

제 3 교 시

2018학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

나형

성명		수험번호								
----	--	------	--	--	--	--	--	--	--	--

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며, ‘0’이 포함된 경우에는 ‘0’을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

1. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 두 부분집합 $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여
집합 $A^C \cap B$ 의 모든 원소의 합은? [2점]

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 4^n + 3^n}{4^{n+1} - 2 \times 3^n}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{3}{4}$

③ 1

④ $\frac{5}{4}$

⑤ $\frac{3}{2}$

3. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{2h} = 6$$

일 때, $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

4. 서로 독립인 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(A \cap B^C) = \frac{1}{5}$$

일 때, $P(B)$ 의 값은? (단, B^C 은 B 의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{4}{15}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{2}{5}$

④ $\frac{7}{15}$

⑤ $\frac{8}{15}$

5. 곡선 $y = x^3 - 4x$ 위의 점 $(-2, 0)$ 에서의 접선의 기울기는? [3점]

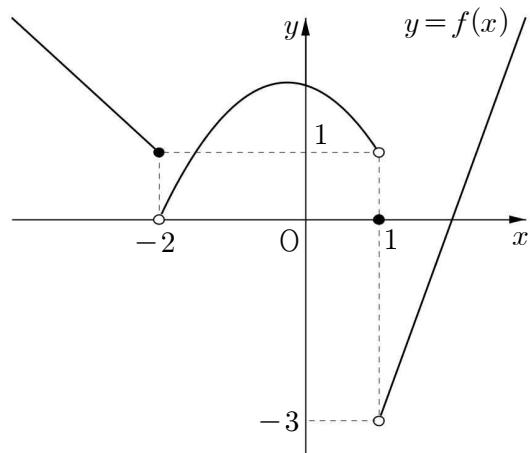
- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

6. 함수 $f(x) = \frac{bx+1}{x+a}$ 의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 점 $(2, 1)$ 에 대하여 대칭일 때,

$a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 $ab \neq 1$ 인 상수이다.) [3점]

- ① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

7. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음과 같다.



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \text{의 값은? [3점]}$$

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

8. $\log 6 = a$, $\log 15 = b$ 라 할 때, 다음 중 $\log 2$ 를 a , b 로 나타낸 것은? [3점]

- ① $\frac{2a - 2b + 1}{3}$ ② $\frac{2a - b + 1}{3}$ ③ $\frac{a + b - 1}{3}$ ④ $\frac{a - b + 1}{2}$ ⑤ $\frac{a + 2b - 1}{2}$

9. 빨간 공 3개, 파란 공 2개, 노란 공 2개가 있다. 이 7개의 공을 모두 일렬로 나열할 때,
빨간 공끼리는 어느 것도 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 색의 공은
서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 45

② 50

③ 55

④ 60

⑤ 65

10. 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+7}-a}{x-2} & (x \neq 2) \\ b & (x=2) \end{cases}$$

가 $x=2$ 에서 연속일 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

11. 집합 $X = \{2, 4, 6, 8\}$ 에서 X 로의 일대일 대응 $f(x)$ 가

$$f(6) - f(4) = f(2), f(6) + f(4) = f(8)$$

을 모두 만족시킬 때, $(f \circ f)(6) + f^{-1}(4)$ 의 값은? [3점]

① 8

② 10

③ 12

④ 14

⑤ 16

12. 점 $(-2, 2)$ 를 지나는 함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 후 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프가 점 $(-8, 5)$ 를 지날 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

13. 다음 표는 어느 고등학교의 수학 점수에 대한 성취도의 기준을 나타낸 것이다.

성취도	A	B	C	D	E
수학 점수	89점 이상	79점 이상 ~89점 미만	67점 이상 ~79점 미만	54점 이상 ~67점 미만	54점 미만

예를 들어, 어떤 학생의 수학 점수가 89점 이상이면 성취도는 A이고, 79점 이상이고 89점 미만이면 성취도는 B이다. 이 학교 학생들의 수학 점수는 평균이 67점, 표준편차가 12점인 정규분포를 따른다고 할 때, 이 학교의 학생 중에서 수학 점수에 대한 성취도가 A 또는 B인 학생의 비율을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

- ① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587 ④ 0.1915 ⑤ 0.3085

14. 원점에서 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시작 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도를 각각 $f(t)$, $g(t)$ 라 하면

$$f(t) = t^2 + t, \quad g(t) = 5t$$

이다. 두 점 P, Q가 출발 후 처음으로 만날 때까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

- ① 82 ② 84 ③ 86 ④ 88 ⑤ 90

15. 함수 $f(x) = 4x^2 + ax$ 에 대하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n kf\left(\frac{k}{2n}\right) = 2$$

가 성립하도록 하는 상수 a 의 값은? [4점]

① $\frac{19}{2}$

② $\frac{39}{4}$

③ 10

④ $\frac{41}{4}$

⑤ $\frac{21}{2}$

16. 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 7 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ 에 대하여 $A \cap X \neq \emptyset$, $B \cap X \neq \emptyset$ 을 모두 만족시키는 U 의 부분집합 X 의 개수는? [4점]

- ① 102 ② 104 ③ 106 ④ 108 ⑤ 110

17. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 이 반원의 호 AB를 이등분하는 점을 M이라 하고 선분 OM을 3:1로 외분하는 점을 C라 하자. 선분 OC를 대각선으로 하는 정사각형 CDOE를 그리고, 정사각형의 내부와 반원의 외부의 공통부분인

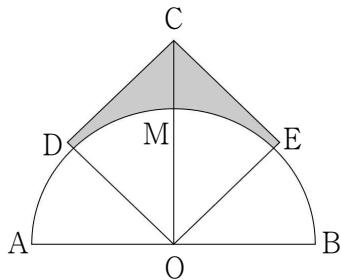
 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에 두 선분 CD, CE를 각각 지름으로 하는 두 반원을 정사각형 CDOE의 외부에

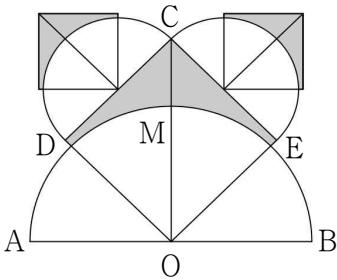
그리고, 각각의 두 반원에서 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는  모양의 두 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때,

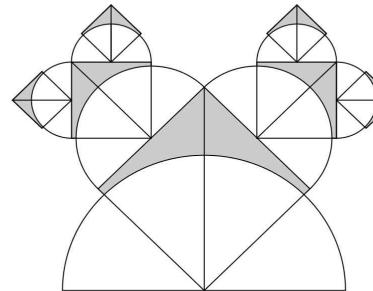
$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



R_1



R_2



R_3

...

$$\textcircled{1} \quad \frac{36 - 8\pi}{5}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{58 - 12\pi}{7}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{72 - 16\pi}{7}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{83 - 18\pi}{8}$$

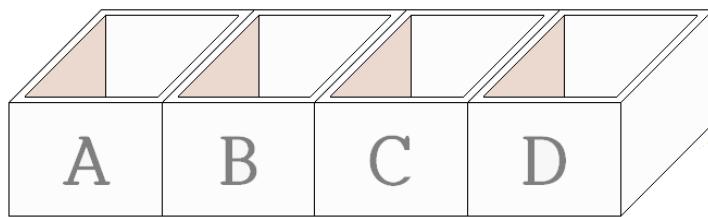
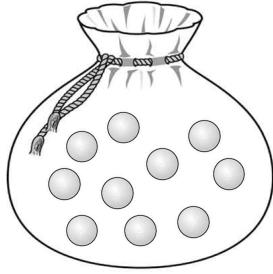
$$\textcircled{5} \quad \frac{91 - 20\pi}{8}$$

18. 그림과 같이 10개의 공이 들어 있는 주머니와 일렬로 나열된 네 상자 A, B, C, D가 있다.

이 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내어 이웃한 두 상자에 각각 한 개씩 넣는 시행을 5회 반복할 때, 네 상자 A, B, C, D에 들어 있는 공의 개수를 각각 a , b , c , d 라 하자.

a , b , c , d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는? (단, 상자에 넣은 공은 다시 꺼내지 않는다.)

[4점]



- ① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

19. 1부터 $(2n-1)$ 까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 $(2n-1)$ 장의 카드가 있다. 이 카드 중에서 임의로 서로 다른 3장의 카드를 택할 때, 택한 3장의 카드 중 짝수가 적힌 카드의 개수를 확률변수 X 라 하자. 다음은 $E(X)$ 를 구하는 과정이다. (단, n 은 4 이상의 자연수이다.)

정수 k ($0 \leq k \leq 3$)에 대하여 확률변수 X 의 값이 k 일 확률은 짝수가 적혀 있는 카드 중에서 k 장의 카드를 택하고, 홀수가 적혀 있는 카드 중에서 $\boxed{(\text{가})} - k$ 장의 카드를 택하는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나눈 값이므로

$$P(X=0) = \frac{n(n-2)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

$$P(X=1) = \frac{3n(n-1)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

$$P(X=2) = \boxed{(\text{나})}$$

$$P(X=3) = \frac{(n-2)(n-3)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

이다. 그러므로

$$E(X) = \sum_{k=0}^3 \{k \times P(X=k)\}$$

$$= \frac{\boxed{(\text{다})}}{2n-1}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 a 라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때, $a \times f(5) \times g(8)$ 의 값은? [4점]

① 22

② $\frac{45}{2}$

③ 23

④ $\frac{47}{2}$

⑤ 24

20. 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(6)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

(가) $f(2) = f'(2) = 0$
(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq -3$ 이다.

① 128

② 144

③ 160

④ 176

⑤ 192

21. 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x)$ 를 $f(x) = x^2 + \frac{1}{n}$ 이라 하고 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)f(x) & (x \geq 1) \\ (x-1)^2 f(x) & (x < 1) \end{cases}$$

이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x)}{x-1} = 0$

ㄴ. $n=1$ 일 때, 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. 함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수가 1인 n 의 개수는 5이다.

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. 확률변수 X 가 이항분포 $B\left(300, \frac{2}{5}\right)$ 를 따를 때, $V(X)$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 = 14$, $a_4 + a_5 = 23$ 일 때, $a_7 + a_8 + a_9$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 곡선 $y = x^3$ 과 y 축 및 직선 $y = 8$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]

25. $\left(x^n + \frac{1}{x}\right)^{10}$ 의 전개식에서 상수항이 45 일 때, 자연수 n 의 값을 구하시오. [3점]

26. 실수 x 에 대한 두 조건

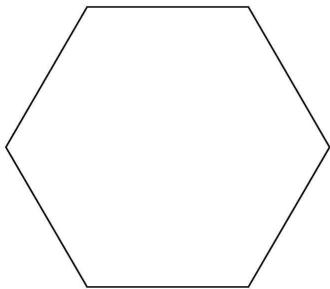
$$p : -3 \leq x < 5, \quad q : k-2 < x \leq k+3$$

에 대하여 명제

‘어떤 실수 x 에 대하여 p 이고 q 이다.’

가 참이 되도록 하는 정수 k 의 개수를 구하시오. [4점]

27. 한 변의 길이가 1인 정육각형의 6개의 꼭짓점 중에서 임의로 서로 다른 3개의 점을 택하여 이 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 만들 때, 이 삼각형의 넓이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이상일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

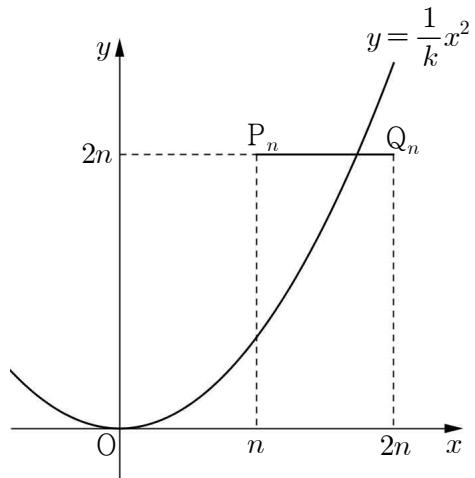


28. 2 이상의 자연수 n 에 대하여 $n^{\frac{4}{k}}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 k 의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. 예를 들어 $f(6)=3$ 이다. $f(n)=8$ 을 만족시키는 n 의 최솟값을 구하시오. [4점]

29. 자연수 n 에 대하여 좌표평면 위에 두 점 $P_n(n, 2n)$, $Q_n(2n, 2n)$ 이 있다. 선분 P_nQ_n 과

곡선 $y = \frac{1}{k}x^2$ 이 만나도록 하는 자연수 k 의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{15} a_n$ 의 값을 구하시오.

[4점]



30. $a \leq 35$ 인 자연수 a 와 함수 $f(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 4$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = |f(x) - a|$$

라 할 때, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = b$ ($b > 0$)이 서로 다른 4개의 점에서 만난다.
(나) 함수 $|g(x) - b|$ 가 미분가능하지 않은 실수 x 의 개수는 4이다.

두 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하시오. [4점]