

## • 2교시 수학 영역 •

<b>1</b>	①	<b>2</b>	①	<b>3</b>	④	<b>4</b>	⑤	<b>5</b>	①
<b>6</b>	④	<b>7</b>	②	<b>8</b>	②	<b>9</b>	②	<b>10</b>	①
<b>11</b>	③	<b>12</b>	③	<b>13</b>	⑤	<b>14</b>	⑤	<b>15</b>	⑤
<b>16</b>	③	<b>17</b>	②	<b>18</b>	⑤	<b>19</b>	④	<b>20</b>	④
<b>21</b>	⑤	<b>22</b>	3	<b>23</b>	15	<b>24</b>	11	<b>25</b>	8
<b>26</b>	5	<b>27</b>	27	<b>28</b>	25	<b>29</b>	154	<b>30</b>	36

### 1. [출제의도] 다항식 계산하기

$$A - B = (2x^2 + x + 3) - (x^2 + x + 2) = x^2 + 1$$

### 2. [출제의도] 두 점 사이의 거리 계산하기

두 점 (1, 3), (2, 5) 사이의 거리는

$$\sqrt{(2-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{5}$$

### 3. [출제의도] 집합의 연산 이해하기

$A^C = \{2, 4\}$ 이므로 집합  $A^C$ 의 모든 원소의 곱은  $2 \times 4 = 8$

### 4. [출제의도] 평행이동 이해하기

직선  $y = 2x + 4$ 를  $x$ 축의 방향으로 1만큼,  
 $y$ 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은  
 $y - 3 = 2(x - 1) + 4$   
 $y = 2x + 5$   
 따라서 구하는 직선의  $y$ 절편은 5

### 5. [출제의도] 항등식 이해하기

주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면  
 $x^3 + 8 = x^3 + (a - 3)x + 4b$   
 항등식의 성질을 이용하여 양변에서 동류항의  
 계수를 비교하면  
 $a - 3 = 0$ ,  $4b = 8$ 이므로  $a = 3$ ,  $b = 2$   
 따라서  $a \times b = 6$

### 6. [출제의도] 연립이차방정식 이해하기

$$\begin{cases} x - y = 2 & \cdots \text{㉠} \\ x^2 + 8x + y^2 = 2 & \cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠에서  $y = x - 2$

㉡에  $y = x - 2$ 를 대입하면

$$x^2 + 8x + (x - 2)^2 = 2$$

$$2x^2 + 4x + 2 = 2(x + 1)^2 = 0$$

에서  $x = -1$ ,  $y = -3$

$$\text{따라서 } \alpha + \beta = -1 + (-3) = -4$$

### 7. [출제의도] 나머지정리 이해하기

다항식  $P(x)$ 를  $x^2 - 2x - 8$ 로 나누었을 때의  
 몫을  $Q(x)$ 라 하고 나머지  $R(x)$ 를  $ax + b$ 라 하면  
 $P(x) = (x^2 - 2x - 8)Q(x) + ax + b$   
 $= (x + 2)(x - 4)Q(x) + ax + b$   
 나머지정리에 의하여  $P(-2) = 0$ ,  $P(4) = 12$ 이므로  
 $P(-2) = -2a + b = 0$ ,  $P(4) = 4a + b = 12$   
 두 식을 연립하여 계산하면  $a = 2$ ,  $b = 4$   
 따라서  $R(x) = 2x + 4$ 이므로  $R(1) = 6$

### 8. [출제의도] 복소수의 뜻과 연산 이해하기

$z = a + bi$ ( $a$ ,  $b$ 는 실수)라 하자.

$z$ 는 실수가 아니므로  $b \neq 0$

$z - 3\bar{z} = z^2$ 에서

$$(a + bi) - 3(a - bi) = (a + bi)^2$$

$$-2a + 4bi = (a^2 - b^2) + 2abi$$

$$\text{이므로 } -2a = a^2 - b^2, \quad 4b = 2ab$$

$$b \neq 0 \text{에서 } a = 2 \text{이고 } b^2 = 8$$

$$\text{따라서 } z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = 2^2 + 8 = 12$$

### 9. [출제의도] 선분의 내분점과 외분점 이해하기

선분 AB를 2:3으로 외분하는 점의 좌표는

$$\frac{2 \times 0 - 3 \times 3}{2 - 3} = 9, \quad \frac{2 \times a - 3 \times 0}{2 - 3} = -2a$$

에서 (9,  $-2a$ )

이 점이 원  $(x - 3)^2 + (y + 8)^2 = 36$  위에 있으므로

$$(9 - 3)^2 + (-2a + 8)^2 = 36$$

$$(-2a + 8)^2 = 0$$

따라서  $a = 4$

### 10. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계 이해하기

중심이 원점이고 직선  $y = -2x + k$ 와 만나는 원의  
 넓이가 최소가 되려면 원점과 직선  $2x + y - k = 0$   
 사이의 거리가 반지름의 길이와 같아야 한다.

원점과 직선  $2x + y - k = 0$  사이의 거리는

$$\frac{|2 \times 0 + 1 \times 0 - k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-k|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}k$$

원  $C$ 의 반지름의 길이를  $r$ 이라 하자.

원  $C$ 의 넓이가  $45\pi$ 이므로

$$r^2\pi = 45\pi \text{에서 } r = 3\sqrt{5}$$

$$\text{따라서 } \frac{\sqrt{5}}{5}k = 3\sqrt{5} \text{이므로 } k = 15$$

### 11. [출제의도] 선분의 내분점과 외분점 이해하기

점 B의 좌표를 B( $p$ ,  $q$ )라 하자.

선분 AB의 중점의 좌표가 (6, 7)이므로

$$\frac{1 + p}{2} = 6, \quad \frac{2 + q}{2} = 7 \text{에서 } p = 11, \quad q = 12$$

그러므로 점 B의 좌표는 B(11, 12)

선분 AC의 중점을 M이라 하자.

삼각형 ABC의 무게중심은 선분 BM을 2:1로

내분하는 점이므로

$$\frac{2 \times a + 1 \times 11}{2 + 1} = 5, \quad \frac{2 \times 6 + 1 \times 12}{2 + 1} = b$$

에서  $a = 2$ ,  $b = 8$

따라서  $a + b = 10$

### 12. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 추론하기

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

이므로 조건 (가)에서  $n(A \cap B) = 0$ ,  $A \cap B = \emptyset$

그러므로

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \\ = \emptyset \cup C = C$$

조건 (나)에 의하여

$$n(C) = 2 \times n(B - C) = 2 \times \{n(B \cup C) - n(C)\}$$

$$n(C) = \frac{2}{3} \times n(B \cup C)$$

따라서  $n(B \cup C) = 12$ 에서  $n(C) = 8$

### 13. [출제의도] 집합의 포함 관계를 이용하여 추론하기

$n(A \cap B) = p$ 라 하면

$(A \cap B) \subset X \subset A$ 를 만족시키는 집합  $X$ 의 개수는

$$2^{3-p} \text{이므로 } 2^{3-p} = 2 \text{에서 } p = 2$$

$n(A \cap B) = 2$ 이므로 집합  $A$ 의 세 원소 1, 3, 4 중  
 2개는 집합  $B$ 의 원소이고 나머지 1개는 집합  $B$ 의  
 원소가 아니다.

$$B = \left\{ \frac{k+1}{2}, \frac{k+3}{2}, \frac{k+4}{2} \right\} \text{에서}$$

집합  $B$ 의 두 원소의 차의 최댓값은  $\frac{3}{2}$ 이므로

$$n(A \cap B) = 2 \text{이려면 } 1 \notin B, \quad 3 \in B, \quad 4 \in B \text{이어야}$$

한다. 집합  $B$ 의 원소 중 차가 1인 두 원소는

$$\frac{k+1}{2}, \quad \frac{k+3}{2} \text{이므로 } \frac{k+1}{2} = 3, \quad \frac{k+3}{2} = 4$$

따라서  $k = 5$

### 14. [출제의도] 연립이차부등식 이해하기

$$\begin{cases} (x+9)(x-a^2+6a) \leq 0 & \cdots \text{㉠} \\ (x-2a)(x-2a+16) \leq 0 & \cdots \text{㉡} \end{cases}$$

$$(a^2 - 6a) - (-9) = (a - 3)^2 \text{이므로}$$

$$a = 3 \text{이면 } a^2 - 6a = -9 \text{이고,}$$

$$a \neq 3 \text{이면 } a^2 - 6a > -9 \text{이다.}$$

(i)  $a = 3$ 일 때

$$\text{㉠에서 } (x+9)^2 \leq 0 \text{이므로 } x = -9,$$

$$\text{㉡에서 } (x-6)(x+10) \leq 0 \text{이므로 } -10 \leq x \leq 6$$

그러므로 연립부등식을 만족시키는 실수  $x$ 의  
 값은  $-9$ 뿐이다.

(ii)  $a \neq 3$ 일 때

$$\text{㉠에서 } -9 \leq x \leq a^2 - 6a,$$

$$\text{㉡에서 } 2a - 16 \leq x \leq 2a$$

이므로 연립부등식을 만족시키는 실수  $x$ 가

오직 하나 존재하려면  $2a = -9$ 이거나

$$a^2 - 6a = 2a - 16 \text{이어야 한다.}$$

$$2a = -9 \text{이면 } a = -\frac{9}{2},$$

$$a^2 - 8a + 16 = (a - 4)^2 = 0 \text{이면 } a = 4$$

이므로 연립부등식을 만족시키는 실수  $x$ 가 오직

$$\text{하나 존재하도록 하는 실수 } a \text{의 값은 } -\frac{9}{2}, \quad 4$$

따라서 (i), (ii)에 의하여 연립부등식을

만족시키는 실수  $x$ 가 오직 하나 존재하도록 하는

$$\text{모든 실수 } a \text{의 값의 합은 } 3 + \left(-\frac{9}{2}\right) + 4 = \frac{5}{2}$$

### 15. [출제의도] 대칭이동을 활용하여 문제해결하기

두 점 A( $a$ ,  $b$ ), B( $b$ ,  $a$ )는 직선  $y = x$ 에 대하여

대칭이고  $\overline{AP} = \overline{BP}$ ,  $\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 를 만족시키는

두 점 P, Q는 선분 AB의 수직이등분선 위의 점이다.

이때, 선분 AB의 수직이등분선은 직선  $y = x$ 이므로

두 점 P, Q는 원  $C$ 와 직선  $y = x$ 가 만나는 점이다.

선분 PQ는 원  $C$ 의 지름이므로  $\overline{PQ} = 4$

선분 AB와 직선  $y = x$ 가 만나는 점을 H라 하자.

사각형 APBQ는 넓이가  $2\sqrt{2}$ 이고

사각형 APBQ의 넓이는 두 삼각형 APQ, BQP의

넓이의 합과 같으므로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times \overline{AH} + \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{BH} = 2(\overline{AH} + \overline{BH}) \\ = 2\overline{AB} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{에서 } \overline{AB} = \sqrt{2}$$

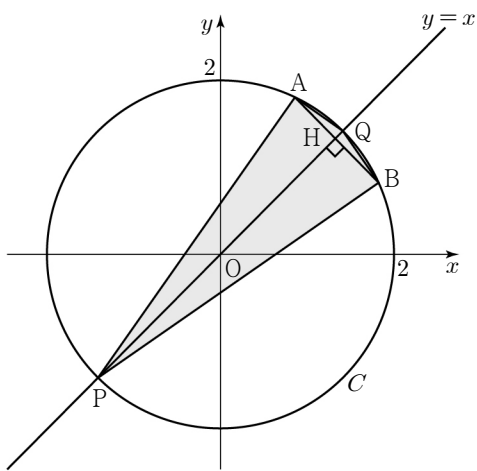
$$\text{또한 } \overline{AB} = \sqrt{(b-a)^2 + (a-b)^2} = \sqrt{2(a-b)^2}$$

$$\text{이므로 } \sqrt{2(a-b)^2} = \sqrt{2} \text{에서 } |a-b| = 1$$

양변을 제곱하면  $a^2 - 2ab + b^2 = 1$

$$\text{점 A(a, b)가 원 C 위의 점이므로 } a^2 + b^2 = 4$$

$$\text{따라서 두 식을 연립하여 계산하면 } a \times b = \frac{3}{2}$$



16. [출제의도] 명제와 조건을 활용하여 문제해결하기

$P \neq \emptyset$  이려면  $x^2 - 4x + a + 2 \leq 0$ 을 만족시키는 실수  $x$ 가 존재해야 한다.

이차방정식  $x^2 - 4x + a + 2 = 0$ 의 판별식을

$D$ 라 하면  $D = (-4)^2 - 4(a+2)$ 이고

$D \geq 0$ 이어야 하므로

$(-4)^2 - 4(a+2) \geq 0$ 에서  $a \leq 2$

$P \neq \emptyset$ 가 되도록 하는 자연수  $a$ 의 값은 1, 2

또한  $0 < |x - b| \leq 4$ 에서

$Q = \{x \mid b-4 \leq x < b \text{ 또는 } b < x \leq b+4\}$

(i)  $a=1$ 일 때

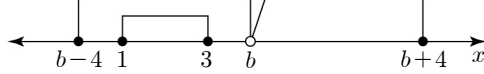
$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) \leq 0$ 에서

$P = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$ 이므로  $P \subset Q$ 이려면

$P \subset \{x \mid b-4 \leq x < b\}$ 이거나

$P \subset \{x \mid b < x \leq b+4\}$ 이어야 한다.

(a)  $P \subset \{x \mid b-4 \leq x < b\}$ 일 때



$b-4 \leq 1$ ,  $3 < b$ 에서  $3 < b \leq 5$ 이므로

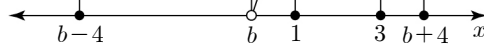
$P \subset Q$ 가 되도록 하는 자연수  $b$ 의 값은 4, 5

그러므로  $P \neq \emptyset$ ,  $P \subset Q$ 가 되도록 하는

두 자연수  $a$ ,  $b$ 의 모든 순서쌍  $(a, b)$ 는

$(1, 4)$ ,  $(1, 5)$

(b)  $P \subset \{x \mid b < x \leq b+4\}$ 일 때



$b < 1$ ,  $3 \leq b+4$ 에서  $-1 \leq b < 1$ 이므로

$P \subset Q$ 가 되도록 하는 자연수  $b$ 의 값은

존재하지 않는다.

(ii)  $a=2$ 일 때

$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \leq 0$ 에서  $P = \{2\}$ 이므로

$P \subset Q$ 이려면

$b-4 \leq 2 < b$  또는  $b < 2 \leq b+4$

이어야 하므로

$2 < b \leq 6$  또는  $-2 \leq b < 2$

$P \subset Q$ 가 되도록 하는 자연수  $b$ 의 값은

1, 3, 4, 5, 6

그러므로  $P \neq \emptyset$ ,  $P \subset Q$ 가 되도록 하는

두 자연수  $a$ ,  $b$ 의 모든 순서쌍  $(a, b)$ 는

$(2, 1)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(2, 5)$ ,  $(2, 6)$

따라서 (i), (ii)에 의하여

구하는 모든 순서쌍  $(a, b)$ 의 개수는 7

17. [출제의도] 이차함수의 최대와 최소를 이용하여 추론하기

조건 (가)에서  $f(p) = f(q)$  ( $p$ ,  $q$ 는 서로 다른 정수)

이므로 이차함수  $y = f(x)$ 의 그래프는

직선  $x = \frac{p+q}{2}$ 에 대하여 대칭이다.

$n+3 \leq \frac{p+q}{2}$ 이거나  $\frac{p+q}{2} \leq n$ 이면

$n \leq x \leq n+3$ 에서 함수  $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 곱이  $f(n) \times f(n+3)$ 의 값과 같아지므로

$n \leq x \leq n+3$ 에서 함수  $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 곱이  $f(n) \times f(n+3)$ 의 값과 같지 않으려면

$n < \frac{p+q}{2} < n+3$ 이어야 한다.

조건 (나)에 의하여 이 부등식이 성립하도록 하는 모든 자연수  $n$ 의 값은 4, 5, 6이므로

$6 < \frac{p+q}{2} < 7$

$12 < p+q < 14$ 에서  $p+q=13$ 이므로 이차함수

$y = f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은  $x = \frac{13}{2}$ 이다.

또한 이차함수  $f(x)$ 의 최솟값이 1이므로

$f(x) = \left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + 1$

따라서  $f(8) = \left(8 - \frac{13}{2}\right)^2 + 1 = \frac{13}{4}$

18. [출제의도] 이차부등식을 활용하여 문제해결하기

세 점 P, Q, R의 좌표는 각각

$P(a, a^2 - 3a + 3)$ ,  $Q(a, 2a^2 - 4a)$ ,  $R(a, 0)$

이므로  $\overline{PR} = |a^2 - 3a + 3|$ ,  $\overline{QR} = |2a^2 - 4a|$ 이다.

이차방정식  $x^2 - 3x + 3 = 0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면

$D = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3 < 0$

이므로 모든 실수  $x$ 에 대하여  $x^2 - 3x + 3 > 0$

그러므로

$\overline{PR} = |a^2 - 3a + 3| = a^2 - 3a + 3$

$2a^2 - 4a = 2a(a-2)$ 에서

$0 < a < 2$ 이면  $2a^2 - 4a < 0$ 이므로  $\overline{QR} = -2a^2 + 4a$ ,

$a > 2$ 이면  $2a^2 - 4a > 0$ 이므로  $\overline{QR} = 2a^2 - 4a$ 이다.

(i)  $0 < a < 2$ 일 때

$\overline{PR} + \overline{QR} = (a^2 - 3a + 3) + (-2a^2 + 4a) \leq 3$

에서  $a(a-1) \geq 0$ 이므로  $a \leq 0$  또는  $a \geq 1$

그러므로  $1 \leq a < 2$

(ii)  $a > 2$ 일 때

$\overline{PR} + \overline{QR} = (a^2 - 3a + 3) + (2a^2 - 4a) \leq 3$

에서  $3a\left(a - \frac{7}{3}\right) \leq 0$ 이므로  $0 \leq a \leq \frac{7}{3}$

그러므로  $2 < a \leq \frac{7}{3}$

(i), (ii)에 의하여  $1 \leq a < 2$  또는  $2 < a \leq \frac{7}{3}$

따라서 실수  $a$ 의 최댓값과 최솟값의 합은

$\frac{7}{3} + 1 = \frac{10}{3}$

19. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 활용하여 문제해결하기

원  $C$ 의 반지름의 길이를  $r$ 이라 하자.

원  $C$ 의 넓이가  $8\pi$ 이므로  $r^2\pi = 8\pi$ 에서

$r = 2\sqrt{2}$ 이고  $\overline{AB} = 4\sqrt{2}$

점 A를 지나고 원  $C$ 에 접하는 직선과 직선 AB는 서로 수직이므로 직선 AB의 기울기는  $-1$

직선 AB의  $y$ 절편을  $k$ 라 하면

직선 AB의 방정식은  $y = -x + k$

두 점 A, B의  $x$ 좌표를 각각  $\alpha$ ,  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ )라 하자.

곡선  $y = -x^2 + 6x$ 와 직선  $y = -x + k$ 가

두 점 A, B에서 만나므로  $\alpha$ ,  $\beta$ 는 이차방정식

$x^2 - 7x + k = 0$ 의 서로 다른 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

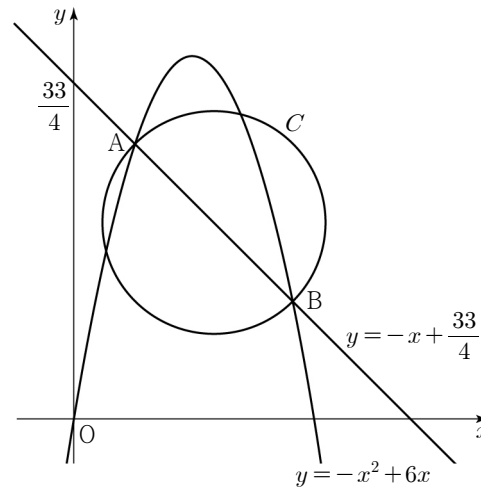
$\alpha + \beta = 7$ ,  $\alpha\beta = k$

$\overline{AB} = 4\sqrt{2}$ 이고 직선 AB의 기울기가  $-1$ 이므로

$(\beta - \alpha)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ 에서  $\beta - \alpha = 4$

두 식을 연립하여 계산하면  $\alpha = \frac{3}{2}$ ,  $\beta = \frac{11}{2}$

따라서 직선 AB의  $y$ 절편은  $\frac{3}{2} \times \frac{11}{2} = \frac{33}{4}$



20. [출제의도] 삼차방정식을 활용하여 문제해결하기

점 P는 선분 AB를 1 :  $a$ 로 내분하는 점이고

점 Q는 선분 DC를 1 :  $a$ 로 내분하는 점이므로

두 선분 AP, DQ의 길이는

$\overline{AP} = \overline{DQ} = (3a^2 + 10a + 7) \times \frac{1}{1+a} = 3a + 7$

점 P에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 P',

점 Q에서 선분 HG에 내린 수선의 발을 Q'이라

하자. 삼각기둥 PFB-QGC의 부피는

삼각기둥 PP'F-QQ'G의 부피와 같으므로

$V_1 - V_2 = V_1 - (\text{삼각기둥 PP'F-QQ'G의 부피})$

$= (\text{직육면체 APQD-EP'Q'H의 부피})$

$= (3a + 7) \times a \times a = 3a^3 + 7a^2$

$V_1 - V_2 = 4$ 에서

$3a^3 + 7a^2 - 4 = 0$

조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	3	7	0	-4
		-3	-4	4
	3	4	-4	0

$3a^3 + 7a^2 - 4 = (a+1)(3a^2 + 4a - 4)$   
 $= (a+1)(a+2)(3a-2) = 0$

$a > 0$ 에서  $a = \frac{2}{3}$

따라서 선분 AP의 길이는  $3 \times \frac{2}{3} + 7 = 9$

21. [출제의도] 대칭이동을 이용하여 추론하기

두 원  $C_1$ ,  $C_2$ 의 중심을 각각  $O_1$ ,  $O_2$ 라 하면 두 점

$O_1$ ,  $O_2$ 의 좌표는 각각  $O_1(2, 6)$ ,  $O_2(6, 4)$ 이고

두 원  $C_1$ ,  $C_2$ 의 반지름의 길이는 각각 1, 3이다.

두 원  $C_1$ ,  $C_2$ 를  $y$ 축에 대하여 대칭이동한 원을

각각  $C_1'$ ,  $C_2'$ 이라 하고

네 점  $O_1$ ,  $O_2$ , P, Q를  $y$ 축에 대하여 대칭이동한

점들을 각각  $O_1'$ ,  $O_2'$ , P', Q'이라 하고



$P(x)$ ,  $Q(x)$ 는 각각 이차다항식이고 조건 (가)에서 모든 실수  $x$ 에 대하여

$\{P(x)+Q(x)\}\times\{P(x)-Q(x)\}=x^2(x-1)(x-2)$   
... ㉠

그러므로  $P(x)+Q(x)$ ,  $P(x)-Q(x)$ 는 각각 이차다항식이고  $x^2(x-1)(x-2)$ 의 인수이다. 이때  $P(x)-Q(x)$ 가  $x-1$ 을 인수로 가지면 인수정리에 의하여  $P(1)-Q(1)=0$ 이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.  $P(x)-Q(x)$ 는  $x-1$ 을 인수로 갖지 않으므로  $P(x)-Q(x)$ 는  $x^2$ 을 인수로 갖거나  $x(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

( i )  $P(x)-Q(x)=ax^2$  ( $a$ 는 0이 아닌 실수)일 때  $|P(2)-Q(2)|=|4a|$ ,  $|P(1)-Q(1)|=|a|$  이고  $|4a|>|a|$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

( ii )  $P(x)-Q(x)=ax(x-2)$  ( $a$ 는 0이 아닌 실수) 일 때  $|P(2)-Q(2)|=0$ ,  $|P(1)-Q(1)|=|a|$  이고  $0<|a|$ 이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

( i ), ( ii)에 의하여  $P(x)-Q(x)=ax(x-2)$ 이고

㉡에 의하여  $P(x)+Q(x)=\frac{1}{a}x(x-1)$ 이다.

$P(3)+Q(3)=\frac{1}{a}\times3\times2=24$ 에서  $a=\frac{1}{4}$ 이므로

$P(x)-Q(x)=\frac{1}{4}x(x-2)$ ,

$P(x)+Q(x)=4x(x-1)$

두 식을 연립하여 계산하면

$P(x)=\frac{17}{8}x^2-\frac{9}{4}x$ ,  $Q(x)=\frac{15}{8}x^2-\frac{7}{4}x$

따라서  $P(4)=25$

29. [출제의도] 곱셈공식을 활용하여 문제해결하기

세 원  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ 의 반지름의 길이를 각각  $a$ ,  $b$ ,  $c$ 라 하자.

(사각형  $AO_2O_3B$ 의 넓이)

= (삼각형  $AO_1B$ 의 넓이)-(삼각형  $O_2O_1O_3$ 의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\overline{O_1A}\times\overline{O_1B}-\frac{1}{2}\times\overline{O_1O_2}\times\overline{O_1O_3}$

$=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}(a-b)(a-c)$

$=\frac{1}{2}(ab-bc+ca)$

이고, 사각형  $AO_2O_3B$ 의 넓이가 34이므로

$ab-bc+ca=68$

또한  $\overline{O_1C}+\overline{O_1D}=6\sqrt{2}$ 에서

$(a-2b)+(a-2c)=6\sqrt{2}$

$a-b-c=3\sqrt{2}$

그러므로 세 원  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ 의 넓이의 합은

$a^2\pi+b^2\pi+c^2\pi=(a^2+b^2+c^2)\pi$   
 $=\{(a-b-c)^2+2(ab-bc+ca)\}\pi$   
 $=\{(3\sqrt{2})^2+2\times68\}\pi$   
 $=154\pi$

따라서  $p=154$

30. [출제의도] 이차함수를 이용하여 추론하기

집합  $X$ 는 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 직선  $y=1$  또는 직선  $y=-1$ 과 만나는 점의  $x$ 좌표를 원소로 갖는 집합이고

집합  $Y$ 는 함수  $y=g(x)$ 의 그래프가 직선  $y=1$

또는 직선  $y=-1$ 과 만나는 점의  $x$ 좌표를 원소로 갖는 집합이다.

조건 (가)에서  $n(X\cap Y)=3$ ,  $n(X\cup Y)=4$ 이므로  $3\leq n(X)\leq 4$ ,  $3\leq n(Y)\leq 4$

또한  $n(X\cup Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cap Y)$ 에서

$n(X)+n(Y)=n(X\cup Y)+n(X\cap Y)=7$ 이므로

$n(X)=3$ ,  $n(Y)=4$  또는  $n(X)=4$ ,  $n(Y)=3$

( i )  $n(X)=3$ ,  $n(Y)=4$ 일 때

함수  $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이고  $n(X)=3$ 이므로

함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 직선  $y=-1$ 에 접하고

직선  $y=1$ 과 서로 다른 두 점에서 만난다.

함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=-1$ 이 만나는 점의  $x$ 좌표를  $a$ 라 하면 함수  $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가  $(a, -1)$ 이므로

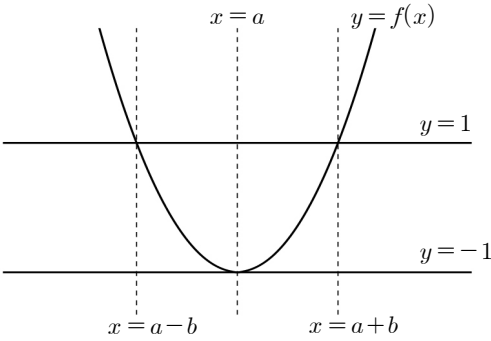
$f(x)=k(x-a)^2-1$  ( $k$ 는 양의 실수)

함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 직선  $x=a$ 에 대하여 대칭이므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가

직선  $y=1$ 과 만나는 두 점의  $x$ 좌표는

어떤 양의 실수  $b$ 에 대하여  $a-b$ ,  $a+b$ 이다.

그러므로  $X=\{a-b, a, a+b\}$



$n(X)=n(X\cap Y)=3$ 에서  $X=X\cap Y$ 이므로

조건 (나)에 의하여

$(a-b)+a+(a+b)=3a=3$ ,  $a=1$

그러므로  $f(x)=k(x-1)^2-1$ 이 되어

$f(2)<f(1)$ 을 만족시키지 않는다.

( ii )  $n(X)=4$ ,  $n(Y)=3$ 일 때

함수  $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 음수인

이차함수이고  $n(Y)=3$ 이므로

함수  $y=g(x)$ 의 그래프는

직선  $y=1$ 에 접하고

직선  $y=-1$ 과 서로 다른 두 점에서 만난다.

함수  $y=g(x)$ 의 그래프와 직선  $y=1$ 이 만나는

점의  $x$ 좌표를  $a$ 라 하면 함수  $y=g(x)$ 의

그래프의 꼭짓점의 좌표가  $(a, 1)$ 이므로

$g(x)=k(x-a)^2+1$  ( $k$ 는 음의 실수)

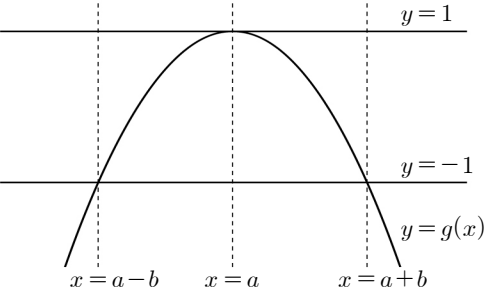
함수  $y=g(x)$ 의 그래프가 직선  $x=a$ 에 대하여

대칭이므로 함수  $y=g(x)$ 의 그래프가

직선  $y=-1$ 과 만나는 두 점의  $x$ 좌표는

어떤 양의 실수  $b$ 에 대하여  $a-b$ ,  $a+b$ 이다.

그러므로  $Y=\{a-b, a, a+b\}$



$n(Y)=n(X\cap Y)=3$ 에서  $Y=X\cap Y$ 이므로

조건 (나)에 의하여

$(a-b)+a+(a+b)=3a=3$ ,  $a=1$

그러므로  $Y=\{1-b, 1, 1+b\}$ 이고

$g(x)=k(x-1)^2+1$  ... ㉢

$n(X)=4$ 이므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는

두 직선  $y=1$ ,  $y=-1$ 과 각각 서로 다른

두 점에서 만난다.

함수  $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식을

$x=m$ 이라 하면

$f(x)=t(x-m)^2+s$  ( $t$ 는 양의 실수,  $s$ 는 실수)

함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 직선  $x=m$ 에 대하여

대칭이므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가

직선  $y=-1$ 과 만나는 두 점의  $x$ 좌표는

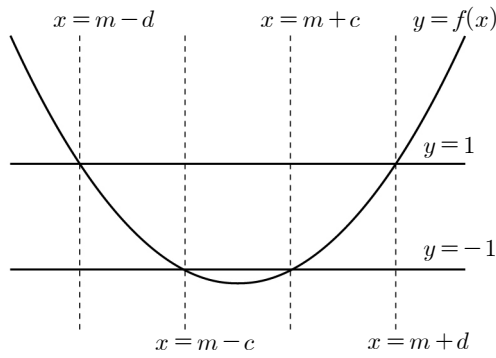
어떤 양의 실수  $c$ 에 대하여  $m-c$ ,  $m+c$ 이고

직선  $y=1$ 과 만나는 두 점의  $x$ 좌표는

어떤 양의 실수  $d$ 에 대하여  $m-d$ ,  $m+d$ 이다.

(단,  $c<d$ )

그러므로  $X=\{m-d, m-c, m+c, m+d\}$



$n(X)=n(X\cup Y)=4$ 에서  $X=X\cup Y$ 이므로

조건 (나)에 의하여

$(m-d)+(m-c)+(m+c)+(m+d)=4m=8$ ,

$m=2$

그러므로

$f(x)=t(x-2)^2+s$  ... ㉣

가 되어  $f(2)<f(1)$ 을 만족시킨다.

$Y=\{1-b, 1, 1+b\}$ ,

$X=\{2-d, 2-c, 2+c, 2+d\}$ 이고

$Y=(X\cap Y)\subset(X\cup Y)=X$

집합  $Y$ 의 원소 중 1보다 작거나 같은 수는

$1-b$ , 1뿐이고  $(1-b)\in X$ ,  $1\in X$ 이므로

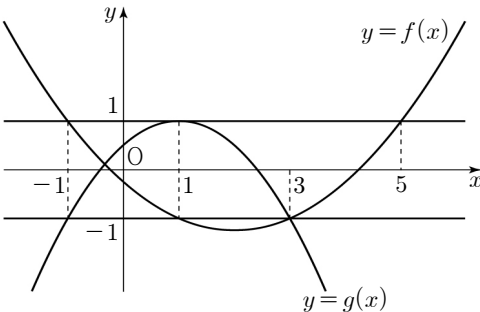
$1-b=2-d$ ,  $1=2-c$ 에서  $d=b+1$ ,  $c=1$

그러므로  $X=\{1-b, 1, 3, 3+b\}$

또한  $(1+b)\in X$ 에서

$1+b=3$ ,  $b=2$ 이므로

$X=\{-1, 1, 3, 5\}$ ,  $Y=\{-1, 1, 3\}$



함수  $y=f(x)$ 의 그래프가

두 점  $(-1, 1)$ ,  $(1, -1)$ 을 지나므로 ㉣에서

$f(-1)=9t+s=1$ ,  $f(1)=t+s=-1$

두 식을 연립하여 계산하면  $t=\frac{1}{4}$ ,  $s=-\frac{5}{4}$ 이고

$f(x)=\frac{1}{4}(x-2)^2-\frac{5}{4}$

함수  $y=g(x)$ 의 그래프가 점  $(-1, -1)$ 을

지나므로 ㉢에서

$g(-1)=4k+1=-1$ ,  $k=-\frac{1}{2}$ 이고

$g(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+1$

따라서 ( i ), ( ii)에 의하여

$f(7)-g(9)=5-(-31)=36$