التوزيع الهندسي

أي من التالي يعد توزيع هندسي :

a) تدوير سلمي المُتكرِّر لمُؤشِّر قرص دوار الذي ينقسم إلى 4 قطاعات مُتطابِقة، ثم توقُّفها عند استقرار رأس السهم على اللون الأحمر

b) سحب كمال 3 كرات على التوالي من دون إرجاع، من صندوق فيه 4 كرات حمراء، و 5 كرات خضراء، ثم كتابة عدد الكرات الحمراء المسحوبة

c) إلقاء ريّان حجر نرد منتظمًا 4 مَرّات، ثم كتابة الأعداد الظاهرة

d) اختيار 7طلبة عشوائيًّا من صف روضة فيه 15ولدًا و 10بنات، ثم كتابة عدد البنات اللاتي وقع عليهن الاختيار

التوزيع الاحتمالي الهندسي :

$$X \sim Geo\,(p)$$

p: احتمال النجاح ، $p-1$: احتمال الفشل

$x = \{1, 2, 3, 4, \dots\dots\dots\}$

$P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$

$P(X > x) = (1-P)^{X}$

$P(X \geq x) = 1 - P(X < x)$

التوقع : $\mu = E(X) = \frac{1}{p}$

إذا كان $X \sim Geo\,(0.2)$: فأجد كُلًّا ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية :

(3) $P(X = 2)$

$P(X = 2) = (0.2)(1-0.2)^{2-1} = (0.2)(0.8)^{1} = 0.16$

---

(4) $P(X \leq 3)$

$= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$= (0.2)(0.8)^{0} + (0.2)(0.8)^{1} + (0.2)(0.8)^{2} \approx 0.488$

---

(5) $P(X \geq 3)$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$

$= 1 - (P(X = 1) + P(X = 2))$

$= 1 - ((0.2)(0.8)^{0} + (0.2)(0.8)^{1}) = 0.64$

---

6) $P(3 \leq X \leq 5)$

$= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

$= (0.2)(0.8)^{2} + (0.2)(0.8)^{3} + (0.2)(0.8)^{4} \approx 0.312$

---

(7) $P(X < 4)$

$= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$= (0.2)(0.8)^{0} + (0.2)(0.8)^{1} + (0.2)(0.8)^{2} \approx 0.488$

---

(8) $P(X > 4)$

---

(9) $P(1 < X < 3)$

$P(1 < X < 3) = P(X = 2) = (0.2)(0.8)^{1} = 0.16$

(10) $P(4 < X \leq 6) = P(X = 5) + P(X = 6)$

$= (0.2)(0.8)^{4} + (0.2)(0.8)^{5} \approx 0.147$

---

(11) $P(X < 1)$

$P(X < 1) = P(X = 0) = 0$

مثال (3) يكرِّر أحمد محاولة تدوير مَقْبِض الاشتعال في فرن مطبخه - بعد حدوث عطل فيه- حتى يتمكَّن من تشغيل الفرن لطهي الطعام . إذا كان احتمال اشتعال الفرن في كل محاولة هو $\frac{1}{3}$ ومثَّل Xعدد محاولات أحمد حتى يشتعل الفرن فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

(1) احتمال أنْ يتمكَّن أحمد من إشعال الفرن في المحاولة الرابعة

$P(X = 4) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^{3} = \frac{8}{81}$

إذن، احتمال أنْ يتمكَّن أحمد من إشعال الفرن في المحاولة الرابعة هو $\frac{8}{81}$

(2) احتمال أنْ يحاول أحمد إشعال الفرن أكثر من 4 مَرّات

المطلوب هو إيجاد $P(X > 4)$ وهذا يعني أنَّ:

$P(X > 4) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + \cdots$

بما أنَّ إيجاد $P(X > 4)$ ، يتطلَّب إيجاد مجموع عدد غير منتهٍ من الاحتمالات (الكسور)، فإنَّه يَلزم البحث عن طريقة أُخرى لإيجاد الاحتمال، وذلك باستعمال مُتمِّمة الحادث:

$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$

$= 1 - (P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4))$

$= 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right) = \frac{16}{81}$

إذن، احتمال أنْ يحاول أحمد إشعال الفرن أكثر من 4 مَرّات هو $\frac{16}{81}$

حل أخر :

$P(X > 4) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4} = \frac{16}{81}$

وجد مصنع لوحدات الإنارة المكتبية أنَّ احتمال أنْ تكون وحدة الإنارة مَعيبة هو 0.10 . إذا مثَّل Xعدد وحدات الإنارة التي سيفحصها مُراقِب الجودة حتى إيجاد أوَّل وحدة إنارة مَعيبة، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

(16) احتمال أنْ تكون وحدة الإنارة الخامسة هي أوَّل وحدة مَعيبة يجدها مُراقِب الجودة

$P(X = 5) = (0.1)(1-0.1)^{5-1} = (0.1)(0.9)^{4} \approx 0.066$

احتمال أن يجد مراقب الجودة اول وحدة إنارة معيبة بعد فحص 5 وحدات إنارة هو 0.066 تقريباً

(17) احتمال أنْ يفحص مُراقِب الجودة أكثر من 4 وحدات إنارة حتى إيجاد أوَّل وحدة إنارة مَعيبة.

$P(X > 4) = (1-P)^{4} = (1-0.1)^{4} = (0.9)^{4} = 0.6561$

احتمال أن يجد مراقب الجودة اكثر من 4 وحدات إنارة حتى إيجاد اول وحدة إنارة معيبة هو0.6561

(18) العدد المُتوقَّع من وحدات الإنارة التي سيفحصها مُراقِب الجودة حتى إيجاد أوَّل وحدة إنارة مَعيبة

$E(X) = \frac{1}{0.10} = 10$

إذا يتوقع أن يفحص مراقب الجودة 10 وحدات إنارة حتى يجد أول وحدة إنارة معيبة

(22) إذا كان $X \sim Geo(p)$ وكان: $P(X \le 3) = \frac{819}{1331}$ فأجد $P(X > 3)$ مُبرِّرًا إجابتي.

$$P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - \frac{819}{1331} = \frac{512}{1331}$$

(23) إذا كان $X \sim Geo(p)$ وكان : $P(X = 1) = 0.2$ فأجد: التوقُّع $E(X)$

$$P(X = 1) = p(1-p)^{1-1} \Rightarrow 0.2 = p(1-p)^0$$

$$\Rightarrow p = 0.2 \Rightarrow E(X) = \frac{1}{0.2} = 5$$

التوزيع الاحتمالي ذا الحدين

أي من التالية يعتبر توزيع احتمالي ذا حدين

a) إلقاء حجر نرد منتظم 20مَرَّة، ثم كتابة الاعداد الظاهرة

b) إلقاء حجر نرد منتظم 20مَرَّة، ثم كتابة عدد المَرّات التي يظهر فيها العدد 1على الوجه العلوي لحجر النرد.

c) سحب 5كرات على التوالي من دون إرجاع، من صندوق فيه 8كرات حمراء، و 7كرات خضراء، ثم كتابة عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

d) إطلاق أسهم بشكل مُتكرِّر نحو هدف، ثم التوقُّف عند إصابته أوَّل مَرَّة.

توزيع ذا الحدين

ذات حدين	عدد ونسبة	$X \sim B(n,p)$
أحتمال الفشل: $1-p$	الاحتمال انجاح: p	n: العدد $r = \{0, 1, 2, ., , n\}$

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

التوقع: $\mu = E(X) = np$

التباين : $\text{Var}\ (X) = \sigma^2 = np(1-p)$

مثال : إذا كان $X \sim B(4, 0.3)$: فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

معاملا المُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين هما : $n = 4, p = 0.3$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

(1) $P(X = 2)$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2}(0.3)^2(0.7)^2 = 0.2646$$

(2) $P(X > 2)$

$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$= \binom{4}{3}(0.3)^3(0.7)^1 + \binom{4}{4}(0.3)^4(0.7)^0 = 0.0837$$

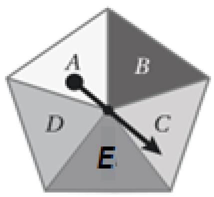
(3) $P(X \le 3)$

$$P(X \le 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - P(X = 4)$$

$$= 1 - \binom{4}{4}(0.3)^4(0.7)^0 = 0.9919$$

(4) $P(1 < X < 4)$

يُمثِّل الشكل المجاور قرصًا على شكل خماسي منتظم. إذا دُوِّر مؤشِّر القرص 10 ودل المتغير العشوائي X على عدد مرات توقف المؤشر على الحرف A مَرّات،فأجد كُلًّا ممّا يأتي :



(4) احتمال أنْ يتوقَّف المُؤشِّر على الحرف Aثلاث مَرّات فقط.

$$P(X = 3) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^7 \approx 0.2013$$

(5) احتمال أنْ يتوقَّف المُؤشِّر على الحرف Aثلاث مَرّات على الأقل.

$$P(X \ge 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2))$$

$$= 1 - \left(\binom{10}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^9 + \binom{10}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^8\right) \approx 0.322$$

(6) احتمال ألّا يتوقَّف المُؤشِّر على الحرف Aنهائيًا .

$$P(X = 0) = \binom{10}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^{10} \approx 0.1074$$

يواجه الطيّارون صعوبة في الرؤيا باحتمال 0.25عند الهبوط بالطائرات في أحد المطارات خلال فصل الشتاء بسبب سوء الأحوال الجوية. إذا هبط طيّار 20مَرَّة في هذا المطار شتاءً، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

(7) احتمال أنْ يواجه الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في ثلاث مَرّات فقط

X عدد المرات التي يواجهه فيها الطيار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط من بين 20 مرة

$$\Rightarrow X \sim B(20, 0.25)$$

$$P(X = 3) = \binom{20}{3}(0.25)^3(0.75)^{17} \approx 0.134$$

(8) احتمال أنْ يواجه الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في ثلاث مَرّات على الأقل.

$$P(X \ge 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2))$$

$$= 1 - \left(\binom{20}{0}(0.25)^0(0.75)^{20} + \binom{20}{1}(0.25)^1(0.75)^{19} + \binom{20}{2}(0.25)^2(0.75)^{18}\right) \approx 0.025$$

(9) احتمال أنْ يواجه الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في المَرّات جميعها.

$$P(X = 20) = \binom{20}{20}(0.25)^{20}(0.75)^0 \approx 9.09495 \times 10^{-13}$$

(10) العدد المُتوقَّع من المَرّات التي سيواجه فيها الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط.

$$E(X) = np = 20(0.25) = 5$$

إذا كان احتمال إصابة شخص ما بأعراض جانبية بعد أخذه مطعومًا مُعيَّنًا هو 12% ، وقرَّر طبيب إعطاء 50شخصًا هذا المطعوم، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي Xعلى عدد الأشخاص الذين ستظهر عليهم الأعراض الجانبية، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

(15) احتمال ظهور الأعراض الجانبية على 3أشخاص فقط ممَّن أخذوا المطعوم

$$P(X = 3) = \binom{50}{3}(0.12)^3(0.88)^{47} = 0.083$$

(16) العدد المُتوقَّع للأشخاص الذين ستظهر عليهم أعراض المطعوم الجانبية

$$E(X) = 50(0.12) = 6$$

(17) التباين للمُتغيِّر العشوائي X.

$$Var(X) = 50(0.12)(0.88) = 5.28$$

(18) تبلغ نسبة حاملي فصيلة الدم – O من سكّان الأردن نحو 4% تقريبًا. أجد عدد الأشخاص الذين يَلزم إشراكهم في عيّنة عشوائية من السكّان، ويُتوقَّع أنْ يكون منهم 10أشخاص من حاملي فصيلة الدم –O

$$E(X) = np \Rightarrow 10 = n(0.04) \Rightarrow n = 250$$

عدد الاشخاص الذي يلزم إشراكهم في العينة العشوائية من السكان هو 250 شخصاً

---

(19) إذا كان $X \sim B(3,p)$ وكان: $P(X \geq 1) = \frac{215}{216}$ فأجد $P(X = 2)$ مُبرِّرًا إجابتي.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$$
$$= 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{3}{0}(p)^0(1-p)^3$$
$$\Rightarrow \frac{215}{216} = 1 - \binom{3}{0}(p)^0(1-p)^3$$
$$\Rightarrow \frac{215}{216} = 1 - (1-p)^3 \Rightarrow (1-p)^3 = 1 - \frac{215}{216}$$
$$\Rightarrow (1-p)^3 = \frac{1}{216} \Rightarrow 1 - p = \frac{1}{6}$$
$$\Rightarrow p = 1 - \frac{1}{6} \Rightarrow p = \frac{5}{6}$$
$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1 = \frac{75}{216}$$

---

(20) إذا كان $X \sim B(100,p)$ وكان التباين للمُتغيِّر العشوائي X هو 24، فأجد قيمة p، مُبرِّرًا إجابتي

$$Var\ (X) = 100p(1-p)$$
$$\Rightarrow 24 = 100p(1-p)$$
$$\Rightarrow 24 = 100p - 100p^2$$
$$\Rightarrow 100p^2 - 100p + 24 = 0$$
$$\Rightarrow 25p^2 - 25p + 6 = 0$$
$$\Rightarrow (5p-3)(5p-2) = 0$$
$$\Rightarrow p = \frac{3}{5}, p = \frac{2}{5}$$

---

(21) يتألَّف اختبار لمبحث الجغرافيا من 25سؤالًا، جميعها من نوع الاختيار من مُتعدِّد، ولكلٍّ منها 4بدائل، واحد منها فقط صحيح، ولكل فقرة 4علامات. إذا أجاب رامي عن هذه الأسئلة جميعها بصورة عشوائية، فما احتمال أنْ يحصل على علامة 76من 100؟

بما أن لكل فقرة 4 علامات و حصل رامي على علامة 76، معناه أن رامي قد أجاب بشكل صحيح على 19 فقرة من أصل 25 فقرة في هذا الاختبار بما أن كل فقرة لها 4 بدائل واحدة فقط صحيحة ، إذا احتمال اختيار البديل الصحيح هو $\frac{1}{4}$

$$P(X = 19) = \binom{25}{19}\left(\frac{1}{4}\right)^{19}\left(\frac{3}{4}\right)^6 = 0.00000011467$$

التوزيع الطبيعي

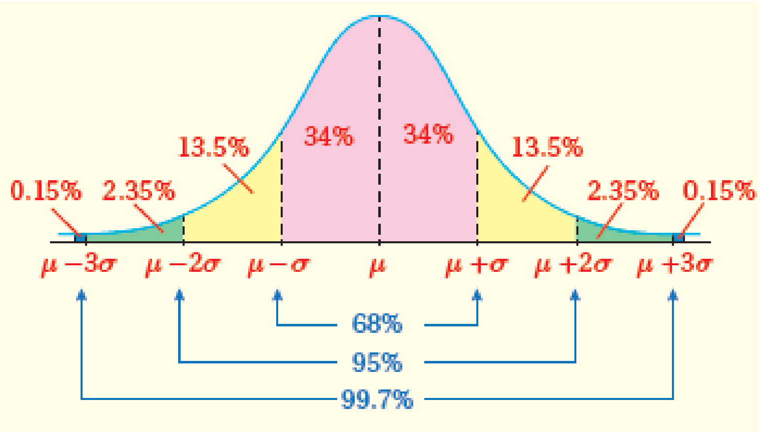
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

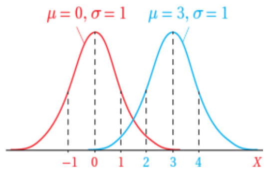
μ : الوسط الحسابي	σ : الانحراف المعياري

مفهوم أساسي — خصائص المنحنى الطبيعي

يمتاز المنحنى الطبيعي بالخصائص الآتية:

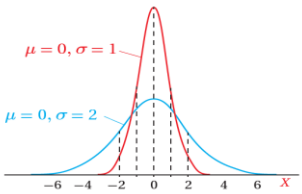
- منحنى متصل له شكل الجرس.
- تطابق الوسط الحسابي والوسيط والمنوال، وتوسُّط البيانات في كلٍّ منها.
- تماثل البيانات حول الوسط الحسابي.
- اقتراب المنحنى عند طرفيه من المحور x من دون أنْ يمسَّه.
- المساحة الكلية أسفل المنحنى هي 1.





(a)

في الشكل (a)التالي، يُمكِن ملاحظة أنَّ التغيُّر في الوسط الحسابي يؤدّي إلى انسحاب أفقي للمنحنى الطبيعي



(b)

الشكل (b) فيُلاحَظ أنَّ زيادة الانحراف المعياري

تجعل المنحنى الطبيعي أكثر انتشارًا وتوسُّعًا.

إذا اتخذ التمثيل البياني لأطوال مجموعه من طلبه الصف الثاني عشر شكل المنحنى الطبيعي، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

(1) النسبة المئوية للطلبة الذين تقع كتلهم فوق الوسط الحسابي

---

(2) النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البُعْد بين كتلهم والوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.

---

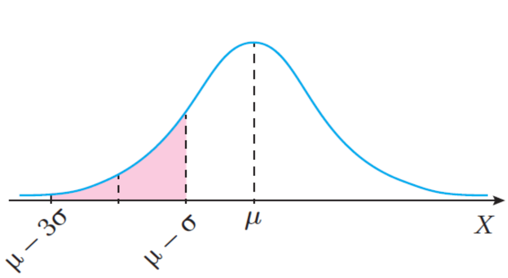
(3) النسبة المئوية للطلبة الذين تقلُّ كتلهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

---

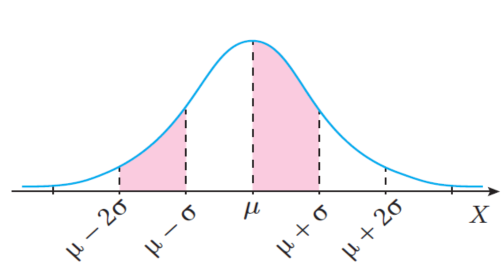
(4) النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد كتلهم على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين، أو تقلُّ عنه بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد.

أحدِّد النسبة المئوية لمساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل كل توزيع طبيعي ممّا يأتي:

5



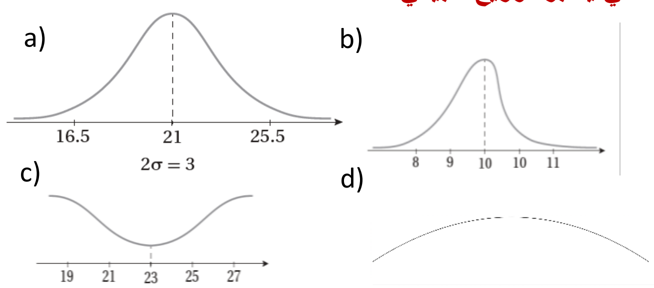
8



المتغير العشوائي :

متغير عشوائي منفصل	متغير عشوائي متصل
(معدود)	(غير معدود / فترة)
* المتغير الهندسي / ذا الحدين	* المتغير الطبيعي
* عدد سيارات / طلاب	* درجة حرارة / أوزان / أطوال علامات طلاب

أي من التالي يعتبر توزيع طبيعي :



إذا كان $X \sim N(79,144)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي :

(10) $P(X<79)$

$\mu=79, \sigma=\sqrt{144}=12$

$P(X<79)=P(X<\mu)=0.5$

(11) $P(67<X<91)$

$=P(79-12<X<79+12)$

$=P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.34+0.34=0.68$

(12) $P(X>91)=P(X>79+12)=P(X>\mu+\sigma)$

$=13.5\%+2.35\%+0.15\%=16\%=0.16$

(13) $P(X>103)$

$=P(X>79+2(12))=P(X>\mu+2\sigma)$

$=2.35\%+0.15\%=2.5\%=0.025$

(14) $P(43<X<115)$

$=P(79-3(12)<X<79+3(12))$

$=P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)=99.7\% \ =0.997$

يُنتِج مصنعٌ أكياسَ أسمنت تتبع كتلها توزيعًا طبيعيًا، وسطه الحسابي 50 kg، وانحرافه المعياري 2 kg . إذا اختير كيس أسمنت عشوائيًا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

(20) احتمال أنْ تكون كتلة الكيس أكثر من 54 kg

$\mu=50, \sigma \ =2$

$P(X>54)=P(X>50+2(2))$

$=P(X>\mu+2\sigma)=2.35\%+0.15\%=2.5\%=0.025$

أحتمال ان تكون كتلة الكيس اكثر من 54kg هو 0.025

(21) احتمال أنْ تتراوح كتلة الكيس بين 44 kg و52 kg

$P(44<X<52)$

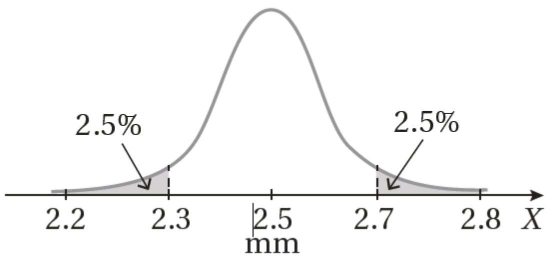
$=P(50-3(2)<X<50+2)$

$=P(\mu-3\sigma<X<\mu+\sigma)$

$=2.35\%+13.5\%+34\%+34\%=83.85\%=0.8385$

احتمال ان تتراوح كتلة الكيس بين 44kg و 52kg هو 0.8385

يُمكِن نمذجة أطوال أقطار مسامير يُنتِجها مصنع بمنحنى التوزيع الطبيعي المُبيَّن في الشكل المجاور



(11) أجد كُلًّا من الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لأطوال أقطار المسامير

$\mu=2.5 \rightarrow \mu+2\sigma=2.7$

$\Rightarrow 2.5+2\sigma=2.7 \Rightarrow \sigma=0.1$

(12) أجد النسبة المئوية للمسامير التي يزيد طول قُطْر كلٍ منها على الوسط الحسابي بما لا يزيد على انحرافين معياريين

$P(2.5<X<2.7)=\frac{1}{2}(95\%)=47.5\%$

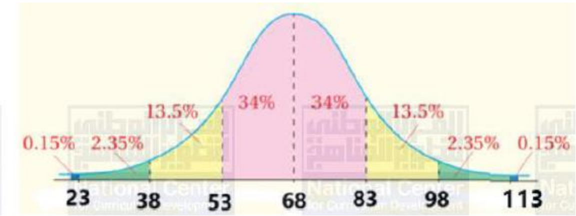
(23) يدلُّ المُتغيِّر العشوائي $X \sim N(100,\sigma^2)$ على أطوال الأفاعي (بالسنتيمتر) في أحد مجتمعاتها. إذا كانت أطوال 68% منها تتراوح بين 93 cm و107 cm، فأجد σ^2 مُبرِّرًا إجابتي .

$P(93<X<107)=P(100-7<X<100+7)$

$=P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=68\%$

ومنه فإن $\sigma^2 \ =(7)^2=49$

(24) تتبع العلامات في أحد الاختبارات توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 68، وانحرافه المعياري 15 . إذا لم ينجح في الاختبار 16 % من الطلبة، فأجد علامة النجاح.



نعتمد العلامات كما هو موضح في الشكل اعلاه حيث الوسط الحسابي 86 و الانحراف المعياري 15 نبدأ بجمع النسب المئوية من أقصى يسار الشكل حتى نحصل على النسبة 16% فنجد

0.15% +2.35%+13.5%=16% بما أن هذه النسبة تمثل جميع الراسبيين إذاً علامة النجاح هي 53

التوزيع الطبيعي المعياري

$Z \sim N(0,1)$

أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

(1) $P(Z < 1.42)$

$P(Z < 1.42) = 0.9222$

(2) $P(Z < 0.87)$

$P(Z < 0.87) = 0.8078$

(3) $P(Z > 1.06)$

$P(Z > 1.06) = 1 - P(Z < 1.06)$

$= 1 - 0.8554 = 0.1446$

(4) $P(Z < -2.78)$

$P(Z < -2.78) = 1 - P(Z < 2.78)$

$= 1 - 0.9973 = 0.0027$

(5) $P(Z > -1.33)$

$P(Z > -1.33) = P(Z < 1.33) = 0.9082$

(6) $P(1.1 < Z < 2.1)$

$= P(Z < 2.1) - P(Z < 1.1)$

$= 0.9821 - 0.8643 = 0.1178$

(7) $P(-2.65 < Z < -1.43)$

$P(-2.65 < Z < -1.43)$

$= P(Z < -1.43) - P(Z < -2.65)$

$= 1 - P(Z < 1.43) - (1 - P(Z < 2.65))$

$= 1 - 0.9236 - (1 - 0.9960) = 0.0734$

(10) $P(-1.8 < Z < 1.8)$

$P(-1.8 < Z < 1.8)$

$= P(Z < 1.8) - P(Z < -1.8)$

$= P(Z < 1.8) - (1 - P(Z < 1.8))$

$= 2P(Z < 1.8) - 1$

$= 2(0.9641) - 1 = 0.9282$

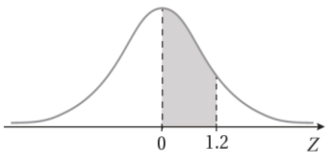
(11) $P(Z < -1.75)$

$P(Z < -1.75) = 1 - P(Z < 1.75)$

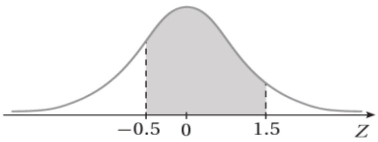
$= 1 - 0.9599 = 0.0401$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في كلٍّ ممّا يأتي:

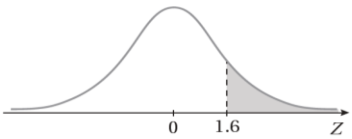
16



17



18



مثال أجد قيمة a التي تُحقِّق الاحتمال المعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

(1) $P(Z < a) = 0.8212$

(2) $P(Z < a) = 0.32$

(3) $P(Z > a) = 0.9406$

(4) $P(Z > a) = 0.015$

أجد قيمة a التي تُحقِّق الاحتمال المعطى في كلٍّ ممّا يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:

(24) $P(0 < Z < a) = 0.45$

$P(0 < Z < a) = 0.45$

$\Rightarrow P(Z < a) - P(Z < 0) = 0.45$

$\Rightarrow P(Z < a) - 0.5 = 0.45$

$\Rightarrow P(Z < a) = 0.95$

(25) $P(-a < Z < a) = 0.1272$

$P(-a < Z < a) = 0.1272$

$\Rightarrow P(Z < a) - P(Z < -a) = 0.1272$

$\Rightarrow P(Z < a) - 1 + P(Z < a) = 0.1272$

$\Rightarrow 2P(Z<a)-1=0.1272$
$\Rightarrow 2P(Z<a)=1.1272 \Rightarrow P(Z<a)=0.5636$
الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 فهذا يعني أن قيمة a موجبة و أنه يمكن استبدال القيمة z بها :
$P(Z<a)=P(Z<z) \Rightarrow 0.5636=P(Z<z)$
$\Rightarrow z=0.16 \Rightarrow a=0.16$

(26) إذا كان: $Z\sim N(0,1)$ وكان $P(1<Z<c)=0.1408$ فأجد قيمة الثابت c

$P(1<Z<c)=0.1408$
$P(Z<c)-P(Z<1)=0.1408$
$P(Z<c)-0.8413=0.1408$
$P(Z<c)=0.9821$
الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة c أسفل منحنى التوزيع الطبيعي بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 فهذا يعني أن قيمة c موجبة و أنه يمكن أستبدال القيمة z بها
$P(Z<c)=P(Z<z)$
$\Rightarrow 0.9821=P(Z<z)$
$\Rightarrow z=2.1 \Rightarrow a=2.1$

أحتمال المتغير العشوائي الطبيعي باستعمال الجدول :

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

لتحويل المتغير العشوائي الطبيعي X إلى متغير عشوائي معياري Z نستخدم القانون :

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

مثال :إذا كان X مُتغيّرًا عشوائيًّا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 64، وانحرافه المعياري 5، فأجد القيمة المعيارية z التي تُقابِل قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

(1) $x=70$
$z=\frac{x-\mu}{\sigma} \to z=\frac{70-64}{5}=1.2$
(2) $x=55$
$z=\frac{x-\mu}{\sigma} \to z=\frac{55-64}{5}=-1.8$

إذا كان X مُتغيّرًا عشوائيًّا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 220، وانحرافه المعياري 10، فأجد قيمة x التي تُقابِل القيمة المعيارية z في كلٍّ ممّا يأتي :

(4) $z=2$
$\frac{x-220}{10}=2 \Rightarrow x=240$
(5) $z=-3.5$
$\frac{x-220}{10}=-3.5 \Rightarrow x=185$
(6) $z=4.2$
$\frac{x-220}{10}=4.2 \Rightarrow x=262$

(20) إذا كان $X-N(\mu,\sigma^2)$: وكانت القيمة المعيارية التي تُقابِل $x=14$ هي $z=3.2$ والقيمة المعيارية التي تُقابِل $x=-6$ هي $z=-1.8$ فأجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمُتغيّر العشوائيX.

$3.2=\frac{14-\mu}{\sigma} \Rightarrow 3.2\sigma=14-\mu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$
$-1.8=\frac{-6-\mu}{\sigma} \Rightarrow -1.8\sigma=-6-\mu \ldots\ldots\ldots(2)$

بضرب المعادلة (2) بسالب واحد تنتج لدينا المعادلة :
$1.8\sigma=6+\mu \ldots..(3)$
بجمع المعادلتين (1) و (3) طرفاً إلى طرف , نحصل على :
$5\sigma=20 \to \sigma=4$
$1.8(4)=6+\mu \Rightarrow \mu=1.2$ عوض في المعادلة الثانية

تتبع أطوال لاعبي كرة السلَّة توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي $185cm$ وانحرافه المعياري $5cm$. إذا اختير لاعب عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

(13) احتمال أنْ يزيد طول اللاعب على $175cm$.
$P(X>175)=P\left(Z>\frac{175-185}{5}\right)$
$=P(Z>-2)=P(Z<2)=0.9772$

(14) احتمال أنْ يتراوح طول اللاعب بين $180cm, 190cm$.
$P(180<X<190)=P\left(\frac{180-185}{5}<Z<\frac{190-185}{5}\right)$
$=P(-1<Z<1)=P(Z<1)-P(Z<-1)$
$=P(Z<1)-(1-P(Z<1))=2P(Z<1)-1$
$=2(0.8413)-1=0.6826$

(15) العدد التقريبي للاعبين الذين تزيد أطوالهم على $195cm$ من بين 2000 لاعب
$P(X>195)=P\left(Z>\frac{195-185}{5}\right)$
$=P(Z>2)=1-P(Z<2)$
$=1-0.9772=0.0228$
$N=0.0228\times 2000=45.6\approx 46$
إذا العدد التقريبي للاعبين الذين تزيد اطوالهم على 195 cm من بين 2000 لاعب هو 46

في دراسة لإدارة السير، تبيَّن أنَّ سرعة السيّارات على أحد الطرق تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 68.5 km/h، وانحرافهالمعياري 5 km/h . إذاكانت السرعة القصوى المُحدَّدة على هذا الطريق هي 70 km/h، وكان العدد الكلي للسيّارات التي تسير على هذا الطريقفي أحد الأيام هو 1300سيّارة، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

السرعة	درجة المخالفة
(75−85) km/h	الأولى
أكثر من (85) km/h	الثانية

(18) أجد العدد التقريبي للسيّارات التي ستتجاوز السرعة المُحدَّدة على الطريق في هذا اليوم

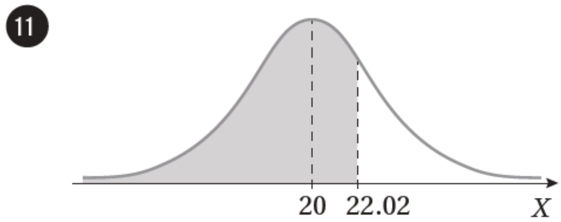
$X\sim N(68.5,5^2)$
$P(X>70)=P\left(Z>\frac{70-68.5}{5}\right)$
$=P(Z>0.3)=1-P(Z<0.3)$
$=1-0.6179=0.3821$
$n=1300\times 0.3821=496.73\approx 497$
العدد التقريبي للسيارات التي ستتجاوز السرعة المحددة على الطريق في هذا اليوم هو 497 سيارة

(19) إذا كان نظام المراقبة على هذا الطريق يرصد مخالفات من درجتين بحسب مقدار تجاوز الحدِّ الأقصى للسرعة كما في الجدول المجاور، فأجد عدد المخالفات التي سُجِّلت من كل درجة في هذا اليوم

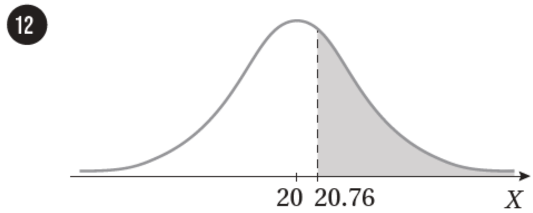
$P(75 < X < 85)$
$= P\left(\frac{75-68.5}{5} < Z < \frac{85-68.5}{5}\right)$
$= P(1.3 < Z < 3.3)$
$= P(Z < 3.3) - P(Z < 1.3)$
$= 0.9995 - 0.9032 = 0.0963$
$n = 1300 \times 0.0963 = 125.19 \approx 125$
عدد المخالفات التي سجلت من الدرجة الاولى في هذا اليوم هو 125 مخالفة تقريباً

$p(X > 85) = p\left(Z > \frac{85-68.5}{5}\right)$
$= P(Z > 3.3) = 1 - P(Z < 3.3)$
$= 1 - 0.9995 = 0.0005$
$n = 1300 \times 0.0005 = 0.65 \approx 1$
عدد المخالفات التي سجلت من الدرجة الثانية في هذا اليوم هو مخالفة واحدة تقريباً

إذا كان $X \sim N(20,9)$: فأجد مساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي للمُتغيِّر العشوائي X في كلِّ ممّا يأتي :



$P(X < 22.02) = P\left(Z < \frac{22.02-20}{3}\right)$
$= P(Z < 0.67) = 0.7486$



$P(X > 20.76) = P\left(Z > \frac{20.76-20}{3}\right)$
$= P(Z > 0.25)$
$= 1 - P(Z < 0.25)$
$= 1 - 0.5987 = 0.4013$

---

(21) إذا كانت مُعدَّلات 600 طالب تتبع توزيعًا طبيعيًا، وسطه الحسابي هو 73، وانحرافه المعياري هو 8، وقرَّرت إدارة المدرسة تكريم الطلبة الخمسين الحاصلين على أعلى المُعدَّلات من بين هؤلاء الطلبة، فما أقل مُعدَّل للطلبة الخمسين؟

نفرض a هو المعادل المطلوب
نفرض p هو احتمال أن يكرم الطالب أي احتمال أن يحصل على معدل أعلى من a أو يساويه

$$n = 600 \times p = 50 \Rightarrow p = \frac{50}{600} \approx 0.0833$$

إذا احتمال ان يتم تكريم الطالب (أي أن يحصل على معدل فوق a أو يساويه) هو 0.0833

$P(X \geq a) = p\left(Z \geq \frac{a-73}{8}\right)$
$= 1 - P\left(Z < \frac{a-73}{8}\right)$
$\Rightarrow 0.0833 = 1 - p\left(Z < \frac{a-73}{8}\right)$
$\Rightarrow p\left(Z < \frac{a-73}{8}\right) = 1 - 0.0833$
$\Rightarrow p\left(Z < \frac{a-73}{8}\right) = 0.9167$
$\Rightarrow \frac{a-73}{8} = 1.38 \Rightarrow a - 73 = 11.04$
$\Rightarrow a = 84.04$
إذا أقل معدل للطلبة الخمسين هو 84.04

أخذت نور تُراقِب السيّارات المارَّة أمام منزلها .إذا كان احتمال أنْ تكون أيُّ سيّارة تمرَّ من أمام منزلها صفراء اللون هو 0.1، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

(21) احتمال عدم مرور أيِّ سيّارة صفراء من بين أوَّل 5 سيّارات مرَّت أمام المنزل

هذا الاحتمال يساوي احتمال أن السيارات الخمس الأولى جميعها لم تكن صفراء و بالتالي :
$p = (0.9)^5 \approx 0.590$
ويمكن ملاحظة أن $X \sim Geo\ (0.1)$ حيث X عدد السيارات التي تمر حتى مرور أول سيارة صفراء و يكون الاحتمال المطلوب هو :
$P(X > 5) = (1 - 0.1)^5 = (0.9)^5 \approx 0.590$

(22) احتمال مرور أكثر من 3 سيّارات حتى شاهدت نور أوَّل سيّارة صفراء
$P(X > 3) = (1 - 0.1)^3 = (0.9)^3 = 0.729$

---

(12) أصلح عبد الله مُحرِّك إحدى السيّارات، لكنَّه لم يستطع تجربة تشغيله إلّا مَرَّة واحدة كل 20 دقيقة نتيجة خلل كهربائي. إذا كان احتمال أنْ يعمل المُحرِّك عند محاولة تشغيله هو 0.4، فما احتمال أنْ يعمل المُحرِّك أوَّل مَرَّة بعد مُضِيِّ أكثر من ساعة على محاولة إصلاحه؟
إذا كان X عدد محاولات تشغل المحرك حتى يشتغل لأول مرة فإن :

$X \sim GeO\ (0.4)$
$P(t > 1) = P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$
$= 1 - (P(X = 1) + P(X = 2))$
$= 1 - ((0.4)(0.6)^0 + (0.4)(0.6)^1)$
$= 1 - (0.4 + 0.24) = 1 - 0.64 = 0.36$

مثال : يريد مُراسِل صحفي إجراء مقابلات مع عدد من زوّار مركز تجاري، وسؤالهم عن مشاهدة آخر مباراة لكرة القدم، ثم التوقُّف عن ذلك عند مقابلته أوَّل شخص شاهد المباراة .إذا كانتلديه إحصائية تشير إلى أنَّ ما نسبته 5 %من سكّان المدينة قدشاهدوا المباراة، فكم زائرًا يُتوقَّع أنْ يسأله المُراسِل قبل مقابلته شخصًا شاهد المباراة؟

بما أنَّ مقابلة الزوّار في المركز التجاري ستستمر حتى الالتقاء بأوَّل شخص شاهد المباراة، فإنَّه يُمكِن استعمال توقُّع المُتغيِّر العشوائي الهندسي $X \sim Geo(0.05)$ لتعرُّف عدد مَنْ سألهم المُراسِل عن المباراة: $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.05} = 20$
إذن، يُتوقَّع أنْ يسأل المُراسِل 19 زائرًا قبل التقائه بأوَّل شخص شاهد المباراة.

---

(35) إذا كان: $X \sim B(21, p)$
فأجد قيمة p، $P(X = 10) = P(X = 9)$
$P(X = 10) = P(X = 9)$

$$\binom{21}{10}p^{10}(1-p)^{11}=\binom{21}{9}p^{9}(1-p)^{12}$$

بقسمة الطرفين على $p^9(1-p)^{11}$ ينتج أن :

$$\binom{21}{10}p=\binom{21}{9}(1-p)$$
$$\frac{21!}{11!10!}p=\frac{21!}{12!9!}(1-p)$$
$$\Rightarrow 12p=10(1-p)$$
$$\Rightarrow 6p=5-5p\Rightarrow p=\frac{5}{11}$$

---

b) تحتوي آلة حاسبة على 16 زرًّا للأعداد من 0 إلى 9، إضافةً إلى العمليات الأساسية، والمساواة، والفاصلة العشرية .إذا أغمض أحمد عينيه، ثم ضغط على أزرار هذه الآلة 20 مَرَّة بصورة عشوائية، فما احتمال أنْ يضغط على أزرار العمليات الحسابية الأساسية 3 مَرّات فقط؟

التجربة العشوائية المتكررة هي ذات حدين ، لأن هناك محاولات مستقلة متكررة (ظغط زر) و النجاح هو الظغط على أحد أزرار العمليات الحسابية الأساسية ، و الفشل هو الظغط على زر من باقي الازرار

احتمال النجاح في كل مرة ثابت وهو : $p=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ وعدد المحاولات محدد سلفاً هو : $n=20$ ليكن x عدد مرات النجاح :

$$\Rightarrow X\sim B\left(20,\frac{1}{4}\right)$$
$$P(X=3)=\binom{20}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(1-\frac{1}{4}\right)^{20-3}$$
$$=\binom{20}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{17}\approx 0.134$$

فحص مُراقِب الجودة في أحد المصانع 500 عيِّنة عشوائيًّا من الخلطات الخرسانية، فوجد أنَّ 10 منها لا تُطابِق المواصفات .إذا فحص مُراقِبالجودة 200 عيِّنة أخرى، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) العدد المُتوقَّع من العيِّنات التي لا تُطابِق المواصفات من العيِّنات العشرين التي فحصها مُراقِب الجودة.

ليكن X عدد العيانات التي لا تطابق المواصفات ضمن الـ 200 عينة التي اختارها المراقب اخيراً :

$$p=\frac{10}{500}=\frac{1}{50}\ \text{حيث اعتمدنا هنا}\Rightarrow X\sim B\left(200,\frac{1}{50}\right)$$

بالاستناد إلى الاحتمال التجريبي لاختيار عينة غير مطابقة الحاصل في الـ 500 عينة الأولى

$$E(X)=np=200\times\frac{1}{50}=4$$

لذا يتوقع وجود 4 عينات لا تطابق المواصفات ضمن هذه العينات الـ 200

إذا كان عدد الطلبة في أحد الصفوف 25 طالبًا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

(40) احتمال أنْ يكون طالب واحد فقط من مواليد شهر آذار

ليكن X عدد الطلبة المولودين في شهر أذار

$$X\sim B\left(25,\frac{31}{365}\right)=B(25,0.085)$$

وذلك لأن احتمال النجاح في كل مرة هو :

$$p=\frac{31}{356}\approx 0.085$$
$$P(X=1)=\binom{25}{1}(0.085)^1(0.915)^{24}\approx 0.252$$

(41) احتمال أنْ يكون 3 طلبة فقط من مواليد شهر آذار

$$P(X=3)=\binom{25}{3}(0.085)^3(0.915)^{22}\approx 0.200$$

(42) احتمال أنْ يكون اثنان من الطلبة فقط من مواليد فصل الشتاء

ليكن X عدد الطلبة المولودين في فصل الشتاء

$$X\sim B(25,p)=B(25,0.25)$$

حيث P هو أحتمال أن أي منهم مولود في فصل الشتاء $P=\frac{1}{4}$

$$P(X=2)=\binom{25}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{23}\approx 0.025$$

---

(43) إذا كان $X\sim B(30,0.1)$ فأجد: $P(\mu\le X<\mu+\sigma)$.

$$\mu=E(X)=np=30(0.1)=3$$
$$\sigma=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{30(0.1)(0.9)}=\sqrt{2.7}$$
$$\approx 1.643$$
$$P(\mu\le X<\mu+\sigma)=P(3\le X<4.693)$$
$$=P(X=3)+P(X=4)$$
$$=\binom{30}{3}(0.1)^3(0.9)^{27}+\binom{30}{4}(0.1)^4(0.9)^{26}$$
$$=0.2361+0.1771\approx 0.413$$

يُمثِّل $X\sim N(4.5,\sigma^2)$ المُتغيِّر العشوائي الطبيعي لكتل أكياس السُّكَّر (بالكيلوغرام)التي يُنتِجها أحد المصانع .إذا زادت كتلة 3 %فقط منها على 4.8 kg، فأجد الانحراف المعياري لكتل أكياس السُّكَّر.

$$P(X>4.8)=0.03\Rightarrow P(Z>z)=0.03$$

الاحتمال المعطى (0.03) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5: إذا z موجبه

$$\Rightarrow P(Z<z)=1-0.03=0.97$$
$$\Rightarrow z=1.88\Rightarrow\frac{4.8-4.5}{\sigma}=1.88\Rightarrow\sigma=\frac{0.3}{1.88}\approx 0.16$$

يُمثِّل $X\sim N(4.5,\sigma^2)$ المُتغيِّر العشوائي الطبيعي لكتل أكياس السُّكَّر (بالكيلوغرام)التي يُنتِجها أحد المصانع .إذا زادت كتلة 3 %فقط منها على 4.8 kg، فأجد الانحراف المعياري لكتل أكياس السُّكَّر.

$$P(X>4.8)=0.03\Rightarrow P(Z>z)=0.03$$

الاحتمال المعطى (0.03) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5: إذا z موجبه

$$\Rightarrow P(Z<z)=1-0.03=0.97$$
$$\Rightarrow z=1.88\Rightarrow\frac{4.8-4.5}{\sigma}=1.88\Rightarrow\sigma=\frac{0.3}{1.88}\approx 0.16$$

أحدِّد فترتين تقع في كلٍّ منهما تقريبًا النسبة المعطاة للطالبات علماً بأن الوسط الحسابي 162 و الانرحاف المعياري 6.3

25) 81.5%

نختار أولا البحث عن فترة من الشكل $[-2,z]$ حيث

$$P(-2<Z<z)=0.815$$
$$\Rightarrow P(Z<z)-P(Z<-2)=0.815$$
$$\Rightarrow P(Z<z)-(1-P(Z<2))=0.815$$
$$\Rightarrow P(Z<z)+P(Z<2)-1=0.815$$
$$\Rightarrow P(Z<z)+P(Z<2)=1.815$$
$$\Rightarrow P(Z<z)+0.9772=1.815$$
$$\Rightarrow P(Z<z)=0.8387$$
$$\Rightarrow z=0.99$$

إذا الفترة المطلوبة لقيم z هي $[-2,0.99]$

$$\frac{x_1-162}{6.3}=-2\Rightarrow x_1=149.4$$
$$\frac{x_2-162}{6.3}=0.99\Rightarrow x_2=168.23$$

إذا الفترة $[149.4,168.23]$ من الاطوال تحوي 81.5% من الطالبات

* نختار أيضا البحث عن فترة على شكل $[-z,z]$ بحث $P(-z<Z<z)=0.815$

$\Rightarrow P(Z<z)-P(Z<-z)=0.815$
$\Rightarrow P(Z<z)-(1-P(Z<z))=0.815$
$\Rightarrow 2P(Z<z)-1=0.815$
$\Rightarrow P(Z<z)=0.9075$
$\Rightarrow z=1.32$

إذا الفترة المطلوبة لقيم z هي : $[-1.32, 1.32]$

$\frac{x_1-162}{6.3}=-1.32 \Rightarrow x_1=153.684\approx 153.7$
$\frac{x_2-162}{6.3}=1.32\Rightarrow x_2=170.316\approx 170.3$

إذا الفترة $[153.7,170.3]$ من الأطوال تحوي تقريبا 81.5% من الطالبات

---

(42) إذا كان $P(X>35)=0.025, P(X<15)=0.1469, X\sim N(\mu,\sigma^2)$ فأجد قيمة كلٍّ من μ و σ مُبرِّرًا إجابتي

$P(X<15)=P\left(Z<\frac{15-\mu}{\sigma}\right)=0.1469$

نفرض أن $z=\frac{15-\mu}{0}$ فيكون $P(Z<z)=0.1469$

الاحتمال المعطى (0.1469) يمثل مساحة التي تقع يسار القيمة z هو أقل من 0.5 إذا z سالبة

$\Rightarrow P(Z<-z)=P(Z>z)$
$0.1469=1-P(Z<z)$
$P(Z<z)=1-0.1469=0.8531$
$\Rightarrow z=1.05$

إذا قيمة z التي تحقق الاحتمال المعطى هي 1.05 –

$\Rightarrow \frac{15-\mu}{\sigma}=-1.05$
$\Rightarrow 15-\mu=-1.05\sigma \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$
$P(X>35)=P\left(Z>\frac{35-\mu}{\sigma}\right)=0.025$

نفرض أن : $Z=\frac{35-\mu}{\sigma}$ فيكون $P(Z>z)=0.025$

الاحتمال المعطى (0.025) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5 إذا z موجبة

$\Rightarrow P(Z<z)=1-P(Z>z)$
$=1-0.025=0.975$
$\Rightarrow z=1.96 \Rightarrow \frac{35-\mu}{\sigma}=1.96$
$\Rightarrow 35-\mu=1.96\sigma \ldots\ldots(2)$
$(2)-(1): 20=3.01\sigma$
$\Rightarrow \sigma\approx 6.64, \mu\approx 22$

---

(43) تقدَّم 100000 طالب لاختبار دولي، وبلغ عدد الطلبة الذين زادت علاماتهم في الاختبار على 90 %نحو 10000 طالب، منهم 5000 طالب أحرزوا علامات أكثر من 95 . إذا% كانت علامات الطلبة المُتقدِّمين تتبع توزيعًا طبيعيًّا، فأجد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري للعلامات.

$P(X>90)=P\left(Z>\frac{90-\mu}{\sigma}\right)=\frac{10000}{100000}=0.1$

نفرض أن $Z=\frac{90-\mu}{\sigma}$ فيكون $P(Z>z)=0.1$

الاحتمال المعطى (0.1) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5 إذا z موجبة

$\Rightarrow P(Z<z)=1-P(Z>z)$
$=1-0.1=0.9$
$\Rightarrow z=1.28\Rightarrow \frac{90-\mu}{\sigma}=1.28$
$\Rightarrow 90-\mu=1.28\sigma\ldots(1)$
$P(X>95)=P\left(Z>\frac{95-\mu}{\sigma}\right)=\frac{5000}{100000}=0.05$

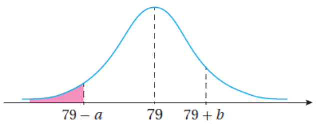
نفرض أن : $Z=\frac{95-\mu}{\sigma}$ فيكون $P(Z>z)=0.05$

الاحتمال المعطى (0.05) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5 إذا z موجبة

$\Rightarrow P(Z<z)=1-P(Z>z)$
$=1-0.05=0.95$
$\Rightarrow z=1.64\Rightarrow\frac{95-\mu}{\sigma}=1.64$
$\Rightarrow 95-\mu=1.64\sigma\ldots.(2)$
$(2)-(1):5=0.36\sigma\Rightarrow\sigma\approx 13.89,\mu\approx 72.22$

يُبيّن الشكل المجاور منحنى التوزيع الطبيعي للمُتغيّر العشوائي X الذي وسطه الحسابي 79، وتباينه 144 . إذا كان $P(79-a\le X\le 79+b)=0.6463$ وكان $P(X\ge 79+b)=2P(X\le 79-a)$: فأجد كُلًّا ممّا يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:

(45) مساحة المنطقة المُظلَّلة



المساحة الكلية تحت المنحنى هي 100%

المساحة تحت المنحنى بين القيمتين $79+b$ و $79-a$ هي 64.63%

إذا المساحة تحت المنحنى خارج القيمتين $79+b$ و $79-a$ هي : $100\%-64.63\%=35.37\%$ وهي تمثل منطقتين إحداهما مساحتها ضعف الاخرى (حسب المعطى) فتكون مساحة المنطقة المظللة تساوي : $\frac{35.37\%}{3}=11.79\%$

أو نكتب :

$P(79-a\le X\le 79+b)$
$=P(X\le 79+b)-P(X\le 79-a)$
$\Rightarrow P(X\le 79+b)-P(X\le 79-a)=0.6463\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

ونعلم أن $P(X\ge 79+b)=2P(X\le 79-a)$:

$\Rightarrow 1-P(X<79+b)=2P(X\le 79-a)$
$\Rightarrow P(X<79+b)+2P(X\le 79-a)=1\cdots(2)$
$(2)-(1)\Rightarrow 3P(X\le 79-a)=0.3537$
$\Rightarrow P(X\le 79-a)=0.1179$

و $P(X\ge 79+b)=0.2358$

إذا مساحة المنطقة المظللة تساوي :

$P(X\le 79-\alpha)=0.1179$

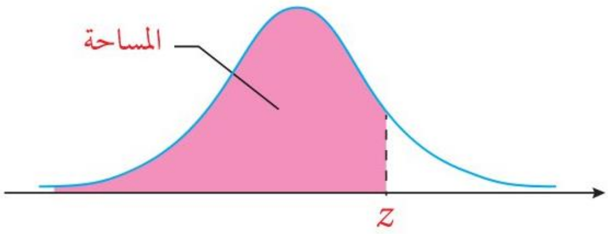
(46) قيمة الثابت b.

وجدنا في السؤال السابق أن :

$P(X\ge 79+b)=0.2358$
$\Rightarrow P\left(Z\ge\frac{79+b-79}{12}\right)=0.2358$
$\Rightarrow P\left(Z\ge\frac{b}{12}\right)=0.2358$

نفرض أن $\frac{b}{12}=z$:

$P(Z\ge z)=0.2358$
$\Rightarrow P(Z<z)=1-0.2358=0.7642$
$\Rightarrow z=0.72\Rightarrow\frac{b}{12}=0.72\Rightarrow b=8.64$



جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998