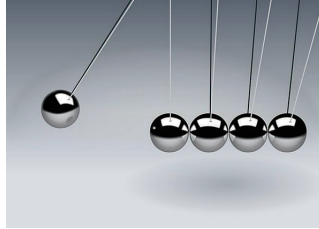


# TP Méthodes Numériques :

## *Simulation de collisions de billes*



Ce TP constitue une introduction à l'intégration en temps des équations différentielles à travers l'étude d'un modèle physique décrivant les impacts dans un alignement de billes. Il vous permettra de vous familiariser avec l'implémentation et l'utilisation de certains schémas (Euler explicite ou implicite) ainsi qu'avec la méthode de Cholesky pour la résolution de systèmes linéaires.

- **Contact** : guillaume.james@univ-grenoble-alpes.fr
- Rédiger un **compte-rendu** dactylographié (fichier pdf). Vous devez expliciter les méthodes employées, présenter et commenter avec soin les résultats obtenus. Nous conseillons d'utiliser le logiciel  $\text{\LaTeX}$ .
- **Travail en binôme**. Il n'y a qu'un seul rapport à rendre par binôme.
- **Remise du rapport**: le TP est à rendre au plus tard le **4 Mai 2020** sur TEIDE. **Déposer un seul fichier .pdf (pas d'archive)**.
- Programmes de calcul dans un langage au choix : **Python**, **Matlab**, **Scilab** ou **C**. Le code source n'est pas demandé, mais le rapport décrira les programmes sous forme de pseudo-code, comme dans l'exemple suivant :

---

**Algorithm 1** Schéma d'Euler explicite pour  $x' = \sin x$

---

**Entrées:** condition initiale  $x(0)$ , pas de temps  $h$

**Sorties:**  $(x_k)_{0 \leq k \leq k_{\max}}$  avec  $x_k \approx x(kh)$

```

 $x_0 \leftarrow x(0)$ 
for  $k = 0, \dots, k_{\max} - 1$  do
     $x_{k+1} \leftarrow x_k + h \sin x_k$ 
end for

```

---

## 1 Introduction

On considère un alignement de  $n$  billes sphériques en contact, soit dans une configuration où toutes les billes sont identiques, soit en alternant deux types de billes de masses différentes (dimensions ou matériaux différents) comme indiqué dans la figure 1. Nous allons étudier deux types de modèles (non linéaire

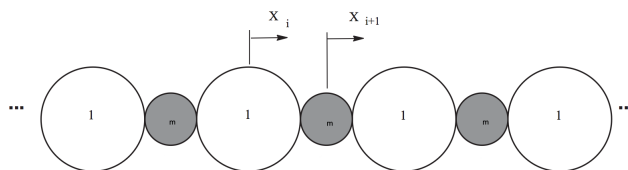


Figure 1: Système physique étudié dans le TP.

ou linéaire) qui décrivent la propagation d'impacts ou de vibrations dans ces systèmes.

Les sections 2 et 3 décrivent les questions à traiter pour le TP :

- Dans la section 2, on résout une équation différentielle non linéaire modélisant la collision de deux billes identiques, en utilisant le schéma d'Euler explicite.
- La section 3 est dédiée à l'utilisation du schéma d'Euler implicite. On résout une équation différentielle correspondant à une approximation linéaire des équations de la dynamique, en utilisant la méthode de Cholesky combinée au schéma implicite.

A la fin du sujet, un appendice détaille l'interprétation physique des modèles. Sa lecture n'est pas indispensable pour la réalisation du TP mais elle permet de mieux comprendre les modèles et le sens physique des résultats.

## 2 Simulation de la collision de deux billes par le schéma d'Euler explicite

On modélise la collision de deux billes identiques par le système :

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -(x_1 - x_2)_+^{3/2}, \quad (1)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = (x_1 - x_2)_+^{3/2}, \quad (2)$$

où  $x_i(t)$  est le déplacement de la  $i$ ème bille par rapport à une position de référence représentée dans la figure 1 (les billes sont tangentes lorsque  $x_1 = x_2$ ) et  $(a)_+ = \max(a, 0)$ . On note  $v_i = \frac{dx_i}{dt}$  les vitesses des billes.

**Question 1.** On définit l'énergie mécanique du système en fonction des déplacements et des vitesses des billes de la manière suivante :

$$H = \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} + \frac{2}{5} (x_1 - x_2)_+^{5/2}. \quad (3)$$

Montrer que pour toute solution de (1)-(2) on a  $\frac{dH}{dt} = 0$ .

**Remarque 2.1.** Dans le système réel, l'énergie mécanique décroît avec le temps. Ce phénomène pourrait être décrit par des modèles plus fins prenant en compte les forces de frottement et la dissipation d'énergie lors des déformations.

**Question 2.** *Expliciter la fonction*

$$F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4,$$

$$Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} F_1(Y) \\ F_2(Y) \\ F_3(Y) \\ F_4(Y) \end{pmatrix}$$

telle que le système (1)-(2) s'écrive comme une équation différentielle dans  $\mathbb{R}^4$  :

$$\frac{dY}{dt} = F(Y) \quad (4)$$

avec

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}.$$

**Question 3.** *Ecrire une fonction qui calcule par le schéma d'Euler explicite la solution de l'équation (4) pour une condition initiale  $Y(0) = Y^{(0)}$ , pour  $t \in [0, T]$ , avec un pas d'intégration  $h = T/N$ . Cette fonction prendra en argument le vecteur  $Y^{(0)} \in \mathbb{R}^4$ , le temps maximal d'intégration  $T$ , le nombre  $N$  de points de discrétisation en temps, et renverra une matrice de taille  $4 \times (N+1)$  contenant la solution numérique :*

$$\left[ Y^{(0)} \mid Y^{(1)} \mid \dots \mid Y^{(k)} \mid \dots \mid Y^{(N)} \right],$$

où  $Y^{(k)}$  désigne l'approximation de  $Y(kh)$  par le schéma.

**Question 4.** *Calculer la solution pour la condition initiale  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ ,  $v_1(0) = 1$ ,  $v_2(0) = 0$ ,  $t \in [0, 4]$  et différents pas de temps  $h = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ . Dans chaque cas, tracer les graphes des déplacements  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  (on pourra inclure les deux graphes dans une même figure) et faire de même pour les vitesses  $v_i(t)$ . Vérifier qu'au delà d'un certain temps, les vitesses prennent des valeurs constantes  $v_{i,\text{finale}}$  avec  $v_{2,\text{finale}} > v_1(0)$ . Ce résultat vous semble-t-il physiquement réaliste ? Qu'observez-vous pour  $v_{2,\text{finale}} - v_1(0)$  lorsque  $h \rightarrow 0$  ?*

### 3 Simulation de la collision de $n$ billes par un modèle linéarisé

On considère l'équation différentielle linéaire dans  $\mathbb{R}^n$  :

$$m_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2} = u_2 - u_1 + f_1(t), \quad (5)$$

$$m_i \frac{d^2 u_i}{dt^2} = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}, \quad 2 \leq i \leq n-1, \quad (6)$$

$$m_n \frac{d^2 u_n}{dt^2} = u_{n-1} - 2u_n, \quad (7)$$

avec  $m_{2p+1} = 1$  et  $m_{2p} = m$ , où  $m \in ]0, 1]$  désigne un paramètre. Les solutions  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$  représentent (dans une approximation

linéaire) les déplacements des billes dans une chaîne fortement comprimée aux deux extrémités (cf. appendice). La première bille est soumise à une force extérieure  $f_1(t)$  dont la valeur sera précisée plus loin.

On approche (5)-(6)-(7) par le schéma d'Euler implicite avec un pas de discrétisation  $h$ , pour  $t \in [0, T]$  avec  $T = Nh$ . On note  $u_i^{(k)}$  l'approximation numérique de  $u_i(kh)$ ,  $v_i^{(k)} = \frac{u_i^{(k)} - u_i^{(k-1)}}{h}$  celle de la vitesse  $\frac{du_i}{dt}(kh)$ , et  $u^{(k)} = (u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \dots, u_n^{(k)})^T \in \mathbb{R}^n$ . Le schéma s'écrit :

$$m_1 \frac{u_1^{(k+1)} - 2u_1^{(k)} + u_1^{(k-1)}}{h^2} = u_2^{(k+1)} - u_1^{(k+1)} + f_1((k+1)h), \quad (8)$$

pour  $2 \leq i \leq n-1$  :

$$m_i \frac{u_i^{(k+1)} - 2u_i^{(k)} + u_i^{(k-1)}}{h^2} = u_{i+1}^{(k+1)} - 2u_i^{(k+1)} + u_{i-1}^{(k+1)}, \quad (9)$$

$$m_n \frac{u_n^{(k+1)} - 2u_n^{(k)} + u_n^{(k-1)}}{h^2} = u_{n-1}^{(k+1)} - 2u_n^{(k+1)}. \quad (10)$$

On note  $M \in M_n(\mathbb{R})$  la matrice diagonale de coefficients  $m_1, \dots, m_n$ .

**Question 5.** Montrer que le schéma (8)-(9)-(10) s'écrit

$$A u^{(k+1)} = b^{(k)}, \quad (11)$$

où  $A = M + h^2 D$ ,  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice symétrique, tridiagonale qu'on explicitera, et  $b^{(k)} \in \mathbb{R}^n$  un vecteur à préciser.

**Question 6.** Montrer que la matrice  $A$  est symétrique définie positive.

On se propose de résoudre les systèmes linéaires (11) par la méthode de Cholesky. On rappelle le résultat :

**Théorème 3.1** (Cholesky). Soit  $A$  une matrice symétrique définie positive. Alors il existe une unique matrice triangulaire inférieure  $L$  telle que  $A = L L^T$  et  $L_{ii} > 0$  pour tout  $i$ .

Comme la matrice  $A$  de (11) est tridiagonale, seuls les coefficients diagonaux et sous-diagonaux de  $L$  sont non nuls. Ainsi, pour gagner en efficacité, on stockera la matrice  $L$  dans deux vecteurs (un de taille  $n$  pour les coefficients diagonaux et un de taille  $n-1$  pour les coefficients sous-diagonaux).

**Question 7.** Ecrire une fonction *factorise* qui prend en argument la diagonale et la sous-diagonale d'une matrice  $A$  symétrique définie positive et tridiagonale et qui renvoie deux vecteurs *linf* et *ldiag* contenant la sous-diagonale et la diagonale de la matrice  $L$ .

Une fois cette factorisation obtenue, la résolution d'un système  $A u = b$  se décompose comme suit :

$$L L^T u = b \Leftrightarrow \begin{cases} L y = b \\ L^T u = y. \end{cases} \quad (12)$$

**Question 8.** *Ecrire une fonction descente qui calcule la solution  $y$  du système  $Ly = b$ . Cette fonction prendra pour arguments les coefficients non nuls de  $L$  (`linf`, `ldiag`) et le vecteur  $b$ .*

**Question 9.** *Ecrire une fonction remonte qui calcule la solution  $u$  du système  $L^T u = y$ . Cette fonction prendra pour arguments les coefficients non nuls de  $L$  (`linf`, `ldiag`) et le vecteur  $y$ .*

*Pensez à tester les fonctions factorise, descente, remonte sur un système linéaire de votre choix dont la solution est connue.*

**Question 10.** *Ecrire un programme qui calcule la solution numérique  $(u^{(k)})_{1 \leq k \leq N}$  correspondant au schéma d'Euler implicite (11) à partir de valeurs données de  $u^{(0)}$  et  $u^{(-1)}$ . Ce programme débute par la factorisation de Cholesky de  $A$  avec la fonction `factorise`. Ensuite, on réalise une boucle dans laquelle  $u^{(k+1)}$  est déterminé à partir des valeurs de  $u^{(k)}$  et  $u^{(k-1)}$  calculées lors des itérations antérieures. Pour cela on fait appel aux fonctions `descente` et `remonte`.*

Dans les calculs qui suivent, le système est initialement au repos, i.e.  $u(0) = 0$ ,  $\frac{du}{dt}(0) = 0$ . Le schéma implicite est donc initialisé par  $u^{(0)} = u^{(-1)} = 0$ .

**Question 11.** *On fixe  $m = 1$  et  $n = 63$ . La force extérieure  $f_1(t)$  appliquée à la première bille est  $f_1(t) = t$  pour tout  $t \in [0, 1/2]$ ,  $f_1(t) = 1 - t$  pour  $t \in [1/2, 1]$  et  $f_1(t) = 0$  en dehors de l'intervalle  $[0, 1]$ . On résout numériquement l'équation différentielle pour  $t \in [0, T]$  avec  $T = 135$  et  $h = 10^{-3}$ . Tracer en fonction du temps  $t = kh$  les graphes des vitesses  $v_i^{(k)}$  pour les billes  $i = 1, 8, 32, 48, 63$ . Tracer le graphe donnant les vitesses  $v_i^{(k)}$  en fonction de  $i$  au temps  $t = kh = T/4$ .*

**Question 12.** *On fixe  $m = 0.6$  et  $n = 31$ . La première bille est soumise à une force extérieure  $f_1(t) = a(t) \sin(\omega t)$  avec  $a(t) = \tanh(t)$  pour tout  $t \geq 0$  ( $\tanh$  désigne la fonction tangente hyperbolique). Le paramètre  $\omega$  règle la fréquence du forçage. On résout numériquement l'équation différentielle pour  $t \in [0, T]$  avec  $T = 95$  et  $h = 5 \cdot 10^{-3}$ . Tracer en fonction de  $\omega \in [1.2, 2.4]$  le graphe de  $e(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \|v_n^{(\cdot)}\|_\infty / \|v_1^{(\cdot)}\|_\infty$ , i.e. le rapport des vitesses maximales de la dernière bille et de la première. Qu'observe-t-on ?*

## Appendice :

Cette section fournit des informations sur la façon dont le modèle linéaire (équations (5)-(6)-(7)) est obtenu. Considérons le système représenté dans la figure 1. Lorsqu'on néglige les différentes sources de dissipation d'énergie et sous une hypothèse de petites déformations, les forces d'interaction entre billes sont décrites par la théorie du contact de Hertz. A partir de la relation fondamentale de la dynamique, on obtient alors une équation différentielle pour les positions des billes que nous allons expliciter. On désigne par  $m_1, m_2, \dots, m_n$  les masses des billes, qui vérifient  $m_i = m_{i+2}$  pour le type de chaîne considérée ici. On considère un état d'équilibre du système dans lequel les billes sont tangentes et non comprimées, et on note  $x_i(t)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) le déplacement du centre de la  $i$ ème bille par rapport à sa position d'équilibre (voir figure 1). La force de contact exercée par la bille  $i + 1$  sur la bille  $i$  est alors  $-k(x_i - x_{i+1})_+^{3/2}$ , où on note  $(a)_+ = \max(a, 0)$  et la raideur  $k$  dépend des coefficients élastiques des

billes et de leurs rayons. L'exposant  $3/2$  a une origine géométrique (le rayon de la surface de contact varie comme la racine carrée de la compression des billes) et la partie positive  $(\cdot)_+$  provient de l'absence de force lorsque les billes ne sont pas en contact. On peut noter que les déformations des billes (et donc  $x_i - x_{i+1}$ ) sont typiquement très petites (de l'ordre de quelques microns), mais ce n'est pas le cas des forces de contact entre billes car les constantes de raideur  $k$  sont très grandes. A cause de la relation non linéaire entre déformations des billes et contraintes, les équations de la dynamique sont non linéaires et s'écrivent :

$$m_i \ddot{x}_i = k (x_{i-1} - x_i)_+^{3/2} - k (x_i - x_{i+1})_+^{3/2}, \quad (13)$$

où l'on note  $\ddot{x}_i = \frac{d^2 x_i}{dt^2}$ . Une variante de ce système s'obtient en présence d'une précompression de la chaîne, qui conduit à un nouvel état d'équilibre  $x_i = -\delta i$ , où  $\delta > 0$  dépend de la force de compression appliquée aux deux bouts de la chaîne. Pour étudier les fluctuations des billes autour de cet équilibre, il est pratique de poser  $x_i(t) = -\delta i + u_i(t)$ . Lorsque les billes restent toujours en contact, i.e.  $u_i - u_{i-1} < \delta$ , on obtient le système

$$m_i \ddot{u}_i = k (\delta + u_{i-1} - u_i)^{3/2} - k (\delta + u_i - u_{i+1})^{3/2}. \quad (14)$$

Lorsque la compression des billes fluctue très peu, i.e. lorsque  $|u_i - u_{i-1}| \ll \delta$ , on introduit une approximation linéaire du modèle :

$$m_i \ddot{u}_i = \tilde{k} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}), \quad (15)$$

où  $\tilde{k} = \frac{3}{2}k\delta^{1/2}$ . Ce modèle, qui s'interprète plus généralement comme une chaîne de masses reliées par des ressorts linéaires, apparaît dans de nombreux contextes en physique. En effectuant un choix d'échelles appropriées, on peut se ramener à des quantités sans dimension et fixer  $\tilde{k} = 1$ ,  $m_{2p+1} = 1$  comme dans le système (5)-(6)-(7).