

2018학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학‘나’형 정답

1	④	2	①	3	②	4	③	5	③
6	⑤	7	①	8	①	9	⑤	10	②
11	③	12	②	13	⑤	14	④	15	④
16	②	17	①	18	⑤	19	④	20	③
21	②	22	20	23	5	24	21	25	17
26	8	27	22	28	200	29	28	30	320

해설

1. [출제의도] 기호의 뜻을 알고 집합의 원소의 개수를 센다.

집합 A 의 원소의 개수는 4이므로
 $n(A)=4$

2. [출제의도] 간단한 거듭제곱근을 계산한다.

$$\sqrt[4]{4} \times \sqrt[3]{8} = \sqrt{2^2} \times \sqrt[3]{2^3}$$

$$= 2 \times 2$$

$$= 4$$

3. [출제의도] 수열의 극한을 계산한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

$$= 0 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

4. [출제의도] 등비수열이 되도록 하는 실수의 값을 구한다.

세 수 3, -6, a 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
 $\frac{-6}{3} = \frac{a}{-6}$
 $3 \times a = (-6)^2$
따라서
 $a = 12$

5. [출제의도] 합성함수의 합수값을 구한다.

두 함수 $f(x) = \sqrt{x+1} - 3$, $g(x) = x+1$ 에서
 $f(3) = \sqrt{3+1} - 3 = -1$
 $g(-1) = 0$
따라서 $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(-1) = 0$

6. [출제의도] 집합의 연산을 이해하여 모든 원소의 합을 구한다.

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이고
 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ 이므로
 $B^C = \{2, 4, 6\}$
 $A \cap B^C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{2, 4, 6\}$
= {2, 4}

따라서 집합 $A \cap B^C$ 의 모든 원소의 합은

$$2+4=6$$

[다른 풀이]

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ 이므로
 $A \cap B^C = A - B$
= {1, 2, 3, 4, 5} - {1, 3, 5}
= {2, 4}

따라서 집합 $A \cap B^C$ 의 모든 원소의 합은

$$2+4=6$$

7. [출제의도] 평행이동을 이해하여 유리함수의 그래프의 두 점근선을 구한다.

함수 $y = \frac{1}{x+3} + 8$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은
 $x = -3$, $y = 8$ 이므로
 $a = -3$, $b = 8$ 이다.

따라서 $a+b = -3+8=5$

8. [출제의도] 수열의 극한을 이해하여 극한값을 구한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$$
이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2a_n + 1}{a_n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{1}{a_n}}{1 + \frac{3}{a_n}}$$

$$= \frac{-2 + 0}{1 + 3 \times 0}$$

$$= -2$$

9. [출제의도] 수열의 합을 이해하여 등식을 만족시키는 실수의 값을 구한다.

$$\sum_{k=1}^5 \frac{1}{k} = a + \sum_{k=1}^5 \frac{1}{k+1}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = a + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

$$1 = a + \frac{1}{6}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{5}{6}$$

10. [출제의도] 상용로그표를 이용하여 상용로그의 값을 구한다.

$$\log \sqrt{419} = \frac{1}{2} \log 419$$

$$= \frac{1}{2} \log(4.19 \times 100)$$

$$= \frac{1}{2} (\log 4.19 + \log 100)$$

$$= \frac{1}{2} (\log 4.19 + 2)$$
이고
상용로그표에서 $\log 4.19 = 0.6222$
따라서

$$\log \sqrt{419} = \frac{1}{2} (0.6222 + 2)$$

$$= 1.3111$$

11. [출제의도] 등비급수가 수렴하도록 하는 정수의 개수를 구한다.

x 가 정수일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x-3}{7} \right)^n$ 은 첫째항과 공비
가 모두 $\frac{2x-3}{7}$ 인 등비급수이다.

그러므로 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x-3}{7} \right)^n$ 이 수렴하기 위한 필
요충분조건은 $-1 < \frac{2x-3}{7} < 1$ 이다.

$$-7 < 2x-3 < 7$$

$$-4 < 2x < 10$$

$$-2 < x < 5$$

따라서 정수 x 의 개수는

$$5 - (-2) - 1 = 6$$

12. [출제의도] 로그의 밑을 변환하여 식의 값을 구한다.

밑의 변환 공식에 의하여

$$\frac{1}{\log_4 18} + \frac{2}{\log_9 18} = \log_{18} 4 + 2 \log_{18} 9$$

$$= \log_{18} 2^2 + 2 \log_{18} 3^2$$

$$= \log_{18} 2^2 + \log_{18} (3^2)^2$$

$$= \log_{18} 2^2 + \log_{18} 3^4$$

$$= \log_{18} (2^2 \times 3^4)$$

$$= \log_{18} (2 \times 3^2)^2$$

$$= \log_{18} 18^2$$

$$= 2 \log_{18} 18$$

$$= 2$$

13. [출제의도] 명제가 참이 되도록 하는 실수의 값을 구한다.

명제 $p \rightarrow q$ 의 역이 참이므로 명제 $q \rightarrow p$ 가 참이다.

그러므로 $Q \subset P$ 가 성립해야 한다.

$4 \in Q$ 이므로 $4 \in P$ 이어야 한다.

$$a^2 = 4, \text{ 즉 } a=2 \text{ 또는 } a=-2$$

(i) $a=-2$ 일 때

$$P = \{2, 3, 4\}, Q = \{-1, 4\}$$
이므로

$$Q \subset P$$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $a=2$

14. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계와 지수법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

x 에 대한 이차방정식 $x^2 - \sqrt[3]{81}x + a = 0$ 의 두 근이 $\sqrt[3]{3}$ 과 b 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sqrt[3]{3} + b = \sqrt[3]{81}, \sqrt[3]{3}b = a$$

그러므로

$$b = \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3}$$

$$= \sqrt[3]{3^4} - \sqrt[3]{3}$$

$$= 3\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3}$$

$$= 2\sqrt[3]{3}$$

$$a = \sqrt[3]{3}b$$

$$= \sqrt[3]{3} \times 2\sqrt[3]{3}$$

$$= 2\sqrt[3]{3^2}$$

따라서

$$ab = 2\sqrt[3]{3^2} \times 2\sqrt[3]{3}$$

$$= 4\sqrt[3]{3^3}$$

$$= 4 \times 3$$

$$= 12$$

15. [출제의도] 충분조건이 되도록 하는 자연수의 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

두 조건 p, q 에 대한 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.
 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이면 이 명제의 대우인 $q \rightarrow \sim p$ 도 참이므로 $Q \subset P^C$ 이어야 한다.

$$P = \{x \mid |x| \geq a\}$$
이므로

$$P^C = \{x \mid |x| < a\}$$

$$= \{x \mid -a < x < a\}$$

$$Q = \{x \mid x(x-3) \leq 0\}$$

$$= \{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$$

그러므로 $\{x \mid 0 \leq x \leq 3\} \subset \{x \mid -a < x < a\}$ 에서

$$-a < 0$$
이고 $a > 3$ 이어야 하므로 $a > 3$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 4

[다른 풀이]

두 조건 p, q 에 대한 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x \mid |x| \geq a\} = \{x \mid x \leq -a \text{ 또는 } x \geq a\},$$

$$Q = \{x \mid x(x-3) \leq 0\} = \{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$$

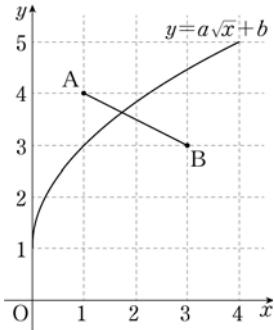
$p \rightarrow \sim q$ 이기 위한 충분조건이면 $P \subset Q^C$ 이어야 한다.

$$Q^C = \{x \mid x < 0 \text{ 또는 } x > 3\}$$
에서

$$-a < 0$$
이고 $a > 3$ 이어야 하므로 $a > 3$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 4

16. [출제의도] 무리함수의 그래프와 선분이 만나도록 하는 자연수의 값을 구하는 문제를 해결한다.



a, b 는 자연수이므로

(i) $a=1$ 인 경우

함수 $f(x) = \sqrt{x} + b$ 의 그래프가 선분 AB와 만나기 위해서는 $f(1) \leq 4$ 이고 $f(3) \geq 3$ 이어야 하므로

$$\sqrt{1} + b \leq 4 \text{이고 } \sqrt{3} + b \geq 3$$

$$\text{따라서 } 3 - \sqrt{3} \leq b \leq 3$$

이를 만족시키는 자연수 b 는 2, 3이므로 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 2), (1, 3)$

(ii) $a=2$ 인 경우

함수 $f(x) = 2\sqrt{x} + b$ 의 그래프가 선분 AB와 만나기 위해서는 $f(1) \leq 4$ 이고 $f(3) \geq 3$ 이어야 하므로

$$2\sqrt{1} + b \leq 4 \text{이고 } 2\sqrt{3} + b \geq 3$$

$$3 - 2\sqrt{3} \leq b \leq 2$$

이를 만족시키는 자연수 b 는 1, 2이므로 순서쌍 (a, b) 는 $(2, 1), (2, 2)$

(iii) $a=3$ 인 경우

함수 $f(x) = 3\sqrt{x} + b$ 의 그래프가 선분 AB와 만나기 위해서는 $f(1) \leq 4$ 이고 $f(3) \geq 3$ 이어야 하므로

$$3\sqrt{1} + b \leq 4 \text{이고 } 3\sqrt{3} + b \geq 3$$

$$3 - 3\sqrt{3} \leq b \leq 1$$

이를 만족시키는 자연수 b 는 1이므로

순서쌍 (a, b) 는 $(3, 1)$

(iv) $a \geq 4$ 인 경우 $f(1) = a+b > 4$ 이므로

함수 $f(x) = a\sqrt{x} + b$ 의 그래프는 선분 AB와 만나지 않는다.

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수는 $2+2+1=5$

17. [출제의도] 역함수의 성질을 이용하여 역함수의 합수값을 구하는 문제를 해결한다.

곡선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=g(x)$ 가 점 $(1, 3)$ 에서 만나므로 $f(1)=3$ 이고 $g(1)=3$ 이다.

이때 함수 $g(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 역함수이므로 $g(1)=3$ 에서 $f(3)=1$

$$f(1)=\sqrt{a+b}+1=3 \text{에서}$$

$$a+b=4 \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

$$f(3)=\sqrt{3a+b}+1=1 \text{에서}$$

$$3a+b=0 \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

\textcircled{1}, \textcircled{2}에 의해

$$a=-2, b=6$$

$$\text{그러므로 } f(x)=\sqrt{-2x+6}+1$$

$$g(5)=k \text{라 하면 } f(k)=5 \text{이므로}$$

$$f(k)=\sqrt{-2k+6}+1=5 \text{에서 } \sqrt{-2k+6}=4$$

$$-2k+6=16$$

$$k=-5$$

$$\text{따라서 } g(5)=-5$$

18. [출제의도] 수열의 합을 이용하여 수열의 극한을 구하는 과정을 증명한다.

$$P_n(2n, 0), Q_n(0, 4n^2) \text{이므로}$$

직선 P_nQ_n 의 기울기는

$$\frac{0-4n^2}{2n-0}=\frac{-4n^2}{2n}$$

$$=-2n \text{이고}$$

$$y \text{절편은 } 4n^2 \text{이므로}$$

직선 P_nQ_n 의 방정식은 $y=[-2n]\times x+4n^2$
 x 좌표가 k (k 는 $2n-1$ 이하의 자연수)일 때 영역에 속하는 점의 y 좌표는 $(k-2n)^2$ 부터 $[-2n]\times k+4n^2$ 까지이므로 그 개수는

$$\begin{aligned} [-2n]\times k+4n^2 - (k-2n)^2 + 1 &= [-k^2+1] + 2nk \\ a_n &= \sum_{k=1}^{2n-1} (-k^2+1) + 2nk \\ &= -\frac{(2n-1)\times 2n\times (4n-1)}{6} + (2n-1) \\ &\quad + 2n\times \frac{(2n-1)\times 2n}{2} \\ &= -\frac{n(2n-1)(4n-1)}{3} + (2n-1) + 2n^2(2n-1) \\ &= (2n-1)\left\{2n^2 - \frac{n(4n-1)}{3} + 1\right\} \\ &= (2n-1)\left(\frac{2}{3}n^2 + \frac{n}{3} + 1\right) \end{aligned}$$

그러므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)\left(\frac{2}{3}n^2 + \frac{n}{3} + 1\right)}{n^3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

$$f(n) = -2n, g(k) = -k^2 + 1, p = \frac{4}{3} \text{이고}$$

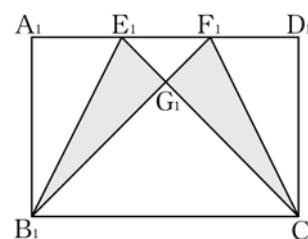
$$f(3) = -6, g(4) = -15$$

따라서

$$\begin{aligned} p \times f(3) \times g(4) &= \frac{4}{3} \times (-6) \times (-15) \\ &= 120 \end{aligned}$$

19. [출제의도] 도형의 면적을 이용하여 등비급수의 합을 구하는 문제를 해결한다.

그럼 R_n 에서 새로 색칠된 부분의 넓이를 a_n 이라 하자.



$\overline{A_1B_1} = \overline{A_1F_1} = 2$ 이므로 삼각형 $A_1B_1F_1$ 은 직각이등변삼각형이고 $\angle G_1B_1C_1 = 45^\circ$ 이다.

$\overline{D_1C_1} = \overline{D_1E_1} = 2$ 이므로 삼각형 $D_1C_1E_1$ 은 직각이등변삼각형이고 $\angle G_1C_1B_1 = 45^\circ$ 이다.

그러므로 $\angle B_1G_1C_1 = 90^\circ$ 이고, 삼각형 $G_1B_1C_1$ 은 직각이등변삼각형이다.

또한, $\angle G_1E_1F_1 = 45^\circ$, $\angle G_1F_1E_1 = 45^\circ$ 이므로 삼각형 $G_1E_1F_1$ 도 직각이등변삼각형이다.

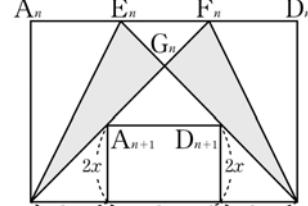
$$\overline{B_1C_1} = 3 \text{이므로}$$

$$\overline{B_1G_1} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{E_1F_1} = 1 \text{이므로}$$

$$\overline{E_1G_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{그러므로 } a_1 = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3}{2}$$



$\overline{A_{n+1}B_{n+1}} = 2x$ 라 하면 $\overline{B_{n+1}C_{n+1}} = 3x$ 이고

$$\overline{B_nC_n} = 2x + 3x + 2x = 7x \text{이므로}$$

$$\overline{B_nC_{n+1}} = 3x = \frac{3}{7}\overline{B_nC_n}$$

직사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 과 직사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$

의 면적비가 $1:\frac{3}{7}$ 이므로, 그럼 R_{n+1} 에서 추가로 색칠되는 도형의 넓이 a_{n+1} 은

$$a_{n+1} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 a_n = \frac{9}{49} a_n$$

그러므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{3}{2}$ 이고 공비가 $\frac{9}{49}$ 인 등비수열이다.

따라서

$$\begin{aligned} \lim S_n &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\ &= \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{49}} \\ &= \frac{147}{80} \end{aligned}$$

20. [출제의도] 수열이 수렴할 조건과 극한값을 추론한다.

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$ 은

$$1, 2, 1, 2, \dots$$

이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 발산(진동)한다. (참)

ㄴ. 수열 $\{b_n\}$ 은

$$p+q, -p+q, p+q, -p+q, \dots$$

이므로 $p=0$ 인 경우 수열 $\{b_n\}$ 은

$$q, q, q, \dots$$

가되어 수렴한다. (참)

ㄷ. 수열 $\{a_n + b_n\}$ 은

$$1+p+q, 2-p+q, 1+p+q, 2-p+q, \dots$$

이므로 수열 $\{a_n + b_n\}$ 이 수렴하기 위해서는

$$1+p+q = 2-p+q$$

$$p = \frac{1}{2}$$

수열 $\{a_n b_n\}$ 은

$$1 \times (p+q), 2 \times (-p+q), 1 \times (p+q), 2 \times (-p+q), \dots$$

이므로 수열 $\{a_n b_n\}$ 이 수렴하기 위해서는

$$1 \times (p+q) = 2 \times (-p+q)$$

$$q = 3p$$

그러므로

$$q = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

그리면 $1+p+q = 2-p+q = 3$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 3$$

또한, $1 \times (p+q) = 2 \times (-p+q) = 2$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 2$$

그러므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((a_n)^2 + (b_n)^2)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} ((a_n + b_n)^2 - 2a_n b_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \times \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$$

$$= 3^2 - 2 \times 2 = 5 \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

[다른 풀이]

$$\begin{aligned} ㄷ. a_n + b_n &= \left\{ \frac{1}{2} \times (-1)^n + \frac{3}{2} \right\} + \{p \times (-1)^{n+1} + q\} \\ &= \left(\frac{1}{2} - p \right) (-1)^n + \frac{3}{2} + q \text{이므로} \end{aligned}$$

수열 $\{a_n + b_n\}$ 이 수렴하려면

$$\frac{1}{2} - p = 0, \text{ 즉 } p = \frac{1}{2} \text{이어야 한다.}$$

$p = \frac{1}{2}$ 일 때,

$$a_n b_n = \left\{ \frac{1}{2} \times (-1)^n + \frac{3}{2} \right\} \left\{ \frac{1}{2} \times (-1)^{n+1} + q \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} \times (-1)^n + \frac{3}{2} \right\} \left\{ -\frac{1}{2} \times (-1)^n + q \right\}$$

$$= -\frac{1}{4} \times (-1)^{2n} + \left(\frac{q}{2} - \frac{3}{4} \right) (-1)^n + \frac{3}{2} q$$

$$= \left(\frac{q}{2} - \frac{3}{4} \right) (-1)^n - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} q \text{이므로}$$

수열 $\{a_n b_n\}$ 이 수렴하려면

$$\frac{q}{2} - \frac{3}{4} = 0, \Rightarrow q = \frac{3}{2} \text{ 이어야 한다.}$$

그러므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \frac{3}{2} + q \\ &= \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n &= -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} q \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{9}{4} = 2 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} ((a_n)^2 + (b_n)^2) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n + b_n)^2 - 2a_n b_n\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} 2a_n b_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \times \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n \\ &= 3^2 - 2 \times 2 = 5 \end{aligned}$$

21. [출제의도] 항등함수와 상수함수의 뜻을 이해하여 함수를 추론한다.

함수 $f: X \rightarrow X$ 가 일대일 대응이 아니라고 가정하면

합성함수 $g \circ f: X \rightarrow X$ 는

일대일 대응이 아니게 되므로 항등함수도 아니다.

이런 경우 조건 (나)를 만족시키지 않게 되므로 함수 f 는 일대일 대응이어야 한다.

마찬가지 이유로 함수 g 도 일대일 대응이다.

두 일대일 대응 f, g 에 대하여

$$\sum_{n=1}^9 f(n) = 1+2+\cdots+9 = 45,$$

$$\sum_{n=1}^9 g(n) = 1+2+\cdots+9 = 45 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^9 \{f(n)+g(n)\} &= \sum_{n=1}^9 f(n) + \sum_{n=1}^9 g(n) \\ &= 45+45 \end{aligned}$$

$$= 90$$

조건 (다)에서 $f(x)+g(x)$ 의 값은 일정하므로 $f(x)+g(x)=k$ (k 는 상수)라 하자.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^9 \{f(n)+g(n)\} &= \sum_{n=1}^9 k = 9k \text{이므로} \\ 9k &= 90 \text{에서 } k=10 \end{aligned}$$

모든 $x \in X$ 에 대하여

$$f(x)+g(x)=10 \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

조건 (가)에서

$$f(1)=8 \text{이므로 조건 (나)에 의하여}$$

$$g(8)=1$$

$$g(8)=1 \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에 의하여}$$

$$f(8)=9$$

$$f(8)=9 \text{이므로 조건 (나)에 의하여}$$

$$g(9)=8$$

$$g(9)=8 \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에 의하여}$$

$$f(9)=2$$

$$f(9)=2 \text{이므로 조건 (나)에 의하여}$$

$$g(2)=9$$

$$g(2)=9 \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에 의하여}$$

$$f(2)=1$$

$$f(2)=1 \text{이므로 조건 (나)에 의하여}$$

$$g(1)=2$$

$$f(5)=a \text{라 하면}$$

조건 (나)에 의하여

$$g(a)=5$$

$$g(a)=5 \text{이면 } \textcircled{1} \text{에 의하여}$$

$$f(a)=5$$

$$f(a)=5 \text{이면 조건 (나)에 의하여}$$

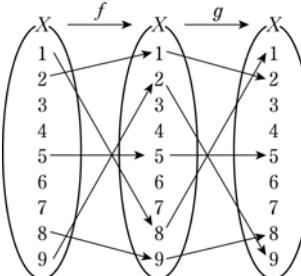
$$g(5)=a$$

이 때 $10=f(5)+g(5)=a+a=2a$ 이므로

$$a=5$$

즉 $f(5)=5$ 이고 $\textcircled{1}$ 에 의하여 $g(5)=5$

이상의 대응을 그림으로 표현하면 다음과 같다.



조건 (가)에 의하여 $f(3) \neq 6$ 이므로

(i) $f(3)=3$ 이면

조건 (나)에 의하여

$$g(3)=3$$

$\textcircled{1}$ 에 의하여 $g(3)=7$ 이므로

이 경우는 불가능하다.

(ii) $f(3)=7$ 이면

조건 (나)에 의하여

$$g(7)=3$$

$\textcircled{1}$ 에 의하여 $g(7)=7$

함수 f 가 일대일 대응이 아니게 되므로 이 경우는 불가능하다.

(iii) $f(3)=4$ 이면

조건 (나)에 의하여

$$g(4)=3$$

$\textcircled{1}$ 에 의하여 $g(4)=7$

$f(4)=7$ 이면 조건 (나)에 의하여

$$g(7)=4$$

$g(7)=4$ 이면 $\textcircled{1}$ 에 의하여

$$f(7)=6$$

$f(7)=6$ 이면 조건 (나)에 의하여

$$g(6)=7$$

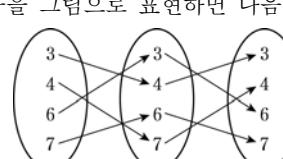
$g(6)=7$ 이면 $\textcircled{1}$ 에 의하여

$$f(6)=3$$

$f(6)=3$ 이면 조건 (나)에 의하여

$$g(3)=6$$

(iii)의 대응을 그림으로 표현하면 다음과 같다.



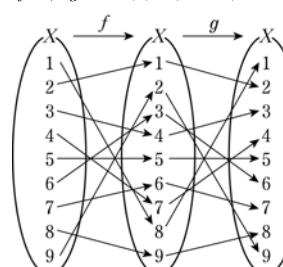
따라서

$$(f \circ f \circ f)(7) = f(f(6))$$

$$= f(3)$$

$$= 4$$

[참고] 함수 f 와 g 는 다음과 같다.



22. [출제의도] 첫째항과 공차가 주어진 등차수열의 항을 계산한다.

첫째항이 10이고 공차가 5인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$\begin{aligned} a_n &= 10 + (n-1) \times 5 \\ &= 5n + 5 \end{aligned}$$

따라서

$$a_3 = 5 \times 3 + 5$$

$$= 20$$

23. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 로그를 계산한다.

$$\log_2(2^2 \times 2^3) = \log_2 2^{2+3}$$

$$= \log_2 2^5$$

$$= 5 \log_2 2$$

$$= 5$$

24. [출제의도] 부분합의 극한과 수열의 일반항의 관계를 이해하여 극한값을 구한다.

수열 $\{S_n\}$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 3S_n) &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= 2 \times 0 + 3 \times 7 \\ &= 21 \end{aligned}$$

25. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

$$2^{-a} + 2^{-b} = \frac{1}{2^a} + \frac{1}{2^b}$$

$$= \frac{2^a + 2^b}{2^{a+b}}$$

$$= \frac{9}{4} \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

그런데 $2^a + 2^b = 2$ 이므로 이 값을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{2}{2^{a+b}} = \frac{9}{4}$$

$$2^{a+b} = 2 \times \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$$

따라서 $p=9, q=8, p+q=17$

26. [출제의도] 조건을 만족시키는 수열을 추론하여 값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 6이므로 $a_1 > 0$

이 때 $a_2 = 2-6 = -4$

$a_2 < 0$ 이므로

$$a_3 = a_2 + p = -4 + p$$

(i) $-4+p \geq 0, \Rightarrow p \geq 4$ 일 때

$$a_4 = 2 - a_3$$

$$= 2 - (-4 + p)$$

$$= 6 - p$$

$$= 0 \text{에서}$$

$$p=6$$

(ii) $-4+p < 0, \Rightarrow p < 4$ 일 때

$$a_4 = a_3 + p$$

$$= (-4 + p) + p$$

$$= -4 + 2p$$

$$= 0 \text{에서}$$

$$p=2$$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $a_4=0$ 이 되도록 하는 모든 실수 p 의 값의 합은 $6+2=8$

27. [출제의도] 집합의 연산을 활용하여 실생활 문제를 해결한다.

직업 체험을 신청한 학생의 집합을 A , 대학 탐방을 신청한 학생의 집합을 B 라 하자.

직업 체험과 대학 탐방을 모두 신청한 학생은 5명이므로

$$n(A) = 2 \times n(B) \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

그런데

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

이므로 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서

$$28 = 2 \times n(B) + n(B) - 5$$

$$n(B) = 11$$

$$n(A) = 2 \times 11 = 22$$

따라서 직업 체험을 신청한 학생 수는 22

28. [출제의도] 두 직선의 교점을 이용하여 등차수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.

점 $(n, 0)$ 을 지나고 x 축에 수직인 직선이 일차함수의 그래프와 만나는 점의 y 좌표를 a_n 이라 하면 a_n 을 n 에 관한 일차식으로 나타낼 수 있으므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

$$a_4 = \frac{7}{2} \text{이고 } a_7 = 5 \text{이므로 등차수열 } \{a_n\} \text{의 공차를 } d$$

라 하면

$$3d = a_7 - a_4$$

$$= 5 - \frac{7}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$d = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = a_4 - 3d$$

$$= \frac{7}{2} - 3 \times \frac{1}{2}$$

$$= 2$$

$$\sum_{k=1}^{25} a_k \text{의 값은 첫째항이 } 2 \text{이고 공차가 } \frac{1}{2} \text{인 등차수열의 첫째항부터 제 25 항까지의 합과 같으므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{25} a_k &= \frac{25(2 \times 2 + (25-1) \times \frac{1}{2})}{2} \\ &= \frac{25 \times 16}{2} \\ &= 200 \end{aligned}$$

[다른 풀이 1]

점 $(n, 0)$ 을 지나고 x 축에 수직인 직선이 일차함수의 그래프와 만나는 점의 y 좌표를 a_n 이라 하면 a_n 을 n 에 관한 일차식으로 나타낼 수 있으므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

$$a_4 = \frac{7}{2} \text{이고 } a_7 = 5 \text{이므로 등차수열 } \{a_n\} \text{의 공차를 } d$$

라 하면

$$3d = a_7 - a_4$$

$$= 5 - \frac{7}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$d = \frac{1}{2}$$

$$a_{13} = a_7 + 6d$$

$$= 5 + 3$$

$$= 8 \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{25} a_k = (a_1 + a_{25}) + (a_2 + a_{24}) + \cdots + (a_{12} + a_{14}) + a_{13}$$

$$= 2a_{13} + 2a_{13} + \cdots + 2a_{13} + a_{13}$$

$$= 12 \times 2a_{13} + a_{13}$$

$$= 25a_{13}$$

$$= 25 \times 8$$

$$= 200$$

[다른 풀이 2]

$$a_4 = \frac{7}{2} \text{이고 } a_7 = 5 \text{이므로}$$

직선 l 은 두 점 $(4, \frac{7}{2}), (7, 5)$ 를 지난다.

$$\text{직선 } l \text{의 기울기는 } \frac{5 - \frac{7}{2}}{7 - 4} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

직선 l 의 방정식은 $y = \frac{1}{2}(x - 4) + \frac{7}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

점 $(n, 0)$ 을 지나고 x 축에 수직인 직선이 직선 l 과

만나는 점의 y 좌표가 a_n 이므로 $a_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$

$$\sum_{k=1}^{25} a_k = \sum_{k=1}^{25} \left(\frac{1}{2}k + \frac{3}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{25 \times 26}{2} + \frac{3}{2} \times 25$$

$$= \frac{25 \times 13 + 3 \times 25}{2}$$

$$= \frac{25 \times 16}{2}$$

$$= 25 \times 8$$

$$= 200$$

29. [출제의도] 명제가 참이 되도록 하는 부분집합의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 $x^2 - 3x < 0$ 의 진리집합을 P 라 하면

$$x(x-3) < 0 \text{에서 } 0 < x < 3 \text{이므로}$$

$$P = \{1, 2\}$$

명제 ‘집합 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $x^2 - 3x < 0$ 이다.’가 참이 되기 위해서는 집합 A 가 집합 P 의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다.

그러므로 $A = \{1\}$ 또는 $A = \{2\}$ 또는 $A = \{1, 2\}$ 이다.

명제 ‘집합 B 의 어떤 원소 x 에 대하여 $x \in A$ 이다.’가 참이 되기 위해서는 $A \cap B \neq \emptyset$ 이어야 한다.

(i) $A = \{1\}$ 인 경우

집합 B 는 1을 원소로 갖는 집합 U 의 부분집합이므로 집합 B 의 개수는 $2^3 = 8$

(ii) $A = \{2\}$ 인 경우

집합 B 는 2를 원소로 갖는 집합 U 의 부분집합이므로 집합 B 의 개수는 $2^3 = 8$

(iii) $A = \{1, 2\}$ 인 경우

집합 B 는 1 또는 2를 원소로 갖는 집합 U 의 부분집합이다.

iii-가) 1을 원소로 갖고, 2를 원소로 갖지 않는 집합 B 의 개수는 $2^2 = 4$

iii-나) 2를 원소로 갖고, 1을 원소로 갖지 않는 집합 B 의 개수는 $2^2 = 4$

iii-다) 1, 2를 모두 원소로 갖는 집합 B 의 개수는 $2^2 = 4$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 순서쌍 (A, B) 의 개수는 $8+8+(4+4+4)=28$

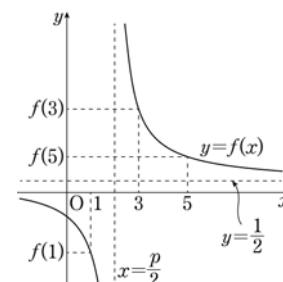
30. [출제의도] 유리함수의 그래프와 수열의 합을 이용하여 문제를 해결한다.

$$f(x) = \frac{x+2n}{2x-p} = \frac{\frac{1}{2}(2x-p) + \frac{p}{2} + 2n}{2x-p} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{p}{2x-p} + 2n}{2}$$

이상 $\frac{p}{2} + 2n > 0$ 이므로

$$f(1) < f(5) < f(3) \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

이 성립하려면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같아야 한다.



$1 < \frac{p}{2} < 3$ 이어야 하므로 $2 < p < 6$ 에서 자연수 p 의 최

솟값 m 은 3

$$\text{함수 } g(x) = \frac{2x+n}{x+q} = \frac{2(x+q)+n-2q}{x+q} = 2 + \frac{n-2q}{x+q}$$

이므로 곡선 $y = g(x)$ 의 두 점근선의 방정식은

$$x = -q, y = 2$$

$$p = 3 \text{ 일 때 } f(x) = \frac{x+2n}{2x-3} \text{에 대하여}$$

$$x_1 = f(1) = -2n - 1$$

$$x_2 = f(5) = \frac{2n+5}{7}$$

$$x_3 = f(3) = \frac{2n+3}{3}$$

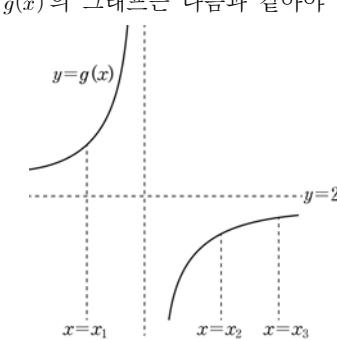
이라 하면 $\textcircled{2}$ 으로부터

$$x_1 < x_2 < x_3$$

이때 문제의 조건에서

$$g(x_2) < g(x_3) < g(x_1) \text{이 성립해야 하므로}$$

함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음과 같아야 한다.



그러므로 $x_1 < -q < x_2$ 이고 $n - 2q < 0$ 이어야 한다.

$$\therefore -2n - 1 < -q < \frac{2n+5}{7} \text{이고 } q > \frac{n}{2} \text{이어야 하므로}$$

$$\frac{n}{2} < q < 2n + 1$$

(i) $n = 2l - 1$ (l 은 자연수)일 때

$$\frac{2l-1}{2} < q < 2(2l-1)+1 \text{에서}$$

$$l - \frac{1}{2} < q < 4l - 1 \text{이므로}$$

$$q = l, l+1, \dots, 4l-2$$

그러므로 정수 q 의 개수는 $3l - 1$

(ii) $n = 2l$ (l 은 자연수)일 때

$$\frac{2l}{2} < q < 2 \times 2l + 1 \text{에서}$$

$$l < q < 4l + 1 \text{이므로}$$

$$q = l+1, l+2, \dots, 4l$$

그러므로 정수 q 의 개수는 $3l$

(i), (ii)에 의하여 $a_{2l-1} = 3l - 1, a_{2l} = 3l$

따라서

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{l=1}^{10} (a_{2l-1} + a_{2l})$$

$$= \sum_{l=1}^{10} (3l - 1 + 3l)$$

$$= \sum_{l=1}^{10} (6l - 1)$$

$$= 6 \sum_{l=1}^{10} l - \sum_{l=1}^{10} 1$$

$$= 6 \times \frac{10 \times 11}{2} - 10$$

$$= 330 - 10 = 320$$