

2018학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학'가'형 정답

1	③	2	③	3	⑤	4	④	5	②
6	③	7	①	8	②	9	⑤	10	③
11	②	12	⑤	13	④	14	①	15	④
16	①	17	④	18	①	19	②	20	⑤
21	④	22	12	23	11	24	27	25	9
26	546	27	64	28	5	29	51	30	36

해설

1. [출제의도] 조합의 수를 계산한다.

$${}^7C_2 = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

2. [출제의도] 삼각함수의 미분계수를 계산한다.

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 2 \sin x \text{에서 } \\ f'(x) &= 1 + 2 \cos x \text{이므로} \\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 1 + 2 \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

3. [출제의도] 무리수 e 의 정의를 이용하여 극한값을 계산한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+2x)^{\frac{1}{2x}} \right\}^2 = e^2$$

4. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 합수값을 계산한다.

$$\begin{aligned} \tan^2 \theta &= (-3)^2 = 9^\circ \text{이고} \\ 1 + \tan^2 \theta &= \sec^2 \theta \text{이므로} \\ \sec^2 \theta &= 1 + 9 \\ &= 10 \end{aligned}$$

5. [출제의도] 지수함수의 극한값을 구한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + 1 - e^{-x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{-x} \right) \\ \text{이 때 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = 1 \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

6. [출제의도] 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구한다.

백의 자리에 올 수 있는 수의 개수는 4이고,십의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 수의 개수는 5. $\Pi_2 = 5^2 = 25$ 이므로
곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $4 \times 25 = 100$

7. [출제의도] 치환적분을 이용하여 정적분의 값을 구한다.

$$\begin{aligned} x^2 - 1 = t \text{로 놓으면 } 2x \frac{dx}{dt} = 1 \text{이고,} \\ x = 1 \text{일 때 } t = 0 \text{이고,} \\ x = 2 \text{일 때 } t = 3 \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 x \sqrt{x^2 - 1} dx &= \frac{1}{2} \int_0^3 \sqrt{t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} t \sqrt{t} \right]_0^3 \\ &= \frac{1}{2} (2\sqrt{3} - 0) \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

8. [출제의도] 지수함수를 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

$$a > 0 \text{에서 } 0 < 2^{-\frac{2}{a}} < 1^\circ \text{이므로}$$

 $1 - 2^{-\frac{2}{a}} > 0$ 이다.

$$\begin{aligned} \frac{Q(4)}{Q(2)} &= \frac{Q_0 \left(1 - 2^{-\frac{4}{a}} \right)}{Q_0 \left(1 - 2^{-\frac{2}{a}} \right)} \\ &= \frac{1 - \left(2^{-\frac{2}{a}} \right)^2}{1 - 2^{-\frac{2}{a}}} \\ &= \frac{\left(1 - 2^{-\frac{2}{a}} \right) \left(1 + 2^{-\frac{2}{a}} \right)}{1 - 2^{-\frac{2}{a}}} \\ &= 1 + 2^{-\frac{2}{a}} \end{aligned}$$

$$\frac{Q(4)}{Q(2)} = \frac{3}{2} \text{에서}$$

$$1 + 2^{-\frac{2}{a}} = \frac{3}{2}$$

$$2^{-\frac{2}{a}} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$$

$$-\frac{2}{a} = -1 \text{에서}$$

$$a = 2$$

[다른 풀이]

$$\frac{Q(4)}{Q(2)} = \frac{3}{2} \text{에서 } 2Q(4) = 3Q(2)$$

$$2Q_0 \left(1 - 2^{-\frac{4}{a}} \right) = 3Q_0 \left(1 - 2^{-\frac{2}{a}} \right)$$

$$2^{-\frac{2}{a}} = t \text{로 놓으면 } a > 0 \text{이므로 } 0 < t < 1^\circ \text{이다.}$$

$$2(1-t^2) = 3(1-t)$$

$$2(1-t)(1+t) = 3(1-t)$$

$$2(1+t) = 3$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = 2^{-\frac{2}{a}} = 2^{-1}$$

$$-\frac{2}{a} = -1 \text{에서}$$

$$a = 2$$

9. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.

$$f(0) = 2^0 + 1 = 2, \quad g(0) = -2^{-1} + 7 = \frac{13}{2} \text{이므로}$$

두 점 A, B의 좌표는 각각

$$A(0, 2), \quad B\left(0, \frac{13}{2}\right) \text{이다. 따라서}$$

$$\overline{AB} = \frac{13}{2} - 2 = \frac{9}{2}$$

두 식 $y = 2^x + 1$, $y = -2^{-x-1} + 7$ 을 연립하여 풀면

$$2^x + 1 = -2^{-x-1} + 7$$

$$\frac{3}{2} \times 2^x = 6$$

$$2^x = 4$$

$$x = 2$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5 \text{이므로 점 C의 좌표는 (2, 5)이다.}$$

따라서 삼각형 ACB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

10. [출제의도] 봉의 미분법을 이용하여 함수의 최댓값

과 극솟값의 합을 구한다.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-x+1} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2-x+1)-(x-1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$$

$$= \frac{-x^2+2x}{(x^2-x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이고, $x=2$ 에서 극대이므로 극댓값과 극솟값의 합은

$$\begin{aligned} f(2) + f(0) &= \frac{2-1}{2^2-2+1} + \frac{0-1}{0^2-0+1} \\ &= \frac{1}{3} + (-1) \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

11. [출제의도] 닫힌 구간에서 지수함수의 최댓값을 구한다.

$$f(x) = \left(\frac{3}{a}\right)^x \text{에서}$$

$$(i) \frac{3}{a} > 1, \quad \Leftrightarrow 0 < a < 3^\circ \text{일 때,}$$

함수 $f(x)$ 는 증가함수이므로 $x=2$ 에서 최댓값을 갖는다.

$$f(2) = \left(\frac{3}{a}\right)^2 = 4 \text{에서}$$

$$a^2 = \frac{9}{4}$$

$$a = \pm \frac{3}{2}$$

$$0 < a < 3^\circ \text{므로}$$

$$a = \frac{3}{2}$$

$$(ii) \frac{3}{a} = 1, \quad \Leftrightarrow a = 3 \text{ 일 때,}$$

f(x) = 1^\circ \text{으로 함수 } f(x) \text{의 최댓값이 4가 아니다.}

$$(iii) 0 < \frac{3}{a} < 1, \quad \Leftrightarrow a > 3 \text{ 일 때,}$$

함수 $f(x)$ 는 감소함수이므로 $x=-1$ 에서 최댓값을 갖는다.

$$f(-1) = \left(\frac{3}{a}\right)^{-1}$$

$$= \frac{a}{3}$$

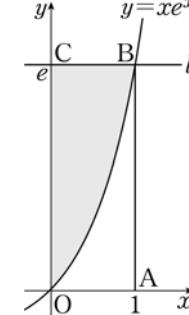
$$= 4 \text{에서}$$

$$a = 12$$

(i), (ii), (iii)에서 모든 양수 a 의 값의 합은

$$\frac{3}{2} \times 12 = 18$$

12. [출제의도] 정적분을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.



4개의 점 O(0, 0), A(1, 0), B(2, 5), C(2, 1)를 꼭짓점

으로 하는 직사각형의 넓이는

$$1 \times e = e$$

이고, 곡선 $y = xe^x$ 과 x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x dx &= \left[xe^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - (e-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

구하는 도형의 넓이는 $e-1$ 이다.

13. [출제의도] 함수의 도함수를 활용하여 접선의 y 절편을 구한다.

$$f(x) = 0 \text{ 에서}$$

$$\ln(\tan x) = 0$$

$$\tan x = 1$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ 에서 } x = \frac{\pi}{4} \text{ 이므로}$$

$$\text{점 } P \text{의 좌표는 } \left(\frac{\pi}{4}, 0 \right) \text{이다.}$$

$$f'(x) = \frac{(\tan x)'}{\tan x}$$

$$= \frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{(\sqrt{2})^2}{1} = 2 \text{ 이므로}$$

점 P 에서의 접선의 방정식은

$$y = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = 2x - \frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$

이 접선의 y 절편은 $-\frac{\pi}{2}$ 이다.

14. [출제의도] 적분을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

$$\frac{d}{dt} \ln|T(t) - 20| = \frac{T'(t)}{T(t) - 20} \text{ 이므로}$$

$$\ln|T(t) - 20| = kt + C \text{ 가 성립한다.}$$

$$t = 0 \text{ 일 때, } \ln|T(0) - 20| = C \text{ 에서}$$

$$C = \ln 80 \quad \text{..... ①}$$

$$t = 3 \text{ 일 때, } \ln|T(3) - 20| = 3k + C \text{ 에서}$$

$$3k + C = \ln 40 \quad \text{..... ②}$$

$$\text{①, ②에서}$$

$$3k = \ln 40 - \ln 80$$

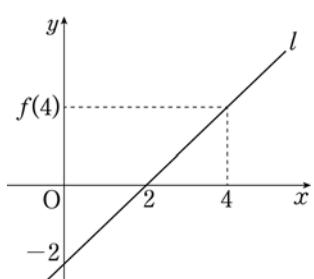
$$= \ln \frac{1}{2}$$

$$= -\ln 2$$

$$k = -\frac{\ln 2}{3}$$

15. [출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 합성함수의 미분계수를 구한다.

조건 (가)에서 직선 l 이 제2사분면을 지나지 않고, 조건 (나)에서 직선 l 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형인 직각이등변삼각형의 넓이가 2이므로 아래 그림과 같이 직선 l 의 x 절편과 y 절편은 각각 2, -2이다.



함수 $y = f(x)$ 위의 점 $(4, f(4))$ 에서의 접선 l 은 기울기가 1이고, 점 $(2, 0)$ 을 지나므로 직선 l 의 방정식은 $y = x - 2$ 이다.

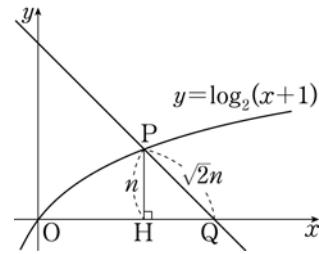
따라서 $f(4) = 2$, $f'(4) = 1$ 이다.

$g(x) = xf(2x)$ 에서

$$g'(x) = f(2x) + 2xf'(2x) \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} g'(2) &= f(4) + 4f'(4) \\ &= 2 + 4 \\ &= 6 \end{aligned}$$

16. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수열의 합을 구한다.



점 P 의 좌표를 (a, b) (단, a, b 는 양수)라 하고, 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

이때 두 점 P, Q 를 지나는 직선의 기울기가 -1 이므로 삼각형 PHQ 는 $\overline{PH} = \overline{HQ}$ 인 직각이등변삼각형이다.

$$\text{이때 } \overline{PQ} = \sqrt{2}n \text{ 이므로}$$

$$\overline{PH} = n, \text{ 즉 } b = n \text{ 이다.}$$

점 $P(a, n)$ 이 곡선 $y = \log_2(x+1)$ 위의 점이므로

$$n = \log_2(a+1)$$

$$a = 2^n - 1$$

$$\text{이때 } \overline{OQ} = \overline{OH} + \overline{HQ}, \overline{HQ} = n \text{ 이므로}$$

$$x_n = a + n$$

$$= 2^n - 1 + n$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 x_k &= \sum_{k=1}^5 (2^k - 1 + k) \\ &= \sum_{k=1}^5 2^k - \sum_{k=1}^5 1 + \sum_{k=1}^5 k \\ &= \frac{2 \times (2^5 - 1)}{2 - 1} - 5 \times 1 + \frac{5 \times 6}{2} \\ &= 62 - 5 + 15 \\ &= 72 \end{aligned}$$

[다른 풀이]

점 P 의 좌표를 (a, b) (단, a, b 는 양수)라 하자.

점 Q 의 좌표가 $(x_n, 0)$ 이고 직선 PQ 의 기울기가 -1 이므로

$$\frac{0-b}{x_n-a} = -1 \text{ 에서 } x_n - a = b$$

$$x_n = a + b$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_n - a)^2 + (0 - b)^2}$$

$$= \sqrt{b^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{2}b$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{2}n \text{ 이다.}$$

점 $P(a, n)$ 이 곡선 $y = \log_2(x+1)$ 위의 점이므로

$$n = \log_2(a+1) \text{에서}$$

$$a = 2^n - 1$$

$$x_n = a + b$$

$$= 2^n - 1 + n$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 x_k &= \sum_{k=1}^5 (2^k - 1 + k) \\ &= \sum_{k=1}^5 2^k - \sum_{k=1}^5 1 + \sum_{k=1}^5 k \\ &= \frac{2 \times (2^5 - 1)}{2 - 1} - 5 \times 1 + \frac{5 \times 6}{2} \\ &= 62 - 5 + 15 \\ &= 72 \end{aligned}$$

17. [출제의도] 역함수의 미분을 이용하여 조건을 만족하는 합수값을 구한다.

$g(f(x)) = x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(x))f'(x) = 1$$

조건 (나)에서 $g'(f(x)) \neq 0$ 이고

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \text{ 이므로}$$

$$f(x)g'(f(x)) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$= \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = x^2 + 1$$

양변을 x 에 대하여 적분하면

$$\ln|f(x)| = \frac{1}{3}x^3 + x + C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$$|f(x)| = e^{\frac{1}{3}x^3 + x + C}$$

조건 (가)에서 $f(0) = 1 > 0$ 이고 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 + x + C}$$

$$f(0) = 1 \text{ 에서}$$

$$C = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 + x} \text{ 이므로}$$

$$f(3) = e^{12}$$

18. [출제의도] 이항정리를 이용하여 부등식의 해결 과정을 완성한다.

$(1+x)^{2n}$ 의 전개식에서 x^n 의 계수는 $\boxed{2nC_n}$ 이다.

$(1+x)^n(1+x)^n$ 의 전개식에서 x^n 의 계수는

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \boxed{2nC_n} \text{ 성립한다.}$$

그러므로

$$\sum_{k=1}^n \{2k \times \binom{n}{k}^2\}$$

$$= \sum_{k=1}^n \{k \times \binom{n}{k}^2\} + \sum_{k=1}^n \{k \times \binom{n}{n-k}^2\}$$

$$= \{\binom{n}{1}^2 + 2 \times \binom{n}{2}^2 + \dots + n \times \binom{n}{n}^2\}$$

$$+ \{\binom{n}{n-1}^2 + 2 \times \binom{n}{n-2}^2 + \dots + n \times \binom{n}{0}^2\}$$

$$= \{\binom{n}{1}^2 + 2 \times \binom{n}{2}^2 + \dots + n \times \binom{n}{n}^2\}$$

$$+ \{n \times \binom{n}{0}^2 + (n-1) \times \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n-1}^2\}$$

$$= \boxed{n} \times \{\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2\}$$

$$= \boxed{n} \times \boxed{2nC_n}$$

이다. 한편

$$\sum_{k=1}^n \{2k \times \binom{n}{k}^2\} \geq 10 \times \boxed{2nC_{n+1}}$$

$$n \times 2nC_n \geq 10 \times \boxed{2nC_{n+1}}$$

$$n \times \frac{(2n)!}{n! \times n!} \geq 10 \times \frac{(2n)!}{(n+1)! \times (n-1)!}$$

$$n \times \frac{1}{n+1} \geq 10 \times \frac{1}{n+1}$$

$$n+1 \geq 10$$

$$n \geq 9$$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 $\boxed{9}$ 이다.

$$f(n) = \boxed{2nC_n}, g(n) = n, p = 9 \text{ 이므로}$$

$$f(3) + g(3) + p = \binom{6}{3} + 3 + 9$$

$$= 20 + 3 + 9$$

$$= 32$$

19. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구한다.

$$\angle BPA = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \angle QBR = \alpha \text{라 하면}$$

$$3\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{3}$$

$$\overline{BP} = \sin \theta \text{ 이므로}$$

$$\overline{PQ} = \sin \theta \tan 2\alpha$$

$$\begin{aligned} \overline{PR} &= \sin \theta \tan \alpha \\ \text{이다. 따라서} \\ S(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{BP} \times \overline{PQ} - \frac{1}{2} \times \overline{BP} \times \overline{PR} \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 \theta (\tan 2\alpha - \tan \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 \theta \left\{ \tan \left(\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\theta \right) - \tan \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{3} \right) \right\} \\ \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \\ &= 1 \text{이므로} \\ \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^2} &= \frac{1}{2} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \left\{ \tan \left(\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\theta \right) - \tan \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{3} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

20. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수의 성질을 추론 한다.

$$\begin{aligned} \neg. f(x) &= \int_0^x \sin(\pi \cos t) dt \text{에서} \\ f'(x) &= \sin(\pi \cos x) \\ f'(0) &= \sin(\pi \cos 0) \\ &= \sin \pi \\ &= 0 \text{ (참)} \end{aligned}$$

↳ 모든 실수 x 에 대하여

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_0^{-x} \sin(\pi \cos t) dt \\ -t = y \text{로 놓으면 } -\frac{dt}{dy} &= 1 \text{이므로} \\ t = 0 \text{일 때 } y = 0, t = -x \text{일 때 } y = x &\text{이므로} \\ f(-x) &= - \int_0^x \sin(\pi \cos(-y)) dy \\ &= - \int_0^x \sin(\pi \cos y) dy \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. (참)

$$\therefore \pi - t = y \text{라 하면 } -\frac{dt}{dy} = 1 \text{이므로}$$

$t = 0$ 일 때 $y = \pi$, $t = \pi$ 일 때 $y = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(\pi) &= \int_0^\pi \sin(\pi \cos t) dt \\ &= - \int_\pi^0 \sin(\pi \cos(\pi - y)) dy \\ &= - \int_\pi^0 \sin(-\pi \cos y) dy \\ &= \int_\pi^0 \sin(\pi \cos y) dy \\ &= - \int_0^\pi \sin(\pi \cos y) dy \\ &= -f(\pi) \end{aligned}$$

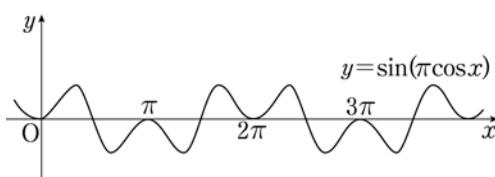
$2f(\pi) = 0$ 이므로

$f(\pi) = 0$ 이다. (참)

따라서 \neg , \lhd , \exists 모두 참이다.

[참고]

함수 $y = \sin(\pi \cos x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



21. [출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 함수의 미분계수를 구한다.

$$f(1) = (1 + a + b)e$$

$$\begin{aligned} &= e \text{에서} \\ a + b = 0 &\dots \text{①} \\ f'(x) &= \{x^2 + (a+2)x + a+b\}e^x \text{이므로} \\ f'(1) &= \{1 + (a+2) + a+b\}e \\ &= e \text{에서} \\ 2a + b = -2 &\dots \text{②} \\ \text{①, ②에서} \\ a = -2, b = 2 & \\ f(x) &= (x^2 - 2x + 2)e^x \text{에서} \\ f'(x) &= x^2 e^x \\ f''(x) &= x(x+2)e^x \text{이므로} \\ f''(1) &= 3e \\ \text{이때 모든 실수 } x \text{에 대하여 } f'(x) \geq 0 &\text{이므로} \\ \text{함수 } f(x) &\text{는 역함수가 존재한다.} \\ f(1) = e &\text{에서 } f^{-1}(e) = 1 \text{이므로} \\ \text{역함수의 미분법에 의하여} \\ (f^{-1})'(e) &= \frac{1}{f'(1)} \\ &= \frac{1}{e} \\ \text{한편 } g(f(1)) &= f'(1), \text{ 즉 } g(e) = e \text{이고} \\ g(f(x)) &= f'(x) \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ g'(f(x))f'(x) &= f''(x) \dots \text{③} \\ \text{③의 양변에 } x = 1 \text{을 대입하면} \\ g'(f(1))f'(1) &= f''(1) \\ g'(e) \times e &= 3e \\ g'(e) &= 3 \\ \text{따라서} \\ h'(e) &= (f^{-1})'(e)g(e) + f^{-1}(e)g'(e) \\ &= \frac{1}{e} \times e + 1 \times 3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

22. [출제의도] 로그부등식의 해를 구한다.

$$\begin{aligned} \text{진수의 조건에 의하여} \\ x - 2 > 0, x > 2 &\dots \text{①} \\ \log_2(x-2) < 2 &\text{에서 로그의 정의에 의하여} \\ x - 2 < 2^2, x < 6 &\dots \text{②} \\ \text{①, ②에서 } 2 < x < 6 \text{이다.} \\ \text{따라서 부등식을 만족시키는 자연수 } x &\text{는} \\ 3, 4, 5 \text{이므로 그 합은} \\ 3+4+5 &= 12 \end{aligned}$$

23. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 계산한다.

탄젠트 함수의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{4 + (-2)}{1 - 4 \times (-2)} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$p = 9, q = 2 \text{이므로} \\ p+q = 11$$

24. [출제의도] 자연수의 분할의 수와 집합의 분할의 수를 구한다.

$$5 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2$$

이므로 $P(5, 3) = 2^3$ 이다.

한편, 원소의 개수가 5인 집합을 공집합이 아닌 서로 다른 3개의 부분집합으로 분할할 때, 부분집합의 원소의 개수는 각각 1, 1, 3 또는 1, 2, 2이다.

(i) 부분집합의 원소의 개수가 각각 1, 1, 3인 경우 5개의 원소 중 3개를 선택하여 원소의 개수가 3인 부분집합을 만들고, 나머지 2개의 원소로 각각 원소의 개수가 1인 부분집합을 만들면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

(ii) 부분집합의 원소의 개수가 각각 1, 2, 2인 경우

5개의 원소 중 1개를 선택하여 원소의 개수가 1인 부분집합을 만들고, 나머지 4개의 원소 중 2개의 원소를 선택하여 원소의 개수가 2인 부분집합을 만들면 나머지 2개의 원소로 이루어진 부분집합이 정해진다. 이때 각 경우가 2가지씩 중복되므로 구하는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2} = 5 \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 1 \times \frac{1}{2} = 15$$

위의 (i), (ii)에 의하여

$$S(5, 3) = 10 + 15 = 25$$

따라서

$$P(5, 3) + S(5, 3) = 2 + 25 = 27$$

25. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 함수의 최댓값을 구한다.

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x, \quad \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos x \text{이므로} \\ f(x) &= \sin^2 x + \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + 1 \\ &= 1 - \cos^2 x + \cos x + 1 \\ &= - \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 $\cos x = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{9}{4}$ 를 갖는다.

따라서 $M = \frac{9}{4}$ 이므로

$$4M = 9$$

26. [출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 구한다.

선택한 7개의 문자 중 A, B, C의 개수를 차례로 a, b, c 라 하면 세 수 a, b, c 는 모두 홀수이고 그 합이 7이어야 하므로 다음 경우가 나온다.

(i) $(a, b, c) = (1, 1, 5)$ 인 경우

7개의 문자 A, B, C, C, C, C, C를 일렬로 나열하는 경우의 수는 7개 중 같은 것이 각각 1개, 1개, 5개 있는 순열의 수와 같으므로

$$\frac{7!}{5!} = 7 \times 6 = 42$$

$(a, b, c) = (1, 5, 1), (5, 1, 1)$ 인 경우의 수도 모두 42이다.

(ii) $(a, b, c) = (1, 3, 3)$ 인 경우

7개의 문자 A, B, B, B, C, C, C를 일렬로 나열하는 경우의 수는 7개 중 같은 것이 각각 1개, 3개, 3개 있는 순열의 수와 같으므로

$$\frac{7!}{3! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1)} = 140$$

$(a, b, c) = (3, 1, 3), (3, 3, 1)$ 인 경우의 수도 모두 140이다.

위의 (i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $3 \times 42 + 3 \times 140 = 546$

27. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 합수값을 구한다.

$$x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt = ae^{2x} - 4x + b \dots \text{①}$$

①의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$0 = a + b \dots \text{②}$$

②의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = 2ae^{2x} - 4$$

$$\therefore \int_0^x f(t) dt = 2ae^{2x} - 4 \dots \text{③}$$

③의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$0 = 2a - 4, \therefore a = 2$$

이므로 ②에서 $b = -2$ 이다.

$\int_0^x f(t) dt = 4e^{2x} - 4$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 8e^{2x} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}f(a)f(b) &= f(2)f(-2) \\&= (8e^4) \times (8e^{-4}) \\&= 64e^{4-4} \\&= 64\end{aligned}$$

28. [출제의도] 정적분의 정의를 이용하여 급수의 합을 구한다.

$x_k = 1 + \frac{k}{n}$ 로 놓으면 $\Delta x = \frac{1}{n}$ 으로 정적분의 정의에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \\= \int_1^2 (x-1)f(x)dx$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x-1) \ln x dx &= \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) dx \\&= (0-0) - \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) dx \\&= - \left[\frac{1}{4}x^2 - x \right]_1^2 \\&= -(1-2) + \left(\frac{1}{4} - 1 \right) \\&= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$p=4, q=1$ 이므로
 $p+q=5$

29. [출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구한다.

6개의 파일에서 선택한 4개의 파일 중 사과, 배, 귤의 개수를 각각 x, y, z 라 하자.

(i) $(x, y, z)=(0, 2, 2)$ 인 경우

배 2개와 귤 2개를 2명의 학생에게 나누어주는 경우의 수는 각각 ${}_2H_2, {}_2H_2$ 이고, 4개의 파일을 한 명의 학생에게 모두 주는 경우는 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$${}_2H_2 \times {}_2H_2 - 2 = {}_3C_2 \times {}_3C_2 - 2 \\= 3 \times 3 - 2 \\= 7$$

$(x, y, z)=(2, 0, 2), (2, 2, 0)$ 인 경우의 수도 모두 7이다.

(ii) $(x, y, z)=(1, 1, 2)$ 인 경우

사과 1개, 배 1개, 귤 2개를 2명의 학생에게 나누어주는 경우의 수는 차례로 ${}_2H_1, {}_2H_1, {}_2H_2$ 이고, 4개의 파일을 한 명의 학생에게 모두 주는 경우는 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$${}_2H_1 \times {}_2H_1 \times {}_2H_2 - 2 = {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_3C_2 - 2 \\= 2 \times 2 \times 3 - 2 \\= 10$$

$(x, y, z)=(1, 2, 1), (2, 1, 1)$ 인 경우의 수도 모두 10이다.

위의 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 7 + 3 \times 10 = 51$$

[다른 풀이]

6개의 파일에서 선택한 4개의 파일 중 사과, 배, 귤의 개수를 각각 x, y, z 라 하고, 2명의 학생을 각각 A, B라 하자.

이때 파일을 하나도 받지 못하는 학생이 없어야 하고, 학생 A가 받는 파일이 정해지면 학생 B가 받는 파일도 정해진다.

(i) $(x, y, z)=(0, 2, 2)$ 인 경우

학생 A가 받는 배와 귤의 수를 순서쌍으로 나타내면

$(0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1)$ 이므로 구하는 경우의 수는 7이다.

이때 $(x, y, z)=(2, 0, 2), (2, 2, 0)$ 인 경우의 수도 모두 7이다.

(ii) $(x, y, z)=(1, 1, 2)$ 인 경우

학생 A가 받는 사과, 배, 귤의 수를 순서쌍으로 나타내면

$(0, 0, 1), (0, 0, 2), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$

이므로 구하는 경우의 수는 10이다.

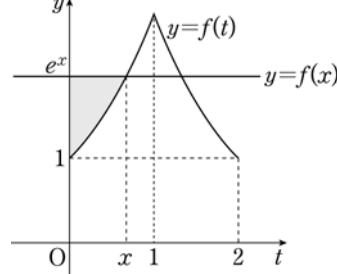
이때 $(x, y, z)=(1, 2, 1), (2, 1, 1)$ 인 경우의 수도 모두 10이다.

위의 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 7 + 3 \times 10 = 51$$

30. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수의 극댓값과 극솟값을 구하는 문제를 해결한다.

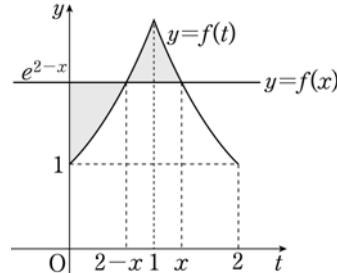
(i) $0 < x \leq 1$ 일 때,



그림에서 $0 < t \leq x$ 일 때, $f(x) \geq f(t)$ 이므로

$$\begin{aligned}g(x) &= \int_0^x |f(x) - f(t)| dt \\&= \int_0^x \{f(x) - f(t)\} dt \\&= \int_0^x (e^x - e^t) dt \\&= \left[te^x - e^t \right]_0^x \\&= xe^x - e^x + 1 \\&= (x-1)e^x + 1\end{aligned}$$

(ii) $1 < x < 2$ 일 때,



그림에서

$0 < t < 2-x$ 일 때, $f(x) \geq f(t)$
 $2-x \leq t < x$ 일 때, $f(x) \leq f(t)$ 이므로

$$\begin{aligned}g(x) &= \int_0^x |f(x) - f(t)| dt \\&= \int_0^{2-x} \{f(x) - f(t)\} dt \\&\quad + \int_{2-x}^x \{f(t) - f(x)\} dt\end{aligned}$$

위의 (i)에 의하여

$$\begin{aligned}\int_0^{2-x} \{f(x) - f(t)\} dt &= (2-x-1)e^{2-x} + 1 \\&= (1-x)e^{2-x} + 1\end{aligned}$$

한편, 함수 $y=e^{2-x}$ 의 그래프는 함수 $y=e^x$ 의 그래프와 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이므로

$$\int_{2-x}^x \{f(t) - f(x)\} dt$$

$$= 2 \int_1^x \{f(t) - f(x)\} dt$$

$$= 2 \int_1^x (e^{2-t} - e^{2-x}) dt$$

$$= 2 \left[-e^{2-t} - te^{2-x} \right]_1^x$$

$$= 2 \{ (-e^{2-x} - xe^{2-x}) - (-e - e^{2-x}) \}$$

$$= 2e - 2xe^{2-x}$$

따라서

$$g(x) = (1-x)e^{2-x} + 1 + 2e - 2xe^{2-x}$$

$$= (1-3x)e^{2-x} + 2e + 1$$

위의 (i), (ii)에서

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)e^x + 1 & (0 < x \leq 1) \\ (1-3x)e^{2-x} + 2e + 1 & (1 < x < 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$g'(x) = \begin{cases} xe^x & (0 < x < 1) \\ (3x-4)e^{2-x} & (1 < x < 2) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	(0)	...	1	...	$\frac{4}{3}$...	(2)
$g'(x)$		+		-	0	+	
$g(x)$		\nearrow	\geq	\searrow	\geq	\nearrow	

$$(\text{극댓값}) = g(1)$$

$$= (1-1)e + 1$$

$$= 1$$

$$(\text{극솟값}) = g\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$= (1-4)e^{\frac{2}{3}} + 2e + 1$$

$$= 2e - 3e^{\frac{2}{3}} + 1$$

함수 $g(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 차는

$$1 - \left(2e - 3e^{\frac{2}{3}} + 1 \right) = -2e + 3e^{\frac{2}{3}}$$

$$= -2e + 3\sqrt[3]{e^2}$$

$$a = -2, b = 3 \text{이므로}$$

$$(ab)^2 = 36$$