

# 2017학년도 4월 고3 전국연합학력평가

## 정답 및 해설

### • 2교시 수학 영역 •

#### [나형]

1	②	2	③	3	③	4	④	5	⑤
6	①	7	②	8	⑤	9	①	10	④
11	③	12	⑤	13	①	14	④	15	③
16	②	17	①	18	②	19	⑤	20	④
21	②	22	7	23	12	24	9	25	92
26	3	27	120	28	5	29	19	30	760

1. [출제의도] 지수 계산하기

$$\frac{3}{2} \times 4^{-1} = 4^{\frac{3}{2}-1} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

2. [출제의도] 집합의 연산 계산하기

$$A \cap B = \{2, 4, 6\}$$

$$\therefore n(A \cap B) = 3$$

3. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + n}{n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{5}{n^2}} = 7$$

4. [출제의도] 역함수 이해하기

$$f(8) = 2$$

$$\therefore f^{-1}(2) = 8$$

5. [출제의도] 등차수열의 합 이해하기

등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$  항까지의 합을  $S_n$ 이라 할 때,

$$S_{10} = \frac{10 \times \{2 \times 3 + (10-1) \times 2\}}{2} = 120$$

6. [출제의도] 무리함수의 그래프 이해하기

좌표평면에서 무리함수  $y = \sqrt{x+4} + a$ 의 그래프가 점  $(5, 7)$ 을 지나므로  $7 = \sqrt{5+4} + a$

$$\therefore a = 4$$

점  $(0, b)$ 를 지나므로  $b = \sqrt{0+4} + 4 = 6$

따라서  $a+b = 10$

7. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$f(0) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 + 0 = 2$$

8. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$$\alpha + \beta = 18, \alpha \beta = 6$$

$$\log_2(\alpha + \beta) - 2\log_2\alpha\beta$$

$$= \log_2 18 - \log_2 6^2 = \log_2 \frac{18}{36} = \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

9. [출제의도] 이항정리 이해하기

다항식  $(x+3)^n$ 의 전개식의 일반항은  ${}_nC_r x^r 3^{n-r}$

상수항이 81이므로  $r=0$ 일 때,  ${}_nC_0 \times 3^n = 81$

따라서  $n = 4$

$(x+3)^4$ 의 전개식에서  $x$ 항은

$${}_4C_1 \times x \times 3^3 = 4 \times 27 \times x = 108x$$

따라서  $x$ 의 계수는 108

10. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$$\sum_{n=1}^{10} (3a_n + b_n - 2) = 3 \sum_{n=1}^{10} a_n + \sum_{n=1}^{10} b_n - \sum_{n=1}^{10} 2$$

$$= 3 \times 9 + 7 - 2 \times 10$$

$$= 14$$

11. [출제의도] 자연수의 분할 이해하기

구하는 경우의 수는 9를 3개의 자연수로 분할하는 경우의 수와 같다.

$$\begin{aligned} 9 &= 7+1+1 \\ &= 6+2+1 \\ &= 5+3+1 \\ &= 5+2+2 \\ &= 4+4+1 \\ &= 4+3+2 \\ &= 3+3+3 \end{aligned}$$

따라서 구하는 경우의 수는 7

12. [출제의도] 수열의 극한의 성질 이해하기

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{3n} \times \frac{2n+3}{b_n} \right) = 12$$

$$\frac{a_n}{3n} \times \frac{2n+3}{b_n} = c_n \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 12$$

$$\frac{a_n}{b_n} = c_n \times \frac{3n}{2n+3} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( c_n \times \frac{3n}{2n+3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n+3} \\ &= 12 \times \frac{3}{2} = 18 \end{aligned}$$

13. [출제의도] 로그의 정의 이해하기

$a$ 가 밀이므로  $a > 0, a \neq 1 \dots \dots \textcircled{1}$

진수  $x^2 + 2ax + 5a$ 는 모든 실수  $x$ 에 대하여

$x^2 + 2ax + 5a > 0$ 이므로

판별식  $D = 4a^2 - 20a = 4a(a-5) < 0$

$0 < a < 5 \dots \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서  $0 < a < 5, a \neq 1$

따라서 정수  $a$ 는 2, 3, 4이고 합은 9

14. [출제의도] 유리함수의 그래프 이해하기

유리함수  $y = \frac{4x+1}{2x+a} \Leftrightarrow y = \frac{1-2a}{2x+a} + 2$ 이므로

두 점근선의 방정식은  $x = -\frac{a}{2}, y = 2$

두 점근선의 교점은  $\left(-\frac{a}{2}, 2\right)$

점  $\left(-\frac{a}{2}, 2\right)$ 가 직선  $y = x+1$  위에 있으므로

$$2 = -\frac{a}{2} + 1$$

$$\therefore a = -2$$

15. [출제의도] 집합의 연산을 활용하여 문제해결하기

학생 50명 전체집합을  $U$ 라 하면  $n(U) = 50$

현혈을 희망한 학생들의 집합을  $A$ 라 하면  $n(A) = 28$

환경보호활동을 희망한 학생들의 집합을  $B$ 라 하면

$n(B^C) = 10$ 이므로  $n(B) = 40$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

$$= 28 + 40 - n(A \cup B)$$

$$= 68 - n(A \cup B)$$

$n(A \cup B)$ 는  $A \subset B$ 일 때, 최댓값 40을 갖는다.

따라서  $n(A \cap B)$ 의 최댓값은 28

$n(A \cup B)$ 는  $A \cup B = U$ 일 때, 최댓값 50을 갖는다.

따라서  $n(A \cap B)$ 의 최솟값은 18

$$\therefore M+m = 28+18 = 46$$

16. [출제의도] 급수와 일반항의 관계 이해하기

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n a_n - 2^{n+1}}{2^n + 1} = 1 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n a_n - 2^{n+1}}{2^n + 1} = 0$$

$$\frac{2^n a_n - 2^{n+1}}{2^n + 1} = b_n \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$a_n = \frac{(2^n+1)b_n + 2^{n+1}}{2^n} \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n+1)b_n + 2^{n+1}}{2^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) b_n + 2 \right) = 2$$

17. [출제의도] 지수법칙을 활용하여 추론하기

$$(i) \sqrt{\frac{2^a \times 5^b}{2}} = 2^{\frac{a-1}{2}} \times 5^{\frac{b}{2}} \text{이 자연수이므로}$$

$a-1 = 2m, a = 2m+1 (m$ 은 음이 아닌 정수)

$a = 1, 3, 5, \dots$

$b = 2n (n$ 은 자연수)

$b = 2, 4, 6, \dots$

$$(ii) \sqrt[3]{\frac{3^b}{2^{a+1}}} = \frac{3^{\frac{b}{3}}}{2^{\frac{a+1}{3}}} \text{이 유리수이므로}$$

$a+1 = 3k, a = 3k-1 (k$ 는 자연수)

$a = 2, 5, 8, \dots$

$b = 3l (l$ 은 자연수)

$b = 3, 6, 9, \dots$

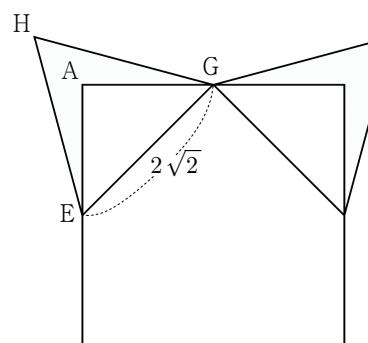
(i), (ii)에 의하여

$a$ 의 최솟값은 5,  $b$ 의 최솟값은 6

따라서  $a+b$ 의 최솟값은 11

18. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제해결하기

그림  $R_1$ 에서



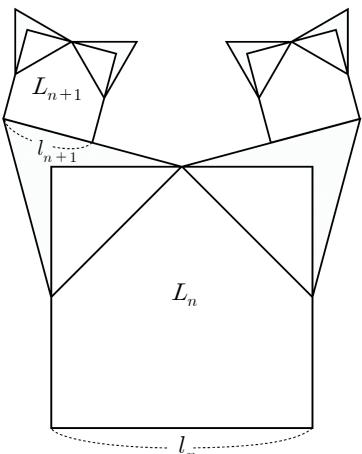
$S_1$ 은 정삼각형 EGH의 넓이에서 삼각형 EGA의 넓이를 뺀 값의 2배이므로

$$S_1 = 2 \times \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right\}$$

$$= 2 \times (2\sqrt{3} - 2)$$

$$= 4(\sqrt{3} - 1)$$

다음은 그림  $R_{n+1}$ 의 일부이다.



정사각형  $L_n$ 의 한 변의 길이를  $l_n$ 이라 하면  
정사각형  $L_{n+1}$ 의 한 변의 길이

$$l_{n+1} = \frac{l_n}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} l_n$$

정사각형  $L_n$ 과 정사각형  $L_{n+1}$ 은 서로 닮음이고

$$\text{닮음비는 } l_n : l_{n+1} = 1 : \frac{\sqrt{2}}{4}$$

그러므로 그림  $R_n$ 과  $R_{n+1}$ 에서 새로 얻어진

모양의 도형도 서로 닮음이고

$$\text{닮음비가 } 1 : \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ 이므로 넓이의 비는 } 1 : \frac{1}{8} \text{ 이다.}$$

또 새로 얻어지는 모양의 도형의 개수가 2배씩 늘어나므로

$S_n$ 은 첫째항이  $4(\sqrt{3}-1)$ 이고 공비가  $\frac{1}{8}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합이다.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{4(\sqrt{3}-1)}{1-\frac{1}{8}} = \frac{16}{3}(\sqrt{3}-1)$$

### 19. [출제의도] 명제를 활용하여 추론하기

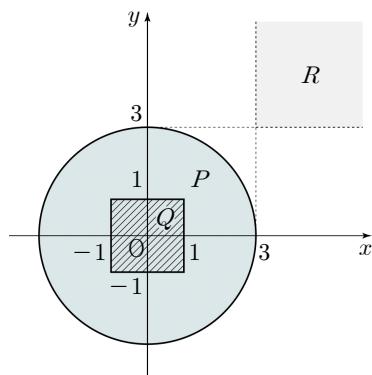
두 실수  $x, y$ 에 대한 세 조건  $p, q, r$ 의 진리집합을 각각  $P, Q, R$ 라 하면

$$P = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\},$$

$$Q = \{(x, y) \mid |x| \leq 1 \text{이고 } |y| \leq 1\},$$

$$R = \{(x, y) \mid x > 3 \text{이고 } y > 3\} \text{이므로}$$

$P, Q, R$ 를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



ㄱ.  $Q \subset P$ 이므로  $q \rightarrow p$ 는 참이다.

ㄴ.  $P \subset R^C$ 이므로  $p \rightarrow \sim r$ 는 참이다.

ㄷ.  $R \subset Q^C$ 이므로  $r \rightarrow \sim q$ 는 참이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

### 20. [출제의도] 순열 추론하기

(i) 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 모든 경우의 수는 216이다.

(ii) 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 홀수인 경우는 1, 3, 5 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택한 후 일렬로 배열하는 중복순열과 같으므로

$$\text{이 경우의 수는 } {}_3\Pi_3 = 3^3 = \boxed{27} \text{ 이다.}$$

(iii) 6 이하의 짝수는 2, 4, 6이므로

세 수의 곱이 2인 경우의 수는 2, 1, 1을 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로  $\frac{3!}{2!} = 3$

4인 경우의 수는 4, 1, 1 또는 2, 2, 1을 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} = 3 + 3 = 6$$

6인 경우의 수는 6, 1, 1 또는 3, 2, 1을 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!} + 3! = 3 + 6 = 9 \text{ 이다.}$$

그러므로 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 6 이하의 짝수인 경우의 수는  $3+6+9 = \boxed{18}$ 이다.

따라서 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 8 이상의 짝수인 경우의 수는  $216 - 27 - 18 = \boxed{171}$ 이다.

$$\therefore a = 27, b = 18, c = 171$$

$$\text{따라서 } 3a + 2b + c = 288$$

### 21. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

삼각형 POQ가 이등변삼각형이므로

점 Q의 좌표는  $(2t, 0)$

삼각형 POQ의 넓이는

$$S(t) = \frac{1}{2} \times 2t \times t^2 = t^3$$

삼각형 PRO가 이등변삼각형이므로 선분 OP의 수직이등분선이  $y$ 축과 만나는 점이 R이다.

선분 OP의 중점을 M이라 하면  $M\left(\frac{t}{2}, \frac{t^2}{2}\right)$ 이고

직선 MR의 기울기는  $-\frac{1}{t}$ 이므로

직선 MR의 방정식은

$$y - \frac{t^2}{2} = -\frac{1}{t}(x - \frac{t}{2})$$

$$y = -\frac{1}{t}x + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore R\left(0, \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

삼각형 PRO의 넓이는

$$T(t) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right) \times t = \frac{1}{4}(t^3 + t)$$

$$\text{따라서 } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - S(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{4}(t^3 + t) - t^3}{t} \\ = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(-\frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}\right) \\ = \frac{1}{4}$$

### 22. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+6)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+6) = 7$$

### 23. [출제의도] 등차중항 이해하기

$a_4$ 는  $a_2$ 와  $a_6$ 의 등차중항이므로

$$2a_4 = a_2 + a_6 = 8 + 16$$

$$\therefore a_4 = 12$$

### 24. [출제의도] 절대부등식 이해하기

$a > 0$ 이므로

$$(a+4)\left(\frac{1}{a} + 1\right) = 1 + a + \frac{4}{a} + 4 \\ \geq 5 + 2\sqrt{a \times \frac{4}{a}} \\ = 5 + 4 = 9$$

(단, 등호는  $a = 2$ 일 때 성립한다.)

따라서 최솟값은 9

### 25. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

$a_{n+1} = 2(a_n + 2)$ 의  $n$ 에 1, 2, 3, 4를

차례로 대입하면

$$a_2 = 2(a_1 + 2) = 2 \times (2 + 2) = 8$$

$$a_3 = 2(a_2 + 2) = 2 \times (8 + 2) = 20$$

$$a_4 = 2(a_3 + 2) = 2 \times (20 + 2) = 44$$

$$a_5 = 2(a_4 + 2) = 2 \times (44 + 2) = 92$$

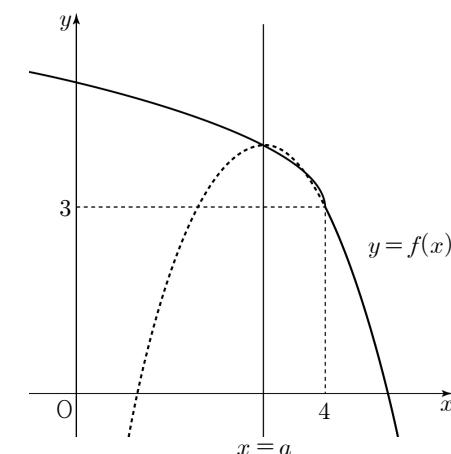
### 26. [출제의도] 일대일 대응을 활용하여 문제해결하기

함수  $f(x)$ 가 일대일 대응이 되기 위해서는

곡선  $y = -(x-a)^2 + 4 (x \geq 4)$ 가 점  $(4, 3)$ 을

지나야 하고, 곡선  $y = -(x-a)^2 + 4$ 의

축이  $x = a$ 이므로  $a \leq 4$ 이다.



$$3 = -(4-a)^2 + 4$$

$$a^2 - 8a + 15 = 0$$

$$(a-3)(a-5) = 0$$

$$\therefore a = 3 \text{ 또는 } a = 5$$

$$a \leq 4 \text{이므로 } a = 3$$

### 27. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)a_k = n(n+1)(4n-1) = S_n \text{이라 하면}$$

수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여  $n \geq 2$ 일 때

$$(2n-1)a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n(n+1)(4n-1) - (n-1)n(4n-5)$$

$$= n(12n-6)$$

$$= 6n(2n-1)$$

$$a_n = 6n (n \geq 2), a_1 = S_1 = 6$$

$$\therefore a_n = 6n (n \geq 1)$$

$$\text{따라서 } a_{20} = 120$$

### 28. [출제의도] 수열의 극한을 활용하여 문제해결하기

직선  $x = 1$ 이 두 곡선  $y = \frac{4}{x}$ ,  $y = -\frac{6}{x}$ 과 만나는

점 A의 좌표는  $(1, 4)$ , 점 B의 좌표는  $(1, -6)$

직선  $x = n+1$ 이 곡선  $y = \frac{4}{x}$ 와 만나는

점  $P_n$ 의 좌표는  $\left(n+1, \frac{4}{n+1}\right)$

직선  $x = n+1$ 이 곡선  $y = -\frac{6}{x}$ 과 만나는

점  $Q_n$ 의 좌표는  $\left(n+1, -\frac{6}{n+1}\right)$

사다리꼴  $ABQ_nP_n$ 의 넓이는

$$S_n = \frac{1}{2} \times n \times \left(10 + \frac{4}{n+1} + \frac{6}{n+1}\right) \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} \left(10 + \frac{10}{n+1}\right) = 5$$

### 29. [출제의도] 함수의 연속을 활용하여 문제해결하기

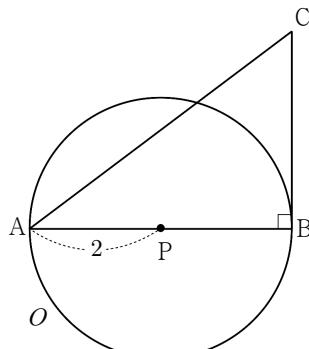
[그림1]과 같이  $x=2$ 일 때,

원  $O$ 가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수는 3이다.

$$\therefore f(2)=3$$

$0 < x < 2$ 에서 원  $O$ 가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.

$$\therefore f(x)=2 \quad (0 < x < 2)$$



[그림1]

[그림2]와 같이 원  $O$ 가 선분 AC에 접할 때, 접하는 점을 H라 하면 삼각형 AHP와 삼각형 ABC는 닮음이므로

$$\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{HP}$$

$$5 : 3 = x : 2$$

$$x = \frac{10}{3}$$

$$x = \frac{10}{3} \text{ 일 때, } f\left(\frac{10}{3}\right) = 3$$

$2 < x < \frac{10}{3}$ 에서 원  $O$ 가 삼각형 ABC와

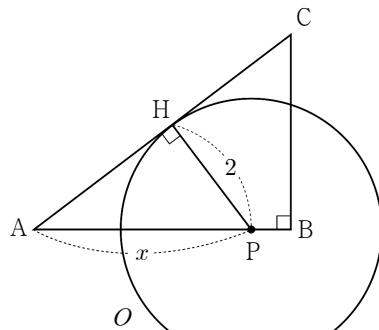
만나는 서로 다른 점의 개수는 4이다.

$$\therefore f(x)=4 \quad (2 < x < \frac{10}{3})$$

$\frac{10}{3} < x < 4$ 에서 원  $O$ 가 삼각형 ABC와

만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.

$$\therefore f(x)=2 \quad (\frac{10}{3} < x < 4)$$

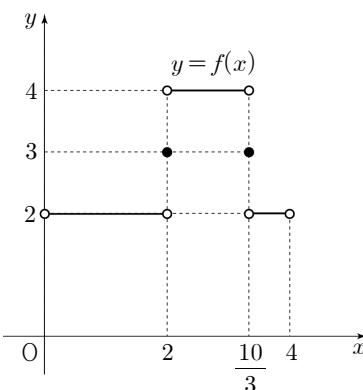


[그림2]

따라서

$$f(x)=\begin{cases} 2 & (0 < x < 2) \\ 3 & (x=2) \\ 4 & (2 < x < \frac{10}{3}) \\ 3 & (x=\frac{10}{3}) \\ 2 & (\frac{10}{3} < x < 4) \end{cases}$$

함수  $y=f(x)$ 를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



함수  $f(x)$ 가  $x=2$ ,  $x=\frac{10}{3}$ 에서 불연속이므로

모든 실수  $a$ 의 값의 합은  $2 + \frac{10}{3} = \frac{16}{3}$ 이다.

$$\therefore p=3, q=16$$

따라서  $p+q=19$

### 30. [출제의도] 중복조합을 활용하여 추론하기

자연수  $n$ 에 대하여 0부터  $n$ 까지 정수가 하나씩

적힌  $(n+1)$ 개의 공이 들어 있는 상자에서

한 개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시 넣는 5번의 과정 중  $m$  번째 꺼낸 공에 적힌 수를  $f(m)$ 이라 할 때,

조건 (가)에 의하여

$$f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)$$

조건 (나)에 의하여  $f(3)=f(1)+1$

$$f(1)=a \quad (a=0, 1, 2, \dots, n-1) \text{이라 하면}$$

$$f(3)=a+1$$

$$a \leq f(2) \leq a+1 \leq f(4) \leq f(5)$$

(i)  $a=0$ 일 때,

$$0 \leq f(2) \leq 1 \leq f(4) \leq f(5)$$

$f(2)$ 를 선택하는 경우는 0 또는 1의 두 가지이고  $f(4)$ ,  $f(5)$ 를 선택하는 경우의 수는

1, 2, 3, ...,  $n$  중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_nH_2 = {}_{n+1}C_2$$

$$\therefore 2 \times {}_{n+1}C_2$$

(ii)  $a=1$ 일 때,

$$1 \leq f(2) \leq 2 \leq f(4) \leq f(5)$$

$f(2)$ 를 선택하는 경우는 1 또는 2의 두 가지이고  $f(4)$ ,  $f(5)$ 를 선택하는 경우의 수는

2, 3, 4, ...,  $n$  중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{n-1}H_2 = {}_nC_2$$

$$\therefore 2 \times {}_nC_2$$

(iii)  $a=k$ 일 때,

$$k \leq f(2) \leq k+1 \leq f(4) \leq f(5)$$

$f(2)$ 를 선택하는 경우는  $k$  또는  $k+1$ 의 두 가지이고  $f(4)$ ,  $f(5)$ 를 선택하는 경우의 수는

$k+1, k+2, k+3, \dots, n$  중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{n-k}H_2 = {}_{n-k+1}C_2$$

$$\therefore 2 \times {}_{n-k+1}C_2$$

$0 \leq k \leq n-1$ 이므로

$$a_n = 2({}_{n+1}C_2 + {}_nC_2 + {}_{n-1}C_2 + \dots + {}_3C_2 + {}_2C_2)$$

$$= 2({}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \dots + {}_nC_2 + {}_{n+1}C_2)$$

$$= 2({}_3C_3 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \dots + {}_nC_2 + {}_{n+1}C_2)$$

한편,  ${}_nC_{r-1} + {}_nC_r = {}_{n+1}C_r$  ( $1 \leq r \leq n$ )이므로

$$a_n = 2 \times {}_{n+2}C_3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{18} \frac{a_n}{n+2} = \sum_{n=1}^{18} \frac{n(n+1)}{3} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{18} (n^2 + n)$$

$$= \frac{1}{3} \left( \frac{18 \times 19 \times 37}{6} + \frac{18 \times 19}{2} \right) = 760$$

### [다른 풀이]

자연수  $n$ 에 대하여 0부터  $n$ 까지 정수가 하나씩 적힌  $(n+1)$ 개의 공이 들어 있는 상자에서 한 개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시 넣는 5번의 과정 중  $m$  번째 꺼낸 공에 적힌 수를  $f(m)$ 이라 할 때,

조건 (가)에 의하여

$$f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)$$

조건 (나)에 의하여  $f(3)=f(1)+1$

$$f(1)=a \quad (a=0, 1, 2, \dots, n-1) \text{이라 하면}$$

$$f(3)=a+1$$

$$a \leq f(2) \leq a+1 \leq f(4) \leq f(5)$$

(i)  $f(2)$ 를 선택하는 경우는

$$f(2)=a \text{ 또는 } f(2)=a+1 \text{ 이므로}$$

이 경우의 수는 2 ..... ①

(ii)  $f(3)$ 이 결정되면  $f(1)$ 은 유일하므로

$$f(3), f(4), f(5) \text{를 선택하는 경우만 고려하면 된다.}$$

$$f(3)=a+1 \geq 1 \text{ 이므로}$$

$f(3), f(4), f(5)$ 를 선택하는 경우는

1부터  $n$  까지 수 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같다.

이 경우의 수는  ${}_nH_3$  ..... ②

①, ②에 의하여

$$a_n = 2 \times {}_nH_3 = 2 \times {}_{n+2}C_3 = 2 \times \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{18} \frac{a_n}{n+2} = 760$$