

# 2017학년도 7월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

## 수학 나형 정답

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | ③  | 2  | ②  | 3  | ⑤  | 4  | ④  | 5  | ③  |
| 6  | ①  | 7  | ④  | 8  | ④  | 9  | ⑤  | 10 | ①  |
| 11 | ②  | 12 | ③  | 13 | ②  | 14 | ⑤  | 15 | ④  |
| 16 | ③  | 17 | ①  | 18 | ①  | 19 | ②  | 20 | ⑤  |
| 21 | ⑤  | 22 | 32 | 23 | 24 | 24 | 6  | 25 | 17 |
| 26 | 15 | 27 | 56 | 28 | 80 | 29 | 50 | 30 | 9  |

## 나형 해설

### 1. [출제의도] 지수 계산하기

$$27 \times 3^{-2} = 3^3 \times 3^{-2} = 3$$

### 2. [출제의도] 로그 계산하기

$$\log_2 2 + \log_3 9 = 1 + 2 = 3$$

### 3. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+2) = 5$$

### 4. [출제의도] $\Sigma$ 의 성질 이해하기

$$\sum_{k=1}^{10} (2a_k + b_k) = 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = 2 \times 2 + 3 = 7$$

### 5. [출제의도] 사건의 독립 이해하기

두 사건  $A$ ,  $B$ 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\text{따라서 } P(B) = \frac{1}{3}$$

### 6. [출제의도] 미분계수 계산하기

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$\text{따라서 } f'(2) = 2$$

### 7. [출제의도] 두 집합의 포함관계 이해하기

$$a^2 - 2 = 2 \text{ 이므로 } a = -2 \text{ 또는 } a = 2$$

(i)  $a = -2$  일 때  $A = \{-1, 2\}$ ,  $B = \{2, 5, 7\}$   
이므로  $A \cap B \neq A$

(ii)  $a = 2$  일 때  $A = \{2, 7\}$ ,  $B = \{2, 5, 7\}$   
이므로  $A \cap B = A$   
따라서  $a = 2$

### 8. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

### 9. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$$\int_{-2}^2 (3x^2 + 2x + 1) dx = 2 \int_0^2 (3x^2 + 1) dx$$

$$= 2 \left[ x^3 + x \right]_0^2 = 20$$

### 10. [출제의도] 유리함수 이해하기

함수  $y = \frac{2}{x-1}$ 의 그래프를  $x$  축의 방향으로  $a$  만큼,  $y$  축의 방향으로 4 만큼 평행이동하면

$$y = \frac{2}{x-a-1} + 4 \text{의 그래프와 일치하므로}$$

$$\begin{aligned} a+1 &= 3 \\ a &= 2, b = 4 \\ \text{따라서 } a+b &= 6 \end{aligned}$$

### 11. [출제의도] 명제와 조건 이해하기

두 조건  $p$ ,  $q$ 의 진리집합을 각각  $P$ ,  $Q$ 라 하면

$$P = \{x \mid -4 \leq x \leq 6\}$$

$$Q = \{x \mid -a+2 \leq x \leq a+2\}$$

명제  $p \rightarrow q$ 가 참이므로  $P \subset Q$ 에서

$$-a+2 \leq -4, a \geq 6$$

$$a+2 \geq 6, a \geq 4$$

그러므로  $a \geq 6$

따라서 자연수  $a$ 의 최솟값은 6

### 12. [출제의도] 합성함수의 값 계산하기

$$(f \circ f)(-2) = f(f(-2)) = f(1) = 3$$

### 13. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 활용하여 문제 해결하기

흰 공의 개수가 3 일 확률은

$$\frac{{}_6C_3 \times {}_4C_1}{{}_{10}C_4} = \frac{20 \times 4}{210} = \frac{8}{21}$$

흰 공의 개수가 4 일 확률은

$$\frac{{}_6C_4}{{}_{10}C_4} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}$$

따라서 구하는 확률은  $\frac{8}{21} + \frac{1}{14} = \frac{19}{42}$

### 14. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제 해결하기

i) 고등학교 학생 중 임의로 선택한 1 명의 학생이 진로 체험 행사에 참가한 학생인 사건을  $A$ , 여학생인 사건을  $B$ 라 하면

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{75}{300}}{\frac{200}{300}} = \frac{3}{8}$$

### 15. [출제의도] 정규분포를 활용하여 문제 해결하기

i) 양계장에서 생산하는 계란 1 개의 무게를 확률 변수  $X$ 라 하면 확률변수  $X$ 는 정규분포

$N(52, 8^2)$ 을 따른다.

$$Z = \frac{X-52}{8} \text{ 라 하면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(60 \leq X \leq 68)$$

$$= P\left(\frac{60-52}{8} \leq Z \leq \frac{68-52}{8}\right)$$

$$= P(1 \leq Z \leq 2)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

### 16. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 문제 해결하기

$$a_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

$$\log_4 (2^{a_1} \times 2^{a_2} \times 2^{a_3} \times \dots \times 2^{a_{12}})$$

$$= \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{12})$$

$$= \frac{1}{2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 12^2)$$

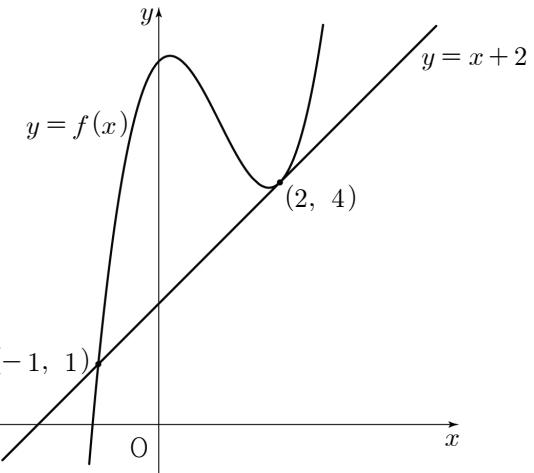
$$= \frac{1}{2} \times \frac{12 \times 13 \times 25}{6} = 325$$

### 17. [출제의도] 접선의 방정식을 활용하여 문제 해결하기

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{ 라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

이고, 두 점  $(2, 4)$ ,  $(-1, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식이  $y = x + 2$ 이므로



$$f(2) = 4 \text{에서 } 4a + 2b + c = -4 \quad \text{..... ①}$$

$$f(-1) = 1 \text{에서 } a - b + c = 2 \quad \text{..... ②}$$

$$f'(2) = 1 \text{에서 } 4a + b = -11 \quad \text{..... ③}$$

①, ②, ③에 의하여  $a = -3$ ,  $b = 1$ ,  $c = 6$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

따라서  $f'(3) = 10$

(다른 풀이)

두 점  $(2, 4)$ ,  $(-1, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식

i)  $y = x + 2$ 이므로

$$f(x) - (x+2) = (x-2)^2(x+1)$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 6$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

따라서  $f'(3) = 10$

### 18. [출제의도] 등비급수를 활용하여 추론하기

(도형  $T_1$ 의 넓이)

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 \times 2 - \frac{1}{6} \times \pi \times 1^2 = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6}$$

(도형  $T_2$ 의 넓이) = (도형  $T_3$ 의 넓이)

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2 - \frac{1}{6} \times \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6}$$

$$S_1 = (\text{도형 } T_1 \text{의 넓이}) + 2 \times (\text{도형 } T_2 \text{의 넓이})$$

$$= \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6} + 2 \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{4}$$

정삼각형  $A_nB_nC_n$ 의 한 변의 길이를  $a_n$ 이라 하면

$$2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times a_{n+1}\right) = \frac{1}{2} \times a_n \text{ 이므로}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} a_n$$

그럼  $R_{n+1}$ 의 새로 색칠된 부분의 넓이를  $b_{n+1}$

$$\text{이라 하면 } b_{n+1} = \frac{1}{12} b_n, b_1 = S_1$$

수열  $\{b_n\}$ 은 첫째항이  $\frac{3\sqrt{3} - \pi}{4}$ 이고 공비가

$$\frac{1}{12}$$
인 등비수열이다.

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k = \frac{\frac{3\sqrt{3}-\pi}{4}}{1-\frac{1}{12}} = \frac{3(3\sqrt{3}-\pi)}{11}$$

19. [출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정  
추론하기

세 수  $x_1, x_2, x_3$ 을 순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$ 과 같이 나타내자.  
 $x_1, x_2, x_3$  중에서 최댓값을  $p$ , 최솟값을  $q$ , 나머지 수를  $r$ ,  $p-q=k$  ( $k=0, 1, \dots, 5$ )라면 순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$ 의 개수는  $p, q, r$ 를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다.

(1)  $k=0$  일 때

세 수가 모두 같으므로

순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$ 의 개수는  $\boxed{6}$ 이고,

$$P(X=0) = \frac{1}{6^3} \times \boxed{6}$$

(2)  $k \neq 0$  일 때 ( $1 \leq k \leq 5$ )순서쌍  $(p, q)$ 의 개수는 각각의  $k$ 에 대하여  $6-k$ 이고i )  $k=1$  일 때순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$ 의 개수는

$$5 \times \left( \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} \right)$$

ii )  $2 \leq k \leq 5$  일 때①  $r=p$  또는  $r=q$ 인 경우 $p, p, q$  와  $p, q, q$  를 일렬로 나열하는 방법의 수는  $\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!}$ ②  $r \neq p$  이고  $r \neq q$  인 경우 $r$ 의 개수는 각각의  $k$ 에 대하여  $k-1$ 이고  $p, r, q$  를 일렬로 나열하는 방법의 수는  ${}_3P_3 = 3!$ 이므로  $(k-1) \times 3!$ 

①, ②에 의하여

순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$ 의 개수는

$$(6-k) \times \left( \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + (k-1) \times 3! \right)$$

그러므로  $1 \leq k \leq 5$  일 때,순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$ 의 개수는

$$(6-k) \times \left( \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + (\boxed{k-1}) \times 3! \right)$$

(예를 들어)

 $k=3$  인 경우 $(p, r, q)$  는  $(4, r, 1), (5, r, 2), (6, r, 3)$  이므로 개수는 3 $(p, r, q)$  가  $(4, r, 1)$  일 때①  $r=4$  또는  $r=1$  인 경우4, 4, 1 과 4, 1, 1 을 일렬로 나열하는 방법의 수는  $\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!}$ ②  $r \neq 4$  이고  $r \neq 1$  인 경우 $r$  는 3 또는 2 이므로  $r$ 의 개수는 2  $p, r, q$  를 일렬로 나열하는 방법의 수는  ${}_3P_3 = 3!$  이므로  $2 \times 3!$ 

①, ②에 의하여

4, r, 1 을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 2 \times 3!$$

 $(5, r, 2), (6, r, 3)$  일 때에도 같은 방법으로구하면 각각  $\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 2 \times 3!$ 그러므로  $k=3$  일 경우순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$  의 개수는

$$3 \times \left( \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 2 \times 3! \right)$$

그러므로

$$P(X=k)$$

$$= \frac{1}{6^3} \times (6-k) \times \left\{ \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + (\boxed{k-1}) \times 3! \right\}$$

(1), (2)에 의하여 확률변수  $X$ 의 평균  $E(X)$ 는 다음과 같다.

$$E(X) = \sum_{k=0}^5 \{k \times P(X=k)\}$$

$$= \frac{1}{6^2} \sum_{k=1}^5 (\boxed{6k^2 - k^3}) = \frac{35}{12}$$

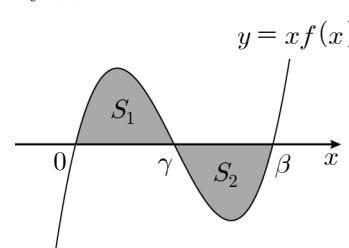
$$a=6, f(k)=k-1, g(k)=6k^2-k^3$$

$$\text{따라서 } \frac{f(5) \times g(3)}{a} = \frac{4 \times 27}{6} = 18$$

## 20. [출제의도] 정적분의 성질을 활용하여 참, 거짓 추론하기

ㄱ.  $g'(x) = xf(x)$  이므로  $g'(0) = 0$  (참)ㄴ. 함수  $g(x)$  가 닫힌 구간  $[0, \alpha]$  에서 연속, 열린 구간  $(0, \alpha)$  에서 미분가능,  $g(0) = g(\alpha) = 0$  이므로 롤의 정리에 의하여  $g'(c) = cf(c) = 0$  인  $c$  가 열린 구간  $(0, \alpha)$  에 적어도 하나 존재한다.  $c \neq 0$  이므로  $f(c) = 0$ 따라서 방정식  $f(x) = 0$  은 열린 구간  $(0, \alpha)$  에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)ㄷ.  $\beta > 0$  이고  $g(\beta) = 0$  이므로 ㄴ에 의하여 $f(\gamma) = 0$  인  $\gamma$  ( $0 < \gamma < \beta$ ) 가 존재한다. $f(x) = a(x-\gamma)(x-\beta)$  ( $a > 0$ ) 이고

$$S_1 = \int_0^\gamma |xf(x)| dx, S_2 = \int_\gamma^\beta |xf(x)| dx$$

하면  $y=xf(x)$  의 그래프는 다음과 같다.

$$g(\beta) = \int_0^\beta tf(t) dt = S_1 - S_2 = 0 \text{ 이므로}$$

$$S_1 = S_2 \text{ 이다.}$$

$$\int_\beta^x tf(t) dt = g(x) - g(\beta)$$

$$= g(x) = \int_0^x tf(t) dt \geq 0$$

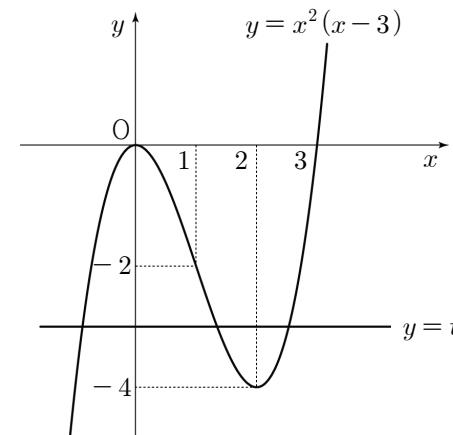
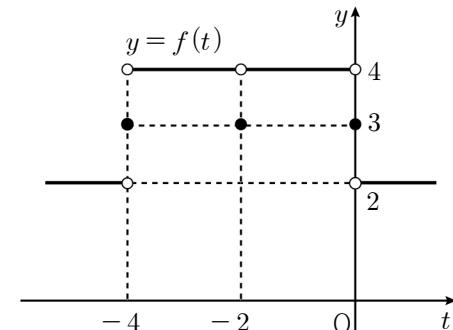
이므로, 모든 실수  $x$  에 대하여  $\int_\beta^x tf(t) dt \geq 0$  (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

## 21. [출제의도] 함수의 연속성을 활용하여 추론하기

$$(x-1)\{x^2(x-3)-t\}=0$$

$$x=1 \text{ 또는 } x^2(x-3)-t=0$$

 $x^2(x-3)-t=0$  의 서로 다른 실근의 개수는 $y=x^2(x-3)$  의 그래프와 직선  $y=t$  의 교점의 개수와 같다.따라서  $y=f(t)$  의 그래프는 다음과 같다.함수  $f(t)$  가  $t=-4, -2, 0$  에서 불연속이다.함수  $f(t)g(t)$  가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는  $t=-4, -2, 0$  에서 연속이어야 한다. $t=-4$  일 때,

$$\lim_{t \rightarrow -4^-} f(t)g(t) = 2g(-4),$$

$$\lim_{t \rightarrow -4^+} f(t)g(t) = 4g(-4),$$

$$f(-4)g(-4) = 3g(-4)$$
 이고

함수  $f(t)g(t)$  가  $t=-4$  에서 연속이므로  $2g(-4) = 4g(-4) = 3g(-4)$ 

$$\text{따라서 } g(-4) = 0$$

같은 방법으로  $g(-2) = g(0) = 0$ (가)에서  $g(x)$  가 삼차 이하의 다항함수이므로

$$g(x) = ax(x+2)(x+4) \quad (a \neq 0)$$
 이라 하면

(나)에서  $g(-3) = 6$  이므로  $a = 2$ 

$$g(x) = 2x(x+2)(x+4)$$

$$\text{따라서 } g(1) = 30$$

## 22. [출제의도] 등비수열 이해하기

공비를  $r$  라 하면  $r=2$ 

$$\text{따라서 } a_5 = a_3 \times r^2 = 8 \times 2^2 = 32$$

## 23. [출제의도] 순열과 조합 계산하기

$${}_5P_2 + {}_4C_3 = 20 + 4 = 24$$

## 24. [출제의도] 함수의 연속성 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 12,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + 2a - 4 = 2a,$$

$$f(2) = 2a$$
 이므로  $12 = 2a$

$$\text{따라서 } a = 6$$

## 25. [출제의도] 적분과 미분의 관계 이해하기

$$f'(x) = 3x^2 + 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 17$$

## 26. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계

**이해하기**

등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항이 2, 공차가 4 이므로 일반항  $a_n = 4n - 2$ ,  $a_5 = 18$

$$a_5 b_5 = \sum_{k=1}^5 a_k b_k - \sum_{k=1}^4 a_k b_k = 270$$

$$\text{따라서 } b_5 = \frac{270}{18} = 15$$

**27. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기**

$$f(x) = (x+2t)x(x-t) = x^3 + tx^2 - 2t^2 x$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2tx - 2t^2$$

$$f'(4) = -2t^2 + 8t + 48$$

$$= -2(t-2)^2 + 56$$

따라서  $f'(4)$ 의 최댓값은  $t = 2$  일 때 56

**28. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기**  
조건을 만족시키는 자연수는 각 자리의 수의 합이 8 보다 작은 네 자리의 홀수이므로 일의 자리의 수는 1, 3, 5이다.

이 네 자리의 자연수를

$$a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d \quad (a \neq 0) \text{이라 하자.}$$

(i)  $d = 1$ 인 경우

부등식  $a+b+c \leq 6$  ( $a \geq 1$ )을 만족시키는 음이 아닌 정수  $a, b, c$ 의 순서쌍  $(a, b, c)$ 의 개수와 같으므로

$$a+b+c = 6 \quad (a \geq 1) \text{일 때, } {}_3H_5$$

$$a+b+c = 5 \quad (a \geq 1) \text{일 때, } {}_3H_4$$

⋮

$$a+b+c = 1 \quad (a \geq 1) \text{일 때, } {}_3H_0$$

$${}_3H_5 + {}_3H_4 + \cdots + {}_3H_0 = {}_7C_5 + {}_6C_4 + \cdots + {}_2C_0$$

$$= 56$$

(ii)  $d = 3$ 인 경우

부등식  $a+b+c \leq 4$  ( $a \geq 1$ )을 만족시키는 음이 아닌 정수  $a, b, c$ 의 순서쌍  $(a, b, c)$ 의 개수와 같으므로 (i)과 같은 방법으로

$${}_3H_3 + {}_3H_2 + {}_3H_1 + {}_3H_0 = {}_5C_3 + {}_4C_2 + {}_3C_1 + {}_2C_0 = 20$$

(iii)  $d = 5$ 인 경우

부등식  $a+b+c \leq 2$  ( $a \geq 1$ )을 만족시키는 음이 아닌 정수  $a, b, c$ 의 순서쌍  $(a, b, c)$ 의 개수와 같으므로 (i)과 같은 방법으로

$${}_3H_1 + {}_3H_0 = {}_3C_1 + {}_2C_0 = 4$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수의 개수는 80

(다른 풀이)

(i)  $d = 1$ 인 경우

$a+b+c \leq 6$  ( $a \geq 1$ )을 만족시키는 음이 아닌 정수  $a, b, c$ 의 순서쌍  $(a, b, c)$ 의 개수는  $a+b+c+e = 6$  ( $a \geq 1$ )을 만족시키는 음이 아닌 정수  $a, b, c, e$ 의 순서쌍  $(a, b, c, e)$ 의 개수와 같다.

$$\text{그러므로 } {}_4H_5 = {}_8C_5 = 56$$

(ii)  $d = 3$ 인 경우

$a+b+c \leq 4$  ( $a \geq 1$ )을 만족시키는 음이 아닌 정수  $a, b, c$ 의 순서쌍  $(a, b, c)$ 의 개수는  $a+b+c+e = 4$  ( $a \geq 1$ )을 만족시키는 음이 아닌 정수  $a, b, c, e$ 의 순서쌍  $(a, b, c, e)$ 의 개수와 같다.

$$\text{그러므로 } {}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

(iii)  $d = 5$ 인 경우

$a+b+c \leq 2$  ( $a \geq 1$ )을 만족시키는 음이 아닌 정수  $a, b, c$ 의 순서쌍  $(a, b, c)$ 의 개수는

$a+b+c+e = 2$  ( $a \geq 1$ )을 만족시키는 음이 아닌 정수  $a, b, c, e$ 의 순서쌍  $(a, b, c, e)$ 의 개수와 같다.

$$\text{그러므로 } {}_4H_1 = {}_4C_1 = 4$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수의 개수는 80

**29. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 활용하여 문제해결하기**

접선  $l_n$ 의 방정식은  $y = 2nx - n^2$  이므로

$$Y_n(0, -n^2)$$

직선  $l_n$ 이  $x$  축과 만나는 점을  $X_n$ 이라 하면

$$X_n\left(\frac{1}{2}n, 0\right)$$

$$\overline{OX_n} = \frac{1}{2}n$$

$$\overline{X_nQ_n} = \overline{X_nP_n} = \sqrt{n^4 + \frac{1}{4}n^2}$$

$$\overline{Y_nR_n} = \overline{Y_nP_n} = \sqrt{4n^4 + n^2}$$

이므로

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{OQ_n}}{\overline{Y_nR_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{OX_n} + \overline{X_nQ_n}}{\overline{Y_nR_n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n + \sqrt{n^4 + \frac{1}{4}n^2}}{\sqrt{4n^4 + n^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n + \sqrt{1 + \frac{1}{4n^2}}}{\sqrt{4 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}$$

따라서  $100\alpha = 50$

**30. [출제의도] 조합을 활용하여 문제해결하기**

집합  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$  라 하면  $D$ 의 원소 중  $x$  좌표와  $y$  좌표가 모두 정수인 점을 다음과 같은 4개의 집합으로 분류할 수 있다.

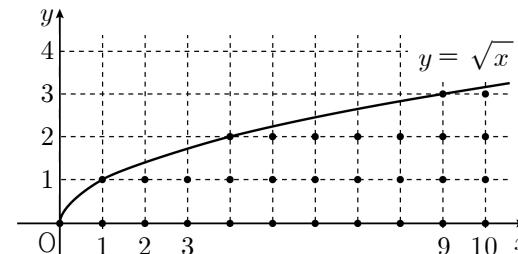
$$S_1 = \{(x, y) \mid x, y \text{는 홀수}\}$$

$$S_2 = \{(x, y) \mid x \text{는 홀수, } y \text{는 짝수 또는 } 0\}$$

$$S_3 = \{(x, y) \mid x \text{는 짝수 또는 } 0, y \text{는 홀수}\}$$

$$S_4 = \{(x, y) \mid x, y \text{는 짝수 또는 } 0\}$$

서로 다른 두 점의 중점의  $x$  좌표와  $y$  좌표가 모두 정수이기 위해서는 위의 4개의 집합 중 하나에서 서로 다른 두 원소를 선택해야 한다.



$$f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 9, \dots$$

$f(9)$ 를 구하면

(i) 집합  $S_1$ 에서 선택하는 경우

$$(1, 1), (3, 1), (5, 1), (7, 1), (9, 1), (9, 3)$$

중 서로 다른 두 점을 선택해야 하므로  ${}_6C_2 = 15$

(ii) 집합  $S_2$ 에서 선택하는 경우

$$(1, 0), (3, 0), (5, 0), (5, 2), (7, 0), (7, 2),$$

(9, 0), (9, 2) 중 서로 다른 두 점을 선택해야

하므로  ${}_8C_2 = 28$

(iii) 집합  $S_3$ 에서 선택하는 경우

$$(2, 1), (4, 1), (6, 1), (8, 1) 중 서로 다른 두$$

점을 선택해야 하므로  ${}_4C_2 = 6$

(iv) 집합  $S_4$ 에서 선택하는 경우

$(0, 0), (2, 0), (4, 0), (4, 2), (6, 0), (6, 2), (8, 0), (8, 2)$  중 서로 다른 두 점을 선택해야 하므로  ${}_8C_2 = 28$

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여

$$f(9) = 15 + 28 + 6 + 28 = 77$$

같은 방법으로

$$f(10) = {}_6C_2 + {}_8C_2 + {}_6C_2 + {}_{10}C_2 = 103$$

$$f(n) < f(n+1) \text{ 이므로 } n \text{의 최댓값은 } 9$$

(참고)

2 이상의 자연수  $n$ 에 대하여 각 집합의 원소의 개수는 다음과 같다.

| $n$ | $n(S_1)$ | $n(S_2)$ | $n(S_3)$ | $n(S_4)$ |
|-----|----------|----------|----------|----------|
| 2   | 1        | 1        | 1        | 2        |
| 3   | 2        | 2        | 1        | 2        |
| 4   | 2        | 2        | 2        | 4        |
| 5   | 3        | 4        | 2        | 4        |
| 6   | 3        | 4        | 3        | 6        |
| 7   | 4        | 6        | 3        | 6        |
| 8   | 4        | 6        | 4        | 8        |
| 9   | 6        | 8        | 4        | 8        |
| 10  | 6        | 8        | 6        | 10       |
| ⋮   | ⋮        | ⋮        | ⋮        | ⋮        |

따라서  $f(n)$ 은 다음과 같다.

$$f(2) = {}_2C_2 = 1$$

$$f(3) = {}_2C_2 + {}_2C_2 + {}_2C_2 = 3$$

$$f(4) = {}_2C_2 + {}_2C_2 + {}_2C_2 + {}_4C_2 = 9$$

$$f(5) = {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_2C_2 + {}_4C_2 = 16$$

$$f(6) = {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_3C_2 + {}_6C_2 = 27$$

$$f(7) = {}_4C_2 + {}_6C_2 + {}_3C_2 + {}_6C_2 = 39$$

$$f(8) = {}_4C_2 + {}_6C_2 + {}_4C_2 + {}_8C_2 = 55$$

$$f(9) = {}_6C_2 + {}_8C_2 + {}_4C_2 + {}_8C_2 = 77$$

$$f(10) = {}_6C_2 + {}_8C_2 + {}_6C_2 + {}_{10}C_2 = 103$$