Probability Graph 02 Bayesian Network

Chen Gong

24 November 2019

概率图模型中，图是用来表达的，将概率嵌入到了图中之后，使得表达变得非常的清晰明了。在我们的联合概率计算中，出现了一些问题：

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \prod_{i=1}^{N} p(x_i|x_{1:i-1}) \tag{1}$$

这样的计算维度太高了，所以我们引入了条件独立性，表达为 $X_A \perp X_B | X_C$。那么采用因子分解的方法我们可以将联合概率的计算进行分解为：

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \prod_{i=1}^{N} p(x_i|x_{pa\{i\}}) \tag{2}$$

其中，$pa\{i\}$ 表示为 x_i 的父亲节点。而概率图可以有效的表达条件独立性，直观性非常的强，我们接下来看看概率图中经典的三种结构。

1 概率图的三种基本结构

对于一个概率图，我们可以使用拓扑排序来直接获得，条件独立性的关系。如果存在一个关系由一个节点 x_i 指向另一个节点 x_j，我们可以记为 $p(x_j|x_i)$。我们现在需要定义一些规则来便于说明，对于一个概率图如下所示：

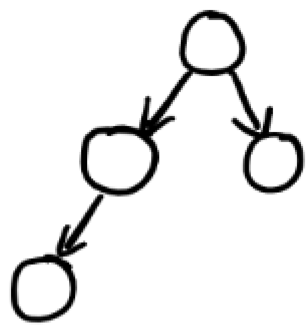

图 1: 基本概率图模型

对于一个箭头 $\longrightarrow$ 来说，箭头所在的方向称为 Head，另一端被称为 Tail。

1.1 Tail to Tail 结构

Tail to Tail 的模型结构图，如下图所示，由于 b 节点在 a 节点和 c 节点的 Tail 部分，所以被我们称为 Tail to Tail 结构。

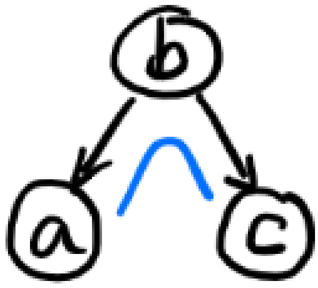

图 2: Tail to Tail 结构示意图

我们使用因子分析来计算联合概率可以得到：

$$p(a,b,c)=p(b)p(a|b)p(c|b) \tag{3}$$

使用链式法则，同样我们也可以得到：

$$p(a,b,c)=p(b)p(a|b)p(c|b,a) \tag{4}$$

对比一下公式 (3) 和公式 (4)，我们可以对比得到：

$$p(c|b)=p(c|b,a) \tag{5}$$

实际上，这里就已经就可以看出 $a\perp c$ 了，因为 a 的条件增不增加都不会改变 c 的概率，所以 a 和 c 之间是相互独立的。可能有的同学还是觉得不好理解，那么我们做进一步的分析：

$$p(c|b)p(a|b)=p(c|b,a)p(a|b)=p(a,c|b) \tag{6}$$

$$\Rightarrow p(c|b)p(a|b)=p(a,c|b) \tag{7}$$

这样，我们就可以看得很明白了。这就是条件独立性，在 a 的条件下，b 和 c 是独立的。实际在概率图中就已经蕴含这个分解了，只看图我们就可以看到这个性质了，这就是图的直观性，条件独立性和图是一样的。那么 $a\perp c$ 可以被我们看为：给定 b 的情况下，如果 b 被观测到，那么 a 和 c 之间是阻塞的，也就是相互独立。

1.2 Head to Tail 结构

图 3: Head to Tail 结构示意图

其实，和 Head to Head 结构的分析基本是上一模一样的，我们可以得到 $a\perp c|b$。也就是给定 b 的条件下，a 和 c 之间是条件独立的。也就是 b 被观测的条件下，路径被阻塞。

1.3 Head to Head 结构

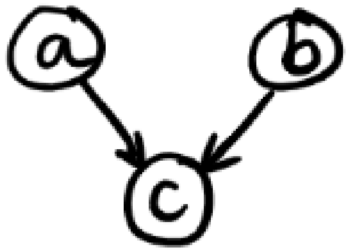

图 4: Head to Head 结构示意图

在默认情况下 $a \perp b$，也就是若 c 被观测，a 和 b 之间是有关系的。我们可以推导一下默认情况。

$$\begin{aligned} p(a,b,c) =& p(a)p(b)p(c|a,b) \\ =& p(a)p(b|a)p(c|a,b) \end{aligned} \tag{8}$$

我们可以得出 $p(b) = p(b|a)$，也就是 $a \perp b$。