

2011년 8월 21일 (오전); 제한시간 2시간 30분; 문항당 7점

- 반지름의 길이가 같은 두 원  $O, O'$  이 서로 다른 두 점  $A, B$  에서만 만난다고 하자. 원  $O$  위의 점  $P (\neq A, B)$ , 원  $O'$  위의 점  $Q (\neq A, B)$  에 대하여  $R (\neq B)$  을  $PAQR$  이 평행사변형이 되도록 택하자. 네 점  $B, R, P, Q$  가 한 원 위에 있으면  $PQ = OO'$  임을 보여라.

- 서로소인 두 양의 정수  $x, y$  에 대하여,  $x + 3y^2$  이 완전제곱수이면  $x^2 + 9y^4$  이 완전제곱수가 아님을 보여라.

- 실수  $a, b, c, d$  가 두 조건  $a + b + c + d = 19$  와  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 91$  을 만족할 때,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

의 최댓값을 구하여라.

- 양의 정수  $k$  와  $n$  에 대해, 원 위에  $kn$  개의 서로 다른 점  $P_1, P_2, \dots, P_{kn}$  이 시계방향으로 배열되어 있다. 각 점에  $k$  개의 색  $c_1, c_2, \dots, c_k$  중 하나를 칠할 때, 다음 조건을 모두 만족시키도록 칠하는 방법의 수를 구하여라.

(1) 각각의 색으로 칠할 점의 개수는  $n$  이다.

(2) 임의의  $i \neq j$  에 대하여, 점  $P_a$  와  $P_b$  에  $c_i$  를 칠하고 점  $P_c$  와  $P_d$  에  $c_j$  를 칠한다면 선분  $P_a P_b$  와  $P_c P_d$  는 서로 만나지 않는다.