

2023년 3월 25일 ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

1. 예각삼각형 ABC ($\overline{AB} < \overline{AC}$)의 변 AB 위에 점 $D (\neq A, B)$ 가 있고, 변 AC 위에 점 $E (\neq A, C)$ 가 있다. 점 P 는 $\overline{PB} = \overline{PD}$, $\overline{PC} = \overline{PE}$ 를 만족하는 점이다. 삼각형 ABC 의 외접원의 호 AC 중 점 B 를 포함하지 않는 호 위에 점 $X (\neq A, C)$ 를 잡자. 삼각형 ADE 의 외접원과 직선 XA 가 점 $Y (\neq A)$ 에서 만날 때, $\overline{PX} = \overline{PY}$ 임을 보여라.

2. 함수 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 는 다음 조건을 만족한다.

(조건) 각각의 양의 실수 x 에 대하여 $(x + f(y))(y + f(x)) \leq 4$ 를 만족하는 양의 실수 y 가 존재하며, 이러한 y 의 개수는 유한하다.

임의의 양의 실수 x, y 에 대하여 $x < y$ 이면 $f(x) > f(y)$ 임을 증명하여라. (단, \mathbb{R}^+ 는 양의 실수 전체의 집합)

3. 홀수인 소수 p 가 주어져 있다. 양의 정수 n 에 대하여 $A(n)$ 을 집합 $\{1, 2, \dots, n\}$ 의 부분 집합 중 원소의 합이 p 의 배수인 것의 개수라고 하자. $2^{p-1} - 1$ 이 p^2 의 배수가 아닐 때, 각각의 정수 k 에 대하여 다음 조건을 만족하는 양의 정수 m 이 무한히 많이 존재함을 증명하여라. (단, 공집합의 원소의 합은 0이다.)

(조건) $\frac{A(m) - k}{p}$ 는 정수이다.