제27회 고등부 수행평가

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

유형 가

2013년 6월 1일; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
   예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1～4번은 각 4점, 문제 17～20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. 원탁에 앉아 있는 20명 중에서 8명을 선택하려고 한다. 선택된 어느 두 사람도 서로 이웃하지 않게 하는 방법의 수를 구하여라.

2. 정수 a, b, c, n이 다음 두 조건을 모두 만족할 때, $7a + 13b + 97c$ 의 값을 구하여라.

(i) $3^{1024} - 2^{1024} = 7^a \times 13^b \times 97^c \times n$

(ii) $7 \times 13 \times 97$ 과 n은 서로 소이다.

3. 식 $x^2+y^2+z^2 = 1$을 만족하는 실수의 순서쌍 (x, y, z)에 대하여 $(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)$의 최댓값을 M이라 할 때, $\dfrac{1}{M^2}$의 값을 구하여라.

4. 삼각형 ABC의 외심 O에 대하여 $\angle AOB = \angle BOC = 20^\circ$이다. 선분 OA, OB, OC의 중점을 각각 P, Q, R라 하고 직선 AB와 OC의 교점을 D라 하자. $\overline{OD} = 4$이고 오각형 $ADRQP$의 넓이를 x라 할 때, x^2의 값을 구하여라.

5. 다음 식의 값을 155로 나눈 나머지를 구하여라.

$$\sum_{n=1}^{154} \sum_{k=1}^{1000} n^k$$

6. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$의 값을 구하여라.

$\{a + b \mid a \in A, b \in B\} = \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$을 만족하고, 각각 k개의 정수로 이루어진 집합 A와 B가 존재한다.

7. 삼각형 ABC에 대하여 꼭짓점 C의 내각의 이등분선이 선분 AB와 만나는 점을 D라 하고 직선 CD와 평행하고 점 B를 지나는 직선이 직선 AC와 만나는 점을 E라 할 때, $\overline{AD} = 4$, $\overline{BD} = 6$, $\overline{BE} = 15$이다. 직선 BE가 삼각형 ABC의 꼭짓점 A의 외각의 이등분선과 만나는 점을 P라 할 때, $(\overline{PB} - \overline{AB})^2$의 값을 구하여라.

8. 음이 아닌 실수 a, b, c, d가 다음 식을 모두 만족할 때, b의 최댓값을 구하여라.

$$\begin{cases} a + b - d = -2(c - 3) \\ a^2 + c^2 + 2a(c - 3) + bd - 12c = 0 \end{cases}$$

9. 각 B의 크기가 70°인 예각삼각형 ABC의 꼭짓점 A, B, C에서 마주보는 변에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. 점 E에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H, 선분 AE의 중점 M과 점 D를 지나는 직선이 직선 EH와 만나는 점을 K, 점 H를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 직선 EF와 만나는 점을 L이라 하자. $\angle KLH = 80^\circ$이고 $\overline{DK} = 50$일 때, 선분 LH의 길이를 구하여라.

(뒷면에 계속)

10. 원 S와 S위의 점 $P(a, b)$가 다음 조건을 모두 만족한다.

(i) S의 P에서의 접선이 원점을 지난다.

(ii) S의 중심은 x축에 있거나 4사분면에 있다.

(iii) S는 점 $(1, 0)$과 $(9, 0)$을 지난다.

(iv) $b \geq \frac{9}{5}$이다.

이러한 점 $P(a, b)$에 대하여

$$\frac{6a^2 + 5b^2}{a^3 b + b^3 a}$$

이 가질 수 있는 최댓값을 M, 최솟값을 m라 할 때 $36M + 27m^2$의 값을 구하여라.

11. 양의 정수 k에 대하여

$$a_k = \frac{(2^k)^{40} - 1}{41}$$

이라 하자. $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$이라 할 때, S를 41로 나눈 나머지를 구하여라.

12. 각 자리의 수가 1 이상 4 이하인 다섯 자리 양의 정수 중 이웃한 어떤 두 자리의 수의 차도 1이 아닌 것의 개수를 구하여라.

13. 원 O 위의 두 점 A, B에 대하여 원 O의 점 A에서의 접선과 점 B에서의 접선이 점 C에서 만난다. 선분 CA를 A의 바깥쪽으로 연장한 반직선 위에 점 D를 $\overline{AD} = 30$이 되도록 잡고 선분 BC를 C의 바깥쪽으로 연장한 반직선 위에 $\overline{BE} = 60$이 되도록 점 E를 잡자. 직선 BA가 선분 DE와 점 P에서 만난다. $\overline{DE} = 66$일 때, 선분 DP의 길이를 구하여라.

14. 볼록7각형 $A_1 A_2 \cdots A_7$에 대각선 4개를 내부에서 교차하지 않도록 그어 5개의 삼각형으로 나누는 방법 중, 각 삼각형이 이 볼록7각형과 적어도 하나의 변을 공유하게 하는 방법의 수를 구하여라.

15. 식 $(a^2 - a + 1)(b^2 - b + 1) = a^2 b^2$을 만족하는 양수의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $\dfrac{2ab}{a + b - 1}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때 $M^2 + m^2$의 값을 구하여라.

16. 양의 정수 n중에서

$$p = \left[\frac{n^2}{7}\right]$$

가 300 이하의 소수가 되는 것의 개수를 구하여라. 단, $[x]$는 x를 넘지 않는 가장 큰 정수이다.

17. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n의 최솟값을 구하여라.

1 보다 크고 2013보다 작은 서로 다른 실수 n개로 이루어진 임의의 집합 A에 대하여

$$|(a - b)(ab - 100)| < 10ab$$

를 만족하는 A의 서로 다른 두 원소 a, b가 반드시 존재한다.

18. 양의 정수 x, y가 $y^2 = (x^2 - 48^2)(x^2 - 55^2)$을 만족할 때 $x + y$의 값을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

19. 이등변삼각형 AB_1B_2에서 $\overline{AB_1} = \overline{AB_2} = 8$이다. 점 A를 지나는 직선 l_i $(i = 1, 2)$가 중심이 B_i 이고 반지름이 6인 원과 두 점 P_i, Q_i에서 만난다. 삼각형 AP_1P_2의 외접원의 반지름이 2이고 $\overline{AQ_1} = 9$, $\overline{AQ_2} = 11$일 때, $(\overline{Q_1Q_2})^2$의 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

20. 다음 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍 $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$의 개수를 구하여라.

(i) $0 < a_1 < a_3 < a_5 < a_7 < 9$

(ii) $0 < a_2 < a_4 < a_6 < a_8 < 9$

(iii) $a_{2i-1} < a_{2i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$

(끝)