

2025년 5월 17일 ; 제한시간 2시간 30분

- A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
- B. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
- C. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.  
예를 들면, 답이 “7” 일 경우 “007” 이라고 기입하여야 합니다.
- D. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
- E. 문제 1 ~ 4 번은 각 4 점, 문제 17 ~ 20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

## 1. [정답. 4]

다음 조건을 만족하는 6 이하의 양의 정수  $a, b$ 의 순서쌍  $(a, b)$ 의 개수를 구하여라.

(조건) 세 정수  $a^2 - b^2$ ,  $8(a - b)$ ,  $4b$ 가 이등변삼각형의 세 변의 길이가 된다.

## 2. [정답. 78]

볼록사각형  $ABCD$ 의 네 변의 길이가 각각  $\overline{AB} = 9$ ,  $\overline{BC} = 12$ ,  $\overline{CD} = 13$ ,  $\overline{DA} = 4$ 이다.  $\angle ABC = 90^\circ$ 일 때, 사각형  $ABCD$ 의 넓이를 구하여라.

## 3. [정답. 78]

100 이하의 양의 정수  $a, b$ 가 다음 등식을 만족할 때, 가능한  $a$  중 가장 큰 값을 구하여라.

$$a^2 - a = 13(b^2 - b)$$

## 4. [정답. 48]

다음 조건을 만족하도록 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하여라.

(조건) 연속한 세 수의 합이 3의 배수이다.

## 5. [정답. 24]

식  $x^2 + y^2 = 1$ 을 만족하는 실수  $x, y$ 에 대하여  $-x^2 + 10xy + 23y^2$ 의 최댓값을 구하여라.

## 6. [정답. 254]

$N = 2025 \times 2023 \times 2021 \times \cdots \times 3 \times 1$ 이라 하자.  $5^m$ 이  $N$ 을 나누는 가장 큰 정수  $m$ 을 구하여라.

## 7. [정답. 728]

다음 조건을 만족하는 5 이하의 양의 정수  $a, b, c, d, e$ 의 순서쌍  $(a, b, c, d, e)$ 의 개수를 구하여라.

(조건)  $a + 1 \leq b + 2 \leq c + 3 \leq d + 4 \leq e + 5$

## 8. [정답. 512]

중심이  $O$ 인 원  $\omega$  외부의 한 점  $P$ 에서 원  $\omega$ 에 그은 두 접선이 원과 접하는 점을 각각  $A, B$ 라 하자. 점  $B$ 에서 직선  $AO$ 에 내린 수선의 발을  $H$ 라 하자. 직선  $OP$ 와  $AB$ 가 점  $C$ 에서 만나고,  $\overline{OA} = 10$ ,  $\overline{OC} = 6$ 이다. 삼각형  $AHP$ 의 넓이를  $S$ 라 할 때,  $6S$ 의 값을 구하여라.

## 9. [정답. 32]

다음 두 조건을 모두 만족하는 정수  $a, b, c, d$ 의 순서쌍  $(a, b, c, d)$ 의 개수를 구하여라.

(i)  $2b = a + c$ 이고,  $2c = b + d$ 이다.

(ii)  $a, b, c, d$  중 1 이상이고 5 이하인 것은 정확히 두 개이다.

## 10. [정답. 723]

세 자리 양의 정수  $n$ 의 일의 자릿수를  $a$ , 십의 자릿수를  $b$ , 백의 자릿수를  $c$ 라 하자.  $a, b, c$ 가 모두 양의 정수이고,  $n = (a - 1)! + (b - 1)! + (c - 1)!$ 을 만족할 때, 가능한  $n$  중 가장 큰 값을 구하여라. (단,  $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ 이고,  $0! = 1$ 이다.)

11. [정답. 34]

서로 다른 2 이상의 양의 정수  $a, b, c, d, e, f$ 가  $2025^4 = a^b \times c^d \times e^f$ 를 만족할 때,  $a+b+c+d+e+f$ 의 최솟값을 구하여라.

12. [정답. 24]

삼각형  $ABC$ 의 내심을  $I$ 라 하자.  $I$ 를 중심으로 하고 점  $A$ 를 지나는 원이 변  $BC$ 와 두 점  $X, Y$ 에서 만난다. (변  $BC$ 상에 네 점  $B, X, Y, C$ 가 순서대로 위치한다.)  $\overline{AB} = 30$ ,  $\overline{BC} = 42$ ,  $\overline{CA} = 36$ 일 때,  $\overline{XY}$ 의 값을 구하여라.

13. [정답. 511]

서로 다른 5 이하의 양의 정수  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ 에 대하여, 다음 식의 최댓값을  $S$ 라 하자.  $60S$ 의 값을 구하여라.

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \frac{a_4}{a_5} + \frac{a_5}{a_1}$$

14. [정답. 51]

다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수  $x, y, z$ 에 대하여,  $x + y + z$ 의 최솟값을 구하여라. (단,  $[a]$ 는  $a$ 를 넘지 않는 가장 큰 정수)

(i)  $y + z > x > y > z$

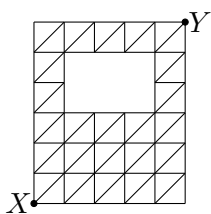
(ii)  $\frac{7^x}{64} - \left\lfloor \frac{7^x}{64} \right\rfloor = \frac{7^y}{64} - \left\lfloor \frac{7^y}{64} \right\rfloor = \frac{7^z}{64} - \left\lfloor \frac{7^z}{64} \right\rfloor$

15. [정답. 96]

삼각형  $ABC$ 의 무게중심을  $G$ 라 하자. 점  $G$ 를 지나는 직선이 변  $AC, BC$ 와 각각 점  $P, Q$ 에서 만나고, 직선  $AB$ 와 점  $R$ 에서 만난다.  $\overline{AR} > \overline{BR}$ 이고,  $\overline{PG} = 20$ ,  $\overline{GQ} = 24$ 일 때,  $\overline{RQ}$ 의 값을 구하여라.

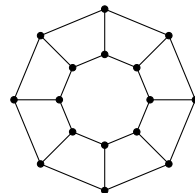
16. [정답. 106]

다음 그림에서 점  $X$ 에서 출발해서 선분을 따라 오른쪽으로 한 칸, 또는 위로 한 칸, 또는 오른쪽 위 방향의 대각선으로 한 칸 이동하는 것을 반복하여 점  $Y$ 에 도착한다.  $X$ 에서  $Y$ 로 이동하는 경우의 수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.



17. [정답. 649]

다음 그림의 각 점에 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중 하나를 적는데, 8개의 사각형 각각의 네 꼭짓점에 적힌 숫자의 합이 모두 4의 배수가 되도록 적는다. 이러한 방법의 수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.



18. [정답. 22]

다음 조건을 만족하는 8 이하인 서로 다른 양의 정수  $a_1, a_2, \dots, a_8$ 의 순서쌍  $(a_1, a_2, \dots, a_8)$ 의 개수를 구하여라.

(조건)  $\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_8}{8}$  이 정수이다.

19. [정답. 640]

선분  $AB$  위에 점  $P$ 가 있다. (단,  $\overline{PB} < \overline{PA}$ 이다.) 점  $P$ 에서 직선  $AB$ 에 수직인 직선이 선분  $AB$ 를 지름으로 하는 반원과 점  $Q$ 에서 만난다. 선분  $PQ$ 의  $Q$  쪽 연장선 위에 점  $R$ 을 잡자.  $\overline{PQ} = 16$ ,  $\overline{QR} = 18$ 이고, 호  $AQ$ 의 중점을  $M$ 이라 할 때, 직선  $MR$ 이 이 반원에 접한다고 한다.  $720 \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$ 의 값을 구하여라.

20. [정답. 192]

실수  $x_1, x_2, \dots, x_6$ 가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i)  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 6$

(ii)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 18$

$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ 의 최댓값을  $M$ 이라 할 때,  $12M$ 의 값을 구하여라.