



2020년 11월 21일; 제한시간 4시간; 문항당 7점

1. 다음 조건을 만족하는 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 을 모두 구하여라. (단, \mathbb{R} 은 실수 전체의 집합)

$$\text{모든 실수 } x, y \text{에 대하여 } x^2f(x) + yf(y^2) = f(x+y)f(x^2 - xy + y^2)$$

2. 예각삼각형 ABC 의 수심을 H , 변 BC 의 중점을 M 이라 하자. 선분 AH 를 지름으로 하는 원이 변 AB, AC 와 만나는 점을 각각 D, E , 선분 AH 와 DE 의 교점을 P , 점 H 를 지나고 직선 AH 와 수직인 직선과 선분 DM 의 교점을 Q 라 할 때, 세 점 P, Q, B 가 한 직선 위에 있음을 보여라.

3. 대한수학교등학교에는 남학생 n 명과 여학생 m 명이 있다. 남학생 B 와 서로 알고 지내는 여학생의 수를 $d(B)$ 라고 하고, 여학생 G 와 서로 알고 지내는 남학생의 수를 $d(G)$ 라고 하자. 각 여학생은 서로 알고 지내는 남학생이 적어도 1명 이상 있다고 한다. 이때 $\frac{d(B)}{d(G)} \geq \frac{m}{n}$ 이 되는 서로 알고 지내는 남학생 B 와 여학생 G 가 존재함을 보여라.

4. 다음 조건을 만족하는 서로소인 양의 정수의 순서쌍 (m, n) 중 $(41, 12)$ 와 다른 것을 하나 찾아라.

$$m^2 - 5n^2 \text{과 } m^2 + 5n^2 \text{은 모두 완전제곱수이다.}$$

5. 어떤 양의 정수 n 의 경우에는 다음 두 조건을 모두 만족하는 n 개의 서로 다른 양의 정수 a_1, a_2, \dots, a_n 이 존재한다.

(1) $a_1 = 1, a_n = 2000$

(2) 2 이상 n 이하인 모든 정수 i 에 대하여 $a_i - a_{i-1}$ 은 -3 또는 5 이다.

이런 양의 정수 n 중 가장 큰 것을 구하여라.

6. 볼록오각형 $ABCDE$ 가 있다. 사각형 $ABDE$ 는 평행사변형이고 사각형 $BCDE$ 는 한 원에 내접한다. 점 C 를 중심으로 하고 D 를 지나는 원이 직선 BD, DE 와 만나는 점 중 D 가 아닌 점을 각각 F, G 라 할 때, 세 점 A, F, G 는 직선 ℓ 위에 있다. 직선 ℓ 과 선분 BE 의 교점을 H 라 할 때, 다음 조건을 만족하는 원 Ω 의 모임을 고려하자.

원 Ω 는 두 점 A 와 H 를 지나고 변 AB, AE 와 각각 점 A 가 아닌 다른 점에서 만난다.

이러한 원 Ω 와 변 AB, AE 의 교점을 각각 $P(\neq A), Q(\neq A)$ 라 할 때, $\overline{AP} + \overline{AQ}$ 의 값이 일정함을 보여라.