Preguntas Teóricas

Randy A. Martinez

1. Demuestre que la función

$$g(x) = \frac{\ln(10x-1) - \ln(10)}{8} - \frac{(10x-1)^2 + 2}{800}$$

tiene un único punto fijo en el intervalo $[0.5, 2]$

a) aplicando el Teorema de Brouwer para demostrar la existencia

$$\Rightarrow g(x) = \frac{\ln(10x-1)}{8} - \frac{\ln(10)}{8} - \frac{(10x-1)^2}{800} + 2$$

derivando:

$$\Rightarrow g'(x) = -\frac{x}{4} + \frac{5}{40x-4} + \frac{1}{40} \qquad (*)$$

encontrando los puntos críticos:

$$\Rightarrow 0 = -\frac{x}{4} + \frac{5}{40x-4} + \frac{1}{40}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-x}{4} + \frac{5}{40x-4} = -\frac{1}{40} \qquad (*)$$

los puntos críticos son

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{9}{80} - \dfrac{\sqrt{3201}}{80} \approx -0{,}594 \\ \\ x_2 = \dfrac{9}{80} + \dfrac{\sqrt{3201}}{80} \approx \underbrace{0{,}819}_{\text{¡números truncados!}} \end{cases}$$

evaluandos los puntos y los extremos, $[0.5, 2]$ en lo función $g(x)$:

$$\Rightarrow g(0{,}5) = 1.8655$$

(*) $$\Rightarrow g(2) = 1.6290 \quad (\text{mín})$$

$$\Rightarrow g(0{,}819) = 1.8941 \quad (\text{máx})$$

$$\Rightarrow g(-0{,}594) = 1.89414 + 0.392$$

el mín y máx $\in [0.5, 2]$

$\therefore$ el punto fijo sí existe

b) demostrar unicidad del punto fijo en el intervalo $[0.5, 2]$

derivando $g'(x)$:

$$\Rightarrow g''(x) = -\frac{1}{4} - \frac{25}{2\cdot(10x-1)^2} \qquad (*)$$

hallandos los puntos críticos:

$$\Rightarrow 0 = -\frac{1}{4} - \frac{25}{2\cdot(10x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{25} = \frac{-1}{(10x-1)^2} \qquad (*)$$

los puntos críticos son:

$$\left\{ x = 0.861\ldots \right. \qquad (*)$$

¡número truncado!

evaluando el punto y los extremos, $[0.5, 2]$ en la función $g'(x)$

$\Rightarrow g'(0.5) = 0.2125$ máx

(*) $\Rightarrow g'(2) = -0.4092$

$\Rightarrow g'(0.861) = -0.025$ mín

$\therefore$ sí existe un único punto fijo en el intervalo $[0.5, 2]$ para la función $g(x)$.

Nota: Todos los cálculos con (*) se desarrollaron usando GNU Octave con los comando: @(x), diff.

—— ∘ ——

2. Considere la matriz $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y el vector $b = (4, 7)^t$. Usando tres iteraciones del método del gradiente conjugado no lineal, aproxime una solución del problema de optimización

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} x^t A x - b^t x \right),$$

usando un valor inicial de $x^{(0)} = (0.5, 0,5)^t$

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0,5 \quad y \quad \beta_B = \frac{\| g^{(k+1)} \|_2^2}{\| g^{(k)} \|_2^2}$$

$$X = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 2x_1 + 1x_2 \\ 1x_1 + 3x_2 \end{matrix}$$