



제 26 회 2 차시험 (중등부)  
한국수학올림피아드  
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2012년 8월 19일 (오후); 제한시간 2시간 30분; 문항당 7점

5. 원  $O$ 에 내접하는 사각형  $ABCD$  ( $\overline{AB} > \overline{AD}$ )의 변  $AB$  위에  $\overline{AE} = \overline{AD}$  가 되도록 점  $E$ 를 택하고 직선  $AC$ 와  $DE$ 의 교점을  $F$ , 직선  $DE$ 와 원  $O$ 의 교점을  $K$  ( $\neq D$ ) 라 하자. 점  $C, F, E$ 를 지나는 원의 점  $E$ 에서의 접선과 직선  $AK$ 가 점  $L$ 에서 만난다고 할 때,  $\overline{AL} = \overline{AD}$  일 필요충분조건이  $\angle KCE = \angle ALE$  임을 보여라.
6. 3보다 큰 소수  $p$ 가 다음 조건을 만족한다.

$2^x - 1$  이  $p$ 의 배수가 되는 양의 정수  $x$  중 가장 작은 것이  $p - 1$  이다.

$p = 2k + 3$  이라 할 때 수열  $\{a_n\}$  을 식

$$a_i = a_{k+i} = 2^i \quad (1 \leq i \leq k), \quad a_{j+2k} = a_j a_{j+k} \quad (j \geq 1)$$

에 따라 귀납적으로 정의하자. 수열  $\{a_n\}$  에는  $p$ 로 나눈 나머지가 모두 다른  $2k$  개의 연속한 항이 존재함을 보여라.

7. 모든  $x_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ) 가 양수이고  $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  일 때,

$$\frac{(\sqrt{s_1x_1} + \sqrt{s_2x_2} + \sqrt{s_3x_3} + \sqrt{s_4x_4} + \sqrt{s_5x_5})^2}{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5}$$

의 최댓값을 구하여라. (단,  $s_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ )

8. 1 번부터  $n$  번까지  $n$  명의 학생이 있다. 1에서  $n$  까지의 정수가 각각 하나씩 적혀있는  $n$  장의 카드가 들어 있는 통에서 각자 카드를 한 장씩 뽑기로 한다. 두 사람이 서로 상대방의 번호가 적힌 카드를 뽑으면 그 두 사람을 짹이라고 하자. 짹이 하나도 생기지 않을 확률을  $p_n$  이라고 할 때 다음이 성립함을 보여라.

$$p_n - p_{n-1} = \begin{cases} 0, & n 은 홀수 \\ \frac{1}{(-2)^k k!}, & n = 2k \end{cases}$$