

2015년 11월 1일 (오전); 제한시간 2시간 30분; 문항당 7 점

1. 이등변 삼각형이 아닌 예각 삼각형  $ABC$ 의 외심을  $O$ , 변  $AC$ 의 중점을  $M$ 이라 하고, 점  $A$ 에서 변  $BC$ 에 내린 수선의 발을  $D$ 라 하자. 삼각형  $OAM$ 의 외접원과 직선  $DM$ 의 교점을  $P( \neq M)$ 라 하자. 세 점  $B, O, P$ 는 한 직선 위에 있음을 보여라.

2. 양의 정수  $m$ 에 대하여, 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍  $(x, y)$ 의 개수가 0 또는 짝수임을 보여라.

(i)  $x^2 - 3y^2 + 2 = 16m$

(ii)  $2y \leq x - 1$

3. 음이 아닌 모든 정수  $i$ 에 대하여 숫자  $2^i$ 이 적힌 카드가 각각 7장씩 있다. 양의 정수  $n$ 에 대하여 카드에 적힌 수의 합이  $n$ 이 되도록 카드를 선택하는 방법의 개수를 구하여라. (단, 방법의 개수를 구할 때 같은 숫자가 적힌 카드는 구별하지 않는다.)

4. 실수  $a, b, c, x, y$ 가  $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 = 1$ 을 만족할 때,

$$(ax + by)^2 + (bx + cy)^2$$

의 최댓값을 구하여라.

2015년 11월 1일 (오후); 제한시간 2시간 30분; 문항당 7 점

5. 예각 삼각형  $ABC$ 의 내심과 내접원을 각각  $I, \Gamma$ 라 하자. 삼각형  $IBC$ 의 외접원과 원  $\Gamma$ 의 두 교점 중  $B$ 와 가까운 점을  $D, C$ 와 가까운 점을  $E$ 라 하자. 원  $\Gamma$ 와 직선  $BE$ 의 교점을  $K(\neq E)$ 라 하고, 직선  $CD$ 와 선분  $BI$ , 원  $\Gamma$ 의 교점을 각각  $T, L(\neq D)$ 이라 하자. 점  $T$ 를 지나고 선분  $BI$ 와 수직인 직선이 원  $\Gamma$ 와 만나는 두 점 중 삼각형  $IBC$  내부의 점을  $P$ 라 하자. 점  $P$ 에서의 원  $\Gamma$ 의 접선, 직선  $KL$ , 직선  $BI$ 가 한 점에서 만남을 보여라.

6. 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 을 모두 구하여라. (단,  $\mathbb{R}$ 은 실수 전체의 집합)

(i) 서로 다른 실수  $x, y$ 에 대하여  $f(x) \neq f(y)$

(ii) 모든 실수  $x, y$ 에 대하여  $f(x + f(f(-y))) = f(x) + f(f(y))$

7. 차수가 일차 이상이며, 계수가 정수인 다항식  $f(x)$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 소수  $p$ 가 무한히 많음을 보여라.

(조건)  $f(n) \neq 0$ 이고  $|f(n)|$ 이  $p$ 의 배수가 되는 정수  $n$ 이 존재한다.

8. 양의 정수  $n$ 이 주어져 있다. 다음 세 조건을 모두 만족하는  $m$ 개의 집합  $F_1, F_2, \dots, F_m$ 이 존재하면  $m \leq n$ 임을 보여라. (단, 집합  $A, B$ 에 대하여  $|A|$ 는  $A$ 의 원소의 개수이고,  $A - B$ 는  $A$ 의 원소 중  $B$ 의 원소가 아닌 것의 집합이다.)

(i) 모든  $1 \leq i \leq m$ 에 대하여  $F_i \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$

(ii)  $|F_1| \leq |F_2| \leq \dots \leq |F_m|$

(iii) 모든  $1 \leq i < j \leq m$ 에 대하여  $|F_i - F_j| = 1$