

Kalman Filter 02 Model Construction & Solution

Chen Gong

17 January 2020

Filtering 问题公式化的表达即为 $P(z_t|x_1, x_2, \dots, x_t)$ ，是一种 On-Line Learning 的思路，随着越来越多的数据不断的被观测到，隐藏状态得到不断的更新。也就是在观察变量序列 $\{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ 下，求得隐变量状态 z_t 的分布。模型表达为如下所示：

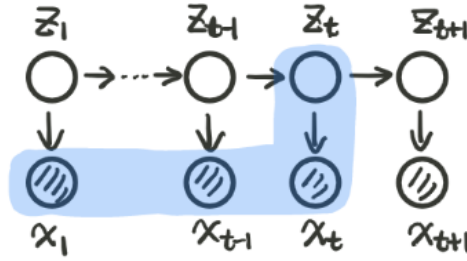


图 1: 模型基本拓扑结构

首先我们回顾一下前向算法的求解思路。在这个算法中首先定义了中间变量为：

$$\alpha_t(i) = P(x_1, x_2, \dots, x_t, z_t = q_i) \quad (1)$$

而我们下一步则是要寻找 $\alpha_{t+1}(i)$ 和 $\alpha_t(i)$ 之间的关系。所以，可以按 $\alpha_1(i), \alpha_2(i), \dots, \alpha_t(i)$ 的顺序依次推断得到 $\alpha_t(i)$ ，从而得到根据当前的模型推断出观测序列的分布 $P(O|\lambda)$ 。

1 Filtering 问题思路

我们还是采用的前向算法的思路：

$$\begin{aligned} P(z_t|x_1, x_2, \dots, x_t) &= \frac{P(z_t, x_1, x_2, \dots, x_t)}{P(x_1, x_2, \dots, x_t)} \\ &\propto P(z_t, x_1, x_2, \dots, x_t) \\ &= \underbrace{P(x_t|x_1, x_2, \dots, x_{t-1}, z_t)}_{P(x_t|z_t)} P(x_1, x_2, \dots, x_{t-1}, z_t) \\ &= P(x_t|z_t) \underbrace{P(z_t|x_1, x_2, \dots, x_{t-1})}_{\text{prediction}} \underbrace{P(x_1, x_2, \dots, x_{t-1})}_{\text{const}} \\ &\propto P(x_t|z_t) P(z_t|x_1, x_2, \dots, x_{t-1}) \end{aligned} \quad (2)$$

很显然通过如上的推导，我们将 Filtering 问题回归到了一个 Prediction 的问题。那么这个 Prediction 的问题，如何进一步求解呢？下一步，我们对 Prediction 的部分进行推导。

$$\begin{aligned} P(z_t|x_1, x_2, \dots, x_{t-1}) &= \int_{z_{t-1}} P(z_t, z_{t-1}|x_1, x_2, \dots, x_{t-1}) dz_{t-1} \\ &= \int_{z_{t-1}} \underbrace{P(z_t|z_{t-1}, x_1, x_2, \dots, x_{t-1})}_{P(z_t|z_{t-1})} \underbrace{P(z_{t-1}|x_1, x_2, \dots, x_{t-1})}_{\text{Filtering}} dz_{t-1} \end{aligned} \quad (3)$$

通知上述的推导，我们又回到了一个 Filtering 的问题，那么这样我们形成了一个递归的表达。那么，我们可以总结为在一个 Filtering 问题中，我们通过一个 Prediction 问题，来构建形成了一个回归。那么，下面我将详细的说明一下求解的过程：

$$\begin{aligned} t = 1 & \begin{cases} P(z_1|x_1) & \text{update} \\ p(z_2|x_1) & \text{prediction} \end{cases} \\ t = 2 & \begin{cases} P(z_2|x_1, x_2) & \text{update} \\ p(z_3|x_1, x_2) & \text{prediction} \end{cases} \\ \dots & \dots \\ t = T & \begin{cases} P(z_T|x_1, x_2, \dots, x_T) & \text{update} \\ p(z_{T+1}|x_1, x_2, \dots, x_{T-1}) & \text{prediction} \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

很显然，我们可以不断的往里面添加数据来更新隐变量状态 z_t 。

2 Filtering 问题求解具体分析

首先，我们需要明确一个问题，Gaussian Distribution 是一个具有非常好的性质的**自共轭分布**。通俗的讲就是，Gaussian 分布的边缘分布，条件分布，联合概率分布等都是符合高斯分布的。首位，我先回忆一下在 Math Basis 那小节中，总结的线性高斯模型中，已知条件高斯分布，求变量高斯分布的公式：

$$P(X) = \mathcal{N}(X|\mu, \Lambda^{-1}) \quad (5)$$

$$P(Y|X) = \mathcal{N}(X|AX + b, L^{-1}) \quad (6)$$

$$P(Y) = \mathcal{N}(Y|AX + b, L^{-1} + A^{-1}\Lambda A) \quad (7)$$

$$P(X|Y) = \mathcal{N}(\Sigma\{A^T L(y - b) + \Lambda\mu\}, \Sigma) \quad \Sigma = (\Lambda + A^T L A)^{-1} \quad (8)$$

从上小节中我们分析了 Filtering 问题的推导过程，我们可以看到 Filtering 问题可以被大致分成两个部分，也就是 Prediction 和 Update 两个部分。上一小节中我描述了大致的求解思路，那么这一小节我们将详细的描述怎么计算。

2.1 Prediction

预测问题被我们描述为， $P(z_t|x_1, x_2, \dots, x_{t-1})$ ，那下面我们来进行分析怎么求。

$$P(z_t|x_1, x_2, \dots, x_{t-1}) = \int_{z_{t-1}} P(z_t|z_{t-1})P(z_{t-1}|x_1, x_2, \dots, x_{t-1})dz_{t-1} \quad (9)$$

根据 Gaussian Distribution 的自共轭性, 所以 $P(z_t|x_1, x_2, \dots, x_{t-1})$ 一定是一个 Gaussian Distribution。事实上 x_1, x_2, \dots, x_{t-1} 中所有的信息都是已知的。为了方便表达 $P(z_t|x_1, x_2, \dots, x_{t-1}) \sim P(z_t)$ 。

那么, 第 $t-1$ 时刻的假设 $P(z_{t-1}|x_1, x_2, \dots, x_{t-1}) \sim \mathcal{N}(\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1})$ 。那么, 第 t 时刻的分布 $P(z_t|x_1, x_2, \dots, x_t) \sim \mathcal{N}(\mu_t^*, \Sigma_t^*)$ 。并且, 根据 Gaussian Distribution 的自共轭性, 我们可以令 $P(z_t|z_{t-1}) \sim \mathcal{N}(z_t|Az_{t-1} + B, Q)$ 。令 $x = z_{t-1}, y = z_t$, 代公式 (5)-(7), 可以计算出:

$$\begin{cases} \mu_t^* = A\mu_{t-1} + B \\ \Sigma_t^* = Q + A\Sigma_{t-1}A^T \end{cases} \quad (10)$$

2.2 Update

然而, 对于 update 问题, 我们的目标是求解:

$$P(z_t|x_1, x_2, \dots, x_t) \propto P(x_t|z_t) \cdot P(z_t|x_1, x_2, \dots, x_{t-1}) \quad (11)$$

在这个问题中 x_1, x_2, \dots, x_{t-1} 都是已知的, 而 x_t 是未知的。所以, 公式 (11) 可以被改写为:

$$\underbrace{P(z_t|x_1, x_2, \dots, x_t)}_{P(X|Y)} \propto \underbrace{P(x_t|z_t)}_{P(Y|X)} \cdot \underbrace{P(z_t|x_1, x_2, \dots, x_{t-1})}_{P(X)} \quad (12)$$

同样利用 Gaussian Distribution 的自共轭性, 我们可以将公式改写为:

$$\mathcal{N}(\mu_t, \Sigma_t) \propto \mathcal{N}(x_t|Cz_t + D, R) \cdot \mathcal{N}(\mu_t^*, \Sigma_t^*) \quad (13)$$

所以, 利用公式 (5,6,8) 我们可以求解出 μ_t 和 Σ_t 。根据公式 (8), 我们其实可以看到这个求解过程实际上非常的复杂, 实际上也是一个代公式的过程。我们就不再做过多的描述了 (实际上把公式一代入, 把符号换一下就可以了)。

所以将第一小节和第二小节结合起来一下, 第一小节给出了求解的主体思路, 第二小节中给出了每一步具体如何实现。并且利用了 Gaussian Linear Model 的计算公式来进行求解。