

# 2010년 한국수학올림피아드 고등부 수행평가

유형 가

2010년 6월 12일; 제한시간 4시간

1. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.  
예를 들면, 답이 “7”일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1~4 번은 각 4 점, 문제 17~20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 정삼각형  $ABC$ 의 내부의 점  $D$ 에 대하여  $DB^2 + DC^2 + BC^2 = 100$  이고  $\triangle DBC$ 의 넓이가  $5\sqrt{3}$ 일 때, 점  $A$ 에서  $D$ 까지의 거리의 제곱을 구하여라.

2. 심사위원 갑, 을, 병, 정이 각각 1, 2, 3, 4, 5점 중의 한 점수로 어떤 사원을 평가한다. 이때 평가점수의 합계가 13점이 되는 경우의 수를 구하여라.

3. 다음 값을 구하여라.

$$615^5 - 5 \cdot 614^5 + 10 \cdot 613^5 - 10 \cdot 612^5 + 5 \cdot 611^5 - 610^5$$

4. 모든 양의 정수  $n$ 에 대하여  $a_n$ 을

$$a_n = -\frac{2010}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \quad (\text{단 } a_0 = 2009)$$

로 정의한다. 이때  $\sum_{n=1}^{2010} n2^n a_n$ 을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

5. 정수  $a, b, c, d$ 가 조건

$$a + bd + cd^2 + 3d^3 = 0, \quad |a|, |b|, |c| \leq 400$$

을 만족할 때,  $|d|$ 의 최댓값을 구하여라.

6. 방정식  $x^{11} + 11x + 1 = 0$ 이 10개의 허근  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{10}$ 을 갖는다. 이때

$$S = \left| \sum_{j=1}^{10} \alpha_j^{10} \right|$$

과 가장 가까운 정수를 구하여라.

7. 정수  $x$ 에 대하여 다음 두 등식을 만족하는 정수  $a, b, c, d$ 가 존재한다.

$$a+b+c+d = 800, \quad (x-a)^2(x-b)(x-c)(x-d) = 420$$

이러한 정수  $x$  중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 차를 구하여라.

8. 삼각형  $ABC$ 에서  $AB = 2\sqrt{26}$ ,  $AC = 2\sqrt{2}$ ,  $BC = 8$ 이다. 세변  $BC, CA, AB$ 의 중점이 각각  $X, Y, Z$ 이고 세 삼각형  $AZY, BZX, CYX$ 의 외심이 각각  $P, Q, R$ 이다.  $\triangle XYZ$ 의 외접원의 중심이  $O_1$ ,  $\triangle PQR$ 의 외접원의 중심이  $O_2$ 일 때,  $(O_1O_2)^2$ 의 값을 구하여라.

9. 집합  $S = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$ 의 부분집합 중, 원소가 3개이고 다음 조건을 만족하는 집합  $A$ 의 개수를 구하여라.

$$\sum_{\alpha \in A} \alpha^7 \equiv \sum_{\beta \in S-A} \beta^7 \pmod{31}$$

10. 함수  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 는 다음 두 조건 (a)와 (b)를 모두 만족한다.

(a) 모든 양의 실수  $x, y$ 에 대하여

$$x \neq y \text{ 이면 } f(x) \neq f(y).$$

(b) 모든 양의 실수  $x$ 에 대하여

$$f(x) \cdot f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

이때,  $(2f(1) - 1)^2$ 을 구하여라.

11. 모든 성분이 음이 아닌 정수인  $4 \times 4$  행렬 중, 각 행의 성분의 합과 각 열의 성분의 합이 모두 2인 행렬의 개수를 구하여라.

12. 삼각형  $ABC$ 의 변  $AB$ 의 중점이  $D$ 이다. 변  $BC$ 의 삼등분점 2개를 모두 지나고 점  $D$ 에서 변  $AB$ 에 접하는 원이 변  $CA$ 와 두 점  $P, Q$ 에서 만난다.  $\triangle PDQ$ 의 넓이는  $\triangle ABC$ 의 넓이의  $\frac{1}{4}$ 이고  $CA = 8\sqrt{3}$ 일 때,  $AB$ 의 길이를 구하여라.

13. 서로소인 양의 정수  $p, q$ 가 다음 등식을 만족시킬 때  $p + q$ 의 값을 구하여라.

$$\frac{p}{q} = \cos^{10} \frac{\pi}{5} + \cos^{10} \frac{2\pi}{5} + \cos^{10} \frac{3\pi}{5} + \cos^{10} \frac{4\pi}{5}$$

14. 1부터 10까지의 양의 정수의 집합을  $A$ 라 하고, 일대일대응  $f : A \rightarrow A$ 에 대하여

$$M_f = \sum_{k=1}^{10} |f(k) - k|$$

으로 정의하자.  $M_f$ 가 가질 수 있는 최댓값을  $M$ 이라 할 때,  $M_f = M$ 이 되는 일대일대응  $f$ 의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

15. 반지름이 20인 원  $T_1$ 과 반지름이 40인 원  $T_2$ 의 두 공통외접선이 점  $A$ 에서 만나고, 두 원의 공통내접선이  $T_1$ 과 점  $P$ 에서 만나고,  $T_2$ 와 점  $Q$ 에서 만난다. 선분  $AQ$ 의 길이가 100일 때, 선분  $PQ$ 의 길이를 구하여라.

16. 세 자리 소수  $p$ 에 대하여  $x, y$ 에 관한 방정식  $x^3 + y^3 = p^2$ 이 정수해를 가진다. 소수  $p$ 를 구하여라.

17. 방정식  $x^3 - 3x + 1 = 0$ 의 세 실근  $a, b, c$  ( $a < b < c$ )에 대하여  $20(a^2 + b^2 - a - c)$ 를 구하여라

18. 볼록사각형  $ABCD$ 에 대하여  $\triangle ABC$ 의 외심이  $O$ 이고, 직선  $AO$ 가  $\triangle ABC$ 의 외접원과 만나는 점이  $E$ 이다.  $\angle D = 90^\circ$ ,  $\angle BAE = \angle CDE$ ,  $AB = 4\sqrt{2}$ ,  $AC = CE = 5$ 일 때,  $\sqrt{10}DE$ 의 값을 구하여라.

19. 5명의 야구선수가 자신의 글러브와 배트를 각각 하나씩 상자에 넣은 후, 글러브와 배트를 하나씩 꺼낸다. 다음 두 조건을 모두 만족하도록 꺼내는 경우의 수를 구하여라.

(a) 누구도 자신의 물건은 하나도 꺼내지 않는다.

(b) 각 선수가 꺼낸 글러브와 배트의 주인은 서로 다르다.

20. 3의 배수가 아닌 양의 홀수  $n$ 에 대하여,  $n$ 개의 수

$$1 \cdot 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 4, 3 \cdot 4 \cdot 5, \dots, n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

중에서  $n$ 과 서로소인 수가 140개이다. 이러한  $n$  중에서 가장 큰 수를 구하여라.