第一章　运输问题、目标规划、整数规划

1.1　运输问题

Definition 1.1.1. 生产平衡问题的一般模型

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, ..., m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, ..., n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., m; \quad j = 1, 2, ..., n$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

rank(A) = m+n-1 (约束有1个冗余)的解释:

m个产地,n个销地，只要满足m+n-1，最后一个自动满足

1. 西北角法：优先选择西北角的运输方案
2. 最小元素法：优先选择运费最小的方案
3. Vogel法：优先考虑次小运费和最小运费差额大的方案。

前两个省略，伏格尔法的基本思想是，如果次小运费和最小运费的差额很大，**不早点占住小运费的地方，就会导致差可行解。**

何老师的两个问题: 1、闭回路是否一定存在？ 2、闭回路是否唯一？

对于第一个问题，闭回路是肯定存在的，闭回路实际上是单纯形法出基入基在运输问题的特殊体现，单纯形法显然总能出基入基，所以一定可以找到闭回路。

对于第二个问题，闭回路是唯一的。

Proof. 假设存在两个环路，对于同一个非基变量，那么可以合并为一个只含基变量的环路

等价于一个基变量对应的方案可以由其他基变量对应的方案表出，这和基变量的定义矛盾。 □

Remark. 除了用闭回路来求检验数和出基入基，实际上还可以用位势法来求检验数，而且快的多，还是解析解法。

位势法求检验数:

$$\sigma_j = c_j - C_B B^{-1} P_j = c_j - Y^T P_j$$

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - [u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_n] P_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

对应m+n-1个基变量，有 $\sigma_{ij} = 0$，则:

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

共有m+n个变量，m+n-1个等式，故解不唯一，称为位势。根据位势求非基变量对应的 σ_{ij}。

这里我们常常令$u_1 = 0$

1.2 目标规划

Definition 1.2.1. 目标规划的思想和方法

思想：将定量技术和定性技术结合，承认矛盾、冲突的合理性，强调通过协调，达到总体和谐

方法：软约束+优先级

Example 1.2.1. 电视机厂装配25寸和21寸两种彩电，每台电视机需装备时间1小时，每周装配线计划开动40小时，预计每周25寸彩电销售24台，每台可获利80元，每周21寸彩电销售30台，每台可获利40元。

该厂目标：

1. 避免开工不足。 2. 允许装配线加班，但尽量不超过10小时。 3. 尽量满足市场需求，尤其是25寸彩电。

解：设 x_1, x_2 分别表示25寸，21寸彩电产量，目标函数为：

$$\min Z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3(W_{33}^- d_3^- + W_{34}^- d_4^-)$$

其中，P_1, P_2, P_3 是目标函数的权重系数。

约束条件为：

$$x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40 \quad \text{（上班时间约束）}$$

$$x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 50 \quad \text{（加班时间约束）}$$

$$x_1 + d_3^- - d_3^+ = 24 \quad \text{（25寸市场需求）}$$

$$x_2 + d_4^- - d_4^+ = 30 \quad \text{（21寸市场需求）}$$

其中，$x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0$，并且有互补松弛条件：

$$d_i^- \cdot d_i^+ = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Remark. 优先因子：P表明第i个目标的重要程度

权重系数：W表明相同优先因子目标的权重

何老师的两个问题:

1. 高一级的目标没有满足？低一级的目标是否还有满足机会？

2. $d_i^- \cdot d_i^+ = 0$ 为什么可不考虑？

对于第一个，高一级满足了才能满足低一级，这是优先级不可逆性。

对于第二个，从直接上讲，生产不可能既过剩又短缺，所以不需要多此一举。同时，从数学上讲，对于相同的X,如果其一不为0，说明没优化到最优解，还可以再优化。

何老师的第三个问题:对于目标规划问题，整体求解和序贯求解哪种更好？

从优先级的不可逆性上讲，二者是等价的。

1.3 整数规划问题

Definition 1.3.1. 分支定界法

用于求解整数规划问题，思想是对(极大化的)整数规划问题进行线性松弛，求得最大值，然后在分支的整数规划问题的可行解里求得最小值，直到最后收敛。

1. **求解整数规划问题：**

   - 对于整数规划问题 A，首先解其相应的线性规划问题 B。

- **若** B 没有可行解，**则** A 也没有可行解，停止。
- **若** B 有最优解且符合整数条件，**则** B 此时的最优解即为 A 的最优解。
- **若** B 有最优解但不符合整数条件，**则** 记此时 B 的目标函数值为 Z（上界），那么 A 的目标函数值 $z^* \leq Z$。

2. **寻找整数可行解：**
   - 使用观察法或试探法找到一个整数可行解，通常取简单的组合数进行试探，如：$(0,1),(0,2)$ 等。
   - 计算该解的目标函数值，并记其为 Z，那么此时有 $Z \leq z^* \leq Z$。
3. **迭代过程：**
   - 使用分支定界法的迭代过程进行求解，不断对问题进行分支，选择潜在的解空间进行进一步求解。
   - 每次通过分支操作将问题分解为子问题
     生成新的约束并更新当前的上界和下界。
   - 在每一分支时，若子问题的下界大于当前的上界，则可舍弃该分支，继续探索其他分支。
   - 最终通过迭代找到整数解 z^*。

Definition 1.3.2. 割平面法

割平面的思想是构造可行割，让原来整数规划问题的整数最优解一定满足，但是切割掉了原来可行域的平面，缩小了搜索范围。

Example 1.3.1. 求解

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$$

不考虑整数条件

增加松弛变量

$$\max \quad z = x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} -x_1+x_2+x_3=1 \\ 3x_1+x_2+x_4=4 \\ x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0 \end{cases}$$

这时对于这个线性规划问题，我们可以进行单纯形法的求解，得到变换后的A。

(为什么不一开始就用添加可行割的方法?一开始你也不知道是哪个变量不是整数)

$$\begin{aligned} x_1-\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4&=-\frac{3}{4} \\ x_2+\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4&=-\frac{7}{4} \end{aligned}$$

将系数和常数项均分解成整数与非负真分数之和移项

$$\begin{aligned} x_1-x_3&=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4\right) \\ x_2-1&=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4\right) \end{aligned}$$

Remark. 左边起到整数约束的作用

如果你检测下就会发现，添加的可行割让所有整数解都满足了，但是约束到了原来的线性规划的解。

Example 1.3.2. 如果m个互相排斥的约束条件（≤型）：

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\leq b_i,\text{其中}i=1,2,\cdots,m$$

为了保证这m个约束条件只有一个起作用，引入m个0-1变量$y_i(i=1,2,\cdots,m)$和一个充分大的数M，从而约束条件可以变为：

$$\begin{cases} y_1+y_2+\cdots+y_m=m-1 \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\leq b_i+y_iM,\text{其中}i=1,2,\cdots,m \end{cases}$$

其中，M这个充分大的数保证了当$y_i=1$时，对应的约束条件是多余的。

Remark. 0-1型整数规划

这类问题我们一般使用隐枚举法(可以大致理解为特殊的分支定界法)

何老师的问题:隐枚举法这样操作是否还能提速?

可以的兄弟!只要调换枚举顺序就可以了。先枚举$X=[0,0,\cdots,0]^T$，再从价格系数高的开始枚举就可以了。

Definition 1.3.3. 指派问题标准形式

$$\min z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1\quad \text{每个人有且只有一项工作}$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1\quad \text{每项工作有且只有一个人}$$

$$x_{ij}=0\text{或}1\quad i,j=1,2,\ldots,n;$$

指派问题是特殊的运输问题

对于指派问题，我们使用匈牙利算法来求解。基本思想是，每一行对应一个产地，每一列对应一个销地，先对每一行进行减法操作，然后对每一列进行减法操作，最后得到一个矩阵。

这个新的成本矩阵和原矩阵最优解一样(每条路都打折，等于没打折)

Definition 1.3.4. 独立零元素

位于不同行、不同列的零元素，称为独立零元素。

系数矩阵C中独立零元素的个数最多等于能覆盖所有零元素的最少直线数。

我们可以用独立零元素(实际上只要有一个基准值就行了，不用是零)，如果独立零元素个数等于n，说明我们找到了一个最优解。

Remark. 可能有多个最优解