Instituto Tecnológico de Costa Rica
Ingeniería en Computadores
CE-3102: Análisis Numéricos para Ingeniería
Prof.: Juan Pablo Soto Quirós

Puntaje Total: 100 puntos
Fecha: 25 de Enero
Semestre: II - 2020
Tiempo: 2 horas y 30 minutos

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

Instrucciones Generales

- Este segundo examen parcial estará activo el **lunes 25 de enero del 2021, de 4:30 pm hasta las 8:00 pm**. No se aceptarán exámenes enviados después de las 8:00 pm.
- Este examen contiene 4 preguntas: 2 preguntas teóricas y 2 preguntas de programación.
- **Preguntas de Programación**
  - Todas las implementaciones computacionales de las dos preguntas de programación se den realizar en un único lenguaje de programación: GNU Octave o en Python. **No se calificará esta parte del examen si se realizan en otro lenguaje de programación a los mencionados anteriormente o si se utiliza dos lenguajes de programación, uno diferente en cada pregunta.**
  - Las implementaciones computacionales la deben realizar en Jupyter, en un archivo con nombre `Apellido1_Nombre_e2_programacion.ipynb`.
  - El encabezado de este archivo debe tener el nombre completo y el número de carnet. Cada una de las preguntas de programación deben estar bien identidicadas en dicho documento. **En caso de no cumplir estas indicaciones, se restarán 5 puntos de la nota final**.
- **Preguntas Teóricas**
  - En esta parte deben presentar todos los pasos necesarios o procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma ordenada y clara para resolver el examen.
  - Esta parte debe ser resuelto en hojas de color blanco o con renglones, utilizando un lápiz o un lapicero que marque bien oscuro. No se calificará el examen si está desarrollado en algún editor computacional (por ejemplo, Word, Latex, entre otros).
  - Luego, las hojas deberán ser escaneadas en un solo archivo con extensión `pdf`, el cual puede tener varias páginas. Para esto puede utilizar alguna de las siguientes aplicaciones para *smartphone*: Adobe Scan, CamScanner, Scanbot, o alguna similar. El nombre del archivo debe seguir el siguiente formato: `Apellido1_Nombre_e2_teorico.pdf`. No se calificará el esta parte si no viene en un solo archivo con extensión `pdf`.
- Deben enviar los dos archivos al correo `jusoto@tec.ac.cr`. El asunto del correo debe seguir el siguiente formato: `Apellido1 - Apellido2 - Nombre - ANPI - Parcial 2`.

Preguntas

Preguntas de Programación

1. **[Valor 30 puntos]:** Implemente computacionalmente una función para aproximar la solución al problema

$$y' = \frac{x+y}{x},$$

con valor inicial $y(2) = 4$, en el intervalo $[2, 10]$ y utilizando el método de **Runge-Kutta de orden 4**. Para eso, elabore una función

`[x_v,y_v]=runge_kutta_4(a,b,y0,m)`,

donde a, b son los valores del intervalo $[a, b]$, y_0 es el valor inicial, m el número de puntos a utilizar en el intervalo $[a, b]$ (igualmente espaciados), `x_v` el vector de puntos en el intervalo $[a, b]$, `y_v` los valores de las imágenes que aproximan la solución del problema de valor inicial. La función debe presentar una gráfica del comportamiento de los puntos, los cuales aproximan al comprotamiento de la solución exacta del problema. Ejecute esta función, utilizando $m = 50$.

2. **[Valor 30 puntos]:** El método de Rayleigh es un método iterativo para aproximar el valor propio más pequeño de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, donde A es simétrica definida positiva. Dado un vector inicial $x_0 \in \mathbb{R}^m$, el método de Rayleigh se define a través de la siguiente iteración:

$$\begin{cases} \sigma_k = \dfrac{x_{k-1}^T A x_{k-1}}{x_{k-1}^T x_{k-1}} \\[2ex] y_k = (A - \sigma_k I_m)^{-1} x_{k-1} \\[2ex] x_k = \dfrac{y_k}{\|y_k\|_2} \end{cases},$$

para $k = 1, 2, 3, ...$ En este caso, $I_m \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es la matriz identidad, σ_k es un número real y x_k, y_k son vectores en $\mathbb{R}^m$. El método de Rayleigh converge al valor propio más grande de A, es decir, si $k \to \infty$, entonces σ_k converge al valor propio más grande de A.

Implemente computacionalmente el método de Rayleigh para aproximar el valor propio más grande de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Nota: No debe realizar el cálculo de la inversa de la matriz $A - \sigma_k I_m$ para aproximar y_k. En caso contrario, perderá 10 puntos de dicha pregunta.

Preguntas Teóricas

1. Considere la función continua f definida por $f(x) = \dfrac{1 - 2^{0.5x+1}}{5}$.

   (a) **[8 puntos]** Calcule el polinomio de interpolación $p_4(x)$ que aproxime la función f en el intervalo $[0, 8]$, utilizando como conjunto soporte $\mathcal{S}_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. **Nota:** No es necesario simplificar el polinomio.

   (b) **[12 puntos]** Calcule una cota del error del polinomio de interpolación $p_2(x)$, en el intervalo $[0, 1]$, utilizando el conjunto $\mathcal{S}_2 = \{0, 0.5, 1\}$. **Nota:** No debe calcular el polinomio de interpolación.

2. Considere la función $f(x) = e^x$.

   (a) **[5 puntos]** Aproxime el valor de la integral $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$, usando la regla compuesta de Simpson, con 7 puntos.

   (b) **[15 puntos]** ¿En cuántos subintervalos se debe dividir el intervalo $[0, 1]$ para aproximar la intergal $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$, usando la regla compuesta del trapecio, tal que su cota de error sea menor a 10^{-8}?.