

第六次機率與統計作業

F74094017 資訊 113 李昆翰

一、手寫部分：

6.58

the poisson mean $\lambda t = 5$, the call of poisson event = 10

$\Rightarrow \therefore$ by applying the relationship between poisson process & gamma distribution, we can get:

$$\beta = \frac{1}{5} \text{ (per minute)}, \alpha = 10$$

(a.)

By gamma distribution (and the relationship with poisson process),

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 \frac{1}{(\frac{1}{5})^{10} \Gamma(10)} x^{10-1} e^{-x/\frac{1}{5}} dx$$

$$\text{By incomplete gamma function } F(x; \alpha) = \int_0^x \frac{y^{\alpha-1} e^{-y}}{\Gamma(\alpha)} dy,$$

$$\text{let } y = x/\beta = \frac{x}{1/5} = 5x \Rightarrow x = \beta y = \frac{1}{5} y$$

$$\therefore P(X \leq 1) = F(5; 10) = \int_0^5 \frac{y^9 e^{-y}}{\Gamma(10)} dy = \underline{0.0320} \#$$

(b.)

By gamma distribution (and the relationship with poisson process),

$$P(X \leq 2) = \int_0^2 \frac{1}{(\frac{1}{5})^{10} \Gamma(10)} x^{10-1} e^{-x/\frac{1}{5}} dx$$

$$\text{By incomplete gamma function } F(x; \alpha) = \int_0^x \frac{y^{\alpha-1} e^{-y}}{\Gamma(\alpha)} dy, \text{ let } y = x/\beta = 5x \Rightarrow x = \frac{y}{5}$$

$$\therefore P(X \leq 2) = F(10; 10) = \int_0^{10} \frac{y^9 e^{-y}}{\Gamma(10)} dy = \underline{0.5420} \#$$

6.20

$$\mu = 8 \text{ (kg)}, \sigma = 0.9 \text{ (kg)}$$

(a) the transformation $Z = \frac{9.5 - 8}{0.9} = \frac{1.5}{0.9} = \frac{5}{3} \approx 1.67$

\therefore by normal distribution

$$P(X > 9.5) = P(Z > 1.67) = 1 - P(Z < 1.24) = 1 - 0.9525 = \underline{0.0475 \text{ (in weights)}} \#$$

(b) the transformation $Z = \frac{8.6 - 8}{0.9} = \frac{0.6}{0.9} = \frac{2}{3} \approx 0.67$

\therefore by normal distribution,

$$P(X \leq 8.6) = P(Z \leq 0.67) = \underline{0.7486 \text{ (in weights)}} \#$$

(c) the transformation Z_1 for $X = 7.3$: $\frac{7.3 - 8}{0.9} = \frac{-0.7}{0.9} \approx -0.67$

the transformation Z_2 for $X = 9.1$: $\frac{9.1 - 8}{0.9} = \frac{1.1}{0.9} \approx 1.22$

\therefore by normal distribution,

$$\begin{aligned} P(7.3 < X < 9.1) &= P(-0.67 < Z < 1.22) = P(Z < 1.22) - P(Z < -0.67) \\ &= 0.8888 - 0.2514 = \underline{0.6374 \text{ (in weights)}} \# \end{aligned}$$

6.28

$$N = 1000, p = 72\% = 0.72, n = 100$$

(a.)

By the property of binomial distribution, we can get

$$\text{mean } \mu = 100 \times 0.72 = 72$$

$$\text{standard deviation } \sigma = \sqrt{100 \times 0.72 \times (1 - 0.72)} = \sqrt{100 \times 0.72 \times 0.28} \approx 4.49$$

Since N is large, we apply normal approximation to the binomial for 100 students of 1000 such that

$$\text{transformation } Z = \frac{80 - 72}{4.49} \approx 1.78$$

\therefore by normal distribution (with approximation to the binomial),

$$P(X \geq 80) = 1 - \sum_{x=0}^{79} b(x; 100, 0.72) \approx P(Z \geq 1.78) = 1 - P(Z < 1.78) = 1 - 0.9625 = \underline{0.0375} \#$$

(b.)

Since N is large, we apply normal approximation to the binomial for 100 students of 1000 such that

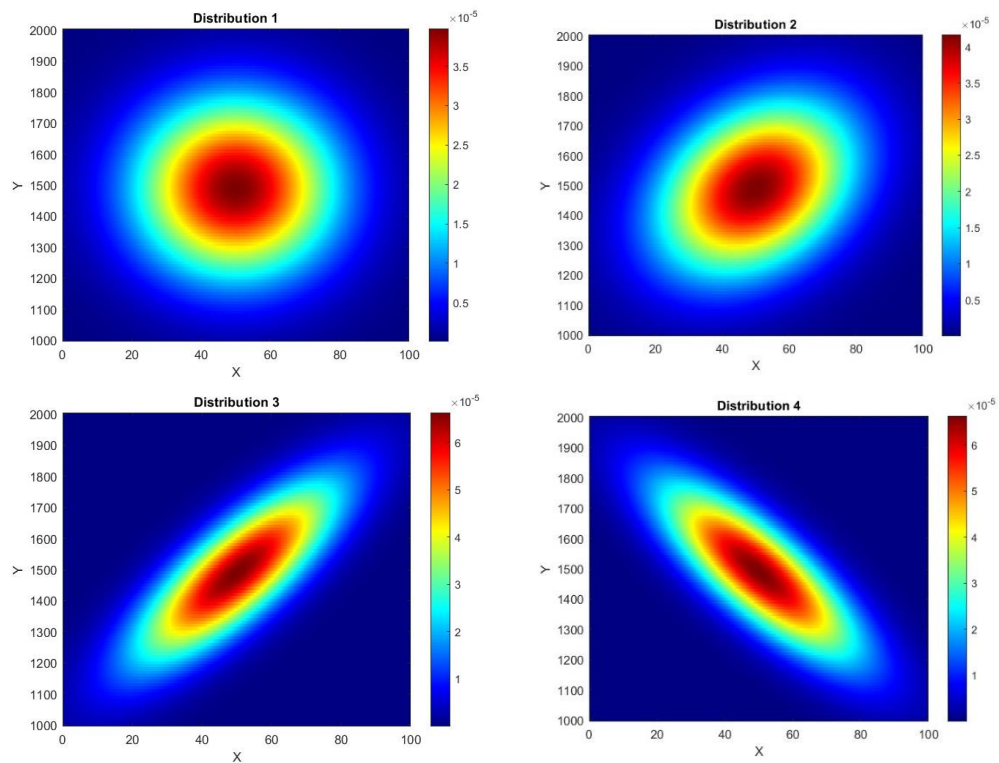
$$\text{transformation } Z = \frac{68 - 72}{4.49} \approx -0.89$$

\therefore by normal distribution (with approximation to the binomial),

$$P(X \leq 68) = \sum_{x=0}^{68} b(x; 100, 0.72) \approx P(Z \leq -0.89) = \underline{0.1867} \#$$

二、matlab 部分：

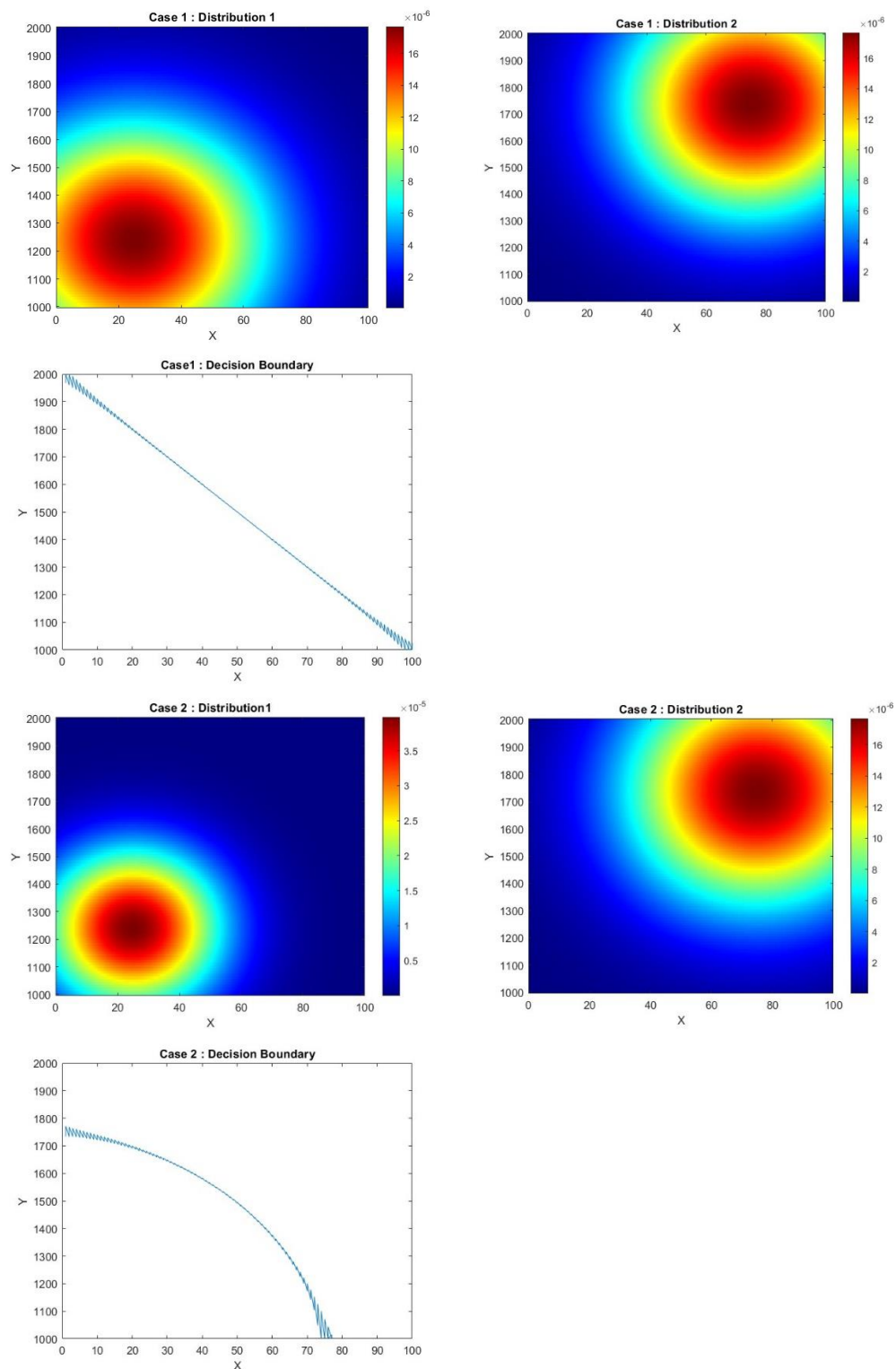
HW6_1a：



HW6_1b：

以上 4 張圖主要都是在因應 $\rho = [0, 0.3, 0.8, -0.8]$ 而形成的結果。由 4 張結果圖可以發現，當 $|\rho|$ 越大時，圖中的形狀會更像一個橢圓形，且若 ρ 是正的，它原本的長軸是會偏向由左下到右上的形式，也就是斜率為正；同理和上圖數據也可得，若 ρ 是負的，則相反。當 $|\rho|$ 越小或為 0，則整體會趨近於一個圓形，且 ρ 為 0 時，長軸和短軸是相等的。

HW6_2a :



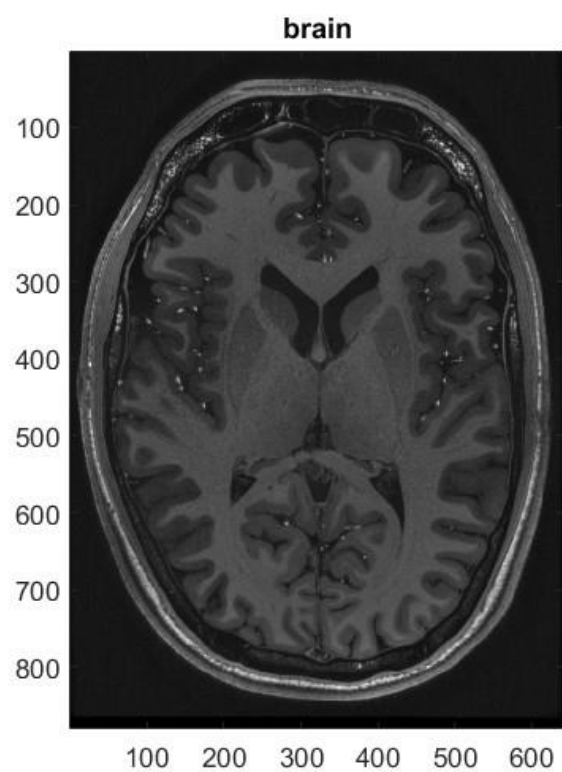
HW6_2b :

在圖中的 case 1 和 case 2 中，由於他們的 Distribution 1 的 σ_x 的不同（一個是 30、另一個是 20），除了造成兩邊的 distribution 1 plot 出來的圖大小不一樣以外，也造成了他們的 decision boundary 的不同。在 case 1 中，由於 Distribution 1 和 2 的 σ_x 一樣，所以 plot 出來的 decision boundary

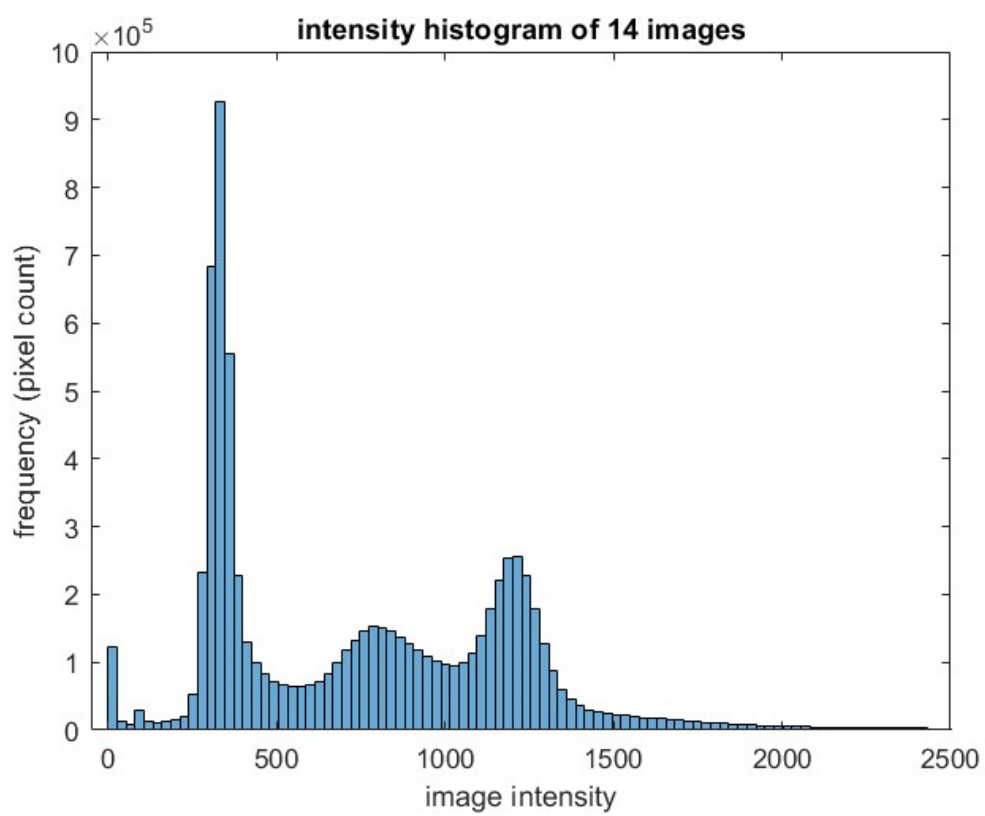
是切了個趨近於一半的範圍；在 **case 2** 中，由於 **Distribution 1** 的 σ_x 比 **Distribution 2** 大，所以造成了切出來的空間右邊明顯比左邊要大得多。

HW6_3a :

選擇的是第一張影像。



HW6_3b : (取 200 個 bins)



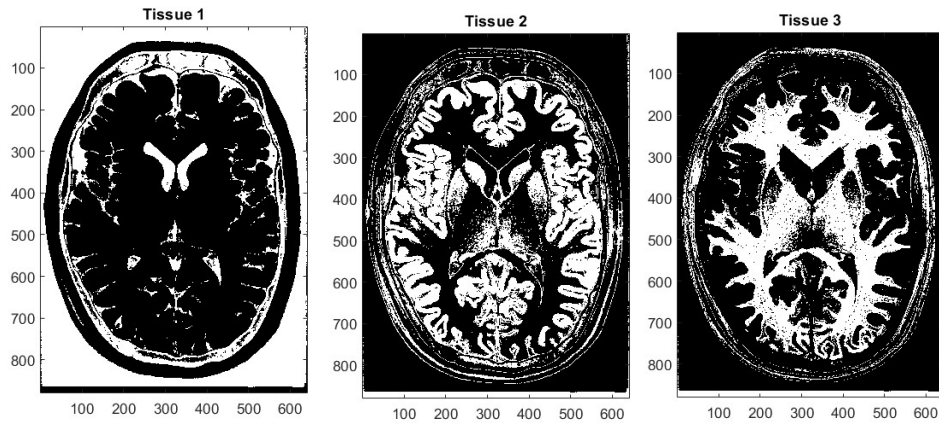
HW6_3c :

由反覆測試的結果，我設定 4 個 intensity range 為：

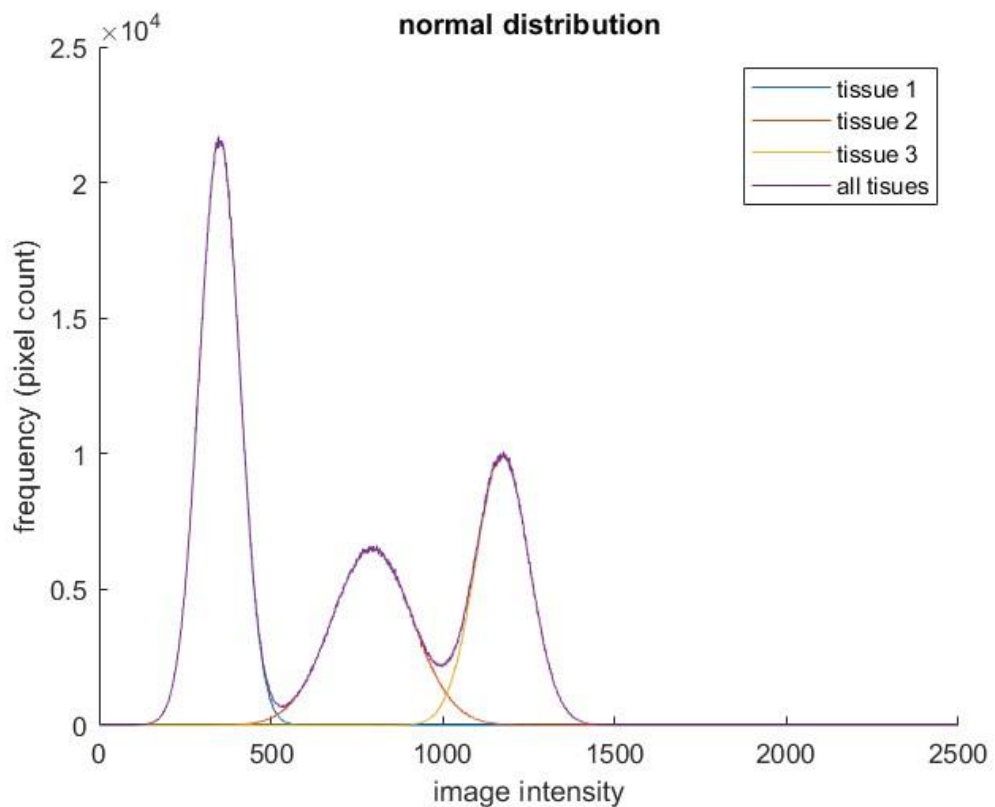
background -> 200~400, tissue1 -> 200~550, tissue 2 -> 550~1000;

tissue 3 -> 1000~1308

(為了 tissue1 的精度，所以我選擇讓 tissue 1 和 background 的 range 重疊起來，也因此造成 tissue 1 的背景反白)



HW6_3d :



由 HW6_3d 的結果圖樣貌和 HW6_3b 的真實情況的比對結果可知，兩者的形狀蠻相像的。我推測原因可能為我把 background 的範圍含進了 tissue1 的範圍中，因此兩邊的高峰結構才會這麼的相像。除此之外，

HW6_3b 的 histogram 是由 14 張 MRI 影像圖得出來的結果，因此對於結果會和常態分佈有點像我覺得是蠻合理的一件事（儘管中間高峰的結構有點明顯的左陡右緩）。