제3교시

2020학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

가형

성명		수험번호							

○ 먼저 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.

○ <u>문제지</u>의 해당란에 성명과 수험번호를 기입하시오.

○ <u>답안지</u>의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.

○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며, ‘0’이 포함된 경우에는 ‘0’을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

1. 제3사분면의 각 θ에 대하여 $\cos\theta = -\frac{1}{2}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [2점]

① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

2. 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(2,\ 4)$, $\mathrm{B}(1,\ 1)$, $\mathrm{C}(4,\ 0)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

3. $\lim_{x \to 0} \frac{2x\sin x}{1-\cos x}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}, \ \mathrm{P}(A^C \cup B) = \frac{2}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

5. 같은 종류의 흰 바둑돌 5개와 같은 종류의 검은 바둑돌 4개가 있다. 이 9개의 바둑돌을 일렬로 나열할 때, 검은 바둑돌 4개 중 2개는 서로 이웃하고, 나머지 2개는 어느 검은 바둑돌과도 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 60 ② 72 ③ 84 ④ 96 ⑤ 108

6. 초점이 F인 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ 6)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}=k$이다. $a+k$의 값은? [3점]

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

7. 이산확률변수 X가 가지는 값이 0, 2, 4, 6이고 X의 확률질량함수가

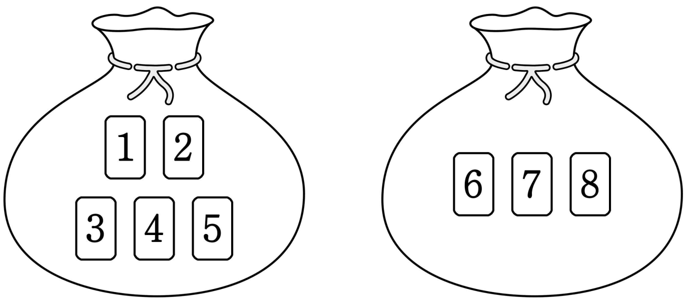
$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} a & (x=0) \\ \dfrac{1}{x} & (x=2,\ 4,\ 6) \end{cases}$$

일 때, $\mathrm{E}(aX)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

8. 주머니 A에는 1부터 5까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 5장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 6부터 8까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 3장의 카드가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내고, 주머니 B에서 임의로 한 장의 카드를 꺼낸다. 꺼낸 2장의 카드에 적힌 두 수의 합이 홀수일 때, 주머니 A에서 꺼낸 카드에 적힌 수가 홀수일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$



주머니 A 주머니 B

9. 평면 α 위에 있는 서로 다른 두 점 A, B와 평면 α 위에 있지 않은 점 P에 대하여 삼각형 PAB는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이다. 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 H에 대하여 $\overline{\mathrm{PH}}=4$일 때, 삼각형 HAB의 넓이는? [3점]

① $3\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{7}$ ④ 9 ⑤ $3\sqrt{11}$

10. 함수 $f(x)=\dfrac{6x^3}{x^2+1}$ 의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

11. 좌표공간의 두 점 A$(2,\ 2,\ 1)$, B$(a,\ b,\ c)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 y축 위에 있다. 직선 AB와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$이다. 양수 b의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

12. $0 \le x \le 2\pi$ 일 때, 방정식 $\tan 2x \sin 2x = \frac{3}{2}$ 의 모든 해의 합은? [3점]

① 2π ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ 3π ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ 4π

13. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$의 꼭짓점 중 x좌표가 음수인 점을 중심으로 하는 원 C가 있다. 점 $(3,\ 0)$을 지나고 원 C에 접하는 두 직선이 각각 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$과 한 점에서만 만날 때, 원 C의 반지름의 길이는? [3점]

① 2　② $\sqrt{5}$　③ $\sqrt{6}$　④ $\sqrt{7}$　⑤ $2\sqrt{2}$

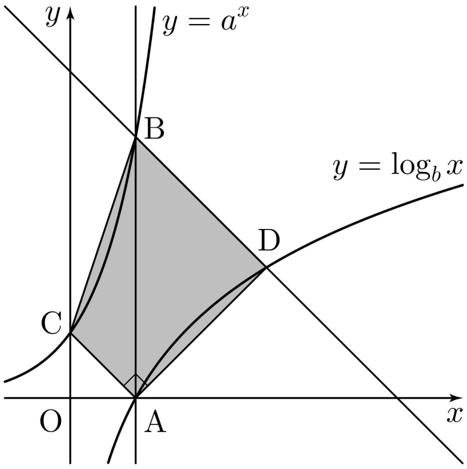
14. 어느 도시의 직장인들이 하루 동안 도보로 이동한 거리는 평균이 $m$km, 표준편차가 σkm 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 도시의 직장인들 중에서 36 명을 임의추출하여 조사한 결과 36 명이 하루 동안 도보로 이동한 거리의 총합은 216km 이었다. 이 결과를 이용하여, 이 도시의 직장인들이 하루 동안 도보로 이동한 거리의 평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하면 $a \le m \le a+0.98$ 이다. $a+\sigma$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [4점]

① 6.96　② 7.01　③ 7.06　④ 7.11　⑤ 7.16

15. 두 상수 a, $b\,(b<0<a)$에 대하여 직선 $\dfrac{x-a}{a}=3-y=\dfrac{z}{b}$ 위의 임의의 점과 평면 $2x-2y+z=0$ 사이의 거리가 4로 일정할 때, $a-b$의 값은? [4점]

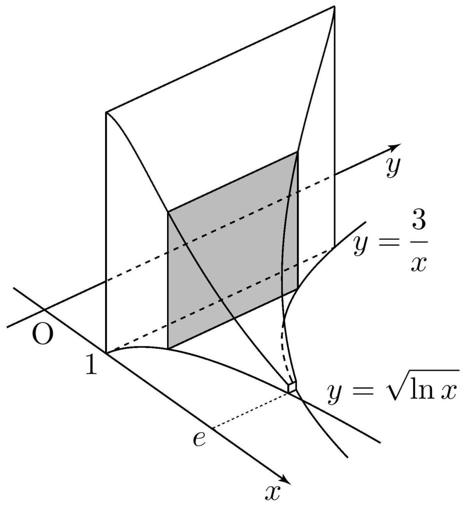
① 25 ② 27 ③ 29 ④ 31 ⑤ 33

16. 그림과 같이 1보다 큰 두 상수 a, b에 대하여 점 A(1, 0)을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=a^x$과 만나는 점을 B라 하고, 점 C(0, 1)에 대하여 점 B를 지나고 직선 AC와 평행한 직선이 곡선 $y=\log_b x$와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{AD}}$이고, 사각형 ADBC의 넓이가 6일 때, $a\times b$의 값은? [4점]



① $4\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ 8 ④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

17. 그림과 같이 두 곡선 $y=\dfrac{3}{x}$, $y=\sqrt{\ln x}$ 와 두 직선 $x=1$, $x=e$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [4점]



① $5-\dfrac{9}{e}$　② $5-\dfrac{8}{e}$　③ $5-\dfrac{7}{e}$　④ $6-\dfrac{9}{e}$　⑤ $6-\dfrac{8}{e}$

18. 다음은 자연수 n에 대하여 방정식 $a+b+c=3n$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c) 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 선택한 순서쌍 (a, b, c)가

$a>b$ 또는 $a>c$

를 만족시킬 확률을 구하는 과정이다.

> 방정식
> $$a+b+c=3n \quad \cdots\cdots \quad (*)$$
> 을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $\boxed{(가)}$이다.
> 방정식 $(*)$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)가 $a>b$ 또는 $a>c$를 만족시키는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 방정식 $(*)$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)가 $a \le b$와 $a \le c$를 만족시키는 사건이다.
> 이제 $n(A^C)$의 값을 구하자.
> 자연수 $k\,(1 \le k \le n)$에 대하여 $a=k$인 경우,
> $b \ge k$, $c \ge k$이고 방정식 $(*)$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
> $\boxed{(나)}$ 이므로
> $$n(A^C)=\sum_{k=1}^{n} \boxed{(나)}$$
> 이다.
> 따라서 구하는 확률은
> $$\mathrm{P}(A)=\boxed{(다)}$$
> 이다.

위의 (가)에 알맞은 식에 $n=2$를 대입한 값을 p, (나)에 알맞은 식에 $n=7$, $k=2$를 대입한 값을 q, (다)에 알맞은 식에 $n=4$를 대입한 값을 r라 할 때, $p \times q \times r$의 값은? [4점]

① 88 ② 92 ③ 96 ④ 100 ⑤ 104

19. 함수 $f(x)=xe^{2x}-(4x+a)e^{x}$ 이 $x=-\frac{1}{2}$ 에서 극댓값을 가질 때, $f(x)$ 의 극솟값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① $1-\ln 2$ ② $2-2\ln 2$ ③ $3-3\ln 2$ ④ $4-4\ln 2$ ⑤ $5-5\ln 2$

20. 두 상수 a, b와 함수 $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2+1}$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ f(b-x) & (x \geq a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\displaystyle\int_a^{a-b} g(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{2}\ln 5$ ② $\ln 5$ ③ $\dfrac{3}{2}\ln 5$ ④ $2\ln 5$ ⑤ $\dfrac{5}{2}\ln 5$

21. 두 함수

$$f(x)=4\sin\frac{\pi}{6}x,$$

$$g(x)=|2\cos kx+1|$$

이 있다. $0<x<2\pi$ 에서 정의된 함수

$$h(x)=(f\circ g)(x)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 자연수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $k=1$ 일 때, 함수 $h(x)$는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $k=2$ 일 때, 방정식 $h(x)=2$ 의 서로 다른 실근의 개수는 6 이다.

ㄷ. 함수 $|h(x)-k|$ 가 $x=\alpha\,(0<\alpha<2\pi)$ 에서 미분가능하지 않은 실수 α 의 개수를 a_k 라 할 때, $\sum_{k=1}^{4}a_k=34$ 이다.

① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ　　④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. 함수 $f(x)=(3x+e^x)^3$ 에 대하여 $f'(0)$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 매개변수 t 로 나타내어진 곡선

$$x=2\sqrt{2}\sin t+\sqrt{2}\cos t,\ y=\sqrt{2}\sin t+2\sqrt{2}\cos t$$

가 있다. 이 곡선 위의 $t=\frac{\pi}{4}$ 에 대응하는 점에서의 접선의 y 절편을 구하시오. [3점]

24. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X \geq 128) = \mathrm{P}(X \leq 140)$
(나) $\mathrm{P}(m \leq X \leq m+10) = \mathrm{P}(-1 \leq Z \leq 0)$

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

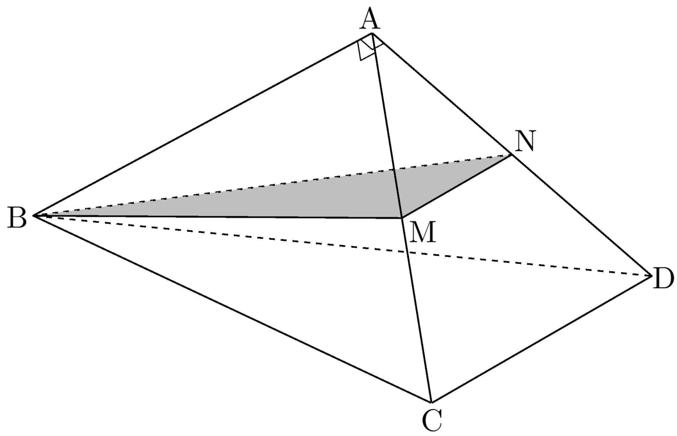
$\mathrm{P}(X \geq k) = 0.0668$을 만족시키는 상수 k의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (단, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [3점]

25. 1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 9개의 공을 같은 종류의 세 상자에 3개씩 나누어 넣으려고 한다. 세 상자 중 어떤 한 상자에 들어 있는 3개의 공에 적힌 수의 합이 나머지 두 상자에 들어 있는 6개의 공에 적힌 수의 합보다 크도록 9개의 공을 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 공을 넣는 순서는 고려하지 않는다.) [3점]

26. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ACD를 한 면으로 하는 사면체 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

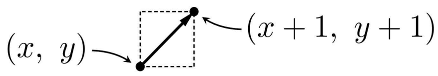
(가) $\overline{\mathrm{BC}}=3\sqrt{10}$
(나) $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{AD}}$

두 모서리 AC, AD의 중점을 각각 M, N이라 할 때, 삼각형 BMN의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. $40\times S$의 값을 구하시오. [4점]

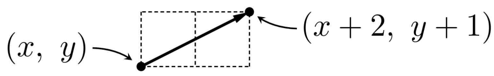


27. 한 번 누를 때마다 좌표평면 위의 점 P를 다음과 같이 이동시키는 두 버튼 ㉠, ㉡이 있다.

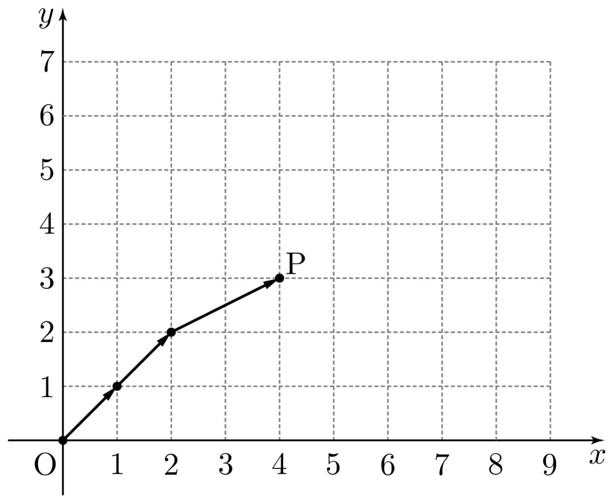
[버튼 ㉠] 그림과 같이 길이가 $\sqrt{2}$인 선분을 따라 점 $(x,\ y)$에 있는 점 P를 점 $(x+1,\ y+1)$로 이동시킨다.



[버튼 ㉡] 그림과 같이 길이가 $\sqrt{5}$인 선분을 따라 점 $(x,\ y)$에 있는 점 P를 점 $(x+2,\ y+1)$로 이동시킨다.

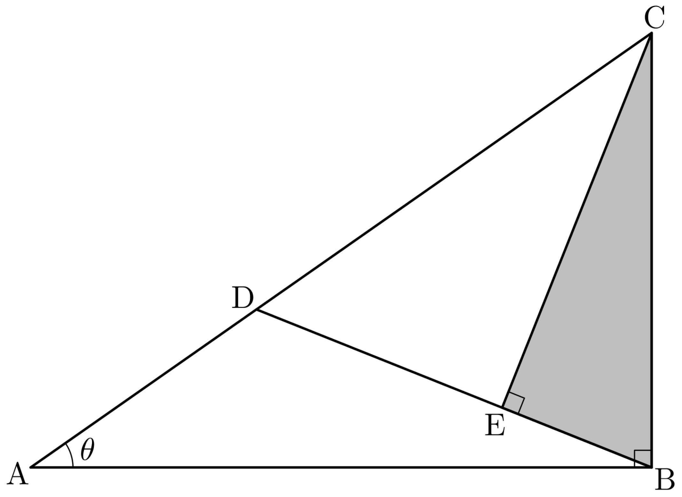


예를 들어, 버튼을 ㉠, ㉠, ㉡ 순으로 누르면 원점 $(0,\ 0)$에 있는 점 P는 아래 그림과 같이 세 선분을 따라 점 $(4,\ 3)$으로 이동한다. 또한 원점 $(0,\ 0)$에 있는 점 P를 점 $(4,\ 3)$으로 이동시키도록 버튼을 누르는 경우는 ㉠㉠㉡, ㉠㉡㉠, ㉡㉠㉠으로 3가지이다.



원점 $(0,\ 0)$에 있는 점 P를 두 점 $A(5,\ 5)$, $B(6,\ 4)$ 중 어느 점도 지나지 않고 점 $C(9,\ 7)$로 이동시키도록 두 버튼 ㉠, ㉡을 누르는 경우의 수를 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$ 이고 $\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC 에서 $\angle\mathrm{CAB}=\theta$ 라 하자. 선분 AC 를 4:7로 내분하는 점을 D 라 하고 점 C 에서 선분 BD 에 내린 수선의 발을 E 라 할 때, 삼각형 CEB 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



29. 좌표공간에 구 $C: x^2+y^2+(z+2)^2=2$ 와 점 $\mathrm{A}(0,\ 3,\ 3)$ 이 있다. 구 C 위의 점 P 와 $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=2$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QA}}=3\sqrt{6}$ 을 만족시키는 점 Q 에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ 의 최댓값은 $p\sqrt{2}+q\sqrt{6}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이고, p, q 는 유리수이다.) [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_{0}^{x}\frac{f(t)}{|t|+1}\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(2)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge 0$이다.

$g'(-1)$의 값이 최대가 되도록 하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f(-1)=\dfrac{n}{m-3\ln 3}$일 때, $|m\times n|$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이고, $\ln 3$은 $1<\ln 3<1.1$인 무리수이다.) [4점]