Instituto Tecnológico de Costa Rica
Ingeniería en Computadores
CE-3102: Análisis Numéricos para Ingeniería
Prof.: Juan Pablo Soto Quirós

Puntaje Total: 100 puntos
Fecha: 2 de Noviembre
Semestre: II - 2020
Tiempo: 2 horas y 30 minutos

**PRIMER EXAMEN PARCIAL**

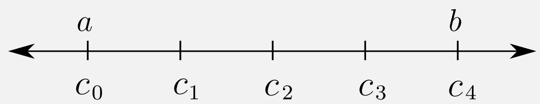
# Instrucciones Generales

- Este segundo examen parcial estará activo el **lunes 2 de agosto, de 1:00 pm hasta las 5:00 pm**. No se aceptarán exámenes enviados después de las 5:00 pm.
- Este examen contiene 4 preguntas: 2 preguntas teóricas y 2 preguntas de programación.
- **Preguntas Teórica**
  - En esta parte deben presentar todos los pasos necesarios o procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma ordenada y clara para resolver el examen.
  - Esta parte debe ser resuelto en hojas de color blanco o con renglones, utilizando un lápiz o un lapicero que marque bien oscuro. No se calificará el examen si está desarrollado en algún editor computacional (por ejemplo, Word, Latex, entre otros).
  - Luego, las hojas deberán ser escaneadas en un solo archivo con extensión `pdf`, el cual puede tener varias páginas. Para esto puede utilizar alguna de las siguientes aplicaciones para *smartphone*: Adobe Scan, CamScanner, Scanbot, o alguna similar. El nombre del archivo debe seguir el siguiente formato: `Apellido1_Nombre_e1_teorico.pdf`. No se calificará el esta parte si no viene en un solo archivo con extensión `pdf`.
- **Preguntas de Programación**
  - Todas las implementaciones computacionales se den realizar en un único lenguaje de programación: GNU Octave o en Python. **No se calificará esta parte del examen si se realizan en otro lenguaje de programación o si utiliza dos lenguajes de programación distintos.**
  - Las implementaciones computacionales la deben realizar en Jupyter, en un archivo con nombre `Apellido1_Nombre_e1_programacion.ipynb`.
  - Este archivo debe tener al inicio su nombre completo y el número de carnet. Cada una de las preguntas de programación deben estar bien identidicadas en dicho documento.
- Deben enviar los dos archivos al correo `jusoto@tec.ac.cr`. El asunto del correo debe seguir el siguiente formato: `Apellido1 - Apellido2 - Nombre - ANPI - Parcial 1`.

# Preguntas

## Preguntas de Programación

1. **[Valor 35 puntos]:** Esta pregunta consiste en implementar una variación del método de la bisección, conocida como el **método modificado de la bisección**.

> **Método modificado de la bisección:** El método modificado de la bisección para resolver la ecuación $f(x) = 0$, en un intervalo $[a, b]$, consiste en lo siguiente. Divida el intervalo $[a, b]$ en **n** subintervalo de igual tamaño. Un ejemplo gráfico se muestra en la siguiente figura, para el caso particular $n = 4$.
>
> 
> 
>
> i) Para $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$, si $f(c_k)f(c_{k+1}) > 0$, entonces el cero de $f$ se **<u>no se encuentra</u>** en el intervalo $[c_k, c_{k+1}]$.
>
> ii) Para $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$, si $f(c_k)f(c_{k+1}) < 0$, entonces el cero de $f$ **<u>se encuentra</u>** en el intervalo $[c_k, c_{k+1}]$. En este caso, se selecciona **<u>este intervalo</u>** $[c_k, c_{k+1}]$ que cumple dicha condición como el nuevo intervalo para aproximar la solución. La aproximación es dada por $\widetilde{x} = \dfrac{c_k + c_{k+1}}{2}$.
>
> Luego, se repiten los pasos i) y ii) con el intervalo $[c_k, c_{k+1}]$ obtenido en ii), hasta llegar a una cantidad de iteraciones máximas. Aquí, $c_k = a + k \cdot h$, para $k = 0, 1, 2, ..., n$, donde $h = \dfrac{b - a}{n}$.

Implemente **<u>una script</u>** para encontrar un cero de la función

$$f(x) = \sin^2(x) - x^2 + 1,$$

utilizando una tolerancia de $10^{-10}$, mediante el **método modificado de la bisección**, con $\texttt{n} = 10$. Para esto, elabore la función `x=metodo_biseccion_mod(a,b,n,tol)`, donde `a, b` son los valores del intervalo, `tol` es una tolerancia dada para el criterio de parada, `n` es la cantidad de sub-intervalos en los que se dividirá el intervalo `[a, b]` y `x` es la aproximación a la solución de la ecuación. La función se detendrá cuando se cumpla la condición $|\texttt{f1}(\texttt{x}^{(\texttt{i})})| < tol$, donde $\texttt{x}^{(\texttt{i})}$ es la $i-$ésima iteración del método modificado de la bisección.

**Nota 1**: La función debe verificar que existe un cero en el intervalo seleccionado.

**Nota 2:** La función $f(x)$ tiene un cero en el intervalo $[0, 2]$.

2. **[Valor 25 puntos]:** Implemente en un **una script** el **método de Gauss-Seidel** para resolver el sistema de ecuaciones $Ax = d$, donde $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ y $d \in \mathbb{R}^{100}$ tal que

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & & & \\ 1 & 8 & 1 & & \\ & 1 & 8 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad y \quad d = \begin{bmatrix} -9 \\ -10 \\ -10 \\ \vdots \\ -10 \\ -10 \\ -9 \end{bmatrix}$$

<u>Nota</u>: **La implementación debe realizarse como se explicó en clases. En el caso de no seguir el algoritmo explicado en clases, entonces el puntaje obtenido en esta pregunta será de 0**.

## Preguntas Teóricas

1. **[20 puntos]** Demuestre que la función

$$g(x) = \frac{\ln(10x-1) - \ln(10)}{8} - \frac{(10x-1)^2}{800} + 2$$

tiene un único punto fijo en el intervalo $[0.5, 2]$.

2. **[20 puntos]** Considere la matriz $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y el vector $\mathbf{b} = (4,7)^t$. Usando 3 iteraciones del método del gradiente conjugado no lineal, aproxime una solución del problema de optimización

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} \left( \frac{1}{2}\mathbf{x}^t A\mathbf{x} - \mathbf{b}^t\mathbf{x} \right),$$

usando un valor inicial de $\mathbf{x}^{(0)} = (0.5, 0.5)^t$, $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ y $\beta_k = \dfrac{\|\mathbf{g}^{(k+1)}\|_2^2}{\|\mathbf{g}^{(k)}\|_2^2}$.