

2017학년도 7월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

수학 가형 정답

1	⑤	2	④	3	②	4	③	5	②
6	①	7	⑤	8	④	9	③	10	②
11	①	12	④	13	⑤	14	③	15	①
16	①	17	③	18	②	19	⑤	20	④
21	①	22	7	23	5	24	13	25	4
26	150	27	12	28	32	29	128	30	71

수학 영역

가형 해설

1. [출제의도] 벡터의 성분의 합 계산하기

$$\vec{2a} + \vec{b} = 2(2, 3) + (-1, 5) = (3, 11)$$

따라서 모든 성분의 합은 $3 + 11 = 14$

2. [출제의도] 삼각함수의 값 계산하기

$$\sin \frac{7}{6}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

3. [출제의도] 좌표공간에서 선분의 길이 계산하기

$$AB = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{19}$$

4. [출제의도] 사건의 독립 이해하기

두 사건 A , B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times P(B) = \frac{1}{6}$$

$$\text{따라서 } P(B) = \frac{1}{3}$$

5. [출제의도] 여러 가지 함수의 정적분 이해하기

$$\int_0^4 (5x - 3)\sqrt{x} dx = \int_0^4 \left(5x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}\right) dx \\ = \left[2x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = 48$$

6. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$ 가 $x = 0$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{ax} - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{ax} - 1}{ax} \times \frac{a}{3} = \frac{a}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 3x + 2) = 2$$

$$\text{따라서 } a = 6$$

7. [출제의도] 쌍곡선의 정의 이해하기

$$13 = 7^2 - a^2 \text{ 이므로 } a = 6$$

$$\text{따라서 } |\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2a = 2 \times 6 = 12$$

8. [출제의도] 중복순열 이해하기

세 자리 자연수가 홀수이려면 일의 자리의 숫자는 홀수이어야 한다.

일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1$
백의 자리와 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의

수는 ${}_5II_2$

따라서 세 자리 자연수가 홀수인 경우의 수는
 ${}_3C_1 \times {}_5II_2 = 3 \times 5^2 = 75$

9. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분 이해하기

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 - \frac{1}{t^2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - \frac{1}{t^2}}{1 + \frac{1}{2\sqrt{t}}}$$

$$\text{따라서 } t = 1 \text{ 일 때, } \frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}$$

10. [출제의도] 독립시행의 확률 이해하기

앞면이 나오는 횟수를 a ,

뒷면이 나오는 횟수를 b 라 하면

$$\begin{cases} a+b=7 & \dots \textcircled{1} \\ a-b=3 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

\textcircled{1}, \textcircled{2}에 의하여 $a=5$, $b=2$

$$\text{따라서 } {}_7C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = {}_7C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{21}{128}$$

11. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$(\sin x + \cos x)^2 = \sqrt{3} \sin x + 1$ 에서

$$1 + 2\sin x \cos x = \sqrt{3} \sin x + 1$$

$$\sin x(2\cos x - \sqrt{3}) = 0$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{ 이므로}$$

$$\sin x = 0 \text{ 일 때, } x = 0 \text{ 또는 } x = \pi$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 일 때, } x = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{따라서 모든 실근의 합은 } 0 + \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$$

12. [출제의도] 정규분포를 활용하여 문제해결하기

문제해결하기
이 양계장에서 생산하는 계란 1 개의 무게를 확률변수 X 라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(52, 8^2)$ 을 따른다.

$$Z = \frac{X - 52}{8} \text{ 라 하면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

$$N(0, 1) \text{ 을 따르므로}$$

$$P(60 \leq X \leq 68)$$

$$= P\left(\frac{60 - 52}{8} \leq Z \leq \frac{68 - 52}{8}\right)$$

$$= P(1 \leq Z \leq 2)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

13. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 문제해결하기

이 고등학교의 전체 학생 중

임의로 선택한 한 학생이 여학생일 사건을 A ,

생활복 도입에 찬성한 학생일 사건을 B 라 하면

$$P(A^C \cap B) = P(B)P(A^C | B)$$

$$= 0.8 \times 0.7 = 0.56$$

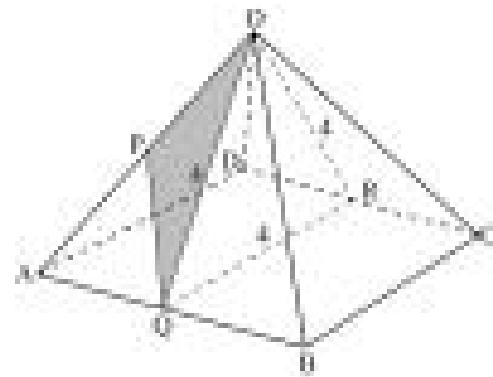
$$P(A \cap B) = P(B) - P(A^C \cap B)$$

$$= 0.8 - 0.56 = 0.24$$

$$\text{따라서 } P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.24}{0.4} = \frac{3}{5}$$

14. [출제의도] 정사영 이해하기

선분 CD 의 중점을 R 라 하자.



두 평면 OAB , OCD 가 이루는 예각 θ 는 $\theta = \angle QOR$ 이다.

$$OQ = OR = QR = 4 \text{ 이므로}$$

삼각형 QOR 은 정삼각형이다.

$$\text{그러므로 } \cos \theta = \frac{1}{2}$$

점 P 는 선분 OA 의 중점이므로
삼각형 OPQ 의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times (\text{삼각형 } OAQ \text{의 넓이}) = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

삼각형 OPQ 의 평면 OCD 위로의 정사영의 넓이를 S' 라 하면

$$S' = S \cos \theta = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

15. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

직선 $x = t$ ($1 \leq t \leq 2$) 를 포함하고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(3t + \frac{2}{t}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(9t^2 + 12 + \frac{4}{t^2}\right)$$

따라서 구하는 부피 V 는

$$V = \int_1^2 S(t) dt = \int_1^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(9t^2 + 12 + \frac{4}{t^2}\right) dt \\ = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[3t^3 + 12t - \frac{4}{t}\right]_1^2 = \frac{35\sqrt{3}}{4}$$

16. [출제의도] 역함수의 미분법 이해하기

$g(x)$ 가 함수 $f(x)$ 의 역함수이므로

$$g(1) = t \text{ 라 하면 } f(t) = 1$$

$$\tan^3 t = 1 \text{ 에서 } \tan t = 1$$

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \text{ 에서 } t = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{그러므로 } g(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(x) = 3\tan^2 x \sec^2 x$$

따라서 점 $(1, g(1))$ 에서의 접선의 기울기는

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{6}$$

17. [출제의도] 미분법을 활용하여 함수의 성질 이해하기

함수 $f(x)$ 가 열린 구간 $(0, \infty)$ 에서 증가해야

하므로 $f'(x) = x - 3 + \frac{k}{x^2} \geq 0$
 $x^2 > 0$ 이므로 양변에 x^2 을 곱하면
 $k \geq -x^3 + 3x^2$
 함수 $g(x) = -x^3 + 3x^2$ 이라 하면
 열린 구간 $(0, \infty)$ 에서 함수 $g(x)$ 는 $x = 2$ 에서
 극대이면서 최대이므로 최댓값은 4 이다.
 따라서 $k \geq 4$ 이므로 만족시키는 k 의 최솟값은 4

18. [출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정 추론하기

세 수 x_1, x_2, x_3 을 순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 과 같이 나타내자.
 x_1, x_2, x_3 중에서 최댓값을 p , 최솟값을 q , 나머지 수를 r , $p - q = k$ ($k = 0, 1, \dots, 5$) 라 하면 순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 의 개수는 p, q, r 를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다.

(1) $k = 0$ 일 때
 세 수가 모두 같으므로

순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 의 개수는 $\boxed{6}$ 이고,

$$P(X=0) = \frac{1}{6^3} \times \boxed{6}$$

(2) $k \neq 0$ 일 때 ($1 \leq k \leq 5$)

순서쌍 (p, q) 의 개수는 각각의 k 에 대하여 $6 - k$ 이고

i) $k = 1$ 일 때

순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 의 개수는

$$5 \times \left(\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} \right)$$

ii) $2 \leq k \leq 5$ 일 때

① $r = p$ 또는 $r = q$ 인 경우

p, p, q 와 p, q, q 를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!}$

② $r \neq p$ 이고 $r \neq q$ 인 경우

r 의 개수는 각각의 k 에 대하여 $k - 1$ 이고

p, r, q 를 일렬로 나열하는 방법의 수는 ${}_3P_3 = 3!$ 이므로 $(k - 1) \times 3!$

①, ②에 의하여

순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 의 개수는

$$(6 - k) \times \left\{ \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + (k - 1) \times 3! \right\}$$

그러므로 $1 \leq k \leq 5$ 일 때,

순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 의 개수는

$$(6 - k) \times \left\{ \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + (\boxed{k-1}) \times 3! \right\}$$

(예를 들어)

$k = 3$ 인 경우

(p, r, q) 는 $(4, r, 1), (5, r, 2), (6, r, 3)$ 이므로 개수는 3

(p, r, q) 가 $(4, r, 1)$ 일 때

① $r = 4$ 또는 $r = 1$ 인 경우

4, 4, 1 과 4, 1, 1 을 일렬로 나열하는

방법의 수는 $\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!}$

② $r \neq 4$ 이고 $r \neq 1$ 인 경우

r 는 3 또는 2 이므로 r 의 개수는 2

p, r, q 를 일렬로 나열하는 방법의 수는

${}_3P_3 = 3!$ 이므로 $2 \times 3!$

①, ②에 의하여

4, r, 1 을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 2 \times 3!$
 $(5, r, 2), (6, r, 3)$ 일 때에도 같은 방법으로
 구하면 각각 $\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 2 \times 3!$
 그러므로 $k = 3$ 인 경우
 순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 의 개수는
 $3 \times \left(\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 2 \times 3! \right)$

그러므로

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \frac{1}{6^3} \times (6-k) \times \left\{ \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + ((\boxed{k-1}) \times 3!) \right\} \\ (1), (2)에 의하여 확률변수 X의 평균 E(X)는 다음과 같다. \\ E(X) &= \sum_{k=0}^5 \{k \times P(X=k)\} \\ &= \frac{1}{6^2} \sum_{k=1}^5 ([6k^2 - k^3]) = \frac{35}{12} \end{aligned}$$

$$a = 6, f(k) = k - 1, g(k) = 6k^2 - k^3$$

따라서 $\frac{f(5) \times g(3)}{a} = \frac{4 \times 27}{6} = 18$

19. [출제의도] 평면운동의 성질 추론하기

점 P 의 속도 \vec{v} 는 $\vec{v} = (1 - 2\sin t, \sqrt{3} \cos t)$

ㄱ. $t = \frac{\pi}{2}$ 일 때, 점 P 의 속도는 $(-1, 0)$ 이다.(참)

ㄴ. 속도의 크기 $|\vec{v}|$ 는

$$|\vec{v}| = \sqrt{\sin^2 t - 4\sin t + 4} = \sqrt{(\sin t - 2)^2} = |\sin t - 2| = 2 - \sin t$$

$t = \frac{\pi}{2}$ 일 때, $|\vec{v}|$ 의 최솟값은 1 이다.(참)

ㄷ. 점 P 가 $t = \pi$ 에서 $t = 2\pi$ 까지 움직인 거리는

$$\int_{\pi}^{2\pi} |\vec{v}| dt = \int_{\pi}^{2\pi} (2 - \sin t) dt = [2t + \cos t]_{\pi}^{2\pi} = 2\pi + 2 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. [출제의도] 정적분으로 나타내어진 함수 추론하기

$$g'(x) = \frac{x}{f(x)}, g'(-x) = -g'(x) \text{ 이므로}$$

$f(-x) = f(x)$ 이다.

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 이차함수이므로

$f(x) = x^2 + k$ (단, k 는 상수이다.)

점 $(1, g(1))$ 은 곡선 $y = g(x)$ 의 변곡점이므로

$$g''(x) = \frac{f(x) - xf'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

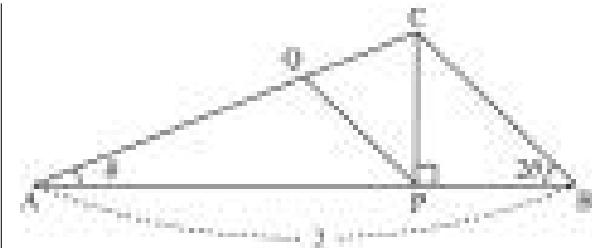
$$g''(1) = \frac{f(1) - f'(1)}{\{f(1)\}^2} = \frac{1+k-2}{(1+k)^2} = 0$$

$k = 1$ 이므로 $f(x) = x^2 + 1$

$$\text{따라서 } g(1) = \int_0^1 \frac{t}{t^2 + 1} dt$$

$$= \frac{1}{2} [\ln(t^2 + 1)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

21. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기



선분 AC 가 원의 지름이므로 $\angle APC = \frac{\pi}{2}$ 이다.

$\overline{AP} = a, \overline{AQ} = b$ 라 하자.

두 삼각형 APC 와 CPB 는 직각삼각형이므로

$$a \tan \theta = \overline{CP} = (2-a) \tan 2\theta$$

$$a = \frac{2 \tan 2\theta}{\tan \theta + \tan 2\theta}$$

삼각형 ABC 와 삼각형 APQ 는 닮음이므로
 $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$

$$a : 2 = b : a \sec \theta$$

$$b = \frac{1}{2} a^2 \sec \theta$$

삼각형 APQ 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때,

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times a \times \frac{1}{2} a^2 \sec \theta \times \sin \theta$$

$$= \frac{1}{4} \times a^3 \times \tan \theta$$

$$= \frac{1}{4} \times \left(\frac{2 \tan 2\theta}{\tan \theta + \tan 2\theta} \right)^3 \times \tan \theta$$

따라서

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{4} \times \left(\frac{\frac{2 \tan 2\theta}{\tan \theta + \tan 2\theta} \times 2}{\theta} \right)^3 \times \frac{\tan \theta}{\theta} \right\} = \frac{16}{27}$$

22. [출제의도] 지수방정식 계산하기

$$\left(\frac{1}{5} \right)^{5-x} = 5^{x-5} = 5^2$$

따라서 $x = 7$

23. [출제의도] 중복조합 계산하기

$${}_3H_n = {}_{n+2}C_n = {}_{n+2}C_2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \text{ 이므로}$$

$$n^2 + 3n - 40 = 0$$

$$(n-5)(n+8) = 0$$

n 이 자연수이므로 $n = 5$

24. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

접근선이 $x = 5$ 이므로 $a = 5$

$$f(11) = \log_6(11-5) + b = 9 \text{ 이므로 } b = 8$$

따라서 $a+b = 13$

25. [출제의도] 합성함수의 미분법 이해하기

두 함수 $f(x) = kx^2 - 2x, g(x) = e^{3x} + 1$ 에서

$$f'(x) = 2kx - 2, g'(x) = 3e^{3x}$$

$$f'(2) = 4k - 2, g(0) = 2, g'(0) = 3$$

함수 $h(x) = (f \circ g)(x)$ 에서

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$h'(0) = f'(g(0))g'(0) = f'(2) \times 3 = 42$$

따라서 $k = 4$

26. [출제의도] 집합의 분할을 활용하여 문제해결하기

서로 다른 종류의 인형 5개를 3개의 가방 A, B, C에 적어도 1개 이상 넣는 방법은 다음과 같다.

(i) 3개, 1개, 1개로 나누어 넣는 경우

$$\left({}_5C_3 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \right) \times 3! = 60$$

(ii) 2개, 2개, 1개로 나누어 넣는 경우

$$\left({}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \right) \times 3! = 90$$

따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $60 + 90 = 150$

27. [출제의도] 여러 가지 함수의 정적분을 활용하여 문제해결하기

$$\int_0^1 t f(t) dt = a \text{ 라 하면 } f(x) = e^x + a$$

$$a = \int_0^1 t(e^t + a) dt \text{ 에서}$$

$$u'(t) = e^t + a, v(t) = t \text{ 라 하면}$$

$$u(t) = e^t + at, v'(t) = 1 \text{ 이므로}$$

$$a = \int_0^1 t(e^t + a) dt$$

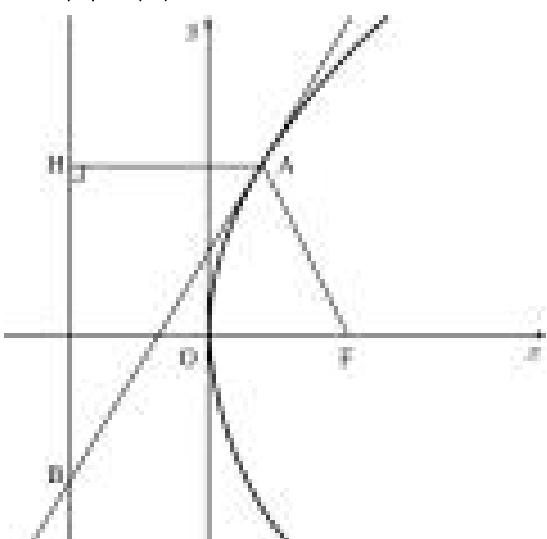
$$= [t(e^t + at)]_0^1 - \int_0^1 (e^t + at) dt$$

$$= e + a - \left[e^t + \frac{1}{2}at^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}a + 1$$

$$a = 2 \text{ 이므로 } f(x) = e^x + 2$$

$$\text{따라서 } f(\ln 10) = 12$$

28. [출제의도] 포물선의 정의를 활용하여 문제해결하기



점 A의 좌표를 (x_1, y_1) , 점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{AB} = 2\overline{AF}$, $\overline{AF} = \overline{AH}$ 이므로 $\overline{AH} : \overline{AB} = 1 : 2$

점 A에서의 접선의 기울기는

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{AH}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$y^2 = 12x \text{ 에서 } 2y \frac{dy}{dx} = 12$$

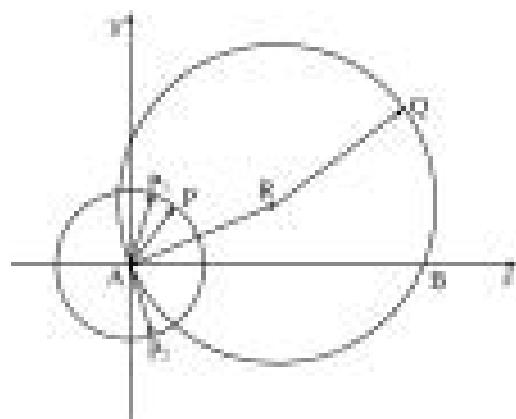
$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{y} \text{ 이므로 } \frac{6}{y_1} = \sqrt{3}$$

그러므로 $A(1, 2\sqrt{3})$ 이다.

$$\overline{AF} = x_1 + 3 = 4, \overline{AB} = 2\overline{AF} = 8$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} \times \overline{AF} = 32$$

29. [출제의도] 평면벡터의 내적을 활용하여 문제해결하기



그림과 같이 좌표평면 위의 점 A를 A(0, 0), 점 B를 B(24, 0), 원 C의 중심을 R(12, 5)라 하자.

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RQ}) \\ = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{RQ}$$

$$|\overrightarrow{AP}| = 5, |\overrightarrow{AR}| = 13, |\overrightarrow{RQ}| = 13 \text{ 이다.}$$

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR}$ 가 최대인 경우를 구하면

(i) $\cos\theta = 1$ 일 때,

점 P가 선분 AB 위에 있으므로

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR} = |\overrightarrow{AP}| \times |\overrightarrow{AR}| \times \cos(\angle PAR) \\ = 5 \times 13 \times \frac{12}{13} = 60$$

(ii) $0 < \cos\theta < 1$ 일 때,

$\angle P_1AB = \angle P_2AB = \theta$ 인 제1사분면 위의 점을 P_1 , 제4사분면 위의 점을 P_2 라 하자.

$\angle P_1AR < \angle P_2AR$ 이므로

$$\overrightarrow{AP}_1 \cdot \overrightarrow{AR} > \overrightarrow{AP}_2 \cdot \overrightarrow{AR}$$

그러므로 제1사분면 위의 점 P만 고려하면 된다.

$\angle RAP = \alpha, \angle RAB = \beta$ 라 하면

$$\cos\beta = \frac{12}{13} \text{ 이고, } 5\cos\theta \text{가 자연수이므로}$$

$$\cos\beta > \cos\theta$$

따라서 $\beta < \theta$ 이고 $\cos\theta$ 의 값이 $\frac{4}{5}$ 일 때,

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR}$ 가 최댓값을 갖는다.

$\alpha = \theta - \beta$ 이므로

$$\cos\alpha = \cos(\theta - \beta) = \cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{63}{65}$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR} = |\overrightarrow{AP}| \times |\overrightarrow{AR}| \times \cos\alpha$$

$$= 5 \times 13 \times \frac{63}{65} = 63$$

(i), (ii)에 의하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR}$ 가 최대가 되는 \overrightarrow{AP} 에 대하여 \overrightarrow{AP} 와 \overrightarrow{RQ} 가 같은 방향일 때, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{RQ}$ 의 값이 최대이므로 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{RQ}$ 의 최댓값은 65이다. 그러므로

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{RQ}$$

$$\leq 63 + 65 = 128$$

따라서 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 최댓값은 128

30. [출제의도] 미분을 활용하여 함수 추론하기

$$f(x) = a(x-m)^2 + n \text{ 이라 하자.}$$

$$f'(x) = 2a(x-m) \text{ 이고 } f''(x) = 2a \text{ 이다.}$$

두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = |f'(x)|$ 는 각각 직선 $x = m$ 에 대하여 대칭이므로

함수 $g(x) = |f'(x)|e^{f(x)}$ 의 그래프도 직선 $x = m$ 에 대하여 대칭이다.

(i) $x > m$ 인 경우

$a > 0$ 이면 함수 $y = f'(x)e^{f(x)}$ 는 실수 전체에서 증가하므로 함수 $g(x)$ 의 최댓값이 존재하지 않는다.

그러므로 조건 (1)에 의하여 $a < 0$ 이다.

$$g'(x) = - (f'(x)e^{f(x)})' \\ = - [f''(x) + \{f'(x)\}^2] e^{f(x)} \\ = \{-4a^2(x-m)^2 - 2a\} e^{f(x)}$$

방정식 $g'(x) = 0$ 을 만족하는 x 는 한 개이고 그 값을 $p(p > m)$ 이라 하자.

함수 $g(x)$ 는 $x = p$ 에서 극댓값을 갖고, 그 값이 최댓값이다.

(ii) $x < m$ 인 경우

함수 $y = g(x)$ 의 그래프는

직선 $x = m$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $g(x)$ 는 $x = 2m - p$ 에서 극댓값을 갖고, 그 값이 최댓값이다.

(i), (ii)에 의하여 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(m) = 0$ 이고, 함수 $g(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극솟값을 가지므로 $m = 2$ 이다.

함수 $g(x)$ 는 $x = p$ 에서 최댓값이 $4\sqrt{e}$ 이므로 $g(p) = |f'(p)|e^{f(p)} = 4\sqrt{e}$ 이다.

상수항을 포함한 모든 항의 계수가 유리수이므로 $f'(p) = 2a(p-2) = -4$ ⑦

$$f(p) = a(p-2)^2 + n = \frac{1}{2} \quad \dots \dots \quad \textcircled{L}$$

또한 함수 $g(x)$ 는 $x = p$ 에서 극댓값을 가지므로 $g'(p) = 0$ 에서 $2a(p-2)^2 + 1 = 0$ ⑧

$$\textcircled{L}, \textcircled{U}, \textcircled{E} \text{에 의하여 } n = 1, p = \frac{9}{4} \text{ 이므로}$$

$$a = -8$$

$$f(x) = a(x-m)^2 + n = -8(x-2)^2 + 1$$

$$\text{따라서 } |f(-1)| = 71$$