

# 2017학년도 7월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

## 수학 나형 정답

1	③	2	②	3	⑤	4	④	5	③
6	①	7	④	8	④	9	⑤	10	①
11	②	12	③	13	②	14	⑤	15	④
16	③	17	①	18	①	19	②	20	⑤
21	⑤	22	32	23	24	24	6	25	17
26	15	27	56	28	80	29	50	30	9

## 나형 해설

### 1. [출제의도] 지수 계산하기

$$27 \times 3^{-2} = 3^3 \times 3^{-2} = 3$$

### 2. [출제의도] 로그 계산하기

$$\log_2 2 + \log_3 9 = 1 + 2 = 3$$

### 3. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+2) = 5$$

### 4. [출제의도] $\Sigma$ 의 성질 이해하기

$$\sum_{k=1}^{10} (2a_k + b_k) = 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = 2 \times 2 + 3 = 7$$

### 5. [출제의도] 사건의 독립 이해하기

두 사건  $A, B$ 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times P(B) = \frac{1}{6}$$

$$\text{따라서 } P(B) = \frac{1}{3}$$

### 6. [출제의도] 미분계수 계산하기

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$\text{따라서 } f'(2) = 2$$

### 7. [출제의도] 두 집합의 포함관계 이해하기

$$a^2 - 2 = 2 \text{ 이므로 } a = -2 \text{ 또는 } a = 2$$

(i)  $a = -2$ 일 때  $A = \{-1, 2\}$ ,  $B = \{2, 5, 7\}$   
이므로  $A \cap B \neq A$

(ii)  $a = 2$ 일 때  $A = \{2, 7\}$ ,  $B = \{2, 5, 7\}$   
이므로  $A \cap B = A$

$$\text{따라서 } a = 2$$

### 8. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2$$

### 9. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$$\int_{-2}^2 (3x^2 + 2x + 1) dx = 2 \int_0^2 (3x^2 + 1) dx$$

$$= 2 \left[ x^3 + x \right]_0^2 = 20$$

### 10. [출제의도] 유리함수 이해하기

함수  $y = \frac{2}{x-1}$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로

$a$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로 4만큼 평행이동하면

$$y = \frac{2}{x-a-1} + 4 \text{의 그래프와 일치하므로}$$

$$a+1=3$$

$$a=2, b=4$$

$$\text{따라서 } a+b=6$$

### 11. [출제의도] 명제와 조건 이해하기

두 조건  $p, q$ 의 진리집합을 각각  $P, Q$ 라 하면

$$P = \{x \mid -4 \leq x \leq 6\}$$

$$Q = \{x \mid -a+2 \leq x \leq a+2\}$$

명제  $p \rightarrow q$ 가 참이므로  $P \subset Q$ 에서

$$-a+2 \leq -4, a \geq 6$$

$$a+2 \geq 6, a \geq 4$$

$$\text{그러므로 } a \geq 6$$

따라서 자연수  $a$ 의 최솟값은 6

### 12. [출제의도] 합성함수의 값 계산하기

$$(f \circ f)(-2) = f(f(-2)) = f(1) = 3$$

### 13. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 활용하여 문제 해결하기

흰 공의 개수가 3일 확률은

$$\frac{{}_6C_3 \times {}_4C_1}{{}_{10}C_4} = \frac{20 \times 4}{210} = \frac{8}{21}$$

흰 공의 개수가 4일 확률은

$$\frac{{}_6C_4}{{}_{10}C_4} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{8}{21} + \frac{1}{14} = \frac{19}{42}$$

### 14. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제 해결하기

이 고등학교 학생 중 임의로 선택한 1명의 학생이 진로 체험 행사에 참가한 학생인 사건을  $A$ , 여학생인 사건을  $B$ 라 하면

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{75}{300}}{\frac{200}{300}} = \frac{3}{8}$$

### 15. [출제의도] 정규분포를 활용하여 문제 해결하기

이 양계장에서 생산하는 계란 1개의 무게를 확률변수  $X$ 라 하면 확률변수  $X$ 는 정규분포

$N(52, 8^2)$ 을 따른다.

$$Z = \frac{X-52}{8} \text{라 하면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(60 \leq X \leq 68)$$

$$= P\left(\frac{60-52}{8} \leq Z \leq \frac{68-52}{8}\right)$$

$$= P(1 \leq Z \leq 2)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

### 16. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 문제 해결하기

$$a_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

$$\log_4 (2^{a_1} \times 2^{a_2} \times 2^{a_3} \times \dots \times 2^{a_{12}})$$

$$= \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{12})$$

$$= \frac{1}{2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 12^2)$$

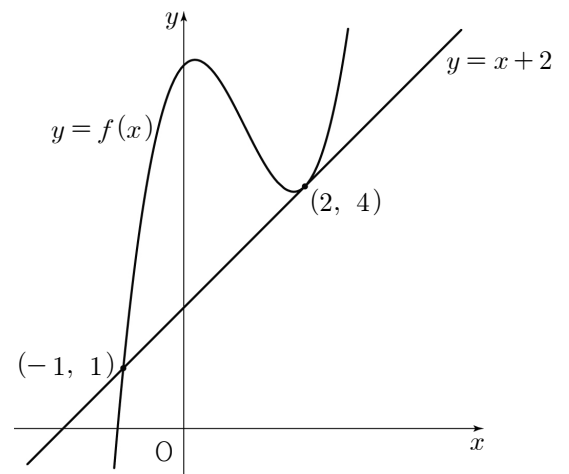
$$= \frac{1}{2} \times \frac{12 \times 13 \times 25}{6} = 325$$

### 17. [출제의도] 접선의 방정식을 활용하여 문제 해결하기

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

이고, 두 점  $(2, 4), (-1, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식이  $y = x + 2$ 이므로



$$f(2) = 4 \text{에서 } 4a + 2b + c = -4 \quad \text{..... ㉠}$$

$$f(-1) = 1 \text{에서 } a - b + c = 2 \quad \text{..... ㉡}$$

$$f'(2) = 1 \text{에서 } 4a + b = -11 \quad \text{..... ㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에 의하여  $a = -3, b = 1, c = 6$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

$$\text{따라서 } f'(3) = 10$$

(다른 풀이)

두 점  $(2, 4), (-1, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식이  $y = x + 2$ 이므로

$$f(x) - (x+2) = (x-2)^2(x+1)$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 6$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

$$\text{따라서 } f'(3) = 10$$

### 18. [출제의도] 등비급수를 활용하여 추론하기 (도형 $T_1$ 의 넓이)

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 \times 2 - \frac{1}{6} \times \pi \times 1^2 = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$$

(도형  $T_2$ 의 넓이)=(도형  $T_3$ 의 넓이)

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2 - \frac{1}{6} \times \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$$

$$S_1 = (\text{도형 } T_1 \text{의 넓이}) + 2 \times (\text{도형 } T_2 \text{의 넓이})$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6} + 2 \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{4}$$

정삼각형  $A_n B_n C_n$ 의 한 변의 길이를  $a_n$ 이라 하면

$$2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times a_{n+1}\right) = \frac{1}{2} \times a_n \text{이므로}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} a_n$$

그럼  $R_{n+1}$ 의 새로 색칠된 부분의 넓이를  $b_{n+1}$

$$\text{이라 하면 } b_{n+1} = \frac{1}{12} b_n, b_1 = S_1$$

수열  $\{b_n\}$ 은 첫째항이  $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{4}$ 이고 공비가

$$\frac{1}{12} \text{인 등비수열이다.}$$

따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k$   

$$= \frac{3\sqrt{3}-\pi}{4} = \frac{3(3\sqrt{3}-\pi)}{11}$$

19. [출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정 추론하기

세 수  $x_1, x_2, x_3$  을 순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$  과 같이 나타내자.

$x_1, x_2, x_3$  중에서 최댓값을  $p$ , 최솟값을  $q$ , 나머지 수를  $r$ ,  $p-q=k$  ( $k=0, 1, \dots, 5$ ) 라 하면 순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$  의 개수는  $p, q, r$  를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다.

(1)  $k=0$  일 때

세 수가 모두 같으므로

순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$  의 개수는  $\boxed{6}$  이고,

$$P(X=0) = \frac{1}{6^3} \times \boxed{6}$$

(2)  $k \neq 0$  일 때 ( $1 \leq k \leq 5$ )

순서쌍  $(p, q)$  의 개수는 각각의  $k$  에 대하여  $6-k$  이고

i)  $k=1$  일 때

순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$  의 개수는

$$5 \times \left( \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} \right)$$

ii)  $2 \leq k \leq 5$  일 때

①  $r=p$  또는  $r=q$  인 경우

$p, p, q$  와  $p, q, q$  를 일렬로 나열하는 방법의 수는  $\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!}$

②  $r \neq p$  이고  $r \neq q$  인 경우

$r$  의 개수는 각각의  $k$  에 대하여  $k-1$  이고  $p, r, q$  를 일렬로 나열하는 방법의 수는  ${}_3P_3 = 3!$  이므로  $(k-1) \times 3!$

①, ②에 의하여

순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$  의 개수는

$$(6-k) \times \left\{ \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + (k-1) \times 3! \right\}$$

그러므로  $1 \leq k \leq 5$  일 때,

순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$  의 개수는

$$(6-k) \times \left\{ \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + (\boxed{k-1}) \times 3! \right\}$$

(예를 들어)

$k=3$  인 경우

$(p, r, q)$  는  $(4, r, 1), (5, r, 2), (6, r, 3)$

이므로 개수는 3

$(p, r, q)$  가  $(4, r, 1)$  일 때

①  $r=4$  또는  $r=1$  인 경우

4, 4, 1 과 4, 1, 1 을 일렬로 나열하는

방법의 수는  $\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!}$

②  $r \neq 4$  이고  $r \neq 1$  인 경우

$r$  는 3 또는 2 이므로  $r$  의 개수는 2

$p, r, q$  를 일렬로 나열하는 방법의 수는

${}_3P_3 = 3!$  이므로  $2 \times 3!$

①, ②에 의하여

4,  $r$ , 1 을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 2 \times 3!$$

$(5, r, 2), (6, r, 3)$  일 때에도 같은 방법으로

구하면 각각  $\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 2 \times 3!$

그러므로  $k=3$  인 경우

순서쌍  $(x_1, x_2, x_3)$  의 개수는

$$3 \times \left( \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 2 \times 3! \right)$$

그러므로

$P(X=k)$

$$= \frac{1}{6^3} \times (6-k) \times \left\{ \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + (\boxed{k-1}) \times 3! \right\}$$

(1), (2)에 의하여 확률변수  $X$  의 평균  $E(X)$  는 다음과 같다.

$$E(X) = \sum_{k=0}^5 \{k \times P(X=k)\}$$

$$= \frac{1}{6^2} \sum_{k=1}^5 (\boxed{6k^2 - k^3}) = \frac{35}{12}$$

$$a=6, f(k)=k-1, g(k)=6k^2-k^3$$

$$\text{따라서 } \frac{f(5) \times g(3)}{a} = \frac{4 \times 27}{6} = 18$$

20. [출제의도] 정적분의 성질을 활용하여 참, 거짓 추론하기

ㄱ.  $g'(x) = xf(x)$  이므로  $g'(0) = 0$  (참)

ㄴ. 함수  $g(x)$  가 닫힌 구간  $[0, \alpha]$  에서 연속, 열린 구간  $(0, \alpha)$  에서 미분가능,  $g(0) = g(\alpha) = 0$  이므로 롤의 정리에 의하여  $g'(c) = cf(c) = 0$  인  $c$  가 열린 구간  $(0, \alpha)$  에 적어도 하나 존재한다.  $c \neq 0$  이므로  $f(c) = 0$

따라서 방정식  $f(x) = 0$  은 열린 구간  $(0, \alpha)$  에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

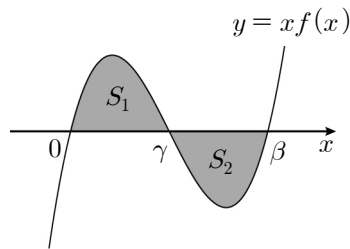
ㄷ.  $\beta > 0$  이고  $g(\beta) = 0$  이므로 ㄴ에 의하여

$f(\gamma) = 0$  인  $\gamma$  ( $0 < \gamma < \beta$ ) 가 존재한다.

$f(x) = a(x-\gamma)(x-\beta)$  ( $a > 0$ ) 이고

$$S_1 = \int_0^\gamma |xf(x)| dx, S_2 = \int_\gamma^\beta |xf(x)| dx$$

하면  $y = xf(x)$  의 그래프는 다음과 같다.



$$g(\beta) = \int_0^\beta tf(t) dt = S_1 - S_2 = 0 \text{ 이므로}$$

$S_1 = S_2$  이다.

$$\int_\beta^x tf(t) dt = g(x) - g(\beta)$$

$$= g(x) = \int_0^x tf(t) dt \geq 0$$

이므로, 모든 실수  $x$  에 대하여  $\int_\beta^x tf(t) dt \geq 0$  (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

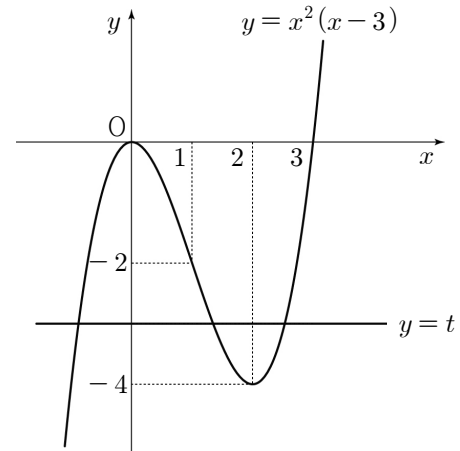
21. [출제의도] 함수의 연속성을 활용하여 추론하기

$$(x-1)\{x^2(x-3)-t\} = 0$$

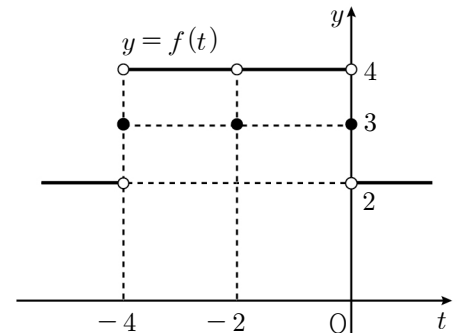
$$x=1 \text{ 또는 } x^2(x-3)-t=0$$

$x^2(x-3)-t=0$  의 서로 다른 실근의 개수는

$y=x^2(x-3)$  의 그래프와 직선  $y=t$  의 교점의 개수와 같다.



따라서  $y=f(t)$  의 그래프는 다음과 같다.



함수  $f(t)$  가  $t=-4, -2, 0$  에서 불연속이다. 함수  $f(t)g(t)$  가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는  $t=-4, -2, 0$  에서 연속이어야 한다.

$t=-4$  일 때,

$$\lim_{t \rightarrow -4^-} f(t)g(t) = 2g(-4),$$

$$\lim_{t \rightarrow -4^+} f(t)g(t) = 4g(-4),$$

$$f(-4)g(-4) = 3g(-4) \text{ 이고}$$

함수  $f(t)g(t)$  가  $t=-4$  에서 연속이므로

$$2g(-4) = 4g(-4) = 3g(-4)$$

$$\text{따라서 } g(-4) = 0$$

$$\text{같은 방법으로 } g(-2) = g(0) = 0$$

(가)에서  $g(x)$  가 삼차 이하의 다항함수이므로

$$g(x) = ax(x+2)(x+4) \quad (a \neq 0) \text{ 이라 하면}$$

$$(나)에서 g(-3) = 6 \text{ 이므로 } a = 2$$

$$g(x) = 2x(x+2)(x+4)$$

$$\text{따라서 } g(1) = 30$$

22. [출제의도] 등비수열 이해하기

공비를  $r$  라 하면  $r=2$

$$\text{따라서 } a_5 = a_3 \times r^2 = 8 \times 2^2 = 32$$

23. [출제의도] 순열과 조합 계산하기

$${}_5P_2 + {}_4C_3 = 20 + 4 = 24$$

24. [출제의도] 함수의 연속성 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 12,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + 2a - 4 = 2a,$$

$$f(2) = 2a \text{ 이므로 } 12 = 2a$$

$$\text{따라서 } a = 6$$

25. [출제의도] 적분과 미분의 관계 이해하기

$$f'(x) = 3x^2 + 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 17$$

26. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계

이해하기

등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항이 2, 공차가 4이므로  
일반항  $a_n = 4n - 2$ ,  $a_5 = 18$

$$a_5 b_5 = \sum_{k=1}^5 a_k b_k - \sum_{k=1}^4 a_k b_k = 270$$

$$\text{따라서 } b_5 = \frac{270}{18} = 15$$

27. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

$$f(x) = (x+2t)x(x-t) = x^3 + tx^2 - 2t^2x$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2tx - 2t^2$$

$$f'(4) = -2t^2 + 8t + 48$$

$$= -2(t-2)^2 + 56$$

따라서  $f'(4)$ 의 최댓값은  $t=2$ 일 때 56

28. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기

조건을 만족시키는 자연수는 각 자리의 수의 합이 8보다 작은 네 자리의 홀수이므로 일의 자리의 수는 1, 3, 5이다.

이 네 자리의 자연수를

$a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$  ( $a \neq 0$ )이라 하자.

(i)  $d=1$ 인 경우

부등식  $a+b+c \leq 6$  ( $a \geq 1$ )을 만족시키는 음이 아닌 정수  $a, b, c$ 의 순서쌍  $(a, b, c)$ 의 개수와 같으므로

$$a+b+c=6 \quad (a \geq 1) \text{일 때, } {}_3\text{H}_5$$

$$a+b+c=5 \quad (a \geq 1) \text{일 때, } {}_3\text{H}_4$$

⋮

$$a+b+c=1 \quad (a \geq 1) \text{일 때, } {}_3\text{H}_0$$

$${}_3\text{H}_5 + {}_3\text{H}_4 + \cdots + {}_3\text{H}_0 = {}_7\text{C}_5 + {}_6\text{C}_4 + \cdots + {}_2\text{C}_0 = 56$$

(ii)  $d=3$ 인 경우

부등식  $a+b+c \leq 4$  ( $a \geq 1$ )을 만족시키는 음이 아닌 정수  $a, b, c$ 의 순서쌍  $(a, b, c)$ 의 개수와 같으므로 (i)과 같은 방법으로

$${}_3\text{H}_3 + {}_3\text{H}_2 + {}_3\text{H}_1 + {}_3\text{H}_0 = {}_5\text{C}_3 + {}_4\text{C}_2 + {}_3\text{C}_1 + {}_2\text{C}_0 = 20$$

(iii)  $d=5$ 인 경우

부등식  $a+b+c \leq 2$  ( $a \geq 1$ )을 만족시키는 음이 아닌 정수  $a, b, c$ 의 순서쌍  $(a, b, c)$ 의 개수와 같으므로 (i)과 같은 방법으로

$${}_3\text{H}_1 + {}_3\text{H}_0 = {}_3\text{C}_1 + {}_2\text{C}_0 = 4$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수의 개수는 80

(다른 풀이)

(i)  $d=1$ 인 경우

$a+b+c \leq 6$  ( $a \geq 1$ )을 만족시키는 음이 아닌 정수  $a, b, c$ 의 순서쌍  $(a, b, c)$ 의 개수는

$a+b+c+e=6$  ( $a \geq 1$ )을 만족시키는 음이 아닌 정수  $a, b, c, e$ 의 순서쌍  $(a, b, c, e)$ 의 개수와 같다.

$$\text{그러므로 } {}_4\text{H}_5 = {}_8\text{C}_5 = 56$$

(ii)  $d=3$ 인 경우

$a+b+c \leq 4$  ( $a \geq 1$ )을 만족시키는 음이 아닌 정수  $a, b, c$ 의 순서쌍  $(a, b, c)$ 의 개수는

$a+b+c+e=4$  ( $a \geq 1$ )을 만족시키는 음이 아닌 정수  $a, b, c, e$ 의 순서쌍  $(a, b, c, e)$ 의 개수와 같다.

$$\text{그러므로 } {}_4\text{H}_3 = {}_6\text{C}_3 = 20$$

(iii)  $d=5$ 인 경우

$a+b+c \leq 2$  ( $a \geq 1$ )을 만족시키는 음이 아닌 정수  $a, b, c$ 의 순서쌍  $(a, b, c)$ 의 개수는

$a+b+c+e=2$  ( $a \geq 1$ )을 만족시키는 음이 아닌 정수  $a, b, c, e$ 의 순서쌍  $(a, b, c, e)$ 의 개수와 같다.

$$\text{그러므로 } {}_4\text{H}_1 = {}_4\text{C}_1 = 4$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수의 개수는 80

29. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 활용하여 문제해결하기

접선  $l_n$ 의 방정식은  $y=2nx-n^2$ 이므로

$$Y_n(0, -n^2)$$

직선  $l_n$ 이  $x$ 축과 만나는 점을  $X_n$ 이라 하면

$$X_n\left(\frac{1}{2}n, 0\right)$$

$$\overline{OX_n} = \frac{1}{2}n$$

$$\overline{X_nQ_n} = \overline{X_nP_n} = \sqrt{n^4 + \frac{1}{4}n^2}$$

$$\overline{Y_nR_n} = \overline{Y_nP_n} = \sqrt{4n^4 + n^2}$$

이므로

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{OQ_n}}{\overline{Y_nR_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{OX_n} + \overline{X_nQ_n}}{\overline{Y_nR_n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n + \sqrt{n^4 + \frac{1}{4}n^2}}{\sqrt{4n^4 + n^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n} + \sqrt{1 + \frac{1}{4n^2}}}{\sqrt{4 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}$$

따라서  $100\alpha = 50$

30. [출제의도] 조합을 활용하여 문제해결하기

집합  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ 라 하면  $D$ 의 원소 중  $x$ 좌표와  $y$ 좌표가 모두 정수인 점을 다음과 같은 4개의 집합으로 분류할 수 있다.

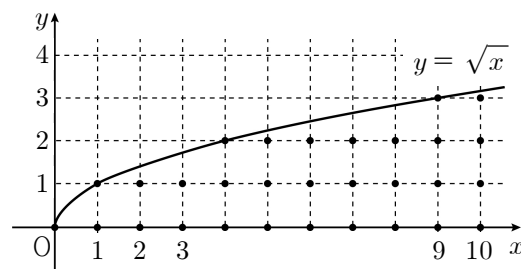
$$S_1 = \{(x, y) \mid x, y \text{는 홀수}\}$$

$$S_2 = \{(x, y) \mid x \text{는 홀수, } y \text{는 짝수 또는 } 0\}$$

$$S_3 = \{(x, y) \mid x \text{는 짝수 또는 } 0, y \text{는 홀수}\}$$

$$S_4 = \{(x, y) \mid x, y \text{는 짝수 또는 } 0\}$$

서로 다른 두 점의 중점의  $x$ 좌표와  $y$ 좌표가 모두 정수이기 위해서는 위의 4개의 집합 중 하나에서 서로 다른 두 원소를 선택해야 한다.



$$f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 9, \dots$$

$f(9)$ 를 구하면

(i) 집합  $S_1$ 에서 선택하는 경우

$$(1, 1), (3, 1), (5, 1), (7, 1), (9, 1), (9, 3)$$

중 서로 다른 두 점을 선택해야 하므로  ${}_6\text{C}_2 = 15$

(ii) 집합  $S_2$ 에서 선택하는 경우

$$(1, 0), (3, 0), (5, 0), (5, 2), (7, 0), (7, 2),$$

$$(9, 0), (9, 2) \text{ 중 서로 다른 두 점을 선택해야}$$

$$\text{하므로 } {}_8\text{C}_2 = 28$$

(iii) 집합  $S_3$ 에서 선택하는 경우

$$(2, 1), (4, 1), (6, 1), (8, 1) \text{ 중 서로 다른 두}$$

$$\text{점을 선택해야 하므로 } {}_4\text{C}_2 = 6$$

(iv) 집합  $S_4$ 에서 선택하는 경우

$$(0, 0), (2, 0), (4, 0), (4, 2), (6, 0), (6, 2),$$

$$(8, 0), (8, 2) \text{ 중 서로 다른 두 점을 선택해야 하}$$

$$\text{므로 } {}_8\text{C}_2 = 28$$

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여

$$f(9) = 15 + 28 + 6 + 28 = 77$$

같은 방법으로

$$f(10) = {}_6\text{C}_2 + {}_8\text{C}_2 + {}_6\text{C}_2 + {}_{10}\text{C}_2 = 103$$

$$f(n) < f(n+1) \text{ 이므로 } n \text{의 최댓값은 } 9$$

(참고)

2 이상의 자연수  $n$ 에 대하여 각 집합의 원소의 개수는 다음과 같다.

$n$	$n(S_1)$	$n(S_2)$	$n(S_3)$	$n(S_4)$
2	1	1	1	2
3	2	2	1	2
4	2	2	2	4
5	3	4	2	4
6	3	4	3	6
7	4	6	3	6
8	4	6	4	8
9	6	8	4	8
10	6	8	6	10
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

따라서  $f(n)$ 은 다음과 같다.

$$f(2) = {}_2\text{C}_2 = 1$$

$$f(3) = {}_2\text{C}_2 + {}_2\text{C}_2 + {}_2\text{C}_2 = 3$$

$$f(4) = {}_2\text{C}_2 + {}_2\text{C}_2 + {}_2\text{C}_2 + {}_4\text{C}_2 = 9$$

$$f(5) = {}_3\text{C}_2 + {}_4\text{C}_2 + {}_2\text{C}_2 + {}_4\text{C}_2 = 16$$

$$f(6) = {}_3\text{C}_2 + {}_4\text{C}_2 + {}_3\text{C}_2 + {}_6\text{C}_2 = 27$$

$$f(7) = {}_4\text{C}_2 + {}_6\text{C}_2 + {}_3\text{C}_2 + {}_6\text{C}_2 = 39$$

$$f(8) = {}_4\text{C}_2 + {}_6\text{C}_2 + {}_4\text{C}_2 + {}_8\text{C}_2 = 55$$

$$f(9) = {}_6\text{C}_2 + {}_8\text{C}_2 + {}_4\text{C}_2 + {}_8\text{C}_2 = 77$$

$$f(10) = {}_6\text{C}_2 + {}_8\text{C}_2 + {}_6\text{C}_2 + {}_{10}\text{C}_2 = 103$$