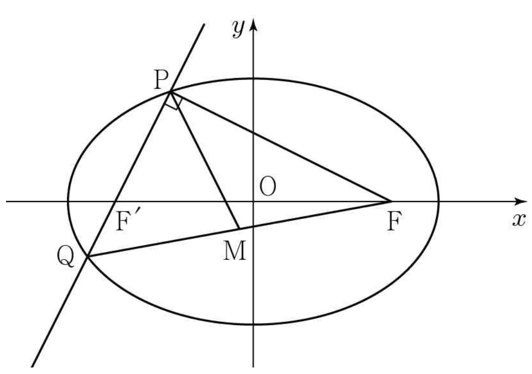
$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{OQ}} - 1$

$= \sqrt{5} - 1$

$a=5$, $b=1$ 이므로 $a^2+b^2=26$

28. [출제의도] 타원의 정의를 활용하여 문제해결하기

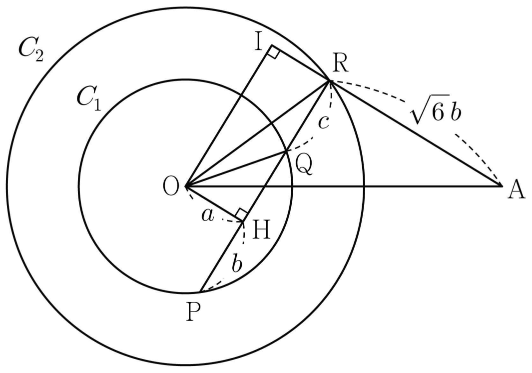
$\overline{\mathrm{QM}} = \overline{\mathrm{FM}} = \overline{\mathrm{PM}} = 5$ 이므로 세 점 P, Q, F 는 중심이 M 이고 반지름의 길이가 5 인 원 위의 점이다.



삼각형 PQF 는 직각삼각형이므로

$6^2+\overline{\mathrm{PF}}^2=10^2$
$\overline{\mathrm{PF}}=8$
$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a$, $\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF'}}=2a$ 이므로
$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF'}}=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF}}=24=4a$
$a=6$
$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=12$ 이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}=4$
삼각형 PF′F 는 직각삼각형이므로
$4^2+8^2=\overline{\mathrm{FF'}}^2$
$\overline{\mathrm{FF'}}=4\sqrt{5}$ 이므로 $c=2\sqrt{5}$
$c^2=a^2-b^2$ 이므로 $b^2=16$, $b=4$
따라서 이 타원의 단축의 길이는 8

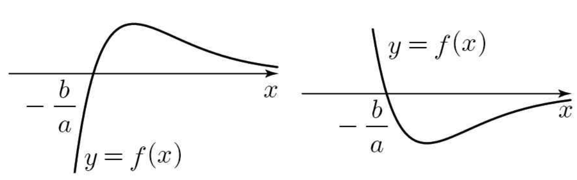
29. [출제의도] 평면벡터의 내적을 활용하여 문제 해결하기
조건 (가)에 의하여 세 점 P, Q, R 는 한 직선 위에 있고, 조건 (나)에 의하여 직선 AR 와 직선 PQ 는 수직이므로 $\overline{\mathrm{AR}}\perp\overline{\mathrm{PR}}$ 이다. 점 O 에서 선분 PQ 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.



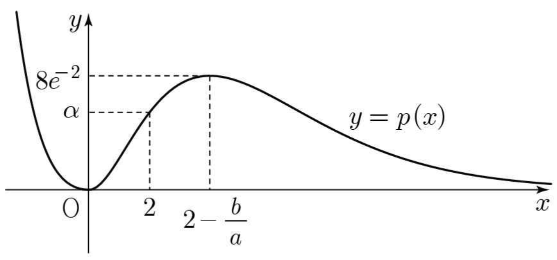
$\overline{\mathrm{OH}}=a$, $\overline{\mathrm{HP}}=\overline{\mathrm{HQ}}=b$, $\overline{\mathrm{QR}}=c$ 라 하면
$\overline{\mathrm{AR}}=\sqrt{6}b$
삼각형 OHQ 는 직각삼각형이므로
$a^2+b^2=5$ …… ㉠
삼각형 OHR 는 직각삼각형이므로
$a^2+(b+c)^2=14$ …… ㉡
점 O 에서 선분 AR 의 연장선에 내린 수선의 발을 I 라 하면
$\overline{\mathrm{OI}}=\overline{\mathrm{HR}}=b+c$, $\overline{\mathrm{IA}}=a+\sqrt{6}b$ 이므로
삼각형 AIO 에서
$(a+\sqrt{6}b)^2+(b+c)^2=44$ …… ㉢
㉡과 ㉢에서
$2\sqrt{6}ab+6b^2=30$ …… ㉣
㉠과 ㉣에서
$6a^2-2\sqrt{6}ab=0$
$a=0$ 또는 $a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}b$
세 점 O, P, Q 가 한 직선 위에 있지 않으므로
$a\neq 0$ 이고 $a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}b$
$a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}$
$\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{AR}}=3\sqrt{2}$ 이고 원 C_1 위의 점 S에 대하여
$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}\bullet(\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}})$
$=\overrightarrow{\mathrm{AR}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{OS}}$
$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AO}}=|\overrightarrow{\mathrm{AR}}||\overrightarrow{\mathrm{AI}}|=3\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=24$
$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하자.
$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{OS}}=|\overrightarrow{\mathrm{AR}}||\overrightarrow{\mathrm{OS}}|\cos\theta$
$=3\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\cos\theta$ 이므로
$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ 는 $\cos\theta=1$ 일 때 최댓값을 갖고
$\cos\theta=-1$ 일 때 최솟값을 가지므로
$-3\sqrt{10}\le\overrightarrow{\mathrm{AR}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{OS}}\le3\sqrt{10}$
$24-3\sqrt{10}\le\overrightarrow{\mathrm{AR}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AS}}\le24+3\sqrt{10}$
$M=24+3\sqrt{10}$, $m=24-3\sqrt{10}$
$Mm=(24+3\sqrt{10})\times(24-3\sqrt{10})=486$

30. [출제의도] 정적분으로 나타내어진 함수 추론하기
함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

(i) $a>0$ (ii) $a<0$



$g(x)=\int_0^x f(t)dt$ 에서 $g(0)=0$, $g'(x)=f(x)$
조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$ 는 $x=-\dfrac{b}{a}$ 에서 극댓값 α 를 가지므로 $a<0$ 이고 $b>0$ 이다.
$g(x)-k\ge xf(x)$ 에서 $g(x)-xf(x)\ge k$ 이므로
$p(x)=g(x)-xf(x)$ 라 하면
$p'(x)=g'(x)-f(x)-xf'(x)=-xf'(x)$
$f'(x)=-\dfrac{1}{2}a\left(x-2+\dfrac{b}{a}\right)e^{-\frac{x}{2}}$
$p'(x)=\dfrac{1}{2}ax\left(x-2+\dfrac{b}{a}\right)e^{-\frac{x}{2}}$
조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 $p(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g\left(-\dfrac{b}{a}\right)=\alpha$, $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)=0$ 에 의하여
$p\left(-\dfrac{b}{a}\right)=g\left(-\dfrac{b}{a}\right)-\left(-\dfrac{b}{a}\right)f\left(-\dfrac{b}{a}\right)=\alpha$
$2=-\dfrac{b}{a}$
$p(x)=g(x)-xf(x)\ge k$ 에서 양수 x 의 범위에서 함수 $p(x)$ 의 최댓값은 $h(k)$ 의 값이 존재하는 k 의 최댓값이므로 $p(4)=8e^{-2}$

$$g(4)=\int_0^4 a(t-2)e^{-\frac{t}{2}}dt$$
$$=\left[a(t-2)\left(-2e^{-\frac{t}{2}}\right)\right]_0^4-\int_0^4\left(-2ae^{-\frac{t}{2}}\right)dt$$
$$=-4ae^{-2}-4a-\left[4ae^{-\frac{t}{2}}\right]_0^4$$
$$=-4ae^{-2}-4a-4ae^{-2}+4a$$
$$=-8ae^{-2}$$
$$p(4)=g(4)-4f(4)$$
$$=-8ae^{-2}-4\times2ae^{-2}$$
$$=-16ae^{-2}$$
$-16ae^{-2}=8e^{-2}$ 이므로 $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=1$

따라서 $100(a^2+b^2)=125$