

제 2 교시

수학 영역(가형)

1

5지선다형

1. 부등식 $\log_2 x \leq 2$ 를 만족시키는 정수 x 의 개수는? [2점]
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 원점 O 와 평면 $x+y+z+3=0$ 사이의 거리는? [2점]
- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

3. 두 사건 A, B 가 서로 배반사건이고,
- $$P(A) = \frac{3}{10}, P(B) = \frac{2}{5}$$
- 일 때, $P(A \cup B)$ 의 값은? [2점]
- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

4. $\int_0^1 x e^x dx$ 의 값은? [3점]
- ① 1 ② 2 ③ e ④ $1+e$ ⑤ $2e$

5. 어느 모집단의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	a	b	1

이 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 \overline{X} 라 하자. $E(\overline{X}) = \frac{5}{6}$ 일 때, $a+2b$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

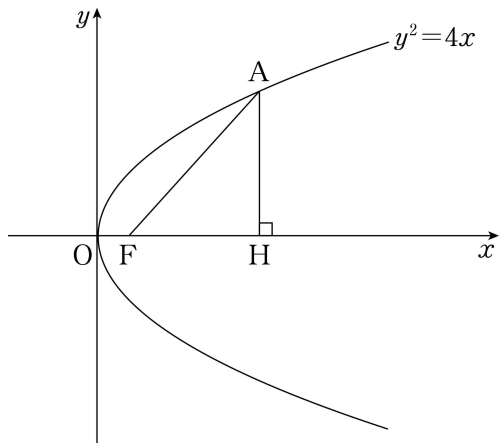
6. 좌표공간에서 두 점 $A(-1, 1, 2)$, $B(1, 5, -2)$ 를 지름의 양 끝점으로 하는 구 S 가 있다. 구 S 위의 한 점 $C(0, 0, 0)$ 에 대하여 삼각형 ABC 의 넓이는? [3점]

- ① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{5}$ ④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{5}$

7. 함수 $f(x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$ 의 주기는? [3점]

- ① 2π ② $\frac{5}{3}\pi$ ③ $\frac{4}{3}\pi$ ④ π ⑤ $\frac{2}{3}\pi$

8. 그림과 같이 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 A에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점 F에 대하여 $\overline{AF} = 5$ 일 때, 삼각형 AFH의 넓이는? [3점]



- ① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

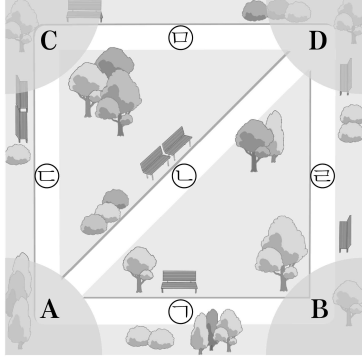
9. 일렬로 나열된 6개의 좌석에 세 쌍의 부부가 임의로 앉을 때, 부부끼리 서로 이웃하여 앉을 확률은? [3점]

- ① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

10. 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 위의 점 P와 두 초점 F, F'에 대하여 $|\overrightarrow{PF} + \overrightarrow{PF'}|$ 의 최댓값은? [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

11. 그림의 네 지점 A, B, C, D에서 산책로 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤ 중 한 산책로를 지나갈 확률을 표로 나타내면 다음과 같다.



지점 \ 산책로	㉠	㉡	㉢	㉣	㉤
A	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
B	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0
C	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
D	0	0	0	0	0

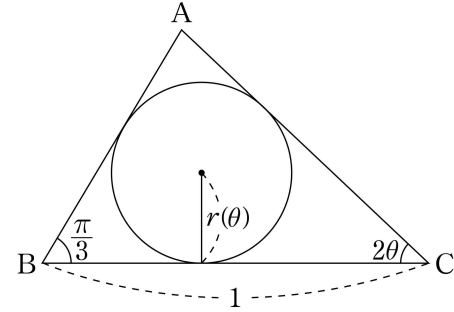
A 지점을 출발하여 D 지점으로 이동할 때, 한 번 지난 산책로를 다시 지나지 않는 사건을 X , 산책로 ㉢ 또는 ㉤을 지나는 사건을 Y 라 하자. $P(Y|X)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{7}{16}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{9}{16}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{11}{16}$

12. 그림과 같이 $\overline{BC}=1$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $\angle ACB = 2\theta$ 인

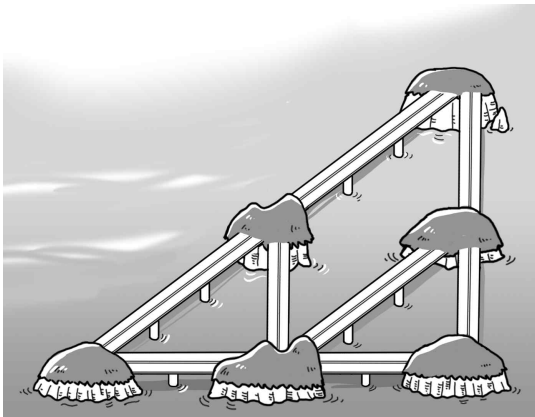
삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$ 라 하자.

$h(\theta) = \frac{r(\theta)}{\tan \theta}$ 일 때, $h'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$) [3점]



- ① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{6}$
 ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\sqrt{3}$

13. 그림과 같이 6개의 섬이 다리로 연결되어 있다. 흰색, 노란색, 파란색 깃발이 각각 2개씩 총 6개 있을 때, 이 6개의 깃발을 섬에 한 개씩 세우고자 한다. 다리로 연결된 이웃한 두 섬에는 같은 색의 깃발을 세우지 않는다고 할 때, 깃발을 세우는 경우의 수는? (단, 같은 색의 깃발끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]



- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

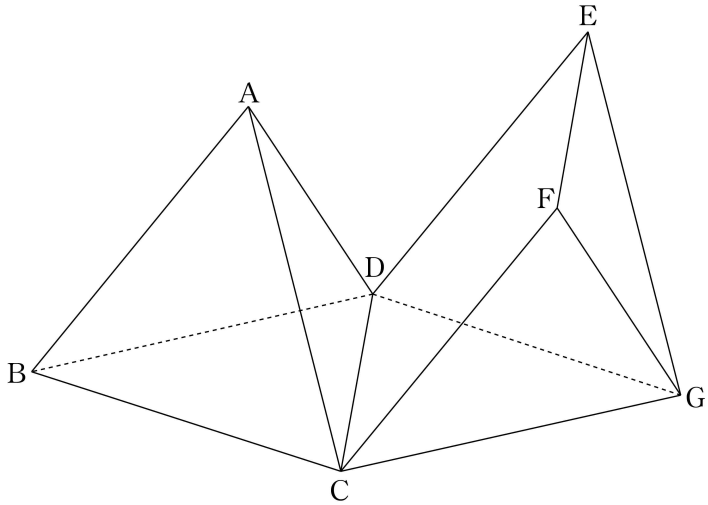
14. 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다. $f(1)=3$, $g(1)=3$ 일 때,

$$\int_1^3 \left\{ \frac{f(x)}{f'(g(x))} + \frac{g(x)}{g'(f(x))} \right\} dx$$

의 값은? [4점]

- ① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

15. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정사면체 ABCD와 모든 모서리의 길이가 2인 사각뿔 G-EDCF가 있다. 네 점 B, C, D, G가 한 평면 위에 있을 때, 평면 ACD와 평면 EDCF가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하자. $\cos\theta$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}$
 ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

16. 연속함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

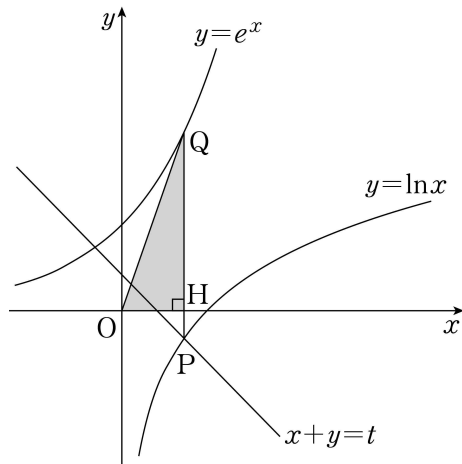
(가) $x \neq 0$ 인 실수 x 에 대하여 $\{f(x)\}^2 f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$
 (나) $f(0) = 0$

$\{f(1)\}^3$ 의 값은? [4점]

- ① $2\ln 2$ ② $3\ln 2$ ③ $1+2\ln 2$
 ④ $4\ln 2$ ⑤ $1+3\ln 2$

17. $t < 1$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $y = \ln x$ 와 직선 $x + y = t$ 가 만나는 점을 P 라 하자. 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H , 직선 PH 와 곡선 $y = e^x$ 이 만나는 점을 Q 라 할 때, 삼각형 OHQ 의 넓이를 $S(t)$ 라 하자. $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2S(t)-1}{t}$ 의 값은? [4점]

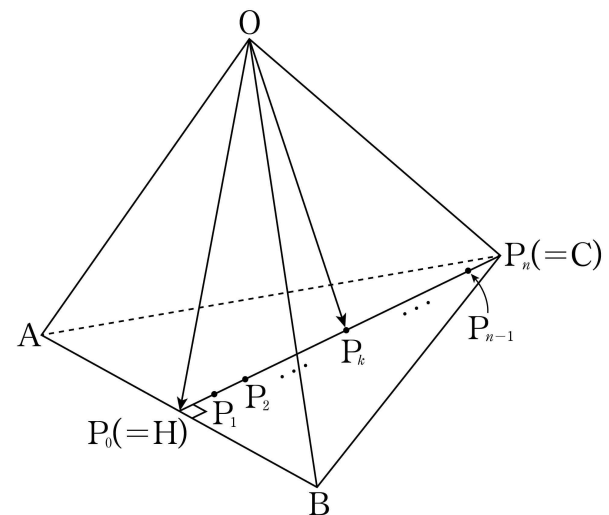
- ① 1 ② $e-1$ ③ 2 ④ e ⑤ 3



18. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 6인 정사면체 $OABC$ 가 있다. 점 C 에서 모서리 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, 선분 HC 를 n 등분하여 각 분점을 차례로 $P_0(=H)$, P_1 , P_2 , \dots , P_{n-1} , $P_n(=C)$ 라 하자.

$S_n = \sum_{k=1}^n \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OP_k}$ 라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ 의 값은?

(단, n 은 2 이상의 자연수이다.) [4점]



- ① $\frac{9}{2}$ ② 9 ③ $\frac{27}{2}$ ④ 18 ⑤ $\frac{45}{2}$

19. 2 이상의 자연수 n 에 대하여 $1 \leq a < b \leq n$, $1 \leq c < d \leq n$ 을 만족하고, 좌표평면 위의 네 직선 $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$ 로 둘러싸인 직사각형의 둘레의 길이가 $2n$ 이 되도록 자연수 a , b , c , d 를 택한다.

다음은 $b-a$ 의 값을 확률변수 X 라 할 때 $E(X) = \frac{n}{2}$ 임을 보이는 과정이다.

확률변수 X 가 가질 수 있는 가장 작은 값은 1, 가장 큰 값은 $\boxed{\text{(가)}}$ 이다.

$X=k$ 일 때, $b-a=k$ 이므로 $1 \leq a \leq n-k$ 이고, $d-c=n-k$ 이므로 $1 \leq c \leq \boxed{\text{(나)}}$ 이다.

그러므로 $P(X=k) = \frac{(n-k) \times \boxed{\text{(나)}}}{\sum_{i=1}^{\boxed{\text{(가)}}} (n-i) \times i}$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{\boxed{\text{(가)}}} \{k \times P(X=k)\} \\ &= \frac{6}{\boxed{\text{(다)}}} \sum_{k=1}^{\boxed{\text{(가)}}} \{k \times (n-k) \times \boxed{\text{(나)}}\} \\ &= \frac{n}{2} \end{aligned}$$

이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(k)$, $h(n)$ 이라 할 때, $\frac{h(7)}{f(8) \times g(6)}$ 의 값은? [4점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

20. 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$ 위의 점 P와 x 축 위의 점 $A(t, 0)$ 이 있다. \overline{AP} 의 최솟값을 $f(t)$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

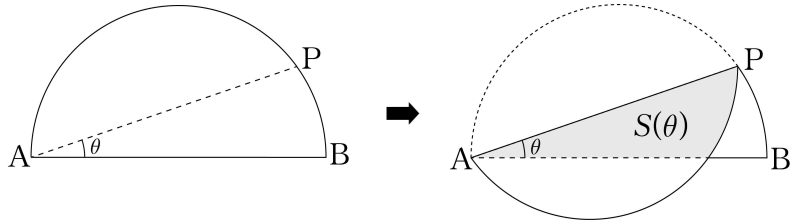
ㄱ. $f(0) = 1$

ㄴ. 방정식 $f(t) = \frac{1}{3}$ 의 실근의 개수는 4이다.

ㄷ. 함수 $f(t)$ 가 미분가능하지 않은 t 의 값의 개수는 5이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 모양의 색종이가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 두 점 A, P를 연결하는 선을 접는 선으로 하여 색종이를 접는다. $\angle PAB = \theta$ 일 때, 포개어지는 부분의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\theta = \alpha$ 에서 $S(\theta)$ 가 최댓값을 갖는다고 할 때, $\cos 2\alpha$ 의 값은?
(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



- ① $\frac{-2 + \sqrt{17}}{8}$ ② $\frac{-1 + \sqrt{17}}{8}$ ③ $\frac{\sqrt{17}}{8}$
④ $\frac{1 + \sqrt{17}}{8}$ ⑤ $\frac{2 + \sqrt{17}}{8}$

단답형

22. 정규분포 $N(m, 4)$ 를 따르는 확률변수 X 에 대하여 함수

$$g(k) = P(k-8 \leq X \leq k)$$

는 $k=12$ 일 때 최댓값을 갖는다. 상수 m 의 값을 구하시오.

[3점]

23. 다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 3개의 숫자를 뽑아 세 자리의 자연수를 만들 때, 홀수의 개수를 구하시오. [3점]

24. 곡선 $x^2 - y^2 - y = 1$ 위의 점 $A(a, b)$ 에서의 접선의 기울기가 $\frac{2}{15}a$ 일 때, b 의 값을 구하시오. [3점]

26. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $f(x)$ 는 일대일 대응이다.
 (나) $1 \leq n \leq 2$ 일 때, $f(2n) < f(n) < f(3n)$ 이다.

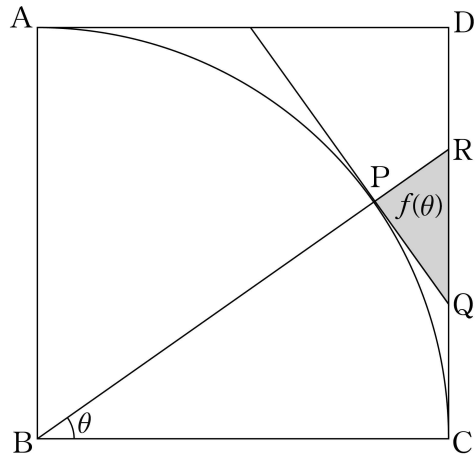
함수 $f(x)$ 의 개수를 구하시오. [4점]

25. 함수

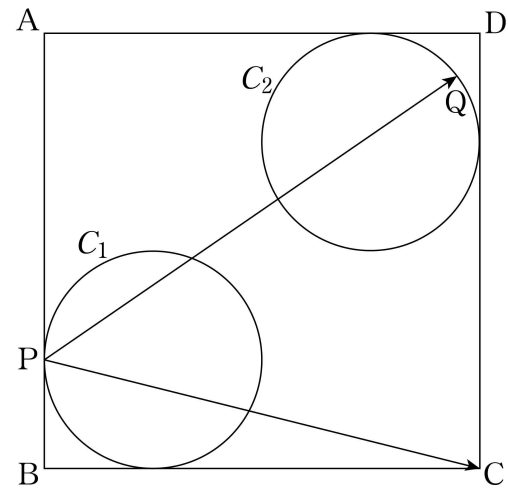
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x < 0) \\ e^{ax+b} & (x \geq 0) \end{cases}$$

은 $x=0$ 에서 미분가능하다. $f(10) = e^k$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 상수이다.) [3점]

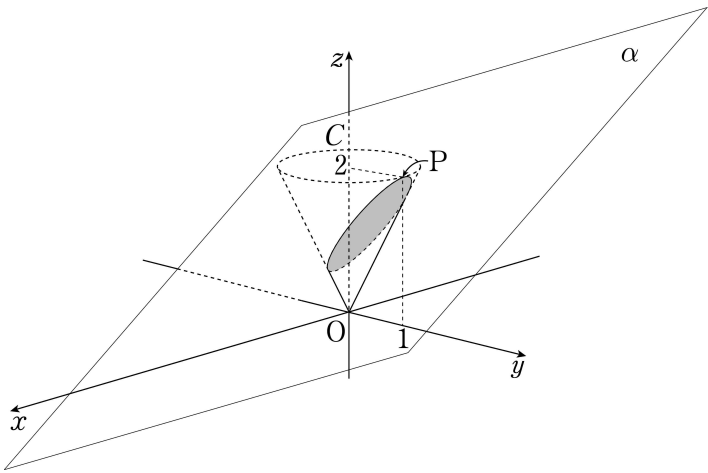
27. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD 안에 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 반지름의 길이가 3인 부채꼴 BCA가 있다. 호 AC 위의 점 P에서의 접선이 선분 CD와 만나는 점을 Q, 선분 BP의 연장선이 선분 CD와 만나는 점을 R라 하자. $\angle PBC = \theta$ 일 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $f(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{8f(\theta)}{\theta^3}$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



28. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD의 내부에 선분 AB와 선분 BC에 접하고 반지름의 길이가 1인 원 C_1 과 선분 AD와 선분 CD에 접하고 반지름의 길이가 1인 원 C_2 가 있다. 원 C_1 과 선분 AB의 접점을 P라 하고, 원 C_2 위의 한 점을 Q라 하자. $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PQ}$ 의 최댓값을 $a + \sqrt{b}$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 유리수이다.) [4점]



29. 좌표공간에 평면 $z=2$ 위의 원 $C: x^2+y^2=1$ 을 밑면으로 하고 꼭짓점이 원점인 원뿔이 있다. 원 C 와 한 점 $P(0, 1, 2)$ 에서만 만나는 평면 α 가 이 원뿔과 만나서 생길 수 있는 도형 중 한 타원을 S 라 하자. 타원 S 의 xy 평면 위로의 정사영은 장축의 길이가 $\frac{5}{4}$ 인 타원이다. 평면 α 와 z 축이 만나서 생기는 좌표가 $(0, 0, k)$ 일 때, $50k$ 의 값을 구하시오. [4점]

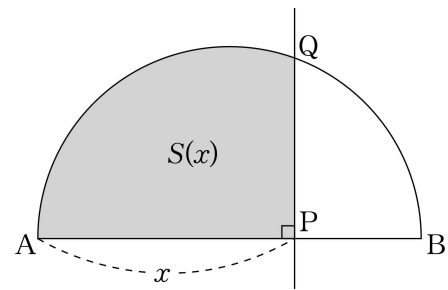


30. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB 위의 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 선분 AB를 지름으로 하는 반원과 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{AP}=x$ 라 할 때, $S(x)$ 를 다음과 같이 정의한다. $0 < x < 2$ 일 때 $S(x)$ 는 두 선분 AP, PQ와 호 AQ로 둘러싸인 도형의 넓이이고, $x=2$ 일 때 $S(x)$ 는 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 넓이이다.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \{S(1+\sin\theta) - S(1+\cos\theta)\} d\theta = p + q\pi^2$$

일 때, $\frac{30p}{q}$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 유리수이다.)

[4점]



※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.