

2018년 11월 11일 (오전); 제한시간 3시간; 문항당 7점

1. 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족할 때, $\frac{f(8) - f(2)}{f(2) - f(1)}$ 의 값을 구하여라.

서로 다른 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a) = f(b)$ 이면 $f(a^2 - 6b - 1) = f(b^2 + 8)$ 이다.

2. 약수의 개수가 4 이상인 양의 정수 N 에 대하여, N 의 약수 중 가장 작은 네 개를 각각 제공하여 더한 값이 N 과 같아지는 N 을 모두 구하여라.

3. 이등변삼각형이 아닌 삼각형 ABC 의 변 BC 의 중점을 M 이라 하고, 변 BC 의 수직이등분선이 삼각형 ABC 의 외접원과 만나는 점을 P 라 하자. 이때 A 와 P 는 변 BC 에 대하여 같은 쪽에 있다. 삼각형 ABM 과 AMC 의 내심을 각각 I, J 라 하고, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$ 라 할 때, $\angle IPJ$ 를 구하여라.

4. 양의 정수 n 에 대하여, $x + 2y + 2z + 3w = n$ 을 만족하는 음이 아닌 정수의 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수를 $p(n)$ 이라 하고, 다음 세 조건을 모두 만족하는 음이 아닌 정수의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 $q(n)$ 이라 하자.

(i) $a + b + c + d = n$

(ii) $a \geq b \geq d$

(iii) $a \geq c \geq d$

모든 n 에 대하여 $p(n) = q(n)$ 임을 보여라.