

2012 년 8 월 19 일 (오후); 제한시간 2 시간 30 분; 문항당 7 점

5. 원 O 에 내접하는 사각형 $ABCD$ ($\overline{AB} > \overline{AD}$) 의 변 AB 위에 $\overline{AE} = \overline{AD}$ 가 되도록 점 E 를 택하고 직선 AC 와 DE 의 교점을 F , 직선 DE 와 원 O 의 교점을 K ($\neq D$) 라 하자. 점 C, F, E 를 지나는 원의 점 E 에서의 접선과 직선 AK 가 점 L 에서 만난다고 할 때, $\overline{AL} = \overline{AD}$ 일 필요충분조건이 $\angle KCE = \angle ALE$ 임을 보여라.

6. 3 보다 큰 소수 p 가 다음 조건을 만족한다.

$2^x - 1$ 이 p 의 배수가 되는 양의 정수 x 중 가장 작은 것이 $p - 1$ 이다.

$p = 2k + 3$ 이라 할 때 수열 $\{a_n\}$ 을 식

$$a_i = a_{k+i} = 2^i \quad (1 \leq i \leq k), \quad a_{j+2k} = a_j a_{j+k} \quad (j \geq 1)$$

에 따라 귀납적으로 정의하자. 수열 $\{a_n\}$ 에는 p 로 나눈 나머지가 모두 다른 $2k$ 개의 연속한 항이 존재함을 보여라.

7. 모든 x_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) 가 양수이고 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때,

$$\frac{(\sqrt{s_1 x_1} + \sqrt{s_2 x_2} + \sqrt{s_3 x_3} + \sqrt{s_4 x_4} + \sqrt{s_5 x_5})^2}{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5}$$

의 최댓값을 구하여라. (단, $s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$)

8. 1 번부터 n 번까지 n 명의 학생이 있다. 1 에서 n 까지의 정수가 각각 하나씩 적혀있는 n 장의 카드가 들어 있는 통에서 각자 카드를 한 장씩 뽑기로 한다. 두 사람이 서로 상대방의 번호가 적힌 카드를 뽑으면 그 두 사람을 짝이라고 하자. 짝이 하나도 생기지 않을 확률을 p_n 이라고 할 때 다음이 성립함을 보여라.

$$p_n - p_{n-1} = \begin{cases} 0, & n \text{ 은 홀수} \\ \frac{1}{(-2)^k k!}, & n = 2k \end{cases}$$