

2024년 3월 24일 ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

4. 삼각형 ABC 의 외접원을 O 라 하고, 선분 BA 의 A 쪽 연장선 위에 점 $D (\neq A)$ 를 잡자. 점 E, F 는 원 O 위의 서로 다른 두 점으로 두 직선 DE, DF 는 모두 원 O 에 접하며 선분 EF 는 변 CA 와 점 $T (\neq C)$ 에서 만난다. 원 O 의 호 BC 중 A 를 포함하지 않는 호 위에 점 $P (\neq B, C)$ 를 잡고, 직선 DP 와 원 O 가 만나는 점을 $Q (\neq P)$ 라 하자. 직선 BQ 와 DT 가 Q 가 아닌 점 X 에서 만나며, 직선 PT 와 원 O 의 교점을 $Y (\neq P)$ 라 할 때, 세 점 C, X, Y 가 일직선상에 있음을 보여라.

5. 양의 정수 $n (\geq 4)$ 에 대하여 a_1, a_2, \dots, a_n 은 n 이하의 서로 다른 양의 정수들이다. 다음 식이 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

$$\sum_{i=1}^n |a_i - a_{i+1} + a_{i+2} - a_{i+3}|$$

(단, $i = 1, 2, 3$ 에 대하여 $a_{n+i} = a_i$)

6. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 K 가 존재함을 보여라.

(조건) 소수 p 가 K 보다 크면, $a^{p-1} - 1$ 이 p^2 의 배수가 되는 p 이하의 양의 정수 a 의 개수는 $\frac{p}{2^{2024}}$ 이하이다.