

2018년 11월 11일 (오전); 제한시간 3시간; 문항당 7점

1. 예각삼각형 ABC 의 내심 I 에서 변 AC 에 내린 수선의 발을 E 라 하자. 점 A 를 지나고 직선 BI 에 수직인 직선과 직선 CI 의 교점을 K 라 하고, 점 A 를 지나고 직선 CI 에 수직인 직선과 점 C 를 지나고 직선 BI 에 수직인 직선의 교점을 L 이라 하자. 세 점 E, K, L 이 한 직선 위에 있음을 보여라.

2. 양의 정수 n 에 대하여, $x + y + 2z + 3w = n - 1$ 을 만족하는 음이 아닌 정수의 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수를 $p(n)$ 이라고 하고, 다음 세 조건을 모두 만족하는 음이 아닌 정수의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 $q(n)$ 이라 하자.

(i) $a + b + c + d = n$

(ii) $a \geq b$ 이고 $c \geq d$ 이며 $a \geq d$ 이다.

(iii) $b < c$

모든 n 에 대하여 $p(n) = q(n)$ 임을 보여라.

3. 다항식 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 4x + 4$ 에 대하여 다음을 만족하는 소수 p 가 무한히 많음을 보여라.

어떠한 양의 정수 m 에 대해서도 $f(m)$ 은 p 의 배수가 아니다.

4. 실수의 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 양의 정수 n 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족한다고 하자.

(i) $0 < a_n < n^\alpha$

(ii) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \sqrt{n}$

이때 $n > N$ 인 모든 n 에 대하여 $a_1^{2018} + a_2^{2018} + \cdots + a_n^{2018} < \frac{n}{2018}$ 이 성립하는 양의 정수 N 이 반드시 존재하게 되는 양수 α 를 모두 구하여라.