

제 23 회 한국수학을림피아드 - 2 차 시 험

중등부

2009년 8월 23일 (오전)

1. 다음 조건을 모두 만족하는 소수 a, b, c 에 대하여, 이 세 수의 곱 abc 의 값을 구하여라.
(i) $b + 8$ 은 a 의 배수이고, $b^2 - 1$ 은 a 와 c 의 배수이다.
(ii) $b + c = a^2 - 1$.
2. 예각삼각형 ABC 의 세 꼭지점 A, B, C 를 각각 변 BC, CA, AB 에 대하여 대칭이동한 점을 A', B', C' 이라 하자. 두 직선 $B'C$ 와 BC' 의 교점을 D , 두 직선 $A'C$ 와 AC' 의 교점을 E , 두 직선 $A'B$ 와 AB' 의 교점을 F 라 할 때, 세 직선 AD, BE, CF 가 한 점에서 만남을 보여라.
3. 0보다 크고 1보다 작은 임의의 양의 실수 x, y 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{1-x} + \frac{(1-x-y)^2}{1-y} \geq \frac{1}{2}$$

4. 학생 9명 중 4명씩으로 이루어진 n 개의 동아리가 있다. 서로 다른 두 동아리에 공통으로 속하는 학생이 2명 이하이다. 이때, $n \leq 18$ 임을 보여라.

제한 시간 2시간 30분

문항당 7점