제25회 1차시험
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

유형 가

2011년 5월 14일; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
   예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1～4번은 각 4점, 문제 17～20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. 삼각형 ABC에 대하여 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$라 하자. $a = c$이고 $a^2 = b^2 + ba$일 때 $\angle B = x°$이다. x의 값을 구하여라.

2. 빨간색 카드가 7장, 파란색 카드가 10장, 노란색 카드가 15장 있다. 빨간색 카드에는 $1, 2, \ldots, 7$, 파란색 카드에는 $1, 2, \ldots, 10$, 노란색 카드에는 $1, 2, \ldots, 15$ 중 하나의 숫자가 적혀 있고, 같은 색 카드에 적혀 있는 숫자는 서로 다르다. 빨간색, 파란색, 노란색의 카드를 각각 한 장씩 고를 때 세 장의 카드에 적혀 있는 수의 합이 11의 배수가 되도록 하는 방법의 수를 구하여라.

3. $\angle A = 60°$, $\angle B = 30°$이고 $AB = 8$인 삼각형 ABC의 내부의 점 P에서 세 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. $PD^2 + PE^2 + PF^2$의 최솟값을 구하여라.

4. 양의 정수 $n = 2^{30}3^{15}$에 대하여, n^2의 양의 약수 중 n보다 작고 n의 약수가 아닌 것의 개수를 구하여라.

5. 삼각형 ABC에서 $BC : CA : AB = 3 : 5 : 4$이다. AB 위의 점 E와 AC 위의 점 F가 $AE : AF = 3 : 2$를 만족시킨다. BC의 중점을 M이라 하고 AM과 EF의 교점을 Q라 할 때

$$120 \times \frac{QE}{QF}$$

의 값을 구하여라.

6. 다음 조건을 모두 만족하는 정수들로 이루어진 순서쌍 $(a_1, a_2, \ldots, a_9)$의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(1) $1 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_9 \le 9$

(2) $a_5 = 5$

(3) $a_9 - a_1 \le 7$

7. 남학생 $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$과 여학생 $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$이 있다. 각 학생들에게 다음 조건을 모두 만족하도록 서로 다른 양의 정수를 하나씩 번호로 부여한다.

(1) $i \ne j$이면 a_i와 b_j의 번호는 3 이상 차이나게 한다.

(2) 같은 성별의 두 학생의 번호는 2 이상 차이나게 한다.

(3) b_{10}에게 가장 큰 번호를 부여한다.

이때, b_{10}에게 번호로 부여할 수 있는 수의 최솟값을 구하여라.

8. 양의 정수의 순서쌍 (n, k) $(n, k \le 100)$에 대하여, 집합 $\{n, n+1, n+2, \ldots, n+k\}$에 속하는 수들의 합으로 나타낼 수 있는 정수 전체의 집합을 $X(n, k)$라 하자. 예를 들어, $n = 9, k = 2$인 경우

$$19 = 9 + 10,\ 28 = 9 + 9 + 10,\ 44 = 11 + 11 + 11 + 11$$

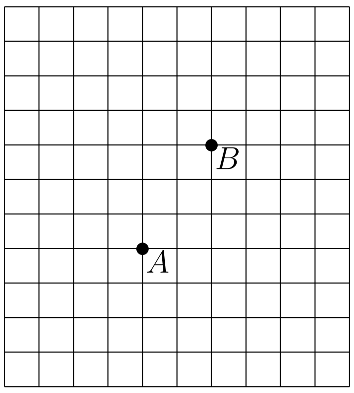
이므로 19, 28, 44는 모두 $X(9, 2)$에 속한다. $2n$ 이상의 정수 중 $X(n, k)$에 속하지 않는 것이 1개가 되게 하는 순서쌍 (n, k)의 개수를 구하여라.

(뒷면에 계속)

9. 2^{10} 보다 작은 양의 정수 n 중 $n^{32}-1$ 이 2^{10} 의 배수가 되게 하는 것의 개수를 구하여라.

10. 사각형 $ABCD$ 가 지름이 BC 인 원에 내접한다. $AB = 15\sqrt{2}$, $CD = 5$ 이고 $\angle B + \angle C = 135°$ 일 때, $(AD)^2$ 의 값을 구하여라.

11. 주어진 그림에서 각 변의 길이는 1 이다. 변을 따라 점 A 에서 시작하여 점 B 에서 끝나는 경로 중 길이가 11 인 것의 개수를 1000 으로 나눈 나머지를 구하여라. 단 격자점에서만 방향을 바꿀 수 있으며, 각 변이나 각 격자점 (A, B 포함) 을 두 번 이상 지나는 것도 가능하다.



12. 양의 정수 m, n $(m > n)$ 에 대하여

$$\frac{m^2 - n^2}{2n}$$

이 1000 보다 작은 소수가 될 때, $m - n$ 의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.

13. 삼각형 ABC 의 외심을 O, 내심을 I 이라 하고 $\angle A$ 의 이등분선이 삼각형 ABC 의 외접원과 만나는 점을 D $(\neq A)$, BC 와 만나는 점을 E 라 하자. AE 의 수직이등분선과 OA 의 교점을 K 라 할 때, $OK = 3$ 이고 $DE \times IE = 90$ 이다. 삼각형 ABC 의 내접원의 반지름의 길이를 구하여라.

14. 세 자리 이하의 양의 정수 중 어느 자리에도 1 이 나타나지 않는 것들의 평균값을 기약분수 $\frac{n}{m}$ 으로 표현했을 때 $m + n$ 을 1000 으로 나눈 나머지를 구하여라.

15. 28 이하의 서로 다른 양의 정수 7 개로 이루어진 집합 $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_7\}$ 에 대하여 A 의 원소 중 n 보다 작거나 같은 것의 개수를 a_n 이라 하자. 등식

$$\frac{a_1}{1 \cdot 2} + \frac{a_2}{2 \cdot 3} + \frac{a_3}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{a_{27}}{27 \cdot 28} + \frac{a_{28}}{28 \cdot 29} = \frac{175}{116}$$

이 성립할 때, $\frac{28}{x_1} + \frac{28}{x_2} + \cdots + \frac{28}{x_7}$ 의 값을 구하여라.

16. 양수 a, b 가 $ab(a+b+1) = 25$ 를 만족할 때

$$(a+b)(b+1)$$

의 최솟값을 구하여라.

17. 다음 식의 값보다 작은 정수 중 가장 큰 것을 구하여라.

$$\frac{2011}{21^2} + \frac{2011}{23^2} + \frac{2011}{25^2} + \cdots + \frac{2011}{79^2}$$

18. 중심이 O 이고 지름이 BC 인 원 위의 점 A $(\neq B, C)$ 가 $AB < AC$ 를 만족한다. 점 A 에서 원에 접하는 직선을 ℓ 이라 하고, 점 C 에서 직선 ℓ 에 내린 수선의 발을 D, CD 와 원의 교점을 E $(\neq C)$, 점 E 를 지나고 BD 에 평행인 직선이 OA 와 만나는 점을 F, BF 와 원의 교점을 J $(\neq B)$, CJ 와 AD 의 교점을 K 라 하자. $DK = 4$, $CE = 10$ 일 때, $(BC)^2$ 의 값을 구하여라.

19. 양의 정수 a, m, n $(101 \leq a \leq 199)$ 은 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(1) $m + n$ 은 a 의 배수

(2) $mn = a(a+1)$

이 때, $m + n$ 의 값을 구하여라.

20. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수 a, b, c, n 으로 이루어진 순서쌍 (a, b, c, n) 의 개수를 구하여라.

(1) $n^a + 2n^b = n^c$

(2) $a + b + c \leq 500$

(끝)