



제 32 회 고등부 1차시험
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2018년 5월 12일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명, 문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 “7”일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지를** 기입하여야 합니다.
5. 문제 1~4 번은 각 4 점, 문제 17~20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 최고차항의 계수가 1인 4차 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여

$$\{x \mid x = f(x)\} = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$\{x \mid x = g(x)\} = \{1, 5, 7, 9\}$$

이다. 집합 $\{x \mid f(x) = g(x)\}$ 의 모든 원소의 곱을 구하여라.

6. 두 학생 A와 B가 포함된 8명의 학생을 몇 개의 모둠으로 나눌 때, A와 B가 같은 모둠에 속하지 않으면서, 각 모둠의 인원이 2명 또는 3명이 되도록 나누는 방법의 수를 구하여라. (단, 각 학생은 오직 하나의 모둠에 속한다.)

7. 길이가 40인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원을 C 라 하고, 선분 AB 의 중점을 M 이라 하자. 원 O_1 은 반원 C 에 접하고, 점 M 에서 선분 AB 에 접한다. 원 $O_2 (\neq O_1)$ 은 원 O_1 , 반원 C , 선분 AB 에 모두 접한다. 삼각형 MO_1O_2 의 넓이가 S 일 때, $\sqrt{2}S$ 의 값을 구하여라. (단, 원 O_1, O_2 의 중심은 각각 점 O_1, O_2 이다.)

2. 두 학생 A와 B가 11의 배수인 세 자리 양의 정수를 각각 하나씩 고른다. A가 고른 정수와 B가 고른 정수의 십의 자리의 수가 같도록 고르는 경우의 수를 구하여라.

3. 각 A 가 직각인 직각 삼각형 ABC 의 두 변 AB 와 AC 의 길이가 각각 3, 4이다. 각 B 의 이등분선이 변 AC 과 만나는 점을 D , 각 C 의 이등분선이 변 AB 와 만나는 점을 E 라 하자. 점 A 에서 직선 DE 까지의 거리를 x 라 할 때, $145x^2$ 의 값을 구하여라.

4. 다음과 같이 정의된 함수 $f(n)$ 에 대하여 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$ 의 값을 구하여라.

$$f(n) = \frac{1}{1+n} + \frac{2}{2+n} + \frac{3}{3+n} + \cdots + \frac{10}{10+n}$$

5. 다항식 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 식을 만족할 때, $f(99)$ 의 값을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

$$f(f(x)) = f(x)^2 + x^2 + x + 2018$$

8. $p^2 + 87$ 의 양의 약수의 개수가 9가 되도록 하는 소수 p 를 구하여라.

9. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) $1 \leq t < s$ 이면 $f(t) < f(s)$ 이다.

(ii) 모든 실수 t 에 대하여 $f(2-t) = f(t)$ 이다.

다음 부등식을 만족하는 정수 a 를 모두 더한 값을 구하여라.

$$f(-2a^2 + 16a - 17) < f(a^2 - 10a + 35)$$



제 32 회 고등부 1차시험
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

10. 그림과 같이 36개의 칸으로 이루어진 판에 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 숫자가 적혀있다.

| | | | | | |
|---|---|--|--|---|---|
| 1 | | | | | 2 |
| | 3 | | | 4 | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | 5 | | | 6 | |
| | | | | | |
| 7 | | | | | 8 |

숫자가 적혀있지 않은 28개의 칸 중 6개에 검은 색으로 색칠한다. 색칠된 칸이 각 가로줄과 각 세로줄에 1개씩만 있도록 색칠하는 방법의 수를 구하여라.

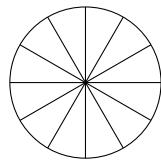
11. 넓이가 100인 볼록사각형 $ABCD$ 가 있다. 두 대각선 AC 와 BD 의 교점을 E 라 할 때, $\overline{AE} : \overline{EC} = 2 : 3$ 이다. 점 P 를 사각형 $ABPC$ 가 평행사변형이 되도록 잡고, 점 Q 를 사각형 $ACQD$ 가 평행사변형이 되도록 잡았을 때, 삼각형 APQ 의 넓이를 구하여라.

12. 양의 정수 a, b 가 다음 조건을 만족할 때, ab 의 값을 구하여라.

$$9a^2 - 12ab + 2b^2 + 36b - 162 = 0$$

13. 세 실수 x, y, z 가 $x + y + 5z = 4$, $0 \leq x \leq y \leq z$ 를 모두 만족한다. $x^2 + 2y^2 + z^2$ 이 될 수 있는 값 중 가장 작은 것을 $\frac{p}{q}$ 라 할 때, $p + q$ 의 값을 구하여라. (단, p, q 는 서로소인 양의 정수)

14. 그림과 같이 12등분된 원판이 있다. 각 칸을 빨간색 또는 파란색으로 칠하여 만들 수 있는 모든 원판의 개수를 구하여라. 단, 회전하여 같은 것은 한 가지로 센다.



15. 각 B 가 예각이고 $\overline{AB} < \overline{AC}$ 인 삼각형 ABC 의 꼭짓점 A 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 D , 변 BC 의 중점 E 에서 변 AB 에 내린 수선의 발을 F 라 할 때, $\overline{AD} = 16$, $\overline{BD} = 12$, $\overline{AF} = 5$ 이다. \overline{AC}^2 을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라. (단, 점 F 는 선분 AB 위에 있다.)

16. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 을 구하여라.

$$\sqrt{13^4 + 4n^3}$$
 은 13의 배수가 아닌 정수

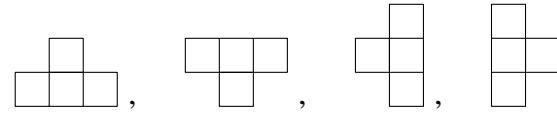
17. 예각삼각형 ABC 가 $\angle ABC = 46^\circ$, $\overline{AB} > \overline{AC}$ 를 만족한다. 삼각형 ABC 의 외심을 O , 수심을 H 라 할 때, $\angle BAC$ 의 이등분선이 선분 OH 의 중점을 지난다. $\angle OAH = x^\circ$ 라 할 때, x 의 값을 구하여라. (단, $0 \leq x < 180$ 이다.)

18. 방정식 $x^2(x - 5) + 2 = 0$ 의 가장 큰 해를 a 라 할 때, $[a^4]$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 가장 큰 정수)

19. 그림과 같이 80개의 정사각형 모양의 칸으로 이루어진 판 R 에 1에서 80까지의 수가 적혀있다.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |

4개의 칸으로 만들어진 다음 네 종류의 타일을 생각하자.



이러한 타일 20개를 선택하여 판 R 에 빈틈없이 붙이는 경우의 수를 구하여라.

20. 양의 정수 k 와 3의 배수가 아닌 양의 정수 m 이 다음 등식을 만족할 때, k 의 값을 구하여라.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{53} - \frac{1}{54} + \frac{1}{55} = \frac{3^k \times m}{28 \times 29 \times \cdots \times 54 \times 55}$$



제 32 회 고등부 1차시험
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2018년 5월 12일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명, 문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 “7”일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지를** 기입하여야 합니다.
5. 문제 1~4 번은 각 4 점, 문제 17~20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 십의 자리의 수가 9인 다섯 자리 양의 정수 중 11의 배수의 개수를 구하여라.
2. 정수 $\sqrt{2(20^4 + 18^8 + 344^4)}$ 을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.
3. 두 변 AB 와 AD 의 길이가 각각 20과 8인 사각형 $ABCD$ 가 변 AB 의 중점이 중심인 원에 내접한다. 이 원의 점 C 에서의 접선과 점 D 에서의 접선이 점 E 에서 만난다고 할 때, 선분 DE 의 길이는 5이다. 두 대각선 AC 와 BD 의 교점을 F 라 할 때, \overline{AF}^2 의 값을 구하여라.
4. 양의 정수 m, n 이 다음 식을 만족할 때 $m+n$ 의 값을 구하여라.
$$4^m - 3^n = 11 \times 19 \times 47$$
5. 실수 a 가 등식 $a^2 + 100a - 1 = 0$ 을 만족한다. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 기울기가 $2a$ 이고 x 절편이 유리수인 직선이다. 다음 등식이 x 에 대한 항등식이 되도록 하는 정수 A, B, C 에 대하여 $A - (B + C)$ 의 값을 구하여라.
$$f(f(x - 1)) = Af(x) + Bx + C$$
6. 두 학생 A와 B가 포함된 8명의 학생을 몇 개의 모둠으로 나눌 때, A와 B가 같은 모둠에 속하지 않으면서, 각 모둠의 인원이 2명 또는 3명이 되도록 나누는 방법의 수를 구하여라. (단, 각 학생은 오직 하나의 모둠에 속한다.)
7. 삼각형 ABC 가 $\angle B > \angle C, \angle A = 50^\circ$ 를 만족한다. 변 BC, CA, AB 의 중점을 각각 D, E, F 라 하자. 점 B 를 지나고 $\angle A$ 의 이등분선에 수직인 직선과 점 D 에서 삼각형 DEF 의 외접원에 접하는 직선이 만나는 점을 K 라 하자. $\angle BKD = 5^\circ$ 일 때, $\angle B = x^\circ$ 이다. x 의 값을 구하여라. (단, $0 \leq x < 180$ 이다.)
8. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 을 모두 더한 값을 구하여라.
 n 과 서로소인 양의 정수 중 n 보다 작은 것의 합이 $4n$ 이다.
9. 세 실수 x, y, z 가 $x + y + 5z = 4, 0 \leq x \leq y \leq z$ 를 모두 만족할 때, $x^2 + 2y^2 + z^2$ 이 될 수 있는 값 중 가장 큰 것을 M , 가장 작은 것을 m 이라 하자. $M - m = \frac{p}{q}$ 라 할 때, $p + q$ 의 값을 구하여라. (단, p, q 는 서로소인 양의 정수)
10. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 m 을 모두 더한 값을 구하여라.
 $m^2 - 10m + 10$ 은 $4 \cdot 5^{m-1}$ 의 약수이다.



제 32 회 고등부 1차시험
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

11. 그림과 같이 36개의 칸으로 이루어진 판에 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 숫자가 적혀있다.

| | | | | | |
|---|---|--|--|---|---|
| 1 | | | | | 2 |
| | 3 | | | 4 | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | 5 | | | 6 | |
| 7 | | | | | 8 |

숫자가 적혀있지 않은 28개의 칸 중 6개에 검은 색으로 색칠한다. 색칠된 칸이 각 가로줄과 각 세로줄에 1개씩만 있도록 색칠하는 방법의 수를 구하여라.

12. 직사각형 $ABCD$ 가 $\overline{AB} = 18$, $\overline{BC} = 10$ 을 만족한다. 변 AD 의 점 A 쪽 연장선 위에 $\overline{AP} = 3$ 이 되도록 점 P 를 잡자. 변 AB 의 중점을 E 라 하고, 직선 EP 와 직선 BD 의 교점을 Q 라 하자. 변 CD 의 중점을 F , 삼각형 PQF 의 내심을 I 라고 할 때, $36\overline{IE}$ 의 값을 구하여라.

13. 방정식 $x^2(x - 5) + 2 = 0$ 의 가장 큰 해를 a 라 할 때, $[a^4]$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 가장 큰 정수)

14. 정팔면체의 각 면을 빨간색 또는 파란색으로 칠하는 방법의 수를 구하여라. 단, 회전하여 같은 것은 한 가지로 센다.

15. 평행사변형 $ABCD$ 가 $\overline{AB} = 18$, $\overline{AD} = 27$ 을 만족한다. 삼각형 BCD 의 외접원과 직선 CA 의 교점을 $E(\neq C)$ 라 할 때, $\overline{DE} = 36$ 이다. 선분 BD 의 중점을 M 이라 할 때, $\overline{EM}^2 \times 100$ 의 값을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

16. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 과 소수 p, q 의 순서쌍 (n, p, q) 에 대하여 npq 를 모두 더한 값을 구하여라. (단, 0은 완전제곱수이다.)

$p^4 - 4q^n$ 이 완전제곱수가 된다.

17. 좌표평면에서 직사각형 모양의 영역

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 8, 0 \leq y \leq 5\}$$

이 있다. 한 변의 길이가 3인 정사각형 모양의 영역 $S_{i,j}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$S_{i,j} = \{(x, y) \mid i \leq x \leq i+3, j \leq y \leq j+3\}$$

영역 $S_{i,j}$ (단, i, j 는 모두 정수)를 6개 선택할 때, 이들의 합집합이 R 을 포함하도록 선택하는 경우의 수를 구하여라.

18. 예각삼각형 ABC ($\angle A < \angle B, \angle A < \angle C$)의 외접원 Ω 의 중심을 O 라 하고, 점 C 에서 직선 BC 와 접하고 점 A 를 지나는 원 Γ 의 중심을 P 라 하자. 직선 AO 와 원 Γ 의 교점을 $D(\neq A)$, 직선 AP 와 원 Ω 의 교점을 $E(\neq A)$ 라 하자. $\angle ACD = 43^\circ$ 이고 $\angle AEC = 105^\circ$ 일 때, $\angle OPD = x^\circ$ 이다. x 의 값을 구하여라. (단, $0 \leq x < 180$ 이다.)

19. 다음 조건을 만족하는 정수 n 을 모두 더한 값을 구하여라.

$$(n^2 - 5n + 7)(n^2 - 21n + 49) = p^m$$
을 만족하는 소수 p 와 정수 m 이 존재한다.

20. 2차 다항식 $P(x)$ 와 4차 다항식 $Q(x)$ 가 다음 네 조건을 모두 만족한다.

- (i) 임의의 실수 x 에 대하여

$$P(x)Q(x+4) = P(x+8)Q(x)$$

- (ii) $P(x) = 0$ 은 서로 다른 2개의 실수근을 가진다.

- (iii) $Q(x) = 0$ 은 서로 다른 4개의 실수근을 가진다.

- (iv) $P(x) = 0$ 의 두 근의 차가 $Q(x) = 0$ 의 네 근의 합보다 8만큼 크다.

$Q(x) = 0$ 의 네 근의 제곱의 합이 될 수 있는 값 중 가장 작은 것을 a 라 할 때, $10a$ 의 값을 구하여라.