

## 제 23 회 한국 수학 올림피아드 - 2 차 시험

### 중등부

2009년 8월 23일 (오후)

5. 예각삼각형  $ABC$ 가  $AB < AC$ 를 만족한다. 이 삼각형의 외심을  $O$ 라 하고, 변  $BC, CA, AB$ 의 중점을 각각  $D, E, F$ 라 하자. 선분  $AB$ 를 지름으로 하는 원과 직선  $DF$ 의 두 교점 중 직선  $AB$ 를 기준으로  $C$ 와 같은 편에 있는 점을  $P$ 라 하고, 선분  $AC$ 를 지름으로 하는 원과 직선  $DE$ 의 두 교점 중 직선  $AC$ 를 기준으로  $B$ 와 같은 편에 있는 점을  $Q$ 라 하자. 두 직선  $PQ$ 와  $BC$ 의 교점  $R$ 를 지나고 직선  $BC$ 에 수직인 직선 이 직선  $AO$ 와 만나는 점을  $X$ 라 할 때,  $AX = XR$ 임을 보여라.

6. 양의 실수  $a, b, c, d$ 에 대하여  $abcd = 1$  일 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$1 < \frac{b}{ab + b + 1} + \frac{c}{bc + c + 1} + \frac{d}{cd + d + 1} + \frac{a}{da + a + 1} < 2$$

7. 한국, 중국, 일본 각각 3명씩, 모두 9명의 학생들을 원형의 테이블에 일정한 간격으로 앉게 하려고 한다. 같은 나라의 학생끼리는 서로 이웃하지 않도록 하는 배열의 수를 구하여라. 단, 배열  $A$ 를 회전하여 배열  $B$ 가 된다면 이 두 배열은 같은 배열로 간주한다.

8. 다음 방정식을 만족하는 양의 정수  $x, y, z, u, v$ 가 존재함을 보여라.

$$x^2 + y^3 + z^5 + u^7 = v^{11}$$

제한 시간 2시간 30분

문항당 7점