# Probability Graph 07 Variable Elimination

Chen Gong

07 December 2019

在上一小节中，我们简单的介绍了推断的背景和分类，我们知道了大致有哪些推断的方法。推断的任务可以被我们介绍为：给定已知的 $p(x) = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$，我们需要求的有三个：

1. 边缘概率：$p(x_i) = \sum_{x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_p} p(x_1, x_2, \cdots, x_p)$。

2. 条件概率：$p(x_A|x_B)$，也就是在已知 $x_B$ 集合的情况下，如何求得 $x_A$ 集合的概率。

3. 最大后验概率 (MAP)：$\hat{x}_A = \arg\max_{x_A} p(x_A|x_B) = \arg\max_{x_A} \ p(x_A, x_B)$。

下面我们要介绍最简单的一个精确推断中中的东西，名为变量消除法 (Variable Elimination)。这是一种最简单的推断方法，也是我们学习推断法的核心概念之一。下面我们做详细的解释。

## 1 变量消除法 (Variable Elimination Algorithm)

假如我们有一个马氏链：


图 1: 一个马氏链的抽象模型

那么我们怎么来求 $p(d)$ 呢？根据公式我们可以得到：

$$p(d) = \sum_{a,b,c} p(a, b, c, d) \tag{1}$$

然后使用因子分解，我们可以得到：

$$p(d) = \sum_{a,b,c} p(a)p(b|a)p(c|b)p(d|c) \tag{2}$$

假定，$a, b, c, d$ 都为均匀离散的二值 random variable，所以 $a, b, c, d \in \{0, 1\}$。
所以，

$$\begin{aligned} p(d) =& p(a=0) \cdot p(b=0|a=0) \cdot p(c=0|b=0) \cdot p(d|c=0) \\ &+ p(a=1) \cdot p(b=0|a=1) \cdot p(c=0|b=0) \cdot p(d|c=0) \\ &+ \cdots \\ &+ p(a=1) \cdot p(b=1|a=1) \cdot p(c=1|b=1) \cdot p(d|c=1) \end{aligned} \tag{3}$$

实际上，这里有 8 个因子的积。那么我们来做进一步的分析，我们可以令

$$
\begin{aligned}
p(d) &= \sum_{a,b,c} p(a)p(b|a)p(c|b)p(d|c) \\
&= \sum_{b,c} p(c|b)p(d|c) \sum_{a} p(a)p(b|a)
\end{aligned} \tag{4}
$$

而 $p(a)p(b|a) = p(a,b)$，而 $\sum_a p(a)p(b|a) = p(b)$。我们可以将 $a$ 看成 $\phi(a)$ 这是一个和 $a$ 相关的函数，同理 $p(b|a)$ 看成 $\phi(a,b)$。所以，我们可以将 $\sum_a p(a)p(b|a)$ 看成 $\phi_a(b)$，这样就相当于一个关于 $b$ 的函数，并且是从 $a$ 中导出的。所以，我们做如下替换可得：

$$
\sum_{b,c} p(c|b)p(d|c) \sum_{a} p(a)p(b|a) = \sum_{b,c} p(c|b)p(d|c)\phi_a(b) = \sum_{c} p(d|c) \sum_{b} p(c|b)\phi_a(b) \tag{5}
$$

同理，我们将 $\sum_b p(c|b)\phi_a(b)$ 看成 $\phi_b(c)$。所以，原始将被改写为：

$$
\sum_{c} p(d|c)\phi_b(c) = \phi_c(d) \tag{6}
$$

这个算法的核心就是乘法对加法的分配律。那我们怎么类比到乘法的分配律呢？首先先来简单的回顾一下乘法的分配律，也就是 $ac + ab = a(b + c)$。那么我们仔细的来看看这个计算 $p(d)$ 的过程。这是不是就是一个不断的提取公因子，进行计算的过程？有没有觉得和分配律很像？先提取 $a$ 的部分，计算 $a$ 的部分，然后再依次的提取 $b$ 的部分，$c$ 的部分，最后剩下的就是 $d$ 的部分。那么，我们就可以把这么一长串的公式进行逐步化简了，这就是变量消元的思想。同样，在无向图中，我们也可以使用到马尔可夫网络中。

$$
p(a,b,c,d) = \frac{1}{z} \prod_{i=1}^{k} \phi_{c_i}(x_{c_i}) \tag{7}
$$

写成因子分解的形式就是 $p(x) = \prod_{x_i} \phi_i(x_i)$。这实际上就是分配律，一个变量一个变量的提取，然后进行分解计算。同时这种算法的缺点也非常的明显。

首先，就是重复计算的问题，无论计算那个变量的概率都要重复的计算一遍所有的概率。这个原因就会导致算法的计算难度非常的大。第二个就是计算次序的问题，我们举的例子还比较的简单，所以我们可以一眼就看出来，按 $a - b - c - d$ 的次序开始算。但是，实际上，并没有这么容易就得到计算的次序，而且计算次序不一样会导致计算的难度有很大的区别。而有数学家已经证明了，确定最优的计算顺序，本身就是一个 NP hard 的问题，非常难求解。