

2017년 5월 20일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 “7” 일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1~4 번은 각 4 점, 문제 17~20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 양의 정수 n 에 대하여

$$(n+2)a_n a_{n+1} + n a_{n+1} a_{n+2} = 2(n+1)a_n a_{n+2}$$

를 만족한다. $a_1 = 100$, $a_3 = 228$ 일 때, a_{28} 의 값을 구하여라.

2. 8명의 학생을 몇 개의 모둠으로 나눌 때, 각 모둠의 인원이 2명 이상 4명 이하인 경우의 수를 구하여라.

3. 원 O 에 내접하는 사각형 $ABCD$ 에서 $\overline{AB} = \overline{AD}$, $\angle BDC = 15^\circ$, $\angle CBD = 45^\circ$ 이다. 직선 AB 와 CD 의 교점을 E , 직선 AD 와 BC 의 교점을 F 라 하자. $\overline{BE} \cdot \overline{DF} = 675$ 일 때, 원 O 의 반지름의 길이를 구하여라.

4. 다음 조건을 만족하는 세 자리 양의 정수 N 을 큰 것부터 차례로 나열하였을 때, 두 번째 수를 구하여라.

10보다 작은 양의 정수 a, b, c 에 대하여
 $N = 100a + 10b + c$ 일 때, 세 정수 $N, 10a + b, 10b + c$ 는 모두 소수이다.

5. 다음 수들의 최대공약수를 구하여라.

$$2^{17} - 2, 3^{17} - 3, 4^{17} - 4, \dots, 31^{17} - 31$$

6. 양의 정수 n 에 대하여 정의된 다항식 $f_n(x)$ 는 다음 성질을 만족한다.

n 의 모든 양의 약수를 d_1, \dots, d_m 이라 하면

$$f_{d_1}(x) \times \dots \times f_{d_m}(x) = x^n - 1$$

이다.

서로 다른 양의 정수 $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_\ell$ 에 대하여

$$\frac{f_3(x)f_4(x)f_6(x)f_{12}(x)f_{49}(x)}{f_2(x)f_5(x)f_{10}(x)f_{18}(x)} = \frac{(x^{a_1} - 1) \dots (x^{a_k} - 1)}{(x^{b_1} - 1) \dots (x^{b_\ell} - 1)}$$

가 성립할 때, $a_1 + \dots + a_k + b_1 + \dots + b_\ell$ 의 값을 구하여라.

7. 다음 그림과 같은 1×1 정사각형 모양의 타일 1개, 1×2 직사각형 모양의 타일 6개, 1×3 직사각형 모양의 타일 1개, 그리고 십자(+) 모양의 타일 1개가 있다.



3×7 직사각형 모양의 벽에 이 9개의 타일을 모두 빈틈없이 붙이는 경우의 수를 구하여라. (단, 타일을 90° 회전하여 사용할 수 있다.)

8. 삼각형 ABC 의 꼭짓점 A 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 D 라 할 때, $\overline{AB} = 125$, $\overline{AC} = 150$, $\overline{AD} = 100$ 이다. 점 D 에서 삼각형 ABD 의 외접원의 접선이 삼각형 ACD 의 외접원과 만나는 점을 $E(\neq D)$ 라 하자. 선분 CD 위의 점 X 에 대하여 삼각형 ADX 의 외접원이 선분 DE 와 점 $Y(\neq D)$ 에서 만난다고 하자. $\overline{CX} = 30$ 일 때, 선분 EY 의 길이를 구하여라.

9. 다음 두 식을 모두 만족하는 세 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2 + y^2 + z^2$ 이 될 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

- (i) $x + y + z = 2$
(ii) $2xy + yz + zx = -7$

10. 빨간 공 9개와 파란 공 9개에 9 이하의 양의 정수가 하나씩 적혀 있으며 같은 색의 공에 적힌 수는 서로 다르다. 다음 세 조건을 모두 만족하도록 빨간 공 2개, 파란 공 2개를 동시에 뽑는 경우의 수를 구하여라.

- (i) 뽑힌 공에 적힌 수는 서로 다르다.
(ii) 뽑힌 빨간 공 2개에 적힌 수의 차가 2 이상이다.
(iii) 뽑힌 파란 공 2개에 적힌 수의 차가 2 이상이다.

11. 예각삼각형 ABC 의 외접원의 반지름이 5이고 변 AB 의 길이는 8이다. 삼각형 ABC 의 내심 I 에서 변 AC 에 내린 수선의 발을 D , 점 A 에서 직선 BI 에 내린 수선의 발을 E , 삼각형 ACI 의 외심에서 변 AC 에 내린 수선의 발을 F 라 하자. $\overline{DE} = 1$ 이고, $\overline{EF} = a$ 일 때, $100a^2$ 의 값을 구하여라.

12. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 중 가장 작은 것을 구하여라.

$$111 \times 10^k < n^2 < 112 \times 10^k \text{ 을 만족하는 양의 정수 } k \text{가 존재한다.}$$

13. 함수 $f: \{1, 2, \dots, 12\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

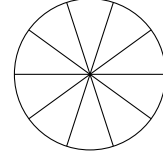
- (i) $\{f(1), f(2), \dots, f(12)\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
(ii) 모든 $i = 1, 2, \dots, 12$ 에 대하여 $f(f(f(i))) = f(f(i))$

다음 식이 가질 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

$$60 \sum_{i=1}^{12} \frac{f(f(i))}{f(i)}$$

14. 볼록사각형 $ABCD$ 가 중심이 O 인 원에 외접한다. 점 C 에서 직선 BO 에 내린 수선의 발을 E , 점 D 에서 직선 AO 에 내린 수선의 발을 F 라 하자. $\angle A = 110^\circ$, $\angle B = 130^\circ$, $\angle EFO = 31^\circ$, $\angle C = x^\circ$ 일 때, x 의 값을 구하여라. (단, $0 < x < 180$)

15. 다음 그림과 같이 10등분된 회전판이 있다. 각 칸에 빨강색 또는 파랑색을 칠하여 만들 수 있는 모든 회전판의 개수를 구하여라. 단, 회전하여 같은 것은 한 가지로 센다.



16. 식 $n^4 - 17n^3 + 98n^2 - 229n + 187$ 의 값이 소수가 되도록 하는 모든 양의 정수 n 의 합을 구하여라.

17. 수열 $\{x_n\}$ 이 모든 양의 정수 n 에 대하여

$$(4 + x_1 + \dots + x_n)(x_1 + \dots + x_{n+1}) = 1$$

을 만족하고, $x_1 = 1$ 이다. $\left[\frac{x_{100}}{x_{101}}\right]^2$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 가장 큰 정수)

18. 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$ 의 서로 다른 부분집합 4개로 이루어진 집합 S 가 다음 조건을 만족한다.

$$\{A, B\} \subset S \text{ 이면 } \{A \cup B, A \cap B\} \subset S$$

이러한 S 의 개수를 구하여라.

19. 삼각형 ABC 에서 $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\overline{BC} = 12$ 이다. 삼각형 ABC 의 외심을 O 라 하고 삼각형 OAB , OBC , OCA 의 외심을 각각 O_1 , O_2 , O_3 라 하자. 삼각형 $O_1O_2O_3$ 의 넓이를 S 라 할 때, $(S - 54)^2$ 의 값을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

20. 다음 조건을 만족하는 소수 p, q 의 순서쌍 (p, q) 의 개수를 구하여라.

$$p^2 + q^2 + 42 \text{의 양의 약수는 9개이다.}$$

2017년 5월 20일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 “7”일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1~4 번은 각 4 점, 문제 17~20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 식 $(ax - 1)^8 - (x - b)^8 = (x^2 - px + q)^4$ 이 x 에 대한 항등식이 되도록 하는 양의 실수 a, b, p, q 에 대하여, 다음 식의 값을 구하여라.

$$(a^7 - p)^{12} + (b^2 + q)^{12}$$

2. 8명의 학생을 몇 개의 모둠으로 나눌 때, 각 모둠의 인원이 2명 이상 4명 이하인 경우의 수를 구하여라.

3. 원 O 에 내접하는 사각형 $ABCD$ 에서 $\overline{AB} = \overline{AD}$, $\angle BDC = 15^\circ$, $\angle CBD = 45^\circ$ 이다. 직선 AB 와 CD 의 교점을 E , 직선 AD 와 BC 의 교점을 F 라 하자. $\overline{BE} \cdot \overline{DF} = 675$ 일 때, 원 O 의 반지름의 길이를 구하여라.

4. 다음 조건을 만족하는 소수 p 를 구하여라.

$$n^4 + n^2 + 1 = 211p \text{를 만족하는 정수 } n \text{이 존재한다.}$$

5. 다음 두 식을 모두 만족하는 세 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2 + y^2 + z^2$ 이 될 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

$$(i) \ x + y + z = 2$$

$$(ii) \ 2xy + yz + zx = -7$$

6. 다음 그림과 같은 1×1 정사각형 모양의 타일 1개, 1×2 직사각형 모양의 타일 6개, 1×3 직사각형 모양의 타일 1개, 그리고 십자(+) 모양의 타일 1개가 있다.



3×7 직사각형 모양의 벽에 이 9개의 타일을 모두 빈틈없이 붙이는 경우의 수를 구하여라. (단, 타일을 90° 회전하여 사용할 수 있다.)

7. 삼각형 ABC 의 꼭짓점 A 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 D 라 할 때, $\overline{AB} = 125$, $\overline{AC} = 150$, $\overline{AD} = 100$ 이다. 점 D 에서 삼각형 ABD 의 외접원의 접선이 삼각형 ACD 의 외접원과 만나는 점을 E ($E \neq D$)라 하자. 선분 CD 위의 점 X 에 대하여 삼각형 ADX 의 외접원이 선분 DE 와 점 Y ($Y \neq D$)에서 만난다고 하자. $\overline{CX} = 30$ 일 때, 선분 EY 의 길이를 구하여라.

8. 빨간 공 9개와 파란 공 9개에 9 이하의 양의 정수가 하나씩 적혀 있으며 같은 색의 공에 적힌 수는 서로 다르다. 다음 세 조건을 모두 만족하도록 빨간 공 2개, 파란 공 2개를 동시에 뽑는 경우의 수를 구하여라.

(i) 뽑힌 공에 적힌 수는 서로 다르다.

(ii) 뽑힌 빨간 공 2개에 적힌 수의 차가 2 이상이다.

(iii) 뽑힌 파란 공 2개에 적힌 수의 차가 2 이상이다.

9. 다음 수들의 최대공약수를 구하여라.

$$2^{17} - 2, 3^{17} - 3, 4^{17} - 4, \dots, 31^{17} - 31$$

10. 함수 $f: \{1, 2, \dots, 12\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) $\{f(1), f(2), \dots, f(12)\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) 모든 $i = 1, 2, \dots, 12$ 에 대하여 $f(f(f(i))) = f(f(i))$

다음 식이 가질 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

$$60 \sum_{i=1}^{12} \frac{f(f(i))}{f(i)}$$

11. 예각삼각형 ABC 의 외접원의 반지름이 5이고 변 AB 의 길이는 8이다. 삼각형 ABC 의 내심 I 에서 변 AC 에 내린 수선의 발을 D , 점 A 에서 직선 BI 에 내린 수선의 발을 E , 삼각형 ACI 의 외심에서 변 AC 에 내린 수선의 발을 F 라 하자. $\overline{DE} = 1$ 이고, $\overline{EF} = a$ 일 때, $100a^2$ 의 값을 구하여라.

12. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 중 가장 작은 것을 구하여라.

$$111 \times 10^k < n^2 < 112 \times 10^k \text{을 만족하는 양의 정수 } k \text{가 존재한다.}$$

13. 수열 $\{x_n\}$ 이 모든 양의 정수 n 에 대하여

$$(4 + x_1 + \dots + x_n)(x_1 + \dots + x_{n+1}) = 1$$

을 만족하고, $x_1 = 1$ 이다. $\left[\frac{x_{100}}{x_{101}}\right]^2$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 가장 큰 정수)

14. 사각형 $ABCD$ 가 지름이 AC 인 원에 내접한다. 변 AD 의 중점을 E , 직선 AB 와 삼각형 ACE 의 외접원의 교점을 $F(\neq A)$ 라 하고 직선 EF 와 삼각형 CDE 의 외접원의 교점을 $J(\neq E)$ 라 하자. $\overline{CJ} = 60$ 이고 $\overline{BC} : \overline{AF} = 1 : 4$, $\overline{CD} : \overline{AD} = 1 : 6$ 일 때, 선분 EF 의 길이를 구하여라.

15. 음이 아닌 정수 n, k 에 대하여 $a(n, k)$ 를 다음과 같이 정의하자.

(i) $nk = 0$ 이면, $a(n, k) = 1$

(ii) $nk \neq 0$ 이면,

$$a(n, k) = a(n-1, k) + a(n, k-1) + a(n-1, k-1)$$

이때 $a(2017, 2017)$ 을 2017로 나눈 나머지를 구하여라.

16. 다음 조건을 만족하는 소수 p, q 의 순서쌍 (p, q) 의 개수를 구하여라.

$$p^2 + q^2 + 42 \text{의 양의 약수는 9개이다.}$$

17. 방정식 $x^2 - 428x - 1 = 0$ 의 양의 근을 r 이라 하자. $a_1 = 1$ 이고 모든 양의 정수 n 에 대하여 $a_{n+1} = [ra_n]$ 이라 할 때, a_{100} 을 428로 나눈 나머지를 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 가장 큰 정수)

18. 양의 정수 $1, 2, \dots, 20$ 을 다음 세 조건을 모두 만족하도록 두 집합 $\{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}, \{b_1, b_2, \dots, b_{10}\}$ 으로 나누는 방법의 수를 구하여라.

(i) $\{a_1, \dots, a_{10}\} \cup \{b_1, \dots, b_{10}\} = \{1, 2, \dots, 20\}$

(ii) $a_1 < a_2 < \dots < a_{10}$ 이고 $b_1 < b_2 < \dots < b_{10}$

(iii) 각 $n = 1, 2, \dots, 10$ 에 대하여 $a_n - b_n$ 은 2 또는 3

19. 삼각형 ABC 의 변 BC 위의 점 D 에 대하여, 변 BC 와 평행한 어떤 직선이 삼각형 ACD 의 외접원과 삼각형 ABC 의 내부의 점 P 와 외부의 점 Q 에서 만난다고 하자. 직선 AP 와 변 BC 의 교점을 R , 직선 BQ 와 삼각형 ACD 의 외접원과의 교점을 $S(\neq Q)$, 직선 BQ 와 PD 의 교점을 T 라 하자. $\angle BAQ = 145^\circ$, $\angle DAS = 16^\circ$, $\angle CAQ + \angle SRB = 136^\circ$, $\angle PTQ = x^\circ$ 일 때, x 의 값을 구하여라. (단, $0 < x < 180$)

20. $(19 + 6\sqrt{10})^{400} + (19 - 6\sqrt{10})^{400}$ 을 $3^2 \times 13^2$ 으로 나눈 나머지를 구하여라.