Exponential Family Distribution 02 Example

Chen Gong

23 October 2019

本节的主要内容是演示 Guassian Distribution 的指数族表达形式，将高斯函数的形式转换为指数族分布的通用表达形式。

指数族分布的基本形式可以表示为：

$$p(x|y) = h(x)exp\left\{\eta^T\varphi(x) - A(\eta)\right\} \tag{1}$$

η：参数向量 parameter，$\eta \in \mathbb{R}^p$。

$A(\eta)$：log partition function (配分函数)。

$\varphi(x)$：充分统计量 sufficient statistics magnitude。

1 思路分析

高斯分布的概率密度函数可表示为：

$$p(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\} \tag{2}$$

观察指数族分布的表达形式，高斯分布的参数向量是有关于 $\theta = (\mu,\sigma)$ 的。首先观察指数部分的第一部分 $\eta^T\varphi(x)$，只有这个部分和 x 相关。那么把这个部分搞定，系数就是参数矩阵，剩下的就是配分函数了，而且配分函数是一个关于 η 的函数。

2 将 Guassian Distribution 改写为指数族分布的形式

具体推导过程如下所示：

$$\begin{align}
p(x|\theta) =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{3}\\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2-2\mu x+\mu^2)\right\} \tag{4}\\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}+\frac{\mu x}{\sigma^2}-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{5}\\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left\{\begin{pmatrix}\frac{\mu}{\sigma^2}\\ -\frac{1}{2\sigma^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & x^2\end{pmatrix}-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{6}\\
=& exp\log\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left\{\begin{pmatrix}\frac{\mu}{\sigma^2}\\ -\frac{1}{2\sigma^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & x^2\end{pmatrix}-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{7}
\end{align}$$

$$=exp\left\{\begin{pmatrix}\frac{\mu}{\sigma^2}\\-\frac{1}{2\sigma^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & x^2\end{pmatrix}-\left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2}-\frac{1}{2}\log 2\pi\sigma\right)\right\} \tag{8}$$

令:

$$\eta=\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\mu}{\sigma^2}\\-\frac{1}{2\sigma^2}\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}\eta_1=\frac{\mu}{\sigma^2}\\\eta_2=-\frac{1}{2\sigma^2}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\mu=-\frac{\eta_1}{2\eta_2}\\\sigma^2=-\frac{1}{2\eta_2}\end{cases} \tag{9}$$

到了现在，我们离最终的胜利只差一步了，

$$\eta=\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{pmatrix}\quad\varphi(x)=\begin{pmatrix}x\\x^2\end{pmatrix} \tag{10}$$

$$A(\eta)=-\frac{\eta_1^2}{4\eta_2}+\frac{1}{2}\log(2\pi\cdot-\frac{1}{2\eta_2})=-\frac{\eta_1^2}{4\eta_2}+\frac{1}{2}\log(-\frac{\pi}{\eta_2}) \tag{11}$$

于是，Guassian Distribution 成功的被我们化成了指数族分布的形式 $exp\left\{\eta^T\varphi(x)-A(\eta)\right\}$。