

2012 년 8 월 19 일 (오전); 제한시간 2 시간 30 분; 문항당 7 점

1. 양의 실수 a, b, c 가 $ab + bc + ca = 1$ 을 만족할 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{a+b}{\sqrt{ab(1-ab)}} + \frac{b+c}{\sqrt{bc(1-bc)}} + \frac{c+a}{\sqrt{ca(1-ca)}} \leq \frac{\sqrt{2}}{abc}$$

2. 원 O 에 내접하는 오각형 $ABCDE$ 가 $\angle A = 90^\circ$, $\overline{AB} = \overline{CD}$ 를 만족한다. 변 AE 위의 점 $F (\neq A, E)$ 에 대하여 직선 BF 가 원 O 와 만나는 점을 $J (\neq B)$, 직선 CE 와 직선 DJ 가 만나는 점을 K , 직선 BD 와 직선 FK 가 만나는 점을 L 이라 하자. 네 점 B, L, E, F 가 한 원 위에 있음을 보여라.

3. 등식 $5^l (43)^m + 1 = n^3$ 을 만족하는 양의 정수 l, m, n 을 모두 구하여라.

4. 어떤 모임에서 학생 A_1, A_2, \dots, A_n 이 서로 악수를 하였다. 학생 A_i 가 악수한 횟수를 d_i ($1 \leq i \leq n$) 이라 할 때 $d_1 + d_2 + \dots + d_n > 0$ 이다. 다음 조건을 모두 만족하는 i, j ($1 \leq i < j \leq n$) 이 존재함을 보여라.

(1) 학생 A_i 와 학생 A_j 는 악수를 하였다.

(2)
$$\frac{(d_1 + d_2 + \dots + d_n)^2}{n^2} \leq d_i d_j$$