

2013년 11월 10일 (오후); 제한시간 2시간 30분; 문항당 7점

5. 예각삼각형 ABC 의 각 A 가 각 B 보다 크다. 변 AB 의 중점을 D 라 하고, 점 A 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 E , 점 B 에서 변 CA 에 내린 수선의 발을 F 라 하자. 삼각형 DEF 의 외심을 O 라 할 때, 선분 BE 위의 점 J 가 $\angle ODC = \angle EAJ$ 를 만족한다. 두 선분 AJ 와 DC 의 교점이 삼각형 BDE 의 외접원 위에 있음을 보여라.

6. 다음 조건을 만족하는 함수 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 을 모두 구하여라.

임의의 양의 정수 m, n 에 대하여 $f(mn) = \text{lcm}(m, n) \cdot \text{gcd}(f(m), f(n))$ 이다.

(단, \mathbb{N} 은 양의 정수 전체의 집합이고, $\text{lcm}(m, n)$ 과 $\text{gcd}(m, n)$ 은 각각 m, n 의 최소공배수와 최대공약수이다.)

7. 함수 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 이 모든 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 다음 두 조건

(i) $f(n+1) > f(n)$

(ii) $f(f(n)) = 2n + 2$

를 만족할 때 $f(2013)$ 을 구하여라. (단, \mathbb{N} 은 양의 정수 전체의 집합이다.)

8. 정2013각형에서 모든 대각선들을 그었을 때, 정2013각형은 내부가 서로 만나지 않는 여러 가지 다각형 모양의 영역들로 나뉘어진다. 이 영역들 중 2013각형은 오직 하나 존재함을 보여라.