제 23회 한국수학올림피아드 1차시험(고등부)

유형 가

2009 년 5 월 23 일; 제한시간 4 시간

1. 답안지에 수험번호와 성명, 지원분야, 문제유형을 반드시 기입하십시오.

2. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.

3. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 "7" 일 경우 "007" 이라고 기입하여야 합니다.

4. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.

5. 문제 1 ∼ 4 번은 각 4 점, 문제 17 ∼ 20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 원탁 둘레에 같은 간격으로 놓여있는 9 개의 동일한 의자에 5 명의 사람이 앉아서 생기는 서로 다른 배열의 가짓수를 n 이라 하자. n 을 1000 으로 나눈 나머지를 구하여라. 단, 한 의자에 2명 이상 앉을 수 없고, 원탁의 중심을 기준으로 회전시켜 얻을 수 있는 배열들은 모두 같은 것으로 간주한다.

2. 모든 양의 실수 x 에 대하여 정의된 함수

$$f(x) = \left|x - \frac{1}{x}\right| + \left|x - \frac{2}{x}\right| + \left|x - \frac{3}{x}\right| + \cdots + \left|x - \frac{20}{x}\right|$$

이 $x = \alpha$ 일 때 최솟값 β 를 갖는다. $\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

3. 직사각형 $ABCD$ 에서 두 변 AB, AD 의 길이는 각각 $2, 10$ 이다. 이 직사각형의 내부에 CD 를 지름으로 갖는 반원이 있다. 점 A 에서 이 반원에 그은 접선이 반원과 점 E 에서 접하고 변 BC 와 점 F 에서 만난다. $\tan\angle EDF = \dfrac{q}{p}$ (p, q 는 서로 소인 양의 정수)일 때, $p + q$ 의 값을 구하여라.

4. 검은 공 6개와 흰 공 4개가 들어있는 주머니에서 공을 한 번에 하나씩 꺼내기로 하되, 검은 공이 모두 나오면 공을 꺼내는 것을 멈춘다고 하자. (한 번 꺼낸 공은 다시 주머니에 넣지 않는다.) 꺼낸 공의 총 수가 8개일 확률을 $\frac{q}{p}$ (p, q 는 서로 소인 양의 정수)라고 할 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.

5. 서로 다른 양의 정수 m, n 에 대하여, 3^k 이 $|m-n|$ 의 약수가 되도록 하는 정수 k 중 가장 큰 것을 $d(m,n)$ 이라고 하자. $d(x^2, 7) \geq 7$ 을 만족하는 세 자리 양의 정수 x 를 구하여라.

6. 함수 $f(x)$ 가 0 과 1 을 제외한 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2$$

을 만족한다. 이 때 방정식

$$2f(t) = t^2$$

을 만족하는 모든 실수 $t\,(t \neq 1)$의 값의 합을 구하여라.

7. 두 조건

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k^2+1)(b_k^2+1) = 4\sum_{k=1}^{5} a_k b_k, \quad 150 < \sum_{k=1}^{5}(a_k+5)(b_k+5) < 200$$

을 모두 만족하는 실수 $a_1, \ldots, a_5$ 와 $b_1, \ldots, b_5$ 에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(a_k+2)(b_k+2)$ 의 값이 될 수 있는 모든 실수의 합을 구하여라.

8. 다음 수를 넘지 않는 가장 큰 정수를 구하여라.

$$\sum_{k=1}^{17} \sqrt[3]{10^3 + k^2}$$

9. 정30각형의 꼭짓점 중에서 서로 다른 네 점을 택하여 그 점들을 꼭짓점으로 하는 사각형을 만들고자 한다. 이런 사각형 중 내각의 크기가 모두 $120°$ 보다 작은 사각형의 개수를 구하여라.

10. 양의 정수 m, n, k 가 두 개의 방정식 $m^2 + n^2 = k^2$ 과 $m^2 + 82n^2 = 53^4$ 을 모두 만족할 때, n 의 값을 구하여라.

11. 다음 조건을 만족하는 일대일대응 $f : \{1, 2, \ldots, 11\} \to \{1, 2, \ldots, 11\}$ 의 개수를 구하여라.

$$n - 1 \le f(n) \le 2n, \quad n = 1, 2, \ldots, 11$$

12. 방정식 $x(x+5) = y(y-1)(y+1)(y+2)$ 를 만족하는 정수의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

13. 한 원 위에 시계반대방향으로 점 A_1, A_2, A_3, A_4 가 순서대로 놓여 있다. 삼각형 $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ 의 수심을 각각 H_1, H_2, H_3, H_4 라 하자. $H_1H_2 = 3$, $H_2H_3 = 4$, $H_3H_4 = 6$, $H_1H_4 = 7$ 일 때, $15(A_1A_3)^2$ 의 값을 구하여라.

14. 중심이 각각 O_1, O_2, O_3, O_4 인 네 개의 원이 있다. 원 O_1 은 원 O_2 와 점 K_1 에서 외접하고, 원 O_2 는 원 O_3 와 점 K_2 에서 외접하고, 원 O_3 는 원 O_4 와 점 K_3 에서 외접하고, 원 O_4 는 원 O_1 과 점 K_4 에서 외접한다. 또한 점 K_1, K_2, K_3, K_4 가 다음 조건을 모두 만족한다.

$$\angle K_4O_1K_1 = 140^\circ, \quad \angle K_4O_4K_3 = 100^\circ, \quad K_1K_2 = K_2K_3, \quad K_4K_1 = 4K_3K_4$$

직선 K_1K_3 와 K_2K_4 의 교점을 A 라 할 때, $\dfrac{4\,AK_2}{AK_4}$ 의 값을 구하여라.

15. 양의 정수 m, k 와 홀수 n 이 방정식 $m + \dfrac{1}{m} = 6\left(\dfrac{n}{2^k} + \dfrac{2^k}{n}\right)$ 을 만족할 때, mn 의 값을 구하여라.

16. 어떤 프로축구리그에서 다음 조건을 모두 만족하는 경기 일정을 만들었다고 한다.

(a) 어떤 두 팀도 서로 두 번 이상 경기를 하지 않는다.

(b) 각 팀은 모두 12 개의 팀과 경기를 한다.

(c) 어떤 두 팀이 경기를 하는 경우에는, 이 두 팀 모두와 경기를 하는 팀은 모두 5 개이다.

(d) 어떤 두 팀이 경기를 하지 않는 경우에는, 이 두 팀 모두와 경기를 하는 팀은 모두 6 개이다.

이 리그에 속한 팀의 개수를 구하여라.

17. 삼각형 ABC 의 세 변 AB, BC, CA 의 길이가 각각 5, 6, 7 이다. 삼각형 ABC 의 내접원이 변 BC, CA, AB 와 각각 X, Y, Z 에서 접한다. 삼각형 ABC 의 내심을 I 라 하고 직선 AI 와 직선 XY, XZ 의 교점을 각각 P, Q 라 할 때, $35(PQ)^2$ 의 값을 구하여라.

18. 일정한 간격으로 가로로 m 개, 세로로 n 개의 줄이 그어져 있는 판 위의 mn 개의 교차점 위에 빠짐없이 검은 돌 혹은 흰 돌을 1개씩 놓기로 한다. 가로줄의 일부와 세로줄의 일부를 변으로 하는 임의의 직사각형의 네 개의 꼭짓점 위에 놓인 돌 중에 검은 돌도 있고 흰 돌도 있도록 돌을 놓는 방법의 수를 $P(m, n)$ 이라고 하자. $\sum_{k=2}^{7} P(k, 7)$ 을 1000 으로 나눈 나머지를 구하여라.

19. 양의 정수 n 의 모든 양의 약수들의 조화평균이 3 이다. n 을 구하여라. 단, 양의 정수 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 의 조화평균은 $\left[\frac{1}{k}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)\right]^{-1}$ 으로 정의한다.

20. 다항함수 $P_k(x)$ $(k = 1, 2, 3)$ 에 대하여 방정식 $P_1(x) = 0$ 이 서로 다른 3 개의 실근, $P_2(x) = 0$ 이 서로 다른 4 개의 실근, $P_3(x) = 0$ 이 서로 다른 5 개의 실근을 갖는다. 방정식

$$P_1(x)P_2(y)P_3(z) = P_1(y)P_2(z)P_3(x) = P_1(z)P_2(x)P_3(y) = 0$$

을 만족하는 실수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 집합을 A 라 하자. A 가 유한집합일 때, 집합 A 의 원소의 개수를 구하여라.