

2019년 11월 16일 (오전); 제한시간 3시간; 문항당 7점

1. 좌표평면에서 x, y 좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 한다. 각 격자점은 한 가지 색으로 색칠되어 있고, 사용된 색의 수는 5 이상이다. 두 격자점 (x, y) 와 (z, w) 에 대하여, $x - z$ 와 $y - w$ 가 모두 3의 배수이면 두 격자점은 같은 색이다. 서로 다른 다섯 개의 색을 임의로 골랐을 때, 이 중 정확히 세 개의 색의 격자점만을 지나는 직선이 존재함을 보여라.

2. 예각삼각형 ABC 에서 변 AC 위의 점 D 는 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 와 $\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AD}$ 를 만족하는 점이다. 꼭지각 C 의 이등분선에 평행하고 점 D 를 지나는 직선과 변 AB 의 교점을 E 라 하자. $\overline{AE} = \overline{CD}$ 이면 $\angle ADB = 3\angle BAC$ 임을 보여라.

3. 다음 조건을 만족하는 소수 p, q ($p \leq q$)의 순서쌍 (p, q) 를 모두 구하여라.

(조건) $2^n + 3^n + 4^n + \cdots + (2pq - 1)^n$ 이 $2pq$ 의 배수가 되는 양의 정수 n 이 존재한다.

4. 양의 정수의 수열 $\{a_1, a_2, \dots\}$ 이 임의의 자연수 n 에 대하여 다음을 만족한다.

$$(a_1 + \cdots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \leq n^2 + 2019$$

이때, 모든 a_i 들은 같은 수임을 보여라.

2019년 11월 16일 (오후); 제한시간 3시간; 문항당 7점

5. 소수 p 에 대하여 다음 조건을 만족하는 정수 a, b, c, d 가 존재함을 보여라.

(조건) 모든 정수 n 에 대하여 $n^4 + 1 - (n^2 + an + b)(n^2 + cn + d)$ 는 p 의 배수이다.

6. 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 을 모두 구하여라. (단, \mathbb{R} 은 실수 전체의 집합)

(1) 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x + f(x) + xy) = 2f(x) + xf(y)$ 이다.

(2) 모든 실수 z 에 대하여 $f(x) = z$ 인 x 가 존재한다.

7. 예각삼각형 ABC 의 외심을 O , 각 A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\angle ODC = 2\angle DAO$ 이다. 삼각형 ABD 의 외접원이 선분 OA , 직선 OD 와 각각 점 $E(\neq A, O)$, 점 $F(\neq D)$ 에서 만난다. 직선 DE 와 선분 AC 의 교점을 X 라 하고, 각 BAF 의 이등분선과 선분 BE 의 교점을 Y 라 할 때, $\frac{AY}{BY} = \frac{EX}{EO}$ 임을 보여라.

8. 두 개의 항공사 A, B 와 4개 이상의 유한 개의 공항이 있다. 임의의 두 공항 간에는 A 와 B 중 정확히 한 항공사의 항공기가 양 방향으로 다닌다고 하자. 각 항공사는 자사의 항공기만 이용하여 모든 공항을 정확히 한 번씩만 지나는 경로로 구성된 세계 여행 상품을 만들려고 한다. 이때 항공사 A, B 가 만들 수 있는 세계 여행 상품의 종류의 개수를 각각 a, b 라 할 때, $a - b$ 는 4의 배수임을 보여라.