



제 27회 최종시험 첫째날
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2014년 3월 22일 (오후); 제한시간 4시간 30분; 문항당 7점

1. 양의 실수 x, y, z 가 식 $x + y + z = 1$ 을 만족할 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{(1+xy+yz+zx)(1+3x^3+3y^3+3z^3)}{9(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \left(\frac{x\sqrt{1+x}}{\sqrt[4]{3+9x^2}} + \frac{y\sqrt{1+y}}{\sqrt[4]{3+9y^2}} + \frac{z\sqrt{1+z}}{\sqrt[4]{3+9z^2}} \right)^2$$

2. 삼각형 ABC 가 $AC = BC > AB$ 를 만족한다. 변 AC, AB 의 중점을 각각 E, F 라 하고, 변 AC 의 수직이등분선 ℓ 이 AB 와 만나는 점을 K , 점 B 를 지나고 KC 에 평행인 직선이 AC 와 만나는 점을 L , 직선 FL 과 ℓ 이 만나는 점을 W 라 하자. 선분 BF 위의 점 P 에 대하여 삼각형 ACP 의 수심을 H 라 하면, 선분 BH 와 선분 CP 가 점 J 에서 만나고 직선 FJ 와 ℓ 이 점 M 에서 만난다. 이 때, $AW = PW$ 가 삼각형 EFM 의 외접원 위에 점 B 가 있을 필요충분조건임을 보여라.

3. 서로 다른 이름의 n 명의 학생들이 원형으로 서있다. 이들로부터 이름표를 수거하여 무작위로 하나씩 나누어 주고 다음 시행을 반복하자.

(시행) 가지고 있는 이름표를 확인하여 자신의 이름표를 가진 학생은 퇴장하고, 남은 학생은 가지고 있던 이름표를 시계방향으로 다음 학생에게 전달한다.

4번 시행한 이후에도 퇴장하지 못한 학생이 있도록 이름표를 처음에 나누어주는 방법의 수를 구하여라.



제 27회 최종시험 둘째날
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2014년 3월 23일 (오전); 제한시간 4시간 30분; 문항당 7점

4. 두 변 AC 와 BC 의 길이가 같은 이등변 삼각형 ABC 에 대하여, 선분 BA 를 점 A 쪽으로 연장한 연장선 위에 점 D 를 잡고, 삼각형 DAC 의 외접원 O_1 이 직선 BC 와 만나는 점을 E 라 하자. 점 D 에서 원 O_1 에 대한 접선이 직선 BC 와 만나는 점을 F 라 하고, $\triangle DBF$ 의 외접원 O_2 와 O_1 의 교점을 G 라 하자. 삼각형 BEG 의 외심을 O 라 하자. 직선 FG 가 삼각형 BEG 의 외접원에 접할 필요충분조건이 직선 DG 와 직선 FO 가 직교하는 것임을 보여라.

5. 소수 p 가 5보다 크다. $k^2 + 5$ 가 p 의 배수인 정수 k 가 존재할 때, $p^2 = m^2 + 5n^2$ 을 만족하는 양의 정수 m, n 이 존재함을 보여라.

6. 어떤 섬에 n 개의 성이 있고, 각 성은 A, B 나라 중 하나에 속한다고 하자. 각 성에는 그 나라의 장수가 1명씩 있다. 어느 두 성 사이에 다른 성을 지나지 않고 이동할 수 있는 길이 있으면 그 두 성이 이웃한다고 하자. 다음 두 명제가 필요충분조건임을 보여라.

1. B 나라의 장수들 중 일부가 각각 이웃한 A 성 중 하나를 무작위로 골라 동시에 공격하더라도, A 나라 장수들 중 일부를 이웃한 성들로 동시에 잘 움직여 방어를 하게 하면, A 나라 각 성에 대하여, 그 성을 공격하는 B 나라 장수의 수보다 그 성을 방어하는 A 나라 장수의 수가 많거나 같게 할 수 있다.
2. A 나라 성들로 이루어진 임의의 집합 X 에 대해, X 에 속하거나 X 중 적어도 하나에 이웃한 A 나라 성의 개수가, X 중 적어도 하나에 이웃한 B 나라 성의 개수보다 많거나 같다.