

제 23 회 한국수학올림피아드 - 2 차 시험

고등부

2009년 8월 23일 (오전)

- 삼각형 ABC 의 내심을 I , 외심을 O 라 하자. 세 삼각형 BIC , CIA , AIC 의 외심을 각각 D, E, F 라 하고, 세 선분 DI, EI, FI 의 중점을 각각 P, Q, R 라 할 때, 삼각형 PQR 의 외심 M 은 선분 IO 의 중점임을 보여라.
- 임의의 양의 실수 a, b, c 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{a^3}{c(a^2 + bc)} + \frac{b^3}{a(b^2 + ca)} + \frac{c^3}{b(c^2 + ab)} \geq \frac{3}{2}$$

- 양의 정수 n 에 대해서 방정식

$$z^n = 8x^{2009} + 23y^{2009}$$

의 정수해가 $x = y = z = 0$ 밖에 없을 때, 이러한 n 의 최솟값을 구하여라.

- 학생 $n(n \geq 3)$ 명이 있다. 이들 중 두 명이 서로 아는 경우가 모두 s 가지 ($s \geq 1$), 세 명이 서로 다 아는 경우가 모두 t 가지 ($t \geq 1$)라 하자. 두 학생 x, y 에 대하여, 나머지 학생들 중 이 두 학생을 모두 아는 학생의 수를 $d(x, y)$ 라 할 때, 다음 부등식을 만족하는 서로 아는 세 명의 학생 u, v, w 가 있음을 보여라.

$$d(u, v) + d(v, w) + d(w, u) \geq \frac{9t}{s}$$

단, 학생 A 가 B 를 알면 B 도 A 를 안다고 가정하자.

제한 시간 2시간 30분

문항당 7점