

2021년 11월 13일; 제한시간 2시간; 문항당 7점

1. 예각삼각형 ABC 에서 각 A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 하자. 원 O 가 점 A 에서 삼각형 ABC 의 외접원에 내접하고 점 D 에서 변 BC 에 접한다. 원 O 가 변 AB , AC 와 만나는 점을 각각 $E(\neq A)$, $F(\neq A)$ 라 하자. 점 E 와 F 에서 직선 AD 에 내린 수선이 원 O 와 만나는 점을 각각 $G(\neq E)$, $H(\neq F)$ 라 하자. 직선 AE 와 GD 가 점 P 에서, 직선 EH 와 GF 가 점 Q 에서, 직선 HD 와 AF 가 점 R 에서 만난다고 할 때, $\frac{QF}{QG} = \frac{HR}{PG}$ 임을 보여라.

2. 양의 정수 n, k, r 에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍 (x_1, x_2, \dots, x_k) 의 개수를 $A(n, k, r)$ 이라 하자.

(i) $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \geq 0$

(ii) $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$

(iii) $x_1 - x_k \leq r$

모든 양의 정수 m, s, t 에 대하여, 다음을 보여라.

$$A(m, s, t) = A(m, t, s)$$

3. 양의 정수 k 와 한자리 양의 정수 a 에 대하여 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 이 존재함을 보여라.

$$2^n = a_0 + a_1 \times 10 + a_2 \times 10^2 + \dots + a_i \times 10^i + \dots \quad (a_i \text{는 } 0 \text{ 이상 } 9 \text{ 이하인 정수})$$

일 때, $a_k = a$ 이다.

2021년 11월 13일; 제한시간 2시간; 문항당 7점

4. n 은 양의 정수로, 각각 n 개의 공항이 있는 두 나라 A, B 가 있고, 이 두 나라 사이를 운행하는 $n^2 - 2n + 2$ 개의 항공사가 있다. A 나라의 각 공항과 B 나라의 각 공항 간에는 오직 한 항공사만 운행하고, 그 항공사는 양방향으로 운행한다. 또한 같은 나라의 두 공항 사이에는 항공기가 다니지 않는다. 서로 다른 두 공항 P, Q 에 대하여 다음 조건을 만족하도록 공항을 나열한 T_0, T_1, \dots, T_s 를 “ (P, Q) -여행경로”라고 하자.

(i) $T_0 = P, T_s = Q$

(ii) T_0, T_1, \dots, T_s 는 모두 다르다.

(iii) T_0 와 T_1 간, T_1 와 T_2 간, \dots , T_{s-1} 와 T_s 간을 모두 운행하는 한 항공사가 존재한다.

각각의 항공사는 적어도 하나의 항공기를 운행한다고 할 때, (P, Q) -여행경로가 존재하지 않거나 정확히 하나인 두 공항 P, Q 가 존재함을 보여라.

5. 실수 a_1, \dots, a_{2021} 이 다음 조건을 모두 만족한다.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = \frac{2(a_{n+1})^2}{a_n + a_{n+1}} \quad (1 \leq n \leq 2019)$$

a_1, \dots, a_{2021} 중 가장 작은 수를 m , 가장 큰 수를 M 이라 하자. 2021차 다항식

$$P(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_{2021})$$

에 대하여, 닫힌 구간 $[m, M]$ 에서 $|P(x)|$ 의 값이 최대가 되게 하는 x 의 값을 α 라 할 때, $1 < \alpha < 2$ 임을 보여라.

6. 둔각삼각형 ABC ($\angle A > \angle B > \angle C$)에서 변 BC 의 중점을 M 이라 하자. 삼각형 ABC 의 외접원 위의 점 D 는 직선 AB 에 대하여 점 C 의 반대쪽에 있는 점으로 다음 조건을 만족한다.

점 D 에서 직선 BD 에 접하고 점 A 를 지나는 원과 삼각형 ABM 의 외접원의 교점을 E ($E \neq A$)라 할 때, $\overline{BD} = \overline{BE}$ 이다.

삼각형 ADE 의 외접원 ω 와 직선 EM 의 교점을 F ($F \neq E$)라 할 때, 직선 BD 와 AE 의 교점이 점 F 에서의 원 ω 의 접선 위에 있음을 보여라.