중등부

제 30 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2016년 11월 12일 (오전) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7 점

1. 양의 실수 $a_1, a_2, \ldots$이 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) 모든 양의 정수 n에 대하여 $a_{n+1} = {a_1}^2 \times \cdots \times {a_n}^2 - 3$

(ii) $\frac{1}{2}\left(a_1 + \sqrt{a_2 - 1}\right)$은 양의 정수

모든 양의 정수 n에 대하여 $\frac{1}{2}\left(a_1 \times \cdots \times a_n + \sqrt{a_{n+1} - 1}\right)$은 양의 정수임을 보여라.

2. 이등변삼각형이 아닌 삼각형 ABC의 내접원이 변 BC, CA, AB와 접하는 점을 각각 D, E, F라 하고, 내심을 I라 하자. 직선 AD와 내접원의 교점을 $G(\neq D)$라 하고, 점 G에서의 내접원의 접선이 변 AC와 만나는 점을 H라 하고, 직선 IH와 AD의 교점을 K라 하자. 점 I에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 L이라 할 때, $\overline{IE} \cdot \overline{IK} = \overline{IC} \cdot \overline{IL}$임을 보여라.

3. 총 n명의 선수가 참가한 대회에서, 각각의 선수가 다른 모든 선수와 정확히 한 번씩 경기를 하여 무승부없이 승패를 결정하였다. 어떤 $k(\leq n)$명의 선수에 대하여 각 선수가 자기보다 뒤쪽에 있는 모든 선수에게 이긴 경우가 되도록 한 줄로 세울 수 있으면 그 k명의 선수의 집합을 **서열이 정해진 집합**이라 부르자. 대회에 참가한 각 선수에 대하여 그 선수에게 진 선수들의 집합이 모두 서열이 정해진 집합이라 하자. 이때, 선수 전체의 집합을 서열이 정해진 집합 3개 이하로 나눌 수 있음을 보여라.

4. 다음 식의 값이 정수가 되는 모든 양의 정수 n을 구하여라.

$$\frac{n(n+2016)(n+2\cdot 2016)(n+3\cdot 2016)\cdots(n+2015\cdot 2016)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot 2016}$$

제 30 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2016년 11월 12일 (오후) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7 점

5. 양의 정수 n에 대하여, 다음 식을 n에 대한 다항식으로 표현할 수 있음을 보여라.

$$\left[2\sqrt{1}\right] + \left[2\sqrt{2}\right] + \left[2\sqrt{3}\right] + \cdots + \left[2\sqrt{n^2}\right]$$

(단, 실수 x에 대하여 $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수)

6. 원 O_1이 삼각형 ABC의 변 AC, BC와 각각 점 D, E 에서 접하고, 원 O_1을 포함하는 원 O_2가 변 BC, AB와 각각 점 E, F 에서 접한다. 직선 DE와 원 O_2의 교점 $P(\neq E)$에서의 원 O_2의 접선이 직선 AB와 만나는 점을 Q라 하자. 점 O_1을 지나고 직선 BO_2와 평행한 직선이 직선 BC와 만나는 점을 G, 직선 EQ와 AC의 교점을 K, 직선 KG와 EF의 교점을 L, 직선 EO_2와 원 O_2의 교점을 $N(\neq E)$, 직선 LO_2와 FN의 교점을 M이라 하자. 점 N이 선분 FM의 중점일 때, $\overline{BG} = 2\overline{EG}$임을 보여라.

7. 양의 정수 $a_1, a_2, \ldots, a_9$가 $a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = 90$을 만족할 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$\frac{1^{a_1}\, 2^{a_2}\, \cdots\, 9^{a_9}}{a_1!\, a_2!\, \cdots\, a_9!}$$

(단, $n! = 1 \times \cdots \times n$)

8. 좌표평면에서 한 움직이는 점이 오른쪽 또는 위로 1씩 움직일 수 있다고 할 때, 이 점이 좌표$(0,0)$에서 출발하여 $(1,0)$, $(2,1), \ldots, (n, n-1)$ 어느 점도 거치지 않고 $2n$번 움직여서 좌표 (n,n)에 이르는 모든 경로의 개수를 N이라 하자. 이러한 N개의 경로 중 k번째에는 오른쪽으로 움직이고 $k+1$번째에는 위로 움직인 경로의 개수를 a_k라 할 때,

$$\frac{1}{N}\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n-1}\right)$$

의 값을 구하여라.