제 2 교시

수학 영역(나형)

5지선다형

1. $4^{\frac{1}{2}}+3^0$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 두 집합

$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 4, 6\}$

에 대하여 $n(A-B)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{2n^2+7}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

4. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=3a_n$

을 만족시킨다. $a_2=2$일 때, a_4의 값은? [3점]

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

5. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-5)=2017$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

6. 함수 $y=\frac{3}{x-2}+2$의 그래프는 함수 $y=\frac{a}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프와 일치한다. $a+m+n$의 값은? (단, a, m, n은 상수이다.) [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

7. 함수 $f(x)=2x+a$에 대하여 $f^{-1}(1)=2$일 때, $f(3)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

8. $\log 2=a$, $\log 3=b$라 할 때, $\log\frac{4}{15}$를 a, b로 나타낸 것은? [3점]

① $3a-b-1$ ② $3a+b-1$ ③ $2a-b+1$ ④ $2a+b-1$ ⑤ $a-3b+1$

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{k}{a_n + 2}$$

를 만족시킬 때, $a_3 = \frac{3}{2}$이 되도록 하는 상수 k의 값은? [3점]

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

10. 실수 x, y에 대한 두 조건

$p : x \geq k$이고 $y \geq 1$,

$q : (x-3)^2 + (y-4)^2 < 1$

에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 실수 k의 최댓값은? [3점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

11. 첫째항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = 4a_3,\ a_2 + a_3 = -12$$

를 만족시킬 때, a_5의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

12. 실수 x에 대한 조건

'모든 실수 x에 대하여 $x^2 + 4kx + 3k^2 \geq 2k - 3$이다.'

가 참인 명제가 되도록 하는 상수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M - m$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

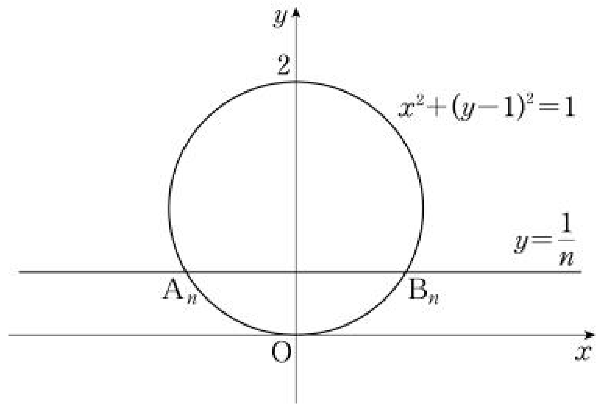
13. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 일대일 대응인 함수 $f : X \to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(2)-f(3)=f(4)-f(1)=f(5)$
> (나) $f(1)<f(2)<f(4)$

$f(2)+f(5)$의 값은? [3점]

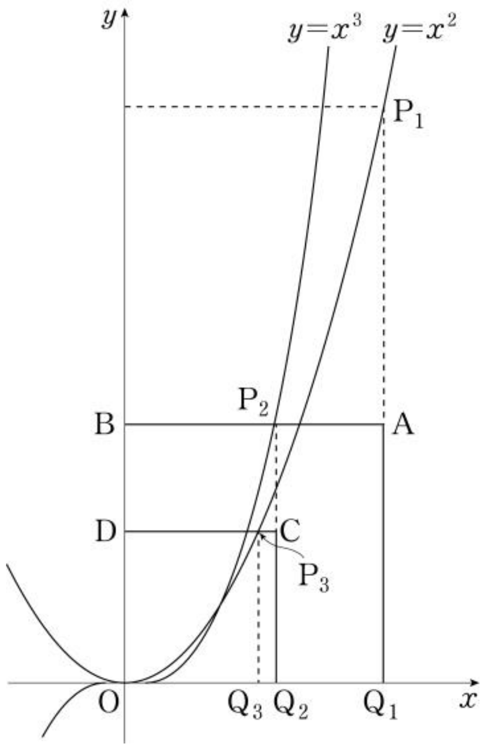
① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

14. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 직선 $y=\frac{1}{n}$과 원 $x^2+(y-1)^2=1$의 두 교점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 길이를 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} n(l_n)^2$의 값은? [4점]



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

15. 그림과 같이 좌표평면에 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$의 그래프가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $P_1(a, f(a))$ $(a>1)$에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_1이라 하자. 선분 OQ_1을 한 변으로 하는 정사각형 OQ_1AB의 한 변 AB가 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 P_2, 점 P_2에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_2라 하자. 선분 OQ_2를 한 변으로 하는 정사각형 OQ_2CD의 한 변 CD가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 P_3, 점 P_3에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_3이라 하자. 두 점 Q_2, Q_3의 x좌표를 각각 b, c라 할 때, $bc=2$가 되도록 하는 점 P_1의 y좌표의 값은? (단, O는 원점이고, 두 점 A, C는 제1사분면에 있다.) [4점]



① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

16. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x)=\frac{6x+12}{2x-1},$$

$$g(x)=\begin{cases}1 & (x\text{가 정수인 경우})\\ 0 & (x\text{가 정수가 아닌 경우})\end{cases}$$

일 때, 방정식 $(g\circ f)(x)=1$을 만족시키는 모든 자연수 x의 개수는? [4점]

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

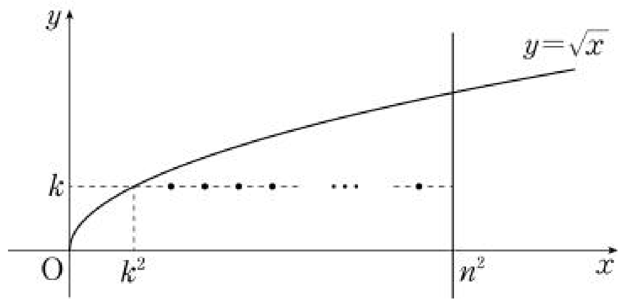
17. 함수

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x} & (x \geq 0) \\ 4x & (x<0)\end{cases}$$

의 역함수 $g(x)$에 대하여 부등식 $g(x) \leq -\frac{1}{4}x^2+3$의 해가 $a \leq x \leq b$일 때, $a+b$의 값은? [4점]

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

18. 다음은 2 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 x축 및 직선 $x=n^2$으로 둘러싸인 도형의 내부에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수 a_n을 구하는 과정이다.

> $n=2$일 때, 곡선 $y=\sqrt{x}$, x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 내부에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은
> $(2, 1)$, $(3, 1)$이므로
>
> $a_2=\boxed{(가)}$
>
> 이다.
> 3 이상의 자연수 n에 대하여 a_n을 구하여 보자.
>
> 
>
>
> 위의 그림과 같이 $1 \leq k \leq n-1$인 정수 k에 대하여 주어진 도형의 내부에 있는 점 중에서 x좌표가 정수이고, y좌표가 k인 점은
>
> $(k^2+1, k), (k^2+2, k), \cdots, (\boxed{(나)}, k)$
>
> 이므로 이 점의 개수를 b_k라 하면
>
> $b_k=\boxed{(나)}-k^2$
>
> 이다. 따라서
>
> $a_n=\sum_{k=1}^{n-1} b_k=\boxed{(다)}$
>
> 이다.

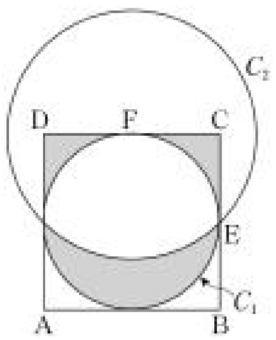
위의 (가)에 알맞은 수를 p라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $p+f(4)+g(6)$의 값은? [4점]

① 131　② 133　③ 135　④ 137　⑤ 139

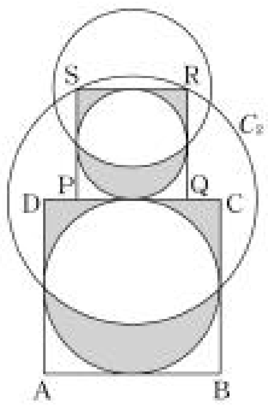
19. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD가 있다. 이 정사각형에 내접하는 원을 C_1이라 하자. 원 C_1이 변 BC, CD와 접하는 점을 각각 E, F라 하고, 점 F를 중심으로 하고 점 E를 지나는 원을 C_2라 하자. 원 C_1의 내부와 원 C_2의 외부의 공통부분인 모양의 도형과, 원 C_1의 외부와 원 C_2의 내부 및 정사각형 ABCD의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 두 꼭짓점이 변 CD 위에 있고 나머지 두 꼭짓점이 정사각형 ABCD의 외부에 있으면서 원 C_2 위에 있는 정사각형 PQRS를 그리고, 이 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양과 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

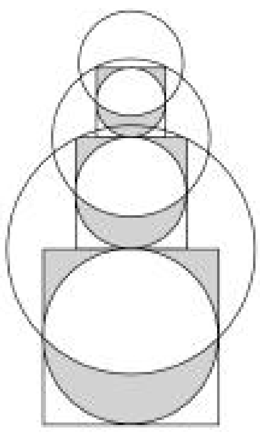
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2



···

R_3 ···

① $\dfrac{26-5\pi}{6}$ ② $\dfrac{28-5\pi}{6}$ ③ $\dfrac{30-5\pi}{6}$

④ $\dfrac{32-5\pi}{6}$ ⑤ $\dfrac{34-5\pi}{6}$

20. 실수 x에 대한 두 조건

$p : x^2-x-6<0,$

$q : x^2+(6-3a)x+2a^2-10a+8 \geq 0$

이 모두 참이 되도록 하는 정수 x가 오직 하나 존재할 때, 모든 정수 a의 값의 합은? [4점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

21. 자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$$A_m = \left\{ (a, b) \,\middle|\, 2^a = \frac{m}{b},\ a, b \text{는 자연수} \right\}$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $A_4 = \{(1, 2), (2, 1)\}$

ㄴ. 자연수 k에 대하여 $m = 2^k$이면 $n(A_m) = k$이다.

ㄷ. $n(A_m) = 1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 m의 개수는 23이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \times \log_2 8$의 값을 구하시오. [3점]

23. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2 = 2$, $a_5 - a_3 = 6$일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

24. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=2,\ \lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=9$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n(1+b_n)$의 값을 구하시오. [3점]

25. $0\le x\le 3$일 때, 함수 $y=2\sqrt{x+1}+k$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m=40$일 때, 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

26. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

27. 함수 $f(x)=x^2+x-\frac{1}{3}$에 대하여 부등식

$$f(n)<k<f(n)+1 \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시키는 정수 k의 값을 a_n이라 하자.

$\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{a_n}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

28. 어느 날 2개의 놀이 기구 A, B가 있는 놀이공원에 다녀온 30명의 학생을 대상으로 그날 어떤 놀이 기구를 이용했는지 조사하였더니 놀이 기구 A를 이용한 학생은 23명, 놀이 기구 B를 이용한 학생은 16명이었다. 놀이 기구 A, B를 모두 이용한 학생 수의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. [4점]

29. 2 이상의 자연수 x에 대하여

$\log_x n$ (n은 $1 \le n \le 300$인 자연수)

가 자연수인 n의 개수를 $A(x)$라 하자. 예를 들어, $A(2)=8$, $A(3)=5$이다.
집합 $P=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 공집합이 아닌 부분집합 X에 대하여 집합 X에서 집합 X로의 대응 f를

$f(x)=A(x)$ ($x \in X$)

로 정의하면 어떤 대응 f는 함수가 된다. 함수 f가 일대일 대응이 되도록 하는 집합 X의 개수를 구하시오. [4점]

30. 자연수 전체의 집합의 부분집합 X가 상수 p에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n(X)=3$
(나) $x \in X$일 때,

x가 홀수이면 $\dfrac{x+p}{2} \in X$,

x가 짝수이면 $\dfrac{x}{2} \in X$이다.

$5 \in X$일 때, 모든 자연수 p의 값의 합을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.