

제 3 교 시

2021학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

가형

성명									
수험번호									

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며, ‘0’이 포함된 경우에는 ‘0’을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

공 란

1. $\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{2}{3}$

② $\frac{4}{9}$

③ $\frac{8}{27}$

④ $\frac{16}{81}$

⑤ $\frac{32}{243}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 5n} - n}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$

② $\frac{2}{5}$

③ $\frac{3}{5}$

④ $\frac{4}{5}$

⑤ 1

3. $\sin \theta = -\frac{1}{3}$ 일 때, $\frac{\cos \theta}{\tan \theta}$ 의 값은? [2점]

① -4

② $-\frac{11}{3}$

③ $-\frac{10}{3}$

④ -3

⑤ $-\frac{8}{3}$

4. $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^5$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는? [3점]

① 5

② 10

③ 15

④ 20

⑤ 25

5. 함수 $y = 4^x - 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y = 2^{2x-3} + 3$ 의 그래프와 일치할 때, ab 의 값은? [3점]

① 2

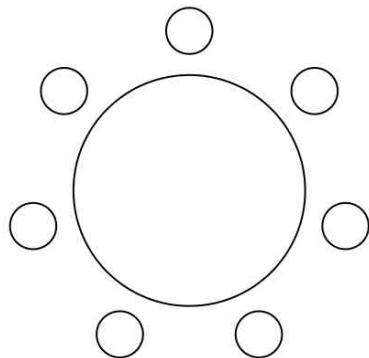
② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

6. 그림과 같이 원형 탁자에 7개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다. A, B, C를 포함한 7명의 학생이 모두 이 7개의 의자에 앉으려고 할 때, A, B, C 세 명 중 어느 두 명도 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 108

② 120

③ 132

④ 144

⑤ 156

7. 곡선 $x^2 - 2xy + 3y^3 = 5$ 위의 점 $(2, -1)$ 에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $-\frac{6}{5}$

② $-\frac{5}{4}$

③ $-\frac{4}{3}$

④ $-\frac{3}{2}$

⑤ -2

8. x 에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} \geq \left(\frac{1}{16}\right)^{x-1} \\ \log_2 4x < \log_2(x+k) \end{cases}$$

의 해가 존재하지 않도록 하는 양수 k 의 최댓값은? [3점]

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

9. 다섯 개의 자연수 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 3개의 수를 택할 때, 택한 세 수의 곱이 6 이상인 경우의 수는? [3점]

① 23

② 25

③ 27

④ 29

⑤ 31

10. $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\cos^2 3x - \sin 3x + 1 = 0$ 의 모든 실근의 합은? [3점]

① $\frac{3}{2}\pi$

② $\frac{7}{4}\pi$

③ 2π

④ $\frac{9}{4}\pi$

⑤ $\frac{5}{2}\pi$

11. 함수 $f(x) = \frac{e^x}{\sin x + \cos x}$ 에 대하여 $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$ 에서 방정식 $f(x) - f'(x) = 0$ 의 실근은? [3점]

① $-\frac{\pi}{6}$

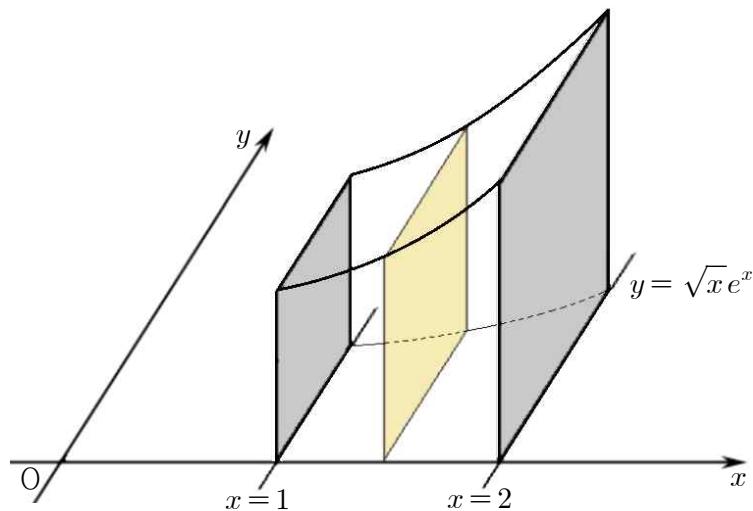
② $\frac{\pi}{6}$

③ $\frac{\pi}{4}$

④ $\frac{\pi}{3}$

⑤ $\frac{\pi}{2}$

12. 그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{x}e^x$ ($1 \leq x \leq 2$)와 x 축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



$$\textcircled{1} \quad \frac{e^4 + e^2}{4}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{2e^4 - e^2}{4}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{2e^4 + e^2}{4}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{3e^4 - e^2}{4}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{3e^4 + e^2}{4}$$

13. 주머니에 1, 1, 1, 2, 2, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다.

이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 두 수의 차를 확률변수 X 라 하자. $E(X)$ 의 값은? [3점]

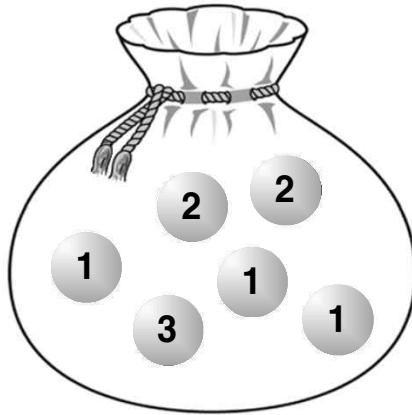
① $\frac{14}{15}$

② 1

③ $\frac{16}{15}$

④ $\frac{17}{15}$

⑤ $\frac{6}{5}$



14. 함수 $f(x) = \ln x$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ 의 값은? [4점]

① $\ln 2$

② $(\ln 2)^2$

③ $\frac{\ln 2}{2}$

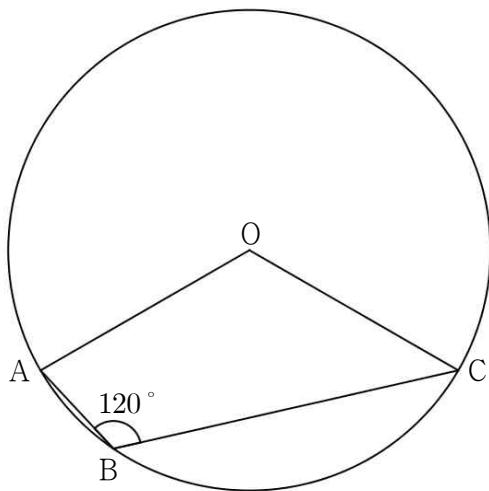
④ $\frac{(\ln 2)^2}{2}$

⑤ $\frac{(\ln 2)^2}{4}$

15. 그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심이 O인 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여

$$\angle ABC = 120^\circ, \overline{AB} + \overline{BC} = 2\sqrt{15}$$

일 때, 사각형 OABC의 넓이는? [4점]



① $5\sqrt{3}$

② $\frac{11\sqrt{3}}{2}$

③ $6\sqrt{3}$

④ $\frac{13\sqrt{3}}{2}$

⑤ $7\sqrt{3}$

16. 확률변수 X 는 정규분포 $N(m, 4^2)$ 을 따르고, 확률변수 Y 는 정규분포 $N(20, \sigma^2)$ 을 따른다.

확률변수 X 의 확률밀도함수가 $f(x)$ 일 때, $f(x)$ 와 두 확률변수 X, Y 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+10) = f(20-x)$ 이다.

(나) $P(X \geq 17) = P(Y \leq 17)$

$P(X \leq m+\sigma)$ 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

(단, $\sigma > 0$) [4점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915

② 0.7745

③ 0.9104

④ 0.9332

⑤ 0.9772

17. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 부등식

$$\sum_{k=1}^n \frac{2^k P_k}{2^k} \leq \frac{(2n)!}{2^n} \quad \dots\dots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때,

$$(좌변) = \frac{2^1 P_1}{2^1} = 1 \text{이고, } (우변) = \boxed{(가)} \text{이므로 } (*) \text{이 성립한다.}$$

(ii) $n=m$ 일 때, $(*)$ 이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m \frac{2^k P_k}{2^k} \leq \frac{(2m)!}{2^m}$$

이다. $n=m+1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{2^k P_k}{2^k} &= \sum_{k=1}^m \frac{2^k P_k}{2^k} + \frac{2^{m+2} P_{m+1}}{2^{m+1}} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{2^k P_k}{2^k} + \frac{\boxed{(나)}}{2^{m+1} \times (m+1)!} \\ &\leq \frac{(2m)!}{2^m} + \frac{\boxed{(나)}}{2^{m+1} \times (m+1)!} \\ &= \frac{\boxed{(나)}}{2^{m+1}} \times \left\{ \frac{1}{\boxed{(다)}} + \frac{1}{(m+1)!} \right\} \\ &< \frac{(2m+2)!}{2^{m+1}} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$ 일 때도 $(*)$ 이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{2^k P_k}{2^k} \leq \frac{(2n)!}{2^n}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p , (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$ 이라 할 때, $p + \frac{f(2)}{g(4)}$ 의 값은? [4점]

① 16

② 17

③ 18

④ 19

⑤ 20

18. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n+1} = -a_n + 3a_{n+1}$

(나) $a_{2n+2} = a_n - a_{n+1}$

$a_1 = 1, a_2 = 2$ 일 때, $\sum_{n=1}^{16} a_n$ 의 값은? [4점]

① 31

② 33

③ 35

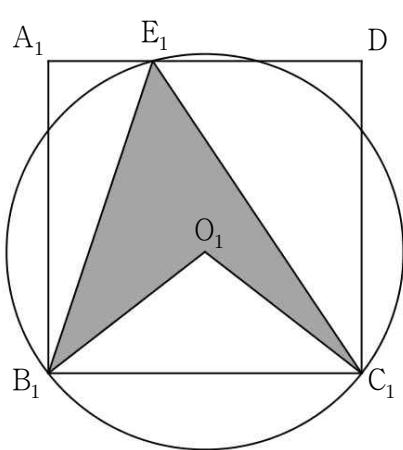
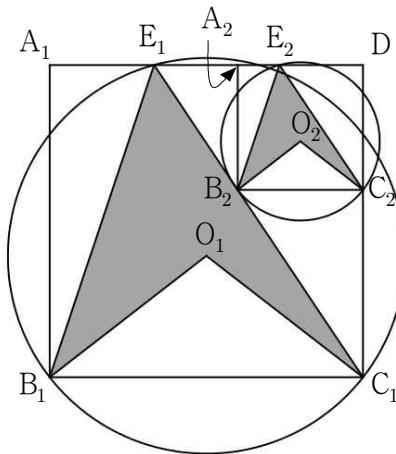
④ 37

⑤ 39

19. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사각형 $A_1B_1C_1D$ 에서 선분 A_1D 를 $1:2$ 로 내분하는 점을 E_1 이라 하고, 세 점 B_1, C_1, E_1 을 지나는 원의 중심을 O_1 이라 하자. 삼각형 $E_1B_1C_1$ 의 내부와 삼각형 $O_1B_1C_1$ 의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 선분 E_1D 위의 점 A_2 , 선분 E_1C_1 위의 점 B_2 , 선분 C_1D 위의 점 C_2 와 점 D 를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D$ 를 그린다. 정사각형 $A_2B_2C_2D$ 에서 선분 A_2D 를 $1:2$ 로 내분하는 점을 E_2 라 하고, 세 점 B_2, C_2, E_2 를 지나는 원의 중심을 O_2 라 하자. 삼각형 $E_2B_2C_2$ 의 내부와 삼각형 $O_2B_2C_2$ 의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]

 R_1  R_2

...

...

$$\textcircled{1} \quad \frac{90}{7}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{275}{21}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{40}{3}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{95}{7}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{290}{21}$$

20. 세 상수 a, b, c ($a > 0, c > 0$)에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} -ax^2 + 6ex + b & (x < c) \\ a(\ln x)^2 - 6\ln x & (x \geq c) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재한다.

$f\left(\frac{1}{2e}\right)$ 의 값은? [4점]

① $-4\left(e^2 + \frac{1}{4e^2}\right)$

② $-4\left(e^2 - \frac{1}{4e^2}\right)$

③ $-3\left(e^2 + \frac{1}{4e^2}\right)$

④ $-3\left(e^2 - \frac{1}{4e^2}\right)$

⑤ $-2\left(e^2 + \frac{1}{4e^2}\right)$

21. 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \int_0^x |t \sin t| dt - \left| \int_0^x t \sin t dt \right|$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

①. $f(2\pi) = 2\pi$

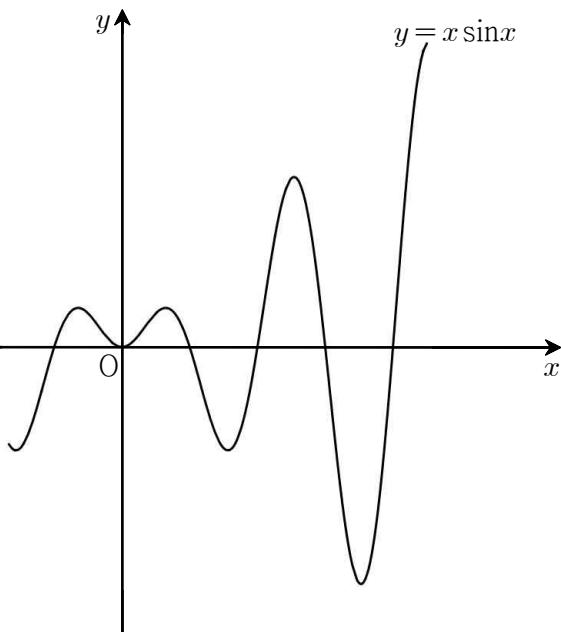
②. $\pi < \alpha < 2\pi$ 일 때 $\int_0^\alpha t \sin t dt = 0$ 이면 $f(\alpha) = \pi$ 이다.

③. $2\pi < \beta < 3\pi$ 일 때 $\int_0^\beta t \sin t dt = 0$ 이면 $\int_\beta^{3\pi} f(x) dx = 6\pi(3\pi - \beta)$ 이다.

④. \neg

⑤. \neg, \sqcup

⑥. \neg, \sqsubset



22. 함수 $f(x) = 5\sin\left(\frac{\pi}{2}x + 1\right) + 3$ 의 주기를 p , 최댓값을 M 이라 할 때, $p+M$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 모평균이 15이고 모표준편차가 8인 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 \bar{X} 라 할 때, $E(\bar{X}) + \sigma(\bar{X})$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 수열 $\{(x^2 - 6x + 9)^n\}$ 을 수렴하도록 하는 모든 정수 x 의 값의 합을 구하시오. [3점]

25. 흰 구슬 3개와 검은 구슬 4개가 들어 있는 상자가 있다. 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 3의 배수이면 이 상자에서 임의로 2개의 구슬을 동시에 꺼내고, 나오는 눈의 수가 3의 배수가 아니면 이 상자에서 임의로 3개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 구슬 중 검은 구슬의 개수가 2일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

26. 두 실수 a, b 와 수열 $\{c_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(m+2)$ 개의 수

$$a, \log_2 c_1, \log_2 c_2, \log_2 c_3, \dots, \log_2 c_m, b$$

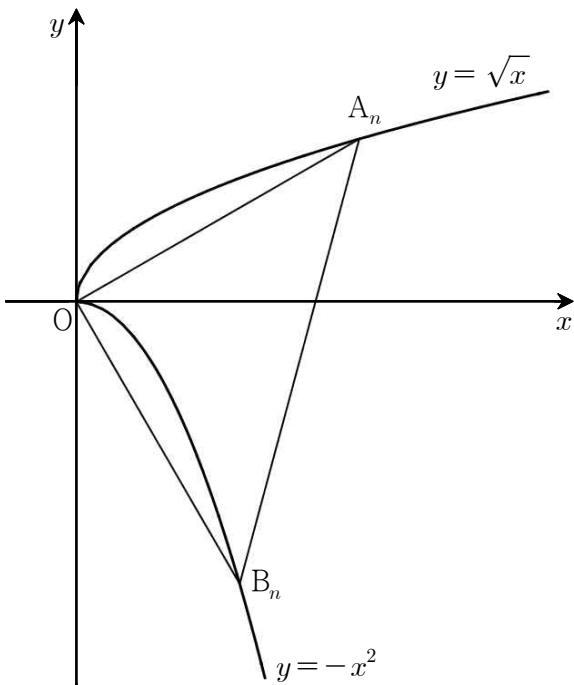
가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

(나) 수열 $\{c_n\}$ 의 첫째항부터 제 m 항까지의 항을 모두 곱한 값은 32이다.

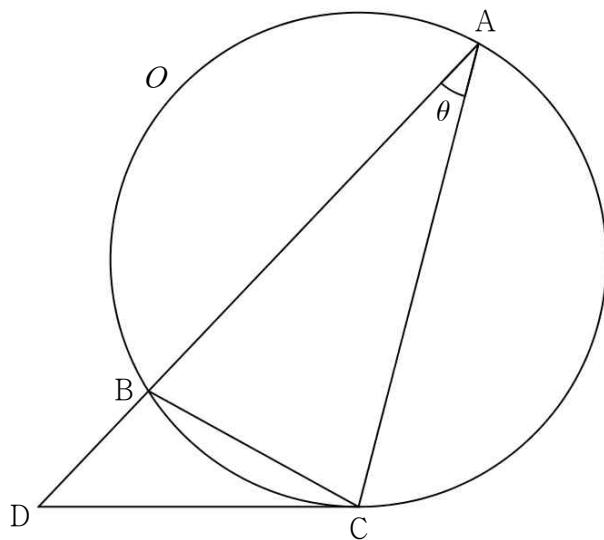
$a+b=1$ 일 때, 자연수 m 의 값을 구하시오. [4점]

27. 모든 자연수 n 에 대하여 곡선 $y = \sqrt{x}$ 위의 점 $A_n(n^2, n)$ 과 곡선 $y = -x^2$ ($x \geq 0$) 위의

점 B_n 이 $\overline{OA_n} = \overline{OB_n}$ 을 만족시킨다. 삼각형 A_nOB_n 의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{2S_n}{n^2}$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



28. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC} = 4$ 인 이등변삼각형 ABC에 외접하는 원 O가 있다. 점 C를 지나고 원 O에 접하는 직선과 직선 AB의 교점을 D라 하자. $\angle CAB = \theta$ 라 할 때, 삼각형 BDC의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$) [4점]



29. 그림은 여섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 여섯 장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 이웃한 두 장의 카드 중 왼쪽 카드에 적힌 수가 오른쪽 카드에 적힌 수보다 큰 경우가 한 번만 나타난 예이다.

1

2

4

3

5

6

이 여섯 장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 임의로 일렬로 나열할 때, 이웃한 두 장의 카드 중 왼쪽 카드에 적힌 수가 오른쪽 카드에 적힌 수보다 큰 경우가 한 번만 나타날 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다.
 $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 두 함수 $f(x) = x^2 - ax + b$ ($a > 0$), $g(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}}$ 에 대하여 상수 k 와 함수 $h(x) = (f \circ g)(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(0) < h(4)$

(나) 방정식 $|h(x)| = k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 7이고,

그중 가장 큰 실근을 α 라 할 때 함수 $h(x)$ 는 $x = \alpha$ 에서 극소이다.

$f(1) = -\frac{7}{32}$ 일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a + 16b$ 의 값을 구하시오.

(단, $\frac{5}{2} < e < 3$ 이고, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ 이다.) [4점]

공 란