



제 37 회 중등부 1차시험

한국수학올림피아드

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2023년 5월 13일 ; 제한시간 2시간 30분

- A. 답안지에 **수험번호와 성명, 문제유형**을 반드시 기입하십시오.
- B. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
- C. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 “7” 일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
- D. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지를** 기입하여야 합니다.
- E. 문제 1 ~ 4 번은 각 4 점, 문제 17 ~ 20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. [정답. 10]

부등식 $2x^2 - 6x + 4 \leq 3x$ 를 만족하는 모든 정수 x 의 합을 구하여라.

6. [정답. 12]

다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하여라.

$$(i) ab = 300$$

$$(ii) \frac{b}{5} \text{는 정수이다.}$$

7. [정답. 10]

카드 6장에 1부터 6까지의 정수가 하나씩 적혀 있다. 이 중 카드에 적힌 숫자의 곱이 12의 배수가 되도록 3장의 카드를 뽑는 방법의 수를 구하여라.

8. [정답. 196]

삼각형 ABC 의 세 변 AB, BC, CA 의 길이가 각각 7, 8, 9이다. 삼각형 ABC 의 무게중심을 G 라 할 때, 점 A 와 G 를 지나는 서로 다른 두 원이 각각 점 D 와 E 에서 직선 BC 에 접한다. $3(\overline{DE})^2$ 의 값을 구하여라.

9. [정답. 20]

다음과 같이 1×1 정사각형 4개를 붙여서 큰 정사각형을 만들었다. 이 도형의 9개의 점 중에서 5개의 점을 꼭짓점으로 갖는 오각형의 개수를 구하여라. (단, 오각형의 모든 내각의 크기는 180° 미만이고 9개의 점은 모두 다른 것으로 간주한다.)

3. [정답. 15]

다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 의 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

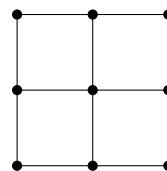
(조건) n 의 제곱은 100보다 작은 세 개의 연속된 양의 정수들의 합으로 나타낼 수 있다.

4. [정답. 6]

정육각형 $ABCDEF$ 의 넓이가 12 일 때, 삼각형 ACE 의 넓이를 구하여라.

5. [정답. 14]

등식 $[x]^2 + 4 = 2x + 2[x]$ 를 만족하는 모든 실수 x 의 합을 S 라고 할 때, $2S$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 가장 큰 정수)





10. [정답. 437]

다음 조건을 만족하는 1000 이하의 양의 정수 n 의 개수를 구하여라.

(조건) $n = a^2 - 4b^2$ 을 만족하는 정수 a, b 가 존재 한다.

11. [정답. 25]

양의 실수 a, b 가 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$ 과 $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = 10$ 을 모두 만족할 때, $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{a^2}$ 의 값을 구하여라.

12. [정답. 66]

평행사변형 $ABCD$ 에서 두 변 AB 와 BC 의 길이는 각각 5와 7이고 대각선 AC 의 길이는 6이다. 원 O 가 점 A 와 C 를 지나고 점 C 에서 직선 BC 에 접한다. 직선 AD 와 원 O 가 만나는 점을 $E(\neq A)$ 라 할 때 $42\overline{DE}$ 의 값을 구하여라.

13. [정답. 55]

함수 $f(x)$ 가 다음과 같이 정의된다.

$$f(x) = \frac{2}{5}(x-a)^2 - b$$

함수값 $f(0), f(1), \dots, f(10)$ 중 음수의 개수가 홀수가 되는 정수 a 와 5 이하인 양의 정수 b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하여라.

14. [정답. 12]

다음 등식을 만족하는 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

$$x^2 + xy + y^2 = 10(x + 5y)$$

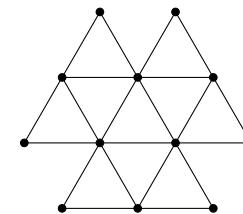
15. [정답. 160]

삼각형 ABC 에서 $\angle BAC = 90^\circ$, $\overline{AB} = 120$ 이다. 변 AB , BC 의 중점을 각각 M, N 이라 하고 삼각형 ABC 의 내심을 I 라 하자. 네 점 M, B, N, I 가 한 원 위에 있을 때 변 CA 의 길이를 구하여라.

16. [정답. 128]

단위 정삼각형 10개를 붙여서 만든 아래 그림과 같은 도형이 있다. 다음 조건을 만족하도록 이 도형의 12개의 각 점에 빨간색 또는 파란색으로 칠하는 경우의 수를 구하여라. (단, 회전하여 같은 것은 한가지로 센다.)

(조건) 세 꼭짓점이 모두 같은 색으로 색칠된 단위 정삼각형은 없다.



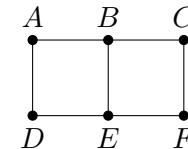
17. [정답. 75]

내심이 I 인 삼각형 ABC 의 세 변 AB, BC, CA 의 길이의 비가 $4 : 5 : 6$ 이다. 직선 AI 와 BI 가 삼각형 ABC 의 외접원과 만나는 점을 각각 $D(\neq A), E(\neq B)$ 라 하고 직선 DE 와 변 AC 의 교점을 K 라 하자. $\overline{IK} = 30$ 일 때, 변 BC 의 길이를 구하여라.

18. [정답. 588]

다음과 같이 7개의 변과 6개의 꼭짓점 A, B, C, D, E, F 로 이루어진 도형이 있다. 다음 조건을 만족하도록 각 꼭짓점에 1, 2, 3, 4 중 하나의 수를 적는 경우의 수를 구하여라.

(조건) 각 변의 양 끝점에 적힌 숫자의 합은 5가 아니다.



19. [정답. 552]

각각의 양의 정수 $2023, 2024, \dots, 4046$ 의 가장 큰 홀수인 약수들의 합을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

20. [정답. 112]

양의 실수 a, b, c 가 등식 $a^4 + b^4 + c^4 = 24$ 를 만족할 때, $3a^4 + 16abc$ 의 최댓값을 구하여라.