2017학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학'나'형 정답

1	③	2	③	3	②	4	⑤	5	⑤
6	④	7	②	8	①	9	③	10	①
11	①	12	②	13	④	14	④	15	⑤
16	①	17	①	18	④	19	③	20	②
21	⑤	22	48	23	14	24	12	25	17
26	32	27	201	28	25	29	7	30	62

해 설

1. [출제의도] 지수의 연산을 이용하여 간단한 지수를 계산한다.

$4^{\frac{1}{2}}+3^0=2+1=3$

2. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 집합의 원소의 개수를 계산한다.

$A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,4,6\}$에서
$A-B=\{1,3,5\}$이므로
집합 $A-B$의 원소의 개수는 3이다.
따라서 $n(A-B)=3$

3. [출제의도] 수열의 극한을 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{2n^2+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{7}{n^2}}$$
$$=\frac{3-0+0}{2+0}=\frac{3}{2}$$

4. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하여 주어진 항의 값을 구한다.

모든 자연수 n에 대하여
$a_{n+1}=3a_n$ 즉, $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$이므로
수열 $\{a_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.
$a_2=2$
따라서 $a_4=a_2\times3^2=2\times9=18$

5. [출제의도] 무한급수와 일반항의 관계를 이해하고 이를 활용하여 극한값을 구한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-5)$가 수렴하므로
$\lim_{n\to\infty}(2a_n-5)=0$
따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{5}{2}$

6. [출제의도] 유리함수의 그래프의 성질을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

유리함수 $y=\frac{a}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면
$y=\frac{a}{x-m}+n$
두 함수 $y=\frac{a}{x-m}+n$과 $y=\frac{3}{x-2}+2$가 일치하므로
$a=3$, $m=2$, $n=2$
따라서 $a+m+n=3+2+2=7$

7. [출제의도] 역함수의 성질을 이해하여 함숫값을 구한다.

$f^{-1}(1)=2$이므로 $f(2)=1$
$f(2)=4+a=1$, $a=-3$
그러므로 $f(x)=2x-3$
따라서 $f(3)=2\times3-3=3$

8. [출제의도] 로그의 연산법칙을 이해하고 이를 활용하여 로그의 값을 문자식으로 나타낸다.

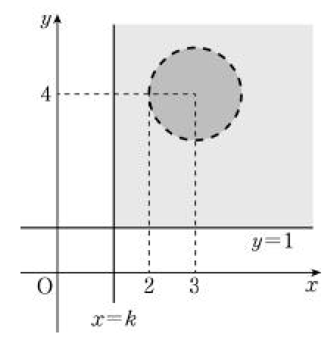
$\log2=a$, $\log3=b$라 하자.
$$\log\frac{4}{15}=\log\frac{8}{30}$$
$$=\log8-\log30$$
$$=\log2^3-\log(3\times10)$$
$$=3\log2-\log3-1$$
따라서 $\log\frac{4}{15}=3a-b-1$

9. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 미지수의 값을 추론한다.

$a_{n+1}=\frac{k}{a_n+2}$ …… ㉠
㉠의 양변에 $n=1$을 대입하면
$a_2=\frac{k}{a_1+2}=\frac{k}{3}$이고
㉠의 양변에 $n=2$를 대입하면
$$a_3=\frac{k}{a_2+2}$$
$$=\frac{k}{\frac{k}{3}+2}=\frac{3}{2}$$
이므로
$3\times\left(\frac{k}{3}+2\right)=k+6=2k$
따라서 $k=6$

10. [출제의도] 부등식의 영역을 이용하여 명제의 조건을 만족시키는 값을 구하는 문제를 해결한다.

부등식 $x\ge k$이고 $y\ge1$의 영역과
부등식 $(x-3)^2+(y-4)^2<1$의 영역을
좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



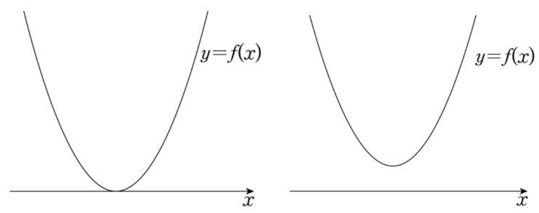
조건 p의 진리집합을 P,
조건 q의 진리집합을 Q라 하면
p는 q가 되기 위한 필요조건이므로
$P\supset Q$이고,
직선 $x=k$가 점 $(2,4)$에서
원 $(x-3)^2+(y-4)^2=1$에 접할 때
k는 최댓값을 갖는다.
따라서 k의 최댓값은 2이다.

11. [출제의도] 등비수열의 성질을 이해하여 주어진 항의 값을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$a_2+a_3=ar+ar^2$
$\quad=a(r+r^2)=-12$ …… ㉠
이고, 첫째항이 양수이므로
$r+r^2=r(1+r)<0$에서
$-1<r<0$이고,
$a=4a_3=4ar^2$
$r^2=\frac{1}{4}$, $r=-\frac{1}{2}$ ($\because -1<r<0$)
㉠에 $r=-\frac{1}{2}$을 대입하면
$a=48$
따라서 $a_5=ar^4=48\times\frac{1}{16}=3$

12. [출제의도] 절대부등식을 이해하여 미지수의 값의 범위를 구한다.

모든 실수 x에 대하여
부등식 $x^2+4kx+3k^2\ge2k-3$이
참인 명제가 되려면
$f(x)=x^2+4kx+3k^2-2k+3$이라 할 때,
함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하거나
만나지 않아야 한다.



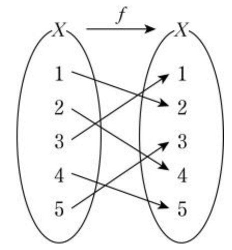
이차방정식 $x^2+4kx+3k^2-2k+3=0$이
중근 또는 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로
이차방정식 $x^2+4kx+3k^2-2k+3=0$의 판별식을
D라 하면
$$\frac{D}{4}=(2k)^2-(3k^2-2k+3)$$
$$=k^2+2k-3$$
$$=(k+3)(k-1)\le0$$
$-3\le k\le1$이므로
k의 최댓값 $M=1$,
최솟값 $m=-3$
따라서 $M-m=1-(-3)=4$

13. [출제의도] 일대일 대응의 정의를 이해하여 조건을 만족시키는 함숫값을 구한다.

함수 f가 X에서 X로의 일대일 대응이므로
$\{f(1),f(2),f(3),f(4),f(5)\}=\{1,2,3,4,5\}$
조건 (가)의
$f(2)-f(3)=f(4)-f(1)=f(5)$에서
$f(5)>0$이므로
$f(2)>f(3)$, $f(4)>f(1)$이고
조건 (나)에서
$f(1)<f(2)<f(4)$이므로
$f(3)<f(1)<f(2)<f(4)$이다.
따라서 $f(2)-f(3)\ge2$이고,
$f(2)<f(4)$이므로 $f(2)\le4$이다.
따라서 $f(2)-f(3)\le3$
그러므로 $f(5)=2$ 또는 $f(5)=3$

i) $f(5)=2$인 경우
$f(3)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$가 이 순서대로
증가하는 4개의 자연수이므로
$f(3)=1$, $f(1)=3$, $f(2)=4$, $f(4)=5$이다.
그런데 $f(5)=2$,
$f(2)-f(3)=4-1=3$
이므로 모순이다.

ii) $f(5)=3$인 경우
$f(5)=f(2)-f(3)$
$\quad=f(4)-f(1)=3$이고
3이 1, 2, 3, 4, 5의 중앙값이므로
$f(3)<f(1)<f(5)<f(2)<f(4)$
즉, $f(1)=2$, $f(2)=4$, $f(3)=1$,
$f(4)=5$, $f(5)=3$



따라서 $f(2)+f(5)=4+3=7$

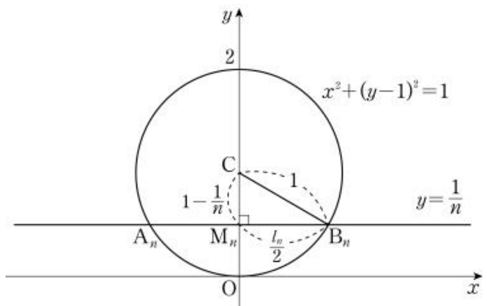
14. [출제의도] 원의 성질을 활용하여 수열의 극한값을 구하는 문제를 해결한다.

직선 $y=\frac{1}{n}$과 원 $x^2+(y-1)^2=1$의 두 교점을 각각 A_n, B_n이라 하고

주어진 원의 중심을 $C(0, 1)$,

선분 A_nB_n의 중점을 M_n이라 하면

삼각형 CM_nB_n은 직각삼각형이다.



$\overline{CB_n}=1$, $\overline{CM_n}=1-\frac{1}{n}$이므로

피타고라스 정리에 의해

$$\left(\frac{l_n}{2}\right)^2=\overline{B_nM_n}^2=\overline{CB_n}^2-\overline{CM_n}^2$$

$$=1^2-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2$$

$$=\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}$$

$$(l_n)^2=\frac{8}{n}-\frac{4}{n^2}$$

$$n(l_n)^2=8-\frac{4}{n}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}n(l_n)^2=8$

15. [출제의도] 다항함수와 지수의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

점 P_2의 y좌표는

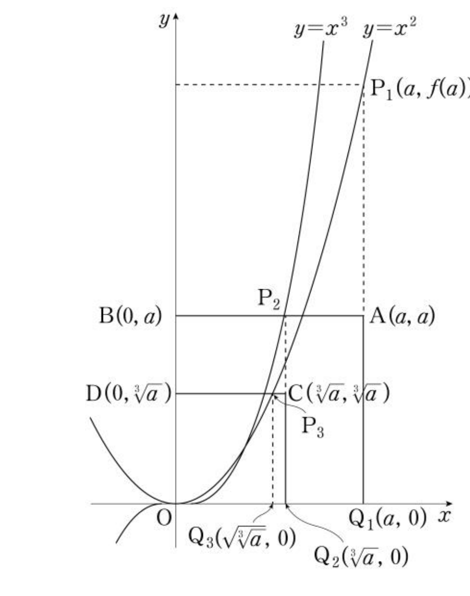
정사각형 OQ_1AB의 한 변의 길이가 a이므로

$b=\sqrt[3]{a}$

점 P_3의 y좌표는

정사각형 OQ_2CD의 한 변의 길이가 b이므로

$c=\sqrt{b}=\sqrt[6]{a}$



$$bc=\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{a}$$

$$=a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{6}}$$

$$=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}$$

$$=a^{\frac{1}{2}}=2$$

$a=4$

따라서 점 P_1의 y좌표의 값은 16이다.

16. [출제의도] 유리함수와 합성함수의 성질을 이해하여 방정식의 해의 개수를 구한다.

방정식 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=1$이므로

$g(x)$의 정의에 의해 $f(x)$는 정수이다.

$$f(x)=\frac{6x+12}{2x-1}$$

$$=\frac{15}{2x-1}+3$$이 정수가 되려면

$2x-1$은 15의 약수이어야 한다.

x가 자연수이므로 $2x-1$은 자연수이고,

$2x-1$은 15의 양의 약수이다.

$2x-1=1,\ 3,\ 5,\ 15$

$x=1,\ 2,\ 3,\ 8$

따라서 서로 다른 자연수 x의 개수는 4이다.

17. [출제의도] 역함수와 무리함수의 성질을 활용하여 부등식의 해를 구하는 문제를 해결한다.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x} & (x\geq 0)\\ 4x & (x<0)\end{cases}$$

이므로 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하면

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2 & (x\geq 0)\\ \frac{1}{4}x & (x<0)\end{cases}$$

i) $x\geq 0$인 경우

$$g(x)\leq -\frac{1}{4}x^2+3$$

$$\frac{1}{2}x^2\leq -\frac{1}{4}x^2+3$$

$$\frac{3}{4}x^2\leq 3$$

$$x^2\leq 4$$

$$-2\leq x\leq 2$$

$x\geq 0$이므로 $0\leq x\leq 2$

ii) $x<0$인 경우

$$g(x)\leq -\frac{1}{4}x^2+3$$

$$\frac{1}{4}x\leq -\frac{1}{4}x^2+3$$

$$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x-3\leq 0$$

$$x^2+x-12\leq 0$$

$$(x+4)(x-3)\leq 0$$

$$-4\leq x\leq 3$$

$x<0$이므로 $-4\leq x<0$

i), ii)에서 부등식의 해는 $-4\leq x\leq 2$

따라서 $a+b=-2$

18. [출제의도] 수열의 합의 성질을 이용하여 수열의 일반항을 구하는 과정을 증명한다.

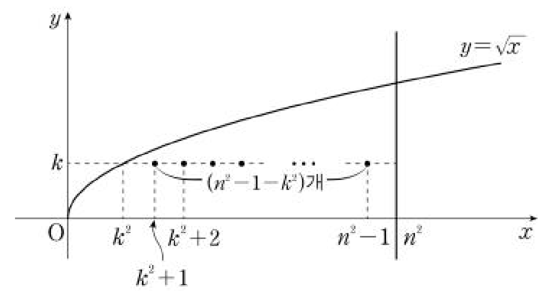
$n=2$일 때 주어진 도형의 내부에 있는 점 중에서

x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은

$(2, 1)$, $(3, 1)$이므로

$a_2=2$

따라서 (가) 는 2이다.



$n\geq 3$일 때,

$1\leq k\leq n-1$인 정수 k에 대하여

주어진 도형의 내부에 있는 점 중

y좌표가 k인 점은

(k^2+1, k), (k^2+2, k), $\cdots$, (n^2-1, k)

이므로

이 점의 개수를 b_k라 하면

$b_k=n^2-1-k^2$

따라서 (나) 는 n^2-1이다.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(n^2-1-k^2)$$

$$=(n-1)(n^2-1)-\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$

$$=(n-1)(n^2-1)-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$=\frac{(n-1)(4n^2+n-6)}{6}$$

따라서 (다) 는 $\frac{(n-1)(4n^2+n-6)}{6}$이다.

그러므로 $p=2$, $f(n)=n^2-1$,

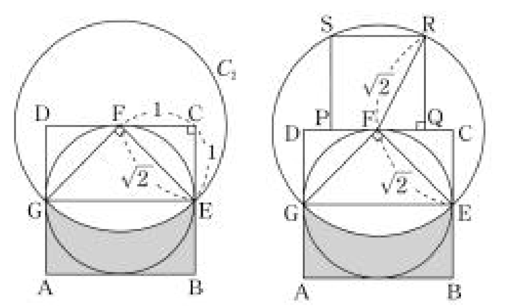
$$g(n)=\frac{(n-1)(4n^2+n-6)}{6}$$

따라서 $p+f(4)+g(6)=2+15+120$

$=137$

19. [출제의도] 도형의 닮음을 이용하여 등비급수의 합을 구하는 문제를 해결한다.

그림 R_1에서 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_1이라 하면 S_1은 그림과 같이 정사각형 ABCD의 내부와 원 C_2의 외부의 공통부분의 넓이와 같다.



직각삼각형 FCE가 $\overline{FC}=\overline{CE}=1$이므로

$\overline{FE}=\sqrt{2}$

따라서 선분 AD의 중점을 G라 하면

S_1=(직사각형 ABEG의 넓이)

−{(부채꼴 EFG의 넓이)

−(직각삼각형 EFG의 넓이)}

$=(2\times1)-\left\{\pi\times(\sqrt{2})^2\times\frac{1}{4}-(\sqrt{2})^2\times\frac{1}{2}\right\}$

$=3-\frac{\pi}{2}$

R_2에서 정사각형 PQRS의 한 변의 길이 $\overline{\mathrm{QR}}$는

$\overline{\mathrm{FR}}=\overline{\mathrm{FE}}=\sqrt{2}$이므로

직각삼각형 FQR에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{QR}}^2=(\sqrt{2})^2-\left(\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{2}\right)^2$이므로

$\overline{\mathrm{QR}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

R_1에서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이고

$\overline{\mathrm{QR}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$이므로

R_2에서 추가로 색칠되는 도형의 넓이 S_2는

$S_2=\left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\times\frac{1}{2}\right)^2\times S_1$

$=\frac{2}{5}S_1$

같은 방법으로 R_{n+1}에서 추가로 색칠되는

도형의 넓이는 R_n에서 추가로 색칠된

도형의 넓이의 $\frac{2}{5}$배이다.

따라서

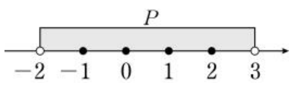
$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3-\frac{\pi}{2}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{30-5\pi}{6}$

20. [출제의도] 연립부등식을 활용하여 조건이 참이 되도록 하는 문제를 해결한다.

$x^2-x-6=(x-3)(x+2)<0$이므로

조건 $p: x^2-x-6<0$의 진리집합 P는

$P=\{x\mid -2<x<3\}$



$x^2+(6-3a)x+2a^2-10a+8$

$=x^2+(6-3a)x+2(a-1)(a-4)$

$=(x-2a+2)(x-a+4)$이므로

조건 $q: x^2+(6-3a)x+2a^2-10a+8\geq0$의

진리집합 Q는 a의 범위에 따라 각각 다음과 같다.

ⅰ) $2a-2<a-4$일 때 즉, $a<-2$일 때,

$Q=\{x\mid x\leq 2a-2$ 또는 $x\geq a-4\}$

ⅱ) $2a-2=a-4$일 때 즉, $a=-2$일 때,

$Q=\{x\mid x\neq-6$인 모든 실수$\}$

ⅲ) $2a-2>a-4$일 때 즉, $a>-2$일 때,

$Q=\{x\mid x\leq a-4$ 또는 $x\geq 2a-2\}$

ⅰ), ⅱ)에서 $a\leq-2$일 때

$P\cap Q=\{x\mid -2<x<3\}$이므로

두 조건 p, q를 모두 참이 되도록 하는 정수 x는

-1, 0, 1, 2의 4개이다.

ⅲ)에서 $a>-2$일 때

두 조건 p, q를 모두 참이 되도록 하는 정수 x가 오직 하나 존재하려면

$1<2a-2\leq2$이거나 $-1\leq a-4<0$이다.

따라서 $\frac{3}{2}<a\leq2$ 또는 $3\leq a<4$이므로

가능한 정수 a는 2 또는 3이다.

따라서 모든 정수 a의 값의 합은 5이다.

21. [출제의도] 지수의 성질을 이용하여 명제의 참과 거짓을 추론한다.

ㄱ. A_4는 $2^a=\frac{4}{b}$에서 $4=2^a\times b$인

자연수의 순서쌍을 원소로 갖는 집합이므로

$4=2^1\times2$, $4=2^2\times1$

$A_4=\{(1,2),(2,1)\}$ (참)

ㄴ. $m=2^k$일 때, $A_m=A_{2^k}$

A_m은 $2^a=\frac{2^k}{b}$에서

$2^k=2^a\times b$인

자연수의 순서쌍을 원소로 갖는 집합이므로

$A_m=\{(1,2^{k-1}),(2,2^{k-2}),(3,2^{k-3}),\cdots,(k,2^0)\}$

이다.

따라서 $n(A_m)=k$ (참)

ㄷ. A_m은 $2^a=\frac{m}{b}$에서

$m=2^a\times b$인 자연수의 순서쌍을 원소로 갖는 집합이다.

$n(A_m)=1$이 되기 위해서는

$b=\frac{m}{2^k}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 k가

오직 하나만 존재하므로

$k=1$이어야 한다.

따라서 $m=2^1\times$(홀수)이어야 한다.

두 자리 자연수 중에서 $2^1\times$(홀수)인 자연수는

2×5, 2×7, 2×9, $\cdots$, 2×49

이다.

따라서 $n(A_m)=1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 m의 개수는 5, 7, 9, $\cdots$, 49의 개수와 같다.

5, 7, 9, $\cdots$, 49는 첫째항이 5이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제23항을 나타낸 것이므로 조건을 만족시키는 두 자리 자연수 m의 개수는 23이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

22. [출제의도] 로그의 연산을 이용하여 간단한 로그를 계산한다.

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\times\log_2 8=16\times3=48$

23. [출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 주어진 항의 값을 계산한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

일반항 a_n은

$a_n=a+(n-1)d$이므로

$a_5-a_3=(a+4d)-(a+2d)$

$=2d=6$

$d=3$

$a_2=a+d=a+3=2$, $a=-1$

따라서 $a_6=a+5d$

$=(-1)+5\times3=14$

24. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$a_n-1=c_n$이라 하면

$a_n=c_n+1$이고,

$\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=2$에서 $\lim_{n\to\infty}c_n=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(c_n+1)$

$=2+1=3$

$a_n+2b_n=d_n$이라 하면

$b_n=\frac{1}{2}(d_n-a_n)$이고

$\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=9$에서 $\lim_{n\to\infty}d_n=9$이므로

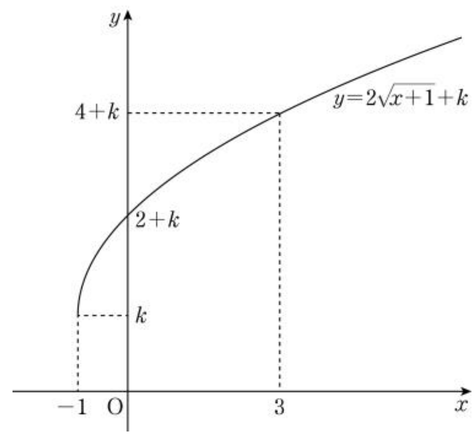
$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(d_n-a_n)=\frac{1}{2}(9-3)=3$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n(1+b_n)=3\times(1+3)=12$

25. [출제의도] 무리함수의 그래프를 이해하여 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

$f(x)=2\sqrt{x+1}+k$로 놓으면

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$0\leq x\leq3$에서 $f(x)$의 최댓값은 $M=f(3)$이고

최솟값은 $m=f(0)$이므로

$M=2\sqrt{3+1}+k=4+k$,

$m=2\sqrt{0+1}+k=2+k$에서

$M+m=(4+k)+(2+k)$

$=6+2k$

$=40$

따라서 $k=17$

26. [출제의도] 등비급수의 성질을 이해하여 등비급수의 합을 구한다.

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=3$이고,

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$이므로

수열 $\{a_n\}$은

첫째항이 3이고 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이다.

따라서 $a_n=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$a_{2n-1}=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{(2n-1)-1}$

$=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{2(n-1)}$

$=3\times\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\frac{3}{1-\frac{4}{9}}=\frac{27}{5}$

따라서 $p+q=5+27=32$

27. [출제의도] 이차함수의 그래프를 이용하여 여러 가지 수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.

부등식 $f(n)<k<f(n)+1$ $(n=1,2,3,\cdots)$은

$n^2+n-\frac{1}{3}<k<n^2+n+\frac{2}{3}$ …… ㉠

부등식 ㉠을 만족시키는 자연수 k는 n^2+n이므로

$a_n=n^2+n$

$\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n^2+n}$

$=\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n(n+1)}$

$=\sum_{n=1}^{100}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)$

$=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$

따라서 $p+q=101+100=201$

28. [출제의도] 집합의 연산을 활용하여 실생활 문제를 해결한다.

전체 학생의 집합을 U,

놀이 기구 A를 이용한 학생의 집합을 A,

놀이 기구 B를 이용한 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=30$이고, $n(A)=23$, $n(B)=16$이므로

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=23+16-n(A\cap B)$

$= 39 - n(A \cap B)$

이때 $n(A) \leq n(A \cup B) \leq n(U)$ 이므로

$23 \leq n(A \cup B) \leq 30$

$23 \leq 39 - n(A \cap B) \leq 30$

$9 \leq n(A \cap B) \leq 16$

$n(A \cap B)$ 의 최댓값은 $M = 16$,

최솟값은 $m = 9$

따라서 $M + m = 16 + 9 = 25$

29. [출제의도] 함수와 로그의 성질을 이용하여 집합의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

$\log_x n$ 이 자연수가 되려면

n 은 x 의 거듭제곱이어야 하므로

$A(x)$ 의 값은 1부터 300 사이의 자연수 중

x 의 거듭제곱으로 나타내어지는 수의 개수이다.

$2^8 < 300 < 2^9$ 이므로

$A(2) = 8$

이와 같은 방법으로 2 이상의 자연수 x 에 대하여

$A(x)$ 의 값을 구하면

$A(2) = 8$, $A(3) = 5$, $A(4) = 4$, $A(5) = 3$, $A(6) = 3$,

$A(7) = 2$, $A(8) = 2$, $\cdots$ 이므로

전체집합 P 의 공집합이 아닌 부분집합 X에 대하여 집합 X에서 집합 X로의 대응 f가 일대일 대응이 되려면 집합 X는 집합 $\{2, 3, 4, 5, 8\}$ 의 부분집합이어야 한다.

함수 f가 일대일 대응이므로

임의의 $a \in X$에 대하여

$f(a) \in X$, $f(f(a)) = a$를 만족시키는 집합 X는

$\{4\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 5\}$, $\{2, 4, 8\}$, $\{3, 4, 5\}$,

$\{2, 3, 5, 8\}$, $\{2, 3, 4, 5, 8\}$ 이다.

따라서 함수 $f: X \to X$가 일대일 대응이 되도록 하는 집합 X의 개수는 7이다.

30. [출제의도] 집합의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 값을 추론한다.

자연수 전체의 집합의 부분집합 X가

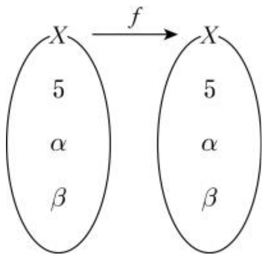
$n(X) = 3$이고 $5 \in X$이므로 $X = \{5, \alpha, \beta\}$

대응 $f: X \to X$를

$x \in X$가 홀수이면 $f(x) = \frac{x+p}{2}$

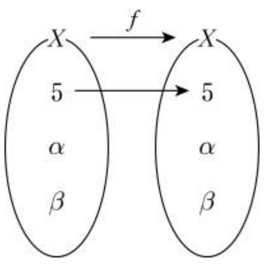
$x \in X$가 짝수이면 $f(x) = \frac{x}{2}$

로 정의하면 f는 함수이다.



$\frac{5+p}{2}$ 가 자연수가 되어야 하므로 p 는 홀수이다.

ⅰ) $f(5) = 5$, 즉 $p = 5$일 때



$f(\alpha) = 5$, $f(\alpha) = \alpha$, $f(\alpha) = \beta$인 경우를 각각 생각할 수 있다.

$f(\alpha) = 5$일 때, α가 짝수이면 $\frac{\alpha}{2} = 5$, $\alpha = 10$

이때 β가 홀수이면 $\beta = 15$이고,

β가 짝수이면 $\beta = 20$

따라서 가능한 경우는

$X = \{5, 10, 15\}$, $X = \{5, 10, 20\}$

따라서 $p = 5$이고 α가 짝수인 경우

가능한 집합 X가 존재하므로

$p = 5$일 때, α가 홀수인 경우와

$f(\alpha) = \alpha$, $f(\alpha) = \beta$인 경우는 다루지 않는다.

ⅱ) $f(5) = \alpha$일 때

$\alpha \neq 5$이므로 $p \neq 5$

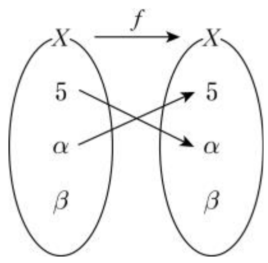
그런데 $p < 5$인 홀수인 경우에는 $n(X) = 3$인 경우가 존재하지 않음을 쉽게 확인할 수 있다.

따라서 $p > 5$인 경우만 생각하면 된다.

$5 < p$이면 $5 < \alpha < p$이다.

이때 가능한 경우로 $f(\alpha) = 5$ 또는 $f(\alpha) = \alpha$ 또는 $f(\alpha) = \beta$를 생각해 볼 수 있다.

ⅱ-1) $f(5) = \alpha$, $f(\alpha) = 5$일 때



α가 짝수이면 $\frac{\alpha}{2} = 5$, $\alpha = 10$이고,

$\frac{5+p}{2} = 10$이므로 $p = 15$

가능한 β의 값은 $\beta = 15$와 $\beta = 20$이 있다.

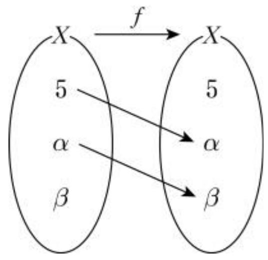
ⅱ-2) $f(5) = \alpha$, $f(\alpha) = \alpha$일 때

$\alpha \neq 5$이면 $p \neq 5$이므로

$\frac{\alpha}{2} \neq \alpha$, $\frac{\alpha+p}{2} \neq \alpha$

따라서 이 경우는 존재하지 않는다.

ⅱ-3) $f(5) = \alpha$, $f(\alpha) = \beta$일 때



$f(\beta) = 5$ 또는 $f(\beta) = \alpha$ 또는 $f(\beta) = \beta$의 경우를 생각해 볼 수 있다.

ⅱ-3-a) $f(\beta) = 5$일 때,

ⅱ-3-a-ㄱ) α가 짝수이면 $\frac{\alpha}{2} = \beta$

이때 β가 짝수이면 $\frac{\beta}{2} = 5$, $\beta = 10$이고,

$\alpha = 20$

$\frac{5+p}{2} = 20$이므로 $p = 35$

이때 $X = \{5, 10, 20\}$

β가 홀수이면

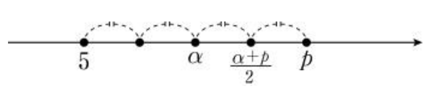
$f(\beta) = f(f(\alpha)) = f(f(f(5)))$에서

$\frac{\beta+p}{2} = \frac{\alpha+2p}{4} = \frac{5+5p}{8} = 5$이고, $p = 7$

이때 $X = \{3, 5, 6\}$

ⅱ-3-a-ㄴ) $p > 5$이면 5, α, p, $\frac{\alpha+p}{2}$ 의

대소 관계는 다음 그림과 같다.



α가 홀수이면 $\frac{\alpha+p}{2} = \beta$

β가 홀수이면 $\alpha < \beta < \frac{\beta+p}{2} < p$이므로

$n(X) \geq 4$가 되어 모순이 생긴다.

β가 짝수이면 $\frac{\beta}{2} = 5$

$f(\beta) = \frac{\beta}{2} = 5$, 즉 $\beta = 10$일 때,

$\frac{\alpha+p}{2} = \frac{\frac{5+p}{2}+p}{2} = 10$ $p = \frac{35}{3}$ 이므로

모순이다.

따라서 가능한 경우가 없다.

ⅱ-3-b) $f(\beta) = \alpha$일 때,

ⅱ-3-b-ㄱ) α가 짝수이고 β가 짝수이면

$f(\beta) = \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{4} = \alpha$이므로

$\alpha = 0$이 되어 모순이다.

ⅱ-3-b-ㄴ) α가 짝수이고 β가 홀수이면

$\alpha = f(\beta) = f(f(f(5)))$ 이므로

$\frac{5+p}{2} = \frac{5+5p}{8}$, $p = 15$ 이고

$\beta = 5$가 되어 모순이다.

ⅱ-3-b-ㄷ) α가 홀수이면 β는 짝수이고

이 경우 $\frac{\beta}{2} = \alpha$가 된다.

$\frac{5+3p}{8} = \frac{5+p}{2}$, $p < 0$이 되어 모순이다.

ⅱ-3-c) $f(\beta) = \beta$일 때,

$\beta < p$이므로 $\frac{\beta}{2} \neq \beta$이고,

$\frac{\beta+p}{2} \neq \beta$이므로

$f(\beta) \neq \beta$이다.

따라서 가능한 경우가 없다.

ⅰ), ⅱ)에서 조건을 만족시키는 모든 자연수 p의 값의 합은 $5 + 7 + 15 + 35 = 62$