标题：一份LaTeX笔记模板

副标题

作者名称

封面日期： 2025 年 4 月 16 日

前言标题

这是一个基于LaTeX的模板，用于撰写学习笔记。

模板旨在提供一个简单、易用的框架，以便你能够专注于内容，而不是排版细节，如不是专业者，不建议使用者在模板细节上花费太多时间，而是直接使用模板进行笔记撰写。遇到问题，再进行调整解决。

前言页显示日期： 2025 年 4 月 16 日

目录

第零章　对策论

Definition 0.0.1. **博弈**是指在一个特定的环境中，多个参与者（称为博弈者）通过选择策略来影响结果的过程。博弈论研究这些博弈的性质、策略选择和结果。

博弈模型 $G = \{I, II; S_1, S_2; A\}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

如果存在

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*} = V_G$$

则 $(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$ 为矩阵博弈的最优纯策略对，也称为最优局势。V_G 称为博弈值。

矩形博弈最优纯策略对存在的充要条件是存在鞍点。

$$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j} \quad (\text{鞍点条件})$$

$$\max_i a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le \min_j a_{i^*j}$$

Proof. 必要性

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

$$\exists i^*, j^* \quad \min_j a_{i^*j} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \max_i a_{ij^*}$$

$$a_{i^*j^*} \ge \min_j a_{i^*j} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \max_i a_{ij^*} \ge a_{i^*j^*}$$

$$\min_j a_{i^*j} = \max_i a_{ij^*} = a_{i^*j^*} \quad \Rightarrow \quad a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$$

充分性

$$a_{ij*} \le a_{i*j*} \le a_{i*j}$$

$$\max_i a_{ij*} \le a_{i*j*} \le \min_j a_{i*j}$$

$$\min_j \max_i a_{ij} \le a_{i*j*} \le \max_i \min_j a_{ij}$$

又根据

$$\max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij}$$

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

□

当我们找到这样一组决策时,对于任何其他决策和双方决策者,我们都不能得到更好的结果,这就是鞍点的意思。

Remark. 纳什均衡解 $\leftrightarrow$ 最优纯策略对

多个均衡解的性质:

- 无差别性
- 可交换性
- 存在无策略解，此时选择随机策略

Definition 0.0.2. 博奕模型 $G^* = \{S_1^*, S_2^*; E\}$

▷ 混合策略集

$$S_1^* = \left\{ x \in R^m \mid x_i \ge 0,\ i = 1, 2, \cdots, m; \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$$

x_i 为局中人I执行纯策略 α_i 的概率

$$S_2^* = \left\{ y \in R^n \mid y_j \ge 0,\ j = 1, 2, \cdots, n; \sum_{j=1}^n y_j = 1 \right\}$$

y_j 为局中人II执行纯策略 β_i 的概率

▷ 局中人I的赢得函数: $E(x, y) = x^T A y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$

▷ 局中人II的赢得函数: $-E(x, y)$

如果双方都是理性决策

- 局中人I的最大预期赢得:

$$\max_{x\in S_1}\min_{y\in S_2} E(x,y)$$

- 局中人II的最小预期损失:

$$\min_{y\in S_2}\max_{x\in S_1} E(x,y)$$

两者关系:

$$\max_{x\in S_1}\min_{y\in S_2} E(x,y) \leq \min_{y\in S_2}\max_{x\in S_1} E(x,y)$$

混合策略

$$\mathbf{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_m]^T \quad \mathbf{y}=[y_1,y_2,\cdots,y_n]^T$$

Theorem 0.0.1. 最优混合策略对/均衡解存在的充要条件：存在鞍点

$$E(x,y^*) \leq E(x^*,y^*) \leq E(x^*,y)$$

Proof. 一定存在混合策略对意义下的矩阵博弈均衡解

∃x*,y*满足:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j^*x_i = E(x,y^*) \leq E(x^*,y^*) \leq E(x^*,y) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i^*y_j^*$$

鞍点条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j^* \leq E(x^*,y^*) \leq \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i^* \quad \forall i=1,2,\cdots,m \quad \forall j=1,2,\cdots,n$$

一方采用纯策略，一方采用最优混合策略

$$\exists v = E(x^*,y^*)$$

使下面2组不等式均有解

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i^* \geq v \quad j=1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* = 1 \quad x_i^* \geq 0 \quad i=1,2,\cdots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le v \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^* = 1 \quad y_j^* \ge 0 \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

使得对偶问题均有可行解，且 $w^* = v^* = E(x^*, y^*)$

可以验证

$$\mathbf{x} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \quad w = \min a_{1j}$$

$$\mathbf{y} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \quad v = \max a_{i1}$$

原问题有可行解同时对偶问题也有可行解

故有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* = v^* = w^* = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \quad \text{强对偶性}$$

又根据：

$$E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* y_j^* = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \right) x_i^* \le v^* \sum_{i=1}^{m} x_i^* = v^*$$

$$E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* y_j^* = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \right) y_j^* \ge w^* \sum_{j=1}^{n} y_j^* = w^*$$

$$w^* = v^* = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

□

Theorem 0.0.2. 从两个互为对偶的线性规划问题里，我们有互补松弛性

$$x_i^* > 0 \implies \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* = v^* = E(x^*, y^*)$$

$$y_j^* > 0 \implies \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* = w^* = E(x^*, y^*)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* < v^* = E(x^*, y^*) \implies x_i^* = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* > w^* = E(x^*, y^*) \implies y_j^* = 0$$

如果某条纯策略在均衡解中有被选择的可能，则对手的最优混合策略在该纯策略下的赢得值不会比 V_G 更好。

如果某条纯策略下对手的最优混合策略的赢得值比 V_G 更好，则该纯策略在均衡解中无被选择可能。

解集T(G)：博弈G的均衡解集合。

赢得矩阵严格单调变换下的解集不变性

博弈：

$$G_1 = \{S_1, S_2; A_1\}$$

$$G_2 = \{S_1, S_2; A_2\}$$

$$A_2 = A_1 + L * 1_{m\times n} \quad\Longrightarrow\quad T(G_1) = T(G_2) \quad V_{G_1} = V_{G_2} + L$$

$$A_2 = aA_1 \quad a > 0 \quad\Longrightarrow\quad T(G_1) = T(G_2) \quad V_{G_1} = aV_{G_2}$$

Proof. 证明：上述变换只改变了赢得矩阵元素的数值，不改变相对大小关系。 □

如果博弈问题具有如下对称性：

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$$

自身角度的赢得矩阵相同

$$T_{\mathrm{I}}(G) = T_{\mathrm{II}}(G) \quad a_{ij} = \begin{cases} -a_{ji} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

$$V_G = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i^*x_j^* = -V_G = 0$$

这场游戏没有赢家，可以近似的理解为双方的损失相同。

互补松驰性方程组

$$x_i^* > 0 \quad\Rightarrow\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j^* = v^* = E(x^*, y^*) \quad i \in \{1, 2, \cdots, m\}$$

$$y_j^* > 0 \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i^* = w^* = E(x^*, y^*) \quad j \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^* = 1$$

可以理解为对于均衡解，每条纯策略在对方的混合策略下都是相等且最优的。

Example 0.0.1. 田忌赛马

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

任何一条纯策略均是对方特定策略下的唯一赢得策略，**也就是说都有赢的可能**，故有

$$x_i^* > 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$y_j^* > 0 \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

利用线性规划求解博弈问题

$$\begin{aligned} \max \quad & w \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq w \quad j = 1, 2, \cdots, n \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m \end{aligned} \tag{1}$$

$$x_i' = \frac{x_i}{w} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{m} x_i' = \frac{1}{w} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i' \geq 1 \quad j = 1, 2, \cdots, n \\ & x_i' \geq 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m \end{aligned} \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & v \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq v \quad i = 1, 2, \cdots, m \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\
& y_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned} \tag{4}
$$

$$
y_j' = \frac{y_j}{v} \tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{j=1}^{n} y_j' = \frac{1}{v} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j' \leq 1 \quad i = 1, 2, \cdots, m \\
& y_j' \geq 0 \quad j = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned} \tag{6}
$$

囚徒困境的纯策略解

$$
A = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ -15 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -9 & -15 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

局中人I选择:

$$
j_i^*(B) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad i_j^*(A) = 1 \quad \Rightarrow \quad (i^*, j^*) = (1, 1)
$$

局中人II选择:

$$
i_j^*(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad j_i^*(B) = 1 \quad \Rightarrow \quad (i^*, j^*) = (1, 1)
$$

Definition 0.0.3. Nash均衡点

满足以下条件的策略对 $(\alpha_{i*}, \beta_{j*})$

$$
a_{i*j*} \geq a_{ij*} \quad i = 1, 2, \cdots, m
$$

$$
b_{i*j*} \geq b_{i*j} \quad j = 1, 2, \cdots, n
$$

没有一个局中人愿意单方面改变策略