



제 36 회 중등부 1차시험 1교시

## 한국수학올림피아드

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2022년 5월 28일 ; 제한시간 2시간 30분(1교시 1시간 15분, 2교시 1시간 15분)

- A. 답안지에 **수험번호와 성명, 문제유형**을 반드시 기입하십시오.  
 B. 이 시험은 총 20개(오전 10개, 오후 10개)의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.

1. 실수  $x, y$ 에 대하여 다음 식이 가질 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라. [4점]

$$x^4y^2 + x^2y^2 + 12x^2y + 4x^2 + 2022$$

답: 2006

2. 함수  $f(x)$ 가 다음과 같이 정의된다.

$$f(x) = ax + |x - 1| + 3|x - 2| + 5|x - 3| + 7|x - 4|$$

모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) \geq f(2)$ 가 성립하도록 하는 정수  $a$ 의 개수를 구하여라. [5점]

답: 7

3. 식  $a^2 + 2ab + 4b^2 = 30$ 을 만족하는 음이 아닌 실수  $a, b$ 에 대하여  $ab + \frac{1}{1+ab}$ 이 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것과 가장 작은 것의 합을  $M$ 이라 하자.  $24M$ 의 값을 구하여라. [5점]

답: 148

4. 다음 그림의 네모 상자에 1 이상 12 이하의 서로 다른 정수를 하나씩 넣어서 네 개의 등식이 모두 성립할 때, 네모 상자에 넣은 네 수의 곱을 구하여라. [4점]

$$\boxed{\quad} + \boxed{\quad} = 12$$

$\times$                   +

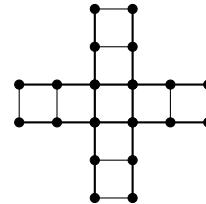
$$\boxed{\quad} + \boxed{\quad} = 13$$

||                  ||

24                  11

답: 240

5. 그림과 같이 9개의 단위 정사각형으로 이루어진 도형이 있다. 다음 조건을 만족하도록 이 도형 위의 20개의 점 각각에 빨강, 파랑 중 하나의 색을 칠하는 방법의 수를 구하여라. [5점]



(조건) 각각의 단위 정사각형의 네 꼭짓점 중 빨강으로 색칠된 것의 개수는 1 또는 3이다.

답: 2048

6. 정12각형의 각 꼭짓점 중 5개는 빨간색, 나머지 7개는 파란색으로 색칠하려고 한다. 다음 조건을 만족하도록 색칠하는 경우의 수를 구하여라. (단, 회전하여 같은 것은 한 가지로 센다.) [6점]

(조건) 파란색으로 색칠된 세 점을 꼭짓점으로 가지는 정삼각형을 만들 수 없다.

답: 27

7. 삼각형  $ABC$ 의 세 변의 길이가 각각  $\overline{AB} = 8$ ,  $\overline{BC} = 9$ ,  $\overline{CA} = 10$ 이다. 점  $D$ 는 변  $BC$  위의 점으로  $\overline{BD} = 4$ 인 점이다. 변  $AB$ 와  $AC$ 의 중점을 각각  $E, F$ 라 할 때, 삼각형  $DEF$ 의 외접원과 선분  $AD$ 가 만나는 점을  $K$ 라 하자.  $6(\overline{AK})^2$ 의 값을 구하여라. [5점]

답: 40

8. 삼각형  $ABC$ 에서  $\overline{AB} = 27$ ,  $\overline{BC} = 30$ 이다. 변  $BC$ 의 중점을  $M$ 이라 할 때 선분  $BC$ 를 지름으로 하는 원과 선분  $AM$ 이 점  $D (\neq A)$ 에서 만난다. 직선  $CD$ 와 변  $AB$ 가 점  $E$ 에서 만나고, 직선  $BD$ 와 변  $AC$ 가 점  $F$ 에서 만난다.  $\overline{EF} = 10$ 일 때, 선분  $AC$ 의 길이를 구하여라. [6점]

답: 39



9. 양의 정수  $m, n$ 이 다음 조건을 만족할 때,  $m + n$ 의 값을 구하여라. [5점]

(조건)  $m, n$ 의 최대공약수를  $G$ , 최소공배수를  $L$ 이라 할 때,  $LG = 270000$ ,  $L - G = m + 2n$ 이다.

답: 1050

10. 다음 두 조건을 모두 만족하는 소수  $p, q$ 의 순서쌍  $(p, q)$ 의 개수를 구하여라. [5점]

- (i)  $p \leq q \leq 19$   
(ii)  $x(x + pq) = m^2$ 을 만족하는 양의 정수  $x, m$ 의 순서쌍  $(x, m)$ 은 유일하게 존재한다.

답: 7



2022년 5월 28일 ; 제한시간 2시간 30분(1교시 1시간 15분, 2교시 1시간 15분)

- A. 답안지에 **수험번호와 성명, 문제유형**을 반드시 기입하십시오.  
 B. 이 시험은 총 20개(오전 10개, 오후 10개)의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.

11. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수  $x, y$ 의 순서쌍  $(x, y)$ 의 개수를 구하여라. [5점]

$$(i) \quad x + 2y \leq 12$$

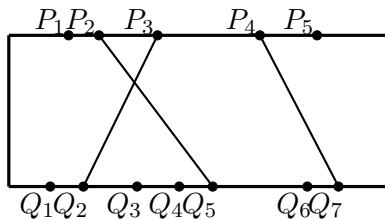
$$(ii) \quad xy \geq 10$$

답: 11

12. 좌표평면 위의 점  $(x, y)$ 에 대하여,  $x$ 가 0, 1, 2, 3 중 하나이고  $y$ 가 0, 1, 2 중 하나이면 그 점을 ‘좋은 점’이라 하자. 함수  $y = p(x)$ 의 그래프가 3개 이상의 좋은 점을 지나는 이차다항식  $p(x)$ 의 개수를 구하여라. [6점]

답: 74

13. 다음과 같이 서로 다른 5개의 점  $P_1, \dots, P_5$ 와 서로 다른 7개의 점  $Q_1, \dots, Q_7$ 이 직사각형의 마주보는 두 변 위에 있다. 각 변 위의 점  $P_i$ 와  $Q_j$ 를 잇는 35개의 선분 중 어떠한 세 선분도 직사각형 내부의 한 점에서 만나지 않는다. 35개의 선분들의 교점 중, 직사각형 내부에 있는 것의 개수를 구하여라. [5점]



답: 210

14. 두자리 양의 정수  $a, b$ 의 순서쌍  $(a, b)$  중, 다음 두 조건을 모두 만족하는 것의 개수를 구하여라. [5점]

$$(i) \quad a + b \text{는 } 7 \text{의 배수}$$

$$(ii) \quad ab \text{는 } 2 \text{의 배수}$$

답: 867

15. 삼각형  $ABC$ 의 세 변의 길이가 각각  $\overline{AB} = 6$ ,  $\overline{BC} = 11$ ,  $\overline{CA} = 8$ 이다. 변  $BC, CA, AB$ 가 삼각형  $ABC$ 의 내접원에 각각  $D, E, F$ 에서 접한다. 변  $AB$ 와  $AC$ 의 중점을 연결한 직선이 직선  $DE, DF$ 와 각각 점  $P, Q$ 에서 만날 때,  $6\overline{PQ}$ 의 값을 구하여라. [4점]

답: 9

16. 삼각형  $ABC$ 에서  $\overline{BC} = 12$ 이다. 각  $B$ 의 이등분선과 변  $AC$ 의 교점을  $D$ , 각  $C$ 의 이등분선과 변  $AB$ 의 교점을  $E$ 라 할 때,  $\overline{BE} = 6$ ,  $\overline{CD} = 8$ 이다. 삼각형  $ABC$ 의 넓이를  $S$ 라 할 때,  $\frac{4}{\sqrt{7}}S$ 의 값을 구하여라. [5점]

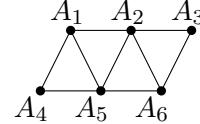
답: 135

17. 삼각형  $ABC$ 의 외접원  $\Gamma$  위의 점  $A$ 에서의 접선과 직선  $BC$ 가 점  $D$ 에서 만난다. 선분  $AD$ 의 중점을  $M$ 이라 할 때, 선분  $BM$ 이 원  $\Gamma$ 와 점  $E(\neq B)$ 에서 만난다.  $\angle ACE = 25^\circ$ ,  $\angle CED = 84^\circ$ ,  $\angle ADE = x^\circ$ 일 때,  $x$ 의 값을 구하여라. [5점]

답: 17

18. 그림과 같이 삼각형 4개로 이루어진 도형이 있다. 다음 조건을 만족하도록 점  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 에 1, 2, 3, 4, 5, 6을 하나씩 적는 경우의 수를 구하여라. [4점]

(조건) 각 삼각형마다 꼭짓점에 쓴 수의 제곱의 합을 3으로 나누어 얻은 4개의 나머지가 모두 같다.



답: 144

19. 다음 조건을 만족하는 소수가 아닌 세 자리 양의 정수  $n$  중에서 가장 큰 것을 구하여라. [5점]

(조건)  $n - 1$  이하의 모든 양의 정수의 배수이지만  $n$ 의 배수가 아닌 양의 정수가 존재한다.

답: 961



제 36 회 중등부 1차시험 2교시

한국수학올림피아드

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

20. 양의 정수  $n = a_k \times 10^k + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$  에 대하여

$$r(n) = a_0 \times 10^k + \cdots + a_{k-1} \times 10 + a_k$$

라 정의하자. (단,  $a_0, \dots, a_k$ 는 0 이상 9 이하인 정수,  $a_k \neq 0$ )

식  $5n + 7r(n) = 7401$ 을 만족하는  $n$ 을 구하여라. [6점]

답: 328