

제 23 회 한국수학올림피아드 - 2 차 시험

고등부

2009년 8월 23일 (오후)

5. 집합  $A = \{1, 2, \dots, 12\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 일대일대응 함수  $f : A \rightarrow A$ 의 개수를 구하여라.  
조건: 모든  $i \in A$ 에 대하여  $f(i) - i$ 는 3의 정수배가 아니다.
6. 삼각형  $ABC$ 의 변  $BC$  위의 점  $P$ 와 변  $CA$  위의 점  $Q$ 에 대하여, 세 삼각형  $ABP, APQ, CPQ$ 의 내심을 각각  $I, J, K$ 라 할 때, 사각형  $PIJK$ 는 항상 볼록사각형임을 보여라. 단,  $P, Q$ 는 삼각형  $ABC$ 의 꼭짓점이 아니다.
7.  $n$ 이 2 이상의 양의 정수일 때,  $2^n - 1$ 이  $3^n - 1$ 의 약수가 될 수 없음을 보여라.
8. 양의 정수  $n$ 에 대하여, 구간  $[0, n+1]$ 에서 함수

$$f_n(x) = \left( \sum_{i=1}^n |x - i| \right)^2 - \sum_{i=1}^n (x - i)^2$$

의 최솟값을  $a_n$ 이라 할 때,  $\sum_{n=1}^{11} (-1)^{n+1} a_n$ 의 값을 구하여라.

제한 시간 2시간 30분

문항당 7점