

제 23회 한국수학올림피아드 최종시험

2010년 3월 27일 - 제 1 일

1. 임의의 삼각형 ABC 의 내접원이 변 BC, CA, AB 와 접하는 점을 각각 P, Q, R 이라 하자. 삼각형 ABC 의 넓이를 T , 둘레의 길이를 L 이라 할 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\left(\frac{AB}{PQ}\right)^3 + \left(\frac{BC}{QR}\right)^3 + \left(\frac{CA}{RP}\right)^3 \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{L^2}{T}$$

2. 예각삼각형 ABC 의 내심을 I , 외심을 O , 수심을 H 라 하고, 내접원이 변 BC 에 접하는 점을 D 라 하자. 이때, $\angle B < \angle C$ 이고, 두 선분 AO 와 HD 는 평행하다고 한다. 직선 OD 와 직선 AH 의 교점을 E 라 하고 선분 CI 의 중점을 F 라 할 때, 네 점 E, F, I, O 는 한 원 위에 있음을 보여라.

3. i 번 웹페이지에서 j 번 웹페이지로 가는 링크가 있다면 이 링크를 사용하여 i 번 웹페이지에서 j 번 웹페이지로 바로 이동할 수 있다. 1번부터 n 번까지 번호가 붙은 $n \geq 2$ 개의 웹페이지에, 모든 $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ 에 대해 i 번 웹페이지에서 $i+1$ 번 웹페이지로 가는 링크가 주어져 있다.

이때, 적절하게 $3(n-1)\log_2(\log_2 n)$ 이하의 개수만큼 링크를 추가하면, 임의의 두 정수 $1 \leq i < j \leq n$ 에 대하여, i 번 웹페이지에서 시작해서 항상 숫자가 커지는 방향으로 링크 3개 이하를 사용하여 j 번 웹페이지에 도달할 수 있도록 할 수 있음을 보여라.

* 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점 *