제27회 중등부 1차시험
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

유형 가

2013년 6월 1일; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
   예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1 ∼ 4번은 각 4점, 문제 17 ∼ 20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. 삼각형 ABC에 대하여, 각 C의 이등분선이 선분 AB와 만나는 점을 D라 하고 직선 CD와 평행하고 점 B를 지나는 직선이 직선 AC와 만나는 점을 E라 하자. $\overline{AD}=4$, $\overline{BD}=6$, $\overline{BE}=15$일 때, $(\overline{BC})^2$의 값을 구하여라.

2. 각 자리의 수가 0 또는 1이고, 14의 배수인 양의 정수 중 가장 작은 것을 999로 나눈 나머지를 구하여라.

3. 집합 $A=\{1,2,3,\ldots,30\}$의 부분집합 중 임의의 두 원소의 차이가 모두 3 이상이며, 10개의 원소를 가지는 것의 개수를 구하여라.

4. 식 $|x+y+1|+|x+1|+|y+3|=3$을 만족하는 실수의 순서쌍 (x,y)에 대하여 x^2+y^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때 $M+2m$의 값을 구하여라.

5. 양의 정수 n의 모든 자리의 수의 합을 $a(n)$이라 하자. 모든 자리의 수가 홀수인 세자리 양의 정수 n 중, $a(n)=a(2n)$을 만족하는 것의 개수를 구하여라.

6. 식 $a^2+200ab+10000=0$을 만족하는 실수 a,b에 대하여 $\dfrac{a+100}{b+1}$의 최댓값을 구하여라. (단 b는 -1이 아니다.)

7. 예각삼각형 ABC에 대하여 B와 C에서 마주보는 변에 내린 수선의 발을 각각 D와 E라 하자. 삼각형 ABC의 외부에 있는 점 O를 중심으로 하고 삼각형 ABC의 수심 H와 점 A를 지나는 원이 직선 AC와 점 P에서 만난다. 선분 AH의 중점 M에 대하여 $\angle MED=\angle APO$이고 $\overline{AB}=200$, $\overline{AD}=40$, $\overline{AP}=96\sqrt{6}$일 때, 선분 OP의 길이를 구하여라.

8. 문자 A, B, C, D를 사용하여 만든 8자리 문자열 중, DABABDAB 또는 DDCCDCCD의 예와 같이 A가 나타나면 바로 다음에는 항상 B가 나타나고, B가 나타나면 바로 이전에는 항상 A가 나타나는 것의 개수를 구하여라.

9. 다음 조건을 만족하는 집합 A,B가 존재하도록 하는 양의 정수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하여라.

> A,B는 각각 k개의 정수로 이루어져 있고, A의 한 원소와 B의 한 원소의 합으로 표현되는 정수의 집합이 $\{0,1,2,\ldots,100\}$이다.

10. $n=3\times 7^7$일 때, 7^n-1과 7^n+4949의 최대공약수를 구하여라.

11. 예각삼각형 ABC의 한 변 BC를 지름으로 하는 원을 O라 하자. 변 AB위의 한 점 P를 지나고 AB에 수직인 직선이 변 AC와 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이가 삼각형 APQ의 넓이의 4배이고 $\overline{AP} = 10$이다. 점 A를 지나는 직선이 점 T에서 원 O에 접할 때, 선분 AT의 길이를 구하여라.

12. 식 $ab + bc + ca = 7(a + b + c) - 30$을 만족하는 실수 a, b, c에 대하여 $a^2 + b^2 + c^2$의 최솟값을 구하여라.

13. 평면 위의 볼록오각형 $A_1A_2A_3A_4A_5$의 내부의 점 O에 대하여, O에서 각 변에 내린 수선이 모두 오각형 내부에 있고

$$\begin{aligned} \angle A_1A_2O &= \angle OA_3A_4, \quad \angle A_2A_3O = \angle OA_4A_5, \\ \angle A_3A_4O &= \angle OA_5A_1, \quad \angle A_4A_5O = \angle OA_1A_2, \\ \angle A_5A_1O &= \angle OA_2A_3 \end{aligned}$$

이다. 점 O에서 변 A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1에 각각 내린 수선의 발 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5에 대하여,

$$\overline{B_1B_2} = 8, \quad \overline{B_2B_3} + \overline{B_3B_4} + \overline{B_4B_5} + \overline{B_5B_1} = 30$$

이다. 삼각형 OB_1B_2의 넓이가 20일 때, 오각형 $B_1B_2B_3B_4B_5$의 넓이를 구하여라.

14. 식 $a^2 + b^2 = (ab + 1)(a + b - 1)$을 만족하는 양수의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $\dfrac{2ab}{a + b - 1}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때 $M^2 + m^2$의 값을 구하여라.

15. 집합 $A = \{1, 2, \ldots, 6\}$의 부분집합 중 다음 조건을 만족하도록 서로 다른 두 집합을 선택하는 방법의 수를 구하여라.

> 두 집합의 합집합이 A이고, 교집합의 원소가 2개 이상이다.

16. 양의 정수 n 중에서

$$p = \left[\frac{n^2}{7}\right]$$

가 300 이하의 소수가 되는 것의 개수를 구하여라. 단, $[x]$는 x를 넘지 않는 가장 큰 정수이다.

17. 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 $\overline{AB} = 21$, $\overline{BC} = 42$, $\overline{CA} = 35$이다. 점 B에서 직선 CA에 내린 수선의 발을 D, 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 E, 직선 BD와 CE의 교점을 F라 하자. 삼각형 ABC의 내심을 지나고 BC와 수직인 직선과 $\angle BFC$의 이등분선의 교점을 G라 하고, G에서 직선 BF에 내린 수선의 발을 H라 할 때 $(\overline{FH})^2$의 값을 구하여라.

18. 볼록7각형 $A_1A_2 \cdots A_7$에 대각선 4개를 내부에서 교차하지 않도록 그어 5개의 삼각형으로 나누는 방법 중, 각 삼각형이 이 볼록7각형과 적어도 하나의 변을 공유하게 하는 방법의 수를 구하여라.

19. 양의 정수 k에 대하여

$$a_k = \frac{(2^k)^{30} - 1}{31}$$

이라 하자. $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$이라 할 때, S를 31로 나눈 나머지를 구하여라.

20. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n의 최솟값을 구하여라.

> 10보다 크고 2013보다 작은 서로 다른 실수 n개로 이루어진 임의의 집합 A에 대하여
>
> $$|(a - b)(ab - 100)| < 10ab$$
>
> 를 만족하는 A의 서로 다른 두 원소 a, b가 반드시 존재한다.