Instituto Tecnológico de Costa Rica
Área Académica de Ingeniería en Computadores
Curso: CE-3102 Análisis Numérico para Ingeniería
Profesor: Juan Pablo Soto Quirós
Grupo: 01

Tarea 3
Parte 1 - Punto 1:
Regla de Boole para aproximar una integral definida

Estudiantes:

Fiorella Delgado Leon - 2017121626
Cristian Marín Murillo - 2016134345
Randy Martínez Sandí - 2014047395
Karla Michelle Rivera Sánchez - 2016100425

Miércoles 27 de enero, 2021
Cartago

Resumen

El presente documento consiste en el desglose y la explicación de cómo implementar la regla de Boole simple para aproximar una integral definida.

Regla de Boole Simple

La regla de Boole simple es aquella que utiliza cinco puntos consecutivos para determinar la aproximación bajo la función dada, donde los puntos **a** y **b**, son el límite inferior y el límite superior de la integral definida, además, **x1**, **x2** y **x3** son puntos que se definen para generar intervalo en los que se evalúa la función, estos puntos deben estar separados por la misma distancia entre sí.

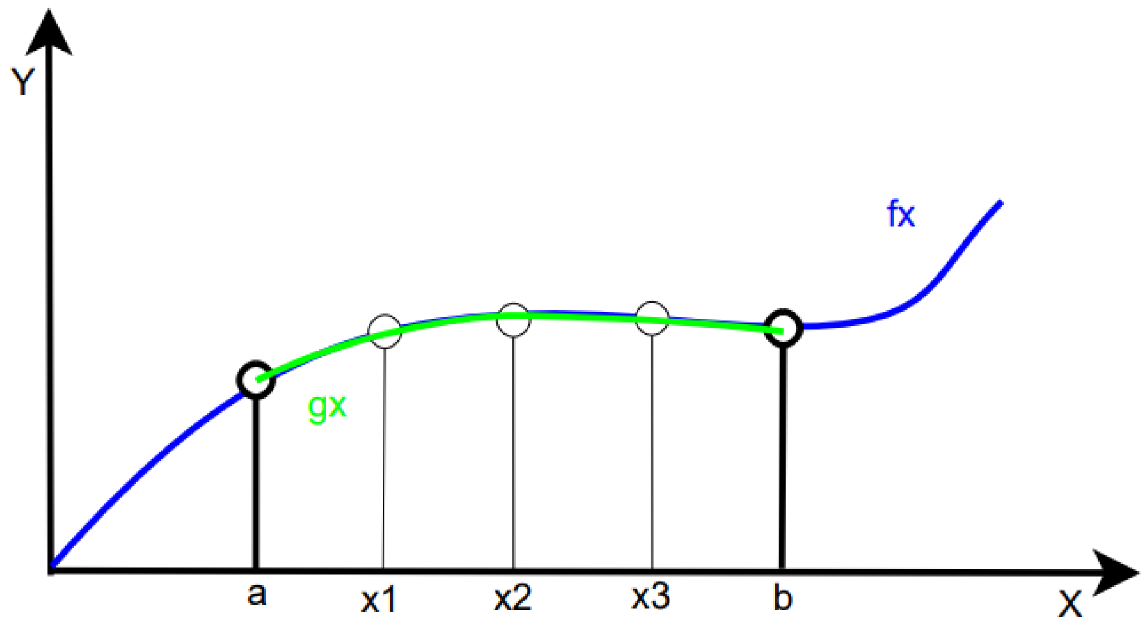

***Figura 1.** Regla de Boole Simple*

Debido a que se utilizan 5 puntos para determinar el área bajo la función, se definen 4 intervalos, los cuales serían los siguientes:

[a, x1], [x1, x2], [x2, x3], [x3, b]

La distancia que separa los puntos se define como h, y se calcula a partir de la ecuación 1.

$$h = \frac{(b - a)}{4} \quad (1)$$

Y para definir los puntos x1, x2 y x3, utilizamos la ecuación 2.

$$xi = a + i * h \quad (2)$$

Formulación:

Para obtener el resultado de la integral (I), debemos utilizar la ecuación 3.

$$I = \frac{2*(b-a)}{4} * \frac{7f(a)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(b)}{45} \tag{3}$$

Cálculo de la cota de error:

Para obtener el resultado de la cota de error (er), se debe utilizar la ecuación 4.

$$er = \left(\frac{8}{945}\right) * \left(\frac{b-a}{4}\right)^7 * f^{(6)}(\xi) \tag{4}$$

Donde $f^{(6)}(\xi)$ equivale a el valor máximo de $f^{(6)}$(x) en el intervalo de [a, b]

Ejemplo Numérico:

Se desea calcular la siguiente integral mediante el uso de la regla de Boole simple.

$\int_1^2 \frac{13}{7x+11} dx$, donde a = 1 y b = 2

1. Para calcular los puntos en los que se divide el intervalo de [1,2], debemos calcular el h utilizando la ecuación 1.

$$h = \frac{(2\ -1)}{4} = \frac{1}{4}$$

2. luego definimos los puntos x1, x2 y x3 utilizando la ecuación 2.

$$x1 = 1 + 1 * \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$x2 = 1 + 2 * \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x1 = 1 + 3 * \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

3. Lo siguiente es evaluar la función en los diferentes puntos

$$f(a) = \frac{13}{7 * a + 11} = \frac{13}{18}$$

$$f(x1) = \frac{13}{7 * x1 + 11} = \frac{52}{79}$$

$$f(x2) = \frac{13}{7 * x2 + 11} = \frac{26}{43}$$

$$f(x3) = \frac{13}{7 * x3 + 11} = \frac{52}{93}$$

$$f(b) = \frac{13}{7 * b + 11} = \frac{13}{25}$$

4. El siguiente paso es calcular el valor de la integral utilizando la ecuación 3.

$$I = \frac{2*(2-1)}{4} * \frac{7*\frac{13}{18} + 32*\frac{52}{79} + 12*\frac{26}{43} + 32*\frac{52}{93} + 7*\frac{13}{25}}{45} = 0.6100792641$$

5. A continuación, lo que debemos hacer es calcular la cota de error, para ello, debemos obtener $f^{(6)}(\xi)$, por lo que debemos derivar la función original 6 veces.

$$f'(x) = -\frac{91}{(7*x+11)^2}$$

$$f''(x) = \frac{1274}{(7*x+11)^3}$$

$$f'''(x) = -\frac{26754}{(7*x+11)^4}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{749112}{(7*x+11)^5}$$

$$f^{(5)}(x) = -\frac{26218920}{(7*x+11)^6}$$

$$f^{(6)}(x) = \frac{1101194640}{(7*x+11)^7}$$

6. Ahora debemos obtener el valor máximo de $f^{(6)}(x)$ en el intervalo de [1,2]

$$\max(f^{(6)}(x)) = 1.798690965$$

7. Finalmente, debemos calcular el valor de la cota de error mediante la ecuación 4.

$$er = \left(\frac{8}{945}\right) * \left(\frac{2-1}{4}\right)^7 * 1.798690965 = 9.293831456E-7$$

Referencias:

Tapia, C. (2017). Métodos numéricos aplicados a la ingeniería naval. Recuperado de: https://repositorio.upct.es/xmlui/bitstream/handle/10317/8258/tfg-tap-met.pdf?sequence=1&isAllowed=y