Preguntas Teóricas Randy Martínez

1. Considere la función continua f definido por

$$f(x) = \frac{1 - 2^{0.5x+1}}{5}$$

a) Calcule el polinomio de interpolación $P_4(x)$ que aproxime la función f en el intervalo utilizando como conjunto soporte $S_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

Nota: No es necesario simplificar el polinomio.

b) Calcule una cota de error del polinomio de interpolación $P_2(x)$ en el intervalo $[0, 1]$ utilizando el conjunto $S_2 = \{0, 0.5, 1\}$

Nota: No debe calcular el polinomio de interpolación.

Conjunto Soporte $\Rightarrow S_I = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

Sustituyendo en $f = \dfrac{1 - 2^{0.5x+1}}{5}$

se obtienen los valores:

$f(0) = -\dfrac{1}{5}$; $f(2) = -\dfrac{3}{5}$; $f(4) = -\dfrac{7}{5}$;

$f(6) = -3$; $f(8) = \dfrac{-31}{5}$

Nota: estos se valores se obtuvieron mediante el uso de la calculadora

$\therefore$ Los puntos son

$$\left\{ \left(0, \frac{-1}{5}\right), \left(2, \frac{-3}{5}\right), \left(4, \frac{-7}{5}\right), (6, -3), \left(8, \frac{-31}{5}\right) \right\}$$

a) Utilizando el Métado de Lagrange

$$\Longrightarrow P_4(x) = \sum_{K=0}^{4} y_K \cdot L_K(x)$$

$$\Longrightarrow P_4(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x) + y_4 L_3(x)$$

$$\Longrightarrow P_4(x) = \frac{-1}{5} \cdot L_0(x) + \frac{-3}{5} L_1(x) + -\frac{7}{5} L_2(x) + -3 L_3(x) + \frac{-31}{5} L_4(x)$$

calculo de $L_n(x)$

$$\Longrightarrow L_n(x) = \frac{x - x_j}{x_K - x_j}$$

$$\Longrightarrow L_0(x) = \frac{x-2}{0-2} \cdot \frac{x-4}{0-4} = \frac{(x-2)(x-4)}{8}$$

$$\Rightarrow L_1(x) = \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-4}{1-4} = \frac{(x-2)(x-4)}{3}$$

$$\Rightarrow L_2(x) = \frac{x-4}{2-4} \cdot \frac{x-6}{2-6} = \frac{(x-4)(x-6)}{8}$$

$$\Rightarrow L_3(x) = \frac{x-6}{3-6} \cdot \frac{x-8}{3-8} = \frac{(x-6)(x-8)}{15}$$

$$\Rightarrow L_4(x) = \frac{x-8}{4-8} \cdot \frac{x-0}{4-0} = \frac{(x-8)(x)}{-16}$$

por lo tanto

$$\Rightarrow P_4(x) = \frac{-1}{5}\left(\frac{(x-2)(x-4)}{8}\right) + \frac{-3}{5}\left(\frac{(x-2)(x-4)}{3}\right) + \frac{-7}{5}\left(\frac{(x-4)(x-6)}{8}\right) +$$

$$+ -3\left(\frac{(x-6)(x-8)}{15}\right) + \frac{-31}{5}\left(\frac{(x-8)(x)}{-16}\right)$$

//

b) Cota de Error de $P_2(x)$ en el intervalo $[0, 1]$ utilizando $S_2 = \{0, 0.5, 1\}$

Sustituyendo S_2 en $f = \dfrac{1 - 2^{0.5(x)+1}}{5}$

$f(0) = -\frac{1}{5}$; $f(0,5) = -0,27$; $f(1) = -0,36$

Nota: estos valores se obtuvieron mediante el uso de la calculadora.

$\therefore \left\{ \left(0, -\frac{1}{5}\right), (0.5, -0.27), (1, -0.36) \right\}$

el calculo de la Cota de Error ;

$$\left| f(x) - P_2(x) \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \alpha_{max} \cdot \beta_{max}$$

Calculando α_{max}

$$\Rightarrow \alpha_{max} = \max_{x \in [0,1]} \left| f^{(3)}(x) \right|$$

$$\Rightarrow \alpha_{max} = \max_{x \in [0,1]} \left| \left(\frac{1 - 2^{0.5x+1}}{5} \right)^{(4)} \right|$$

$$f = \frac{1 - 2^{0.5x+1}}{5}$$

$$f^{(3)} = \frac{-2^{0.5x+1} \cdot \ln^3(2)}{40}$$

$$f^{(1)} = \frac{-2^{0.5x+1} \cdot \ln(2)}{10}$$

Nota: estas derivadas se obtuvieron mediante el cálculo en Octave

$$f^{(2)} = \frac{-2^{0.5x+1} \cdot \ln^2(2)}{20}$$

$$\Rightarrow \max_{x\in[0,1]} \left| \frac{\ln^3(2)\cdot -2^{0.5x+1}}{40} \right|$$

$$\Rightarrow \max_{x\in[0,1]} \frac{\ln^3(2)}{40} \left| -2^{0.5x+1} \right|$$

$$\Rightarrow \max_{x\in[0,1]} \left(\frac{\ln^3(2)}{40} \cdot 2^{0.5x+1} \right)$$

Hallando los puntos críticos de $f^{(4)}$

$$0 = \frac{\ln^3(2)}{40} \cdot 2^{0.5x+1}$$

$\hookrightarrow$ no tiene puntos críticos.

Nota: se concluye esto gracias a los calculos en Octave.

$$\Rightarrow \max_{x \in [0,1]} \frac{\ln^3(2)}{40} = 0.0083256 \rightarrow \text{constante}$$

$$\therefore \alpha_{max} = 0.0083256$$

Calculando β_{max}

$$\Rightarrow \beta_{max} = \max_{x \in [0,1]} |(x+0)(x-0.5)(x-1)|$$

$$\Rightarrow \beta_{max} = \max_{x \in [0,1]} |x(x^2 - x - 0.5x + 0.5)|$$

$$\Rightarrow \beta_{max} = \max_{x \in [0,1]} |x^3 - x^2 - 0.5x^2 + 0.5x|$$

$$\Rightarrow \beta_{max} = \max_{x \in [0,1]} |x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 0.5x|$$

derivando el polinomio $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 0.5x$

$(1) = 3x^2 - 3x + 0.5$

$(2) = 6x - 3$

$(3) = 6 \longrightarrow$ constante

$\Rightarrow \beta max = \max\limits_{x \in [0,1]} |6| = 6$

Evaluando $[0,1]$, los extremos, en

$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 0.5x$

$f(0) = 0$

$f(1) = 0$

Nota. estos cálculos se obtuvieron en Octave.

$\therefore \beta máx = \underline{\underline{6}}$

Por lo tanto:

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \alpha_{max} \cdot \beta_{max}$$

como $\alpha_{max} = 0.0083256$

y

$\beta_{max} = 6$,

además $n = 3$,

entonces

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{1}{(3+1)!} \cdot 0.0083256 \cdot 6$$

$$|f(x) - P_2(x)| \leq 0.00020814$$

Randy Martínez (11)

2. Considere la función $f(x) = e^x$

a) Aproxime el valor de la integral $\int_0^1 f(x)\,dx$, usando la regla compuesta de Simpson con 7 puntos

b) ¿En cuántos subintervalor se debe dividir el intervalo $[0,1]$ para aproximar la integral $\int_0^1 f(x)\,dx$ usando la regla compuesta del trapecio, tal que su error sea menor a 10^{-8}?

a) $\int_0^1 f(x)\, dx$ con $f(x) = e^x$, $a = 0$, $b = 1$

Número de puntos $\Rightarrow N = 7$

$$h = \frac{b-a}{N-1} = \frac{1-0}{7-1} = \frac{1}{6} = 0.166$$

Cálculo de la integral

$$\Rightarrow I = \int_0^1 e^x \, dx$$

tabla de valores de 'x'

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1

Términos índice par

$$\Rightarrow \sum f(2i) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \sum f(2i) = e^{1/3} + e^{2/3}$$

Términos índice Impar

$$\Rightarrow \sum (2i-1) = f\left(\frac{1}{6}\right) + f\left(1/2\right) + f\left(5/6\right)$$

$$\Rightarrow \sum (2i-1) = e^{1/6} + e^{1/2} + e^{5/6}$$

$$\Rightarrow I = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\cdot\sum_{par} + 4\cdot\sum_{impar} + f(x_n) \right]$$

$$\Rightarrow I = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{1}}\left[e^0 + 2(e^{1/3} + e^{2/3}) + 4(e^{1/6} + e^{1/2} + e^{5/6}) + e^1 \right]$$

$$\Rightarrow I = \underline{\underline{1.7182}}$$

<u>Nota</u>: Este cálculo se obtuvo mediante calculadora.

b) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^x \quad |I - T_{TC}| \leq \frac{(b-a)}{12} \cdot h^2 \cdot d_{max}$

como $f(x) = e^x \Leftrightarrow \underline{\underline{f^{(n)} = e^x}}$

$\Rightarrow d_{max} = \max_{x \in [0,1]} |f''(x)|$

$\Rightarrow d_{max} = \max_{x \in [0,1]} |e^1|$

Error

$\Rightarrow |I - T_{TC}| \leq \frac{(1-0)}{12} \cdot \left[\frac{(1-0)}{N-1}\right]^2 \cdot e^1$

$\Rightarrow 10^{-8} \leq \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{(U-1)^2} \cdot e^1$

16

$$\Rightarrow 10^{-8} \leq \frac{e^{1}}{12(N-1)^{2}}$$

$$\Rightarrow (N-1)^{2} = \frac{e^{1}}{12 \cdot 10^{-8}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{N^{2} - 2N + 1 = \frac{e^{1}}{12 \cdot 10^{-8}}}_{\text{ecuación}}$$

Nota: Este cálculo se desarrolló por medio de Octave.

$$\Rightarrow \underline{N = 4761}$$

estos serían la cantidad de puntos.

Por lo tanto la cantidad de intervalos sería 4760.