Math Basis 04

Chen Gong

21 October 2019

本节主要的内容是描述琴生不等式 (Jensen's Inequality)。有关琴生不等式的描述为，如果函数 $f(x)$ 为凸函数 (convex function)，那么有 $\mathbb{E}[f(x)] \geq f(\mathbb{E}[x])$。

1 Jensen's Inequality 中的证明

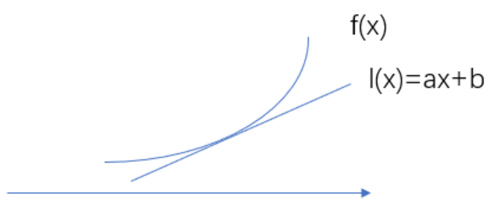

图 1: 函数和它在某点的切线的表达式

设切点的横坐标为 $\mathbb{E}[x]$，那么 $f(\mathbb{E}[x]) = L(x) = a\mathbb{E}[x]+b$。又因为 function 为 convex function。那么很显然，对于 $\forall x$ 都有 $f(x) \geq L(x)$。然后，我们同时对不等式两边求期望，可以得到 $\mathbb{E}[f(x)] \geq \mathbb{E}[L(x)]$。那么我们进行如下的推导：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(x)] \geq & \mathbb{E}[L(x)] \\ = & \mathbb{E}[a\mathbb{E}[x] + b] \\ = & a\mathbb{E}[x] + b \\ = & f(\mathbb{E}[x]) \end{aligned} \tag{1}$$

可以很简单的得出结论。

2 Jensen's Inequality 的推广

假设 c 是 $[a, b]$ 之间的任意一点，我们可以很自然的描述为 $c = ta+(1-t)b$。我们可以使用 Jensen's Inequality 的推广形式。这个不等式的证明很简单，结论也很直觉性 (肯定是这样的)，此处不再做更多的描述。Jensen's Inequality 将在后续相关的知识中大量的使用，故此处暂做补充。

$$tf(a) + (1-t)f(b) \geq f(ta + (1-t)b) \tag{2}$$