

제3교시

2017학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

나형

성명		수험번호								
----	--	------	--	--	--	--	--	--	--	--

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며, ‘0’이 포함된 경우에는 ‘0’을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

공 란

1. $\left(2^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{4}{3}}\right)^{-2}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 4

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^{n+1}}{3^{n+1} - 2^n}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 3

3. 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르는 확률변수 X 의 평균이 5일 때, 자연수 n 의 값은? [2점]

① 16

② 20

③ 24

④ 28

⑤ 32

4. 실수 x 에 대한 두 조건

$$p : x^2 - (2+a)x + 2a \leq 0$$

$$q : x^2 - 2x - 15 \leq 0$$

에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 정수 a 의 개수는? [3점]

① 7

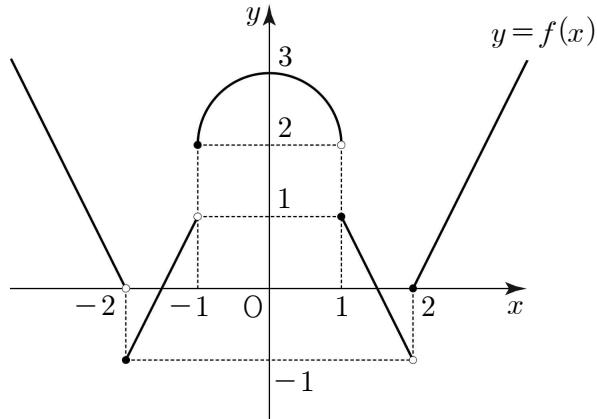
② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

5. 함수 $f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x-2)$$

의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

6. 한 개의 주사위를 던질 때 짹수의 눈이 나오는 사건을 A , 소수의 눈이 나오는 사건을 B 라 하자. $P(B|A) - P(B|A^C)$ 의 값은? (단, A^C 은 A 의 여사건이다.) [3점]

- ① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

7. 1이 아닌 두 양수 a, b 에 대하여 등식

$$\log_3 a = \frac{1}{\log_b 27}$$

o) 성립할 때, $\log_a b^2 + \log_b a^2$ 의 값은? [3점]

① 6

② $\frac{20}{3}$

③ $\frac{22}{3}$

④ 8

⑤ $\frac{26}{3}$

8. 함수 $f(x) = x(x-3)(x-a)$ 의 그래프 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선과 점 $(3, 0)$ 에서의 접선이 서로 수직이 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합은? [3점]

① $\frac{3}{2}$

② 2

③ $\frac{5}{2}$

④ 3

⑤ $\frac{7}{2}$

9. 주머니 속에 흰 공이 5개, 검은 공이 3개 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낼 때, 나오는 검은 공의 개수를 확률변수 X 라 하자. $E(X)$ 의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$

② $\frac{7}{4}$

③ 2

④ $\frac{9}{4}$

⑤ $\frac{5}{2}$

10. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 에 대하여 집합 P 를

$$P = \left\{ \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{x_3}{10^3} \mid x_1 \in A, x_2 \in A, x_3 \in A \right\}$$

라 하자. 집합 P 의 원소 중 41 번째로 큰 원소는 $\frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3}$ 이다. $a+b+c$ 의 값은? [3점]

① 11

② 13

③ 15

④ 17

⑤ 19

11. 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생을 임의로 3명, 3명, 2명씩 3개의 조로 나눌 때, 두 학생 A, B가 같은 조에 속할 확률은? [3점]

① $\frac{1}{8}$

② $\frac{1}{4}$

③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{5}{8}$

12. 어느 공장에서 생산하는 군용 위장크림 1개의 무게는 평균이 m , 표준편차가 σ 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산하는 군용 위장크림 중에서 임의로 택한 1개의 무게가 50 이상일 확률은 0.1587이다. 이 공장에서 생산하는 군용 위장크림 중에서 임의추출한 4개의 무게의 평균이 50 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?
(단, 무게의 단위는 g이다.) [3점]

① 0.0228

② 0.0668

③ 0.1587

④ 0.3085

⑤ 0.4332

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

13. 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$x^4 - 4x^3 + 12x \geq 2x^2 + a$$

가 성립할 때, 실수 a 의 최댓값은? [3점]

- ① -11 ② -10 ③ -9 ④ -8 ⑤ -7

14. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 두 함수 $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(3) = 5$, $g(2) = 3$
(나) 어떤 $x \in B$ 에 대하여 $g(x) = x$ 이다.
(다) 모든 $x \in A$ 에 대하여 $(f \circ g \circ f)(x) = x + 1$ 이다.

$f(1) + g(3)$ 의 값은? [4점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

15. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$S_6 - S_3 = 6, \quad S_{12} - S_6 = 72$$

일 때, $a_{10} + a_{11} + a_{12}$ 의 값은? [4점]

① 48

② 51

③ 54

④ 57

⑤ 60

16. ○] 차함수 $f(x) = x^2 + mx - 8$ ○]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{k-1}{n}\right)$$

를 만족시킬 때, 함수 $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ 는 $x = \alpha$ 에서 극소이다. α 의 값은? (단, m 은 상수이다.)

[4점]

- ① -4 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

17. 주머니에 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 다섯 개의 구슬이 들어 있다. 주머니에서 임의로 한 개의 구슬을 꺼내어 구슬에 적혀 있는 숫자를 확인한 후 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 4회 반복하여 얻은 4개의 수 중에서 3개의 수의 합의 최댓값을 N 이라 하자. 다음은 $N \geq 14$ 일 확률을 구하는 과정이다.

(i) $N=15$ 인 경우

5가 적힌 구슬이 4회 나올 확률은 $\frac{1}{625}$ 이고,

5가 적힌 구슬이 3회, 4 이하의 수가 적힌 구슬 중 한 개가 1회 나올 확률은 $\frac{(가)}{625}$ 이다.

(ii) $N=14$ 인 경우

5가 적힌 구슬이 2회, 4가 적힌 구슬이 2회 나올 확률은 $\frac{6}{625}$ 이고,

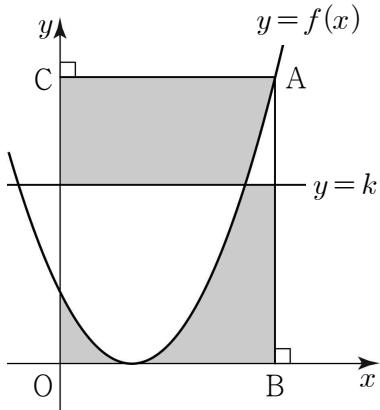
5가 적힌 구슬이 2회, 4가 적힌 구슬이 1회, 3 이하의 수가 적힌 구슬 중 한 개가 1회 나올 확률은 $\frac{(나)}{625}$ 이다.

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{(다)}{625}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p , q , r 라 할 때, $p+q+r$ 의 값은? [4점]

- ① 96 ② 101 ③ 106 ④ 111 ⑤ 116

18. 그림과 같이 함수 $f(x) = (x-1)^2$ 의 그래프 위의 점 A(3, 4)에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하자. 직사각형 OBAC의 내부에서 연립부등식 $\begin{cases} y \leq f(x) \\ y \leq k \end{cases}$ 를 만족시키는 영역의 넓이를 S_1 , 직사각형 OBAC의 내부에서 연립부등식 $\begin{cases} y \geq f(x) \\ y \geq k \end{cases}$ 를 만족시키는 영역의 넓이를 S_2 라 하자. $S_1 = S_2$ 일 때, 상수 k 의 값은? (단, $1 < k < 4$ 이다.) [4점]

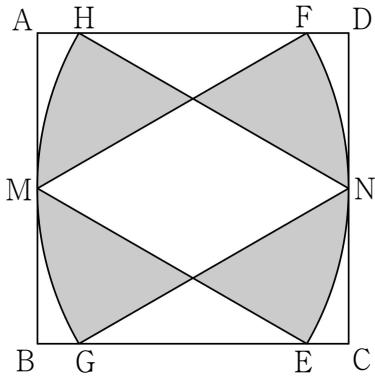
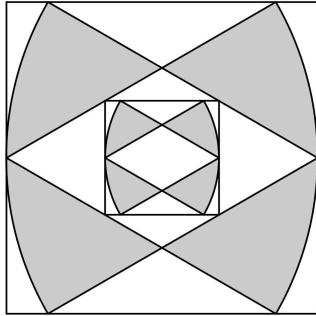
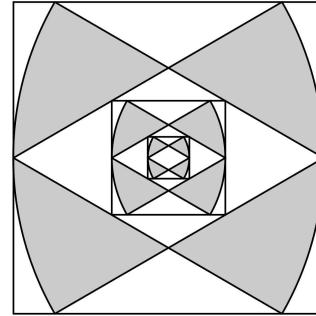


- ① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

19. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사각형 ABCD가 있다. 두 선분 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하자. 두 선분 BC, AD 위에 $\overline{ME} = \overline{MF} = \overline{AB}$ 가 되도록 각각 점 E, F를 잡고, 중심이 M인 부채꼴 MEF를 그린다. 두 선분 BC, AD 위에 $\overline{NG} = \overline{NH} = \overline{AB}$ 가 되도록 각각 점 G, H를 잡고, 중심이 N인 부채꼴 NHG를 그린다. 두 부채꼴 MEF, NHG의 내부에서 공통부분을 제외한 나머지 부분에 와 같이 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 두 부채꼴 MEF, NHG의 공통부분인 마름모의 각 변에 꼭짓점이 있고, 네 변이 정사각형 ABCD의 네 변과 각각 평행한 정사각형을 그린다. 새로 그려진 정사각형에 그림 R_1 을 얻은 방법과 같은 방법으로 2개의 부채꼴을 각각 그린 다음 2개의 부채꼴의 내부에서 공통부분을 제외한 나머지 부분에 와 같이 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

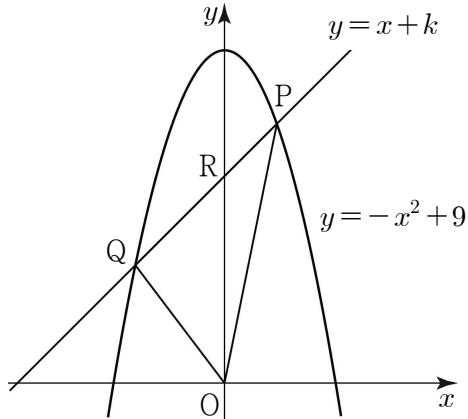
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]

 R_1  R_2  R_3

...

- ① $8\sqrt{3}(\pi - \sqrt{3})$
 ② $9\sqrt{3}(\pi - \sqrt{3})$
 ③ $10\sqrt{3}(\pi - \sqrt{3})$
 ④ $11\sqrt{3}(\pi - \sqrt{3})$
 ⑤ $12\sqrt{3}(\pi - \sqrt{3})$

20. 그림과 같이 직선 $y = x + k$ ($3 < k < 9$) 가 곡선 $y = -x^2 + 9$ 와 만나는 두 점을 각각 P, Q 라 하고, y 축과 만나는 점을 R 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 원점이고, 점 P의 x 좌표는 점 Q의 x 좌표보다 크다.) [4점]



<보 기>

- ㄱ. 선분 PQ 의 중점의 x 좌표는 $-\frac{1}{2}$ 이다.
- ㄴ. $k=7$ 일 때, 삼각형 ORQ 의 넓이는 삼각형 OPR 의 넓이의 2 배이다.
- ㄷ. 삼각형 OPQ 의 넓이는 $k=6$ 일 때 최대이다.

① ㄱ

④ ㄴ, ㄷ

② ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

21. 함수 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ 가 있다. 실수 t 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < a) \\ t-f(x) & (x \geq a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a 의 개수를 $h(t)$ 라 하자. 예를 들어 $h(0)=3$ 이다. $h(t)=3$ 을 만족시키는 모든 정수 t 의 개수는? [4점]

① 55

② 57

③ 59

④ 61

⑤ 63

22. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 1$, $a_5 = 7$ 일 때, a_9 의 값을 구하시오. [3점]

23. 두 함수 $f(x) = 4x + 5$, $g(x) = \sqrt{2x+1}$ 에 대하여 $(f \circ g^{-1})(3)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x^2 - x - 1} = \frac{1}{2}$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2x^2 - x - 1} = 4$$

$f(2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 방정식 $(x+y+z)(s+t)=49$ 를 만족시키는 자연수 x, y, z, s, t 의 모든 순서쌍 (x, y, z, s, t) 의 개수를 구하시오. [3점]

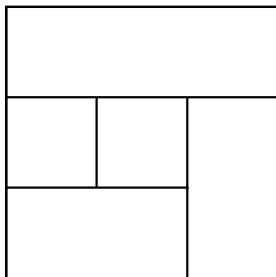
26. 사관학교에서는 사관생도들에게 세 국가 A, B, C에서 해외 파견 교육을 받을 수 있도록 하고 있다. 해외 파견 교육 대상 사관생도를 선발하기 위해 희망자를 조사하였더니 하나 이상의 국가를 신청한 사관생도의 수가 70명이었고, 그 결과는 다음과 같았다.

- (가) A 또는 B를 신청한 사관생도는 43명이다.
- (나) B 또는 C를 신청한 사관생도는 51명이다.
- (다) A와 C를 동시에 신청한 사관생도는 없다.

B를 신청한 사관생도의 수를 구하시오. [4점]

27. 그림과 같이 5개의 영역으로 나누어진 도형을 서로 다른 4가지 색을 사용하여 모든 영역을 칠하려고 한다. 다음 조건을 만족시키도록 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 그 결과로 나타날 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 경계가 일부라도 닿은 두 영역은 서로 이웃한 영역으로 본다.) [4점]

- (가) 4가지의 색의 전부 또는 일부를 사용한다.
(나) 서로 이웃한 영역은 서로 다른 색으로 칠한다.



28. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 에 대하여

$$X \not\subset A, X \not\subset B, X \subset (A \cup B)$$

를 만족시키는 집합 X 의 개수를 구하시오. [4점]

29. 자연수 n 에 대하여 원 $x^2 + y^2 = n^2$ 과 곡선 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 이 서로 다른 네 점에서 만날 때,
이 네 점을 꼭짓점으로 하는 직사각형을 만든다. 이 직사각형에서 긴 변의 길이가 짧은 변의
길이의 2배가 되도록 하는 k 의 값을 $f(n)$ 이라 하자. $\sum_{n=1}^{12} f(n)$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x^2 - 2x$ 이다.
(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) + f(x) = 0$ 이다.

실수 t 에 대하여 닫힌 구간 $[t, t+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 $g(t)$ 라 하자.

좌표평면에서 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

공 란