

제 24 회 한국수학올림피아드 - 2 차 시험

중등부

2010년 8월 22일 (오후)

5. 실수 x, y, z 가 $\tan x + \tan y + \tan z = 2$ ($0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$)를 만족할 때,

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z < 1$$

임을 보여라.

6. 양의 정수 n 과 홀수인 소수 p 에 대하여 $n^2 - n$ 이 p 의 배수가 아니다.

$$a_1 = pn + 1, \quad a_{k+1} = n \cdot a_k + 1 \quad (k \geq 1)$$

이라 할 때, a_{p-1} 이 소수가 아님을 보여라.

7. 원에 내접하는 사각형 $ABCD$ 에 대하여 직선 AB 와 CD 가 점 E 에서 만난다. 점 B 를 지나고 직선 AC 와 직교하는 직선과 점 C 를 지나고 직선 BD 와 직교하는 직선의 교점을 P 라 하고, 점 D 를 지나고 직선 AC 와 직교하는 직선과 점 A 를 지나고 직선 BD 와 직교하는 직선의 교점을 Q 라 하자. 세 점 E, P, Q 가 일직선 위에 있음을 보여라.

8. 좌표평면 상의 네 점 $(0, 0), (0, 2), (n, 0), (n, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 직사각형에서, 점 $(0, 0)$ 을 출발하여 다음 조건을 모두 만족하면서 $(n, 2)$ 에 도착하는 경로 중 길이가 최대인 것의 개수를 구하여라. 단, n 은 양의 정수이다.

- (a) 매 이동시 위, 아래, 좌, 우 중에서 한 방향으로 1씩 이동한다.
- (b) 한 번 지난 점을 다시 지나지 않는다.
- (c) 직사각형 밖으로 나가지 않는다.

제한 시간 2시간 30분

문항당 7점