1. 轴向拉伸 / 压缩

$$
\begin{aligned}
&N \quad \text{—— 轴向内力（拉力为正，压缩为负）}, && (1)\\
&\sigma = \frac{F}{A}, && (2)\\
&\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{A\,E}, && (3)\\
&\delta = \varepsilon\,L = \frac{F\,L}{A\,E}, && (4)\\
&u = \int_0^{\varepsilon} \sigma\,d\varepsilon = \frac{1}{2}E\,\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2\,E} = \frac{F^2}{2\,A\,E}, && (5)\\
&U = u\,(A\,L) = \frac{F^2\,L}{2\,A\,E}. && (6)
\end{aligned}
$$

2. 固定端扭转（圆轴扭转）

$$
\begin{aligned}
&T \quad \text{—— 扭矩（顺时针为正）}, && (7)\\
&\tau(\rho) = \frac{T\,\rho}{I}, \quad \tau_{\max} = \frac{T\,r}{I}, && (8)\\
&\theta = \frac{T\,L}{G\,I}, && (9)\\
&\gamma(\rho) = \frac{\rho}{L}\theta = \frac{T\,\rho}{G\,I}, && (10)\\
&U = \int_0^L \Big(\int_A \frac{\tau^2}{2\,G}\,dA\Big)\,dx = \frac{T^2\,L}{2\,G\,I_\rho}. && (11)
\end{aligned}
$$

3. 纯弯曲（直梁截面弯曲）

$$
\begin{aligned}
&M \quad \text{—— 弯矩（正方向按右手定则）}, && (12)\\
&\sigma_b(y) = \frac{M\,y}{I_z}, \quad \text{其中 } I_y \text{ 为绕中性轴的截面惯性矩}, && (13)\\
&\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E\,I_z}, \quad \rho = \frac{E\,I_z}{M}, && (14)\\
&\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{E\,I_z}, && (15)\\
&u = \int_0^{\varepsilon_b} \sigma_b\,d\varepsilon_b = \int_0^{\sigma_b} \frac{\sigma}{E}\,d\sigma = \frac{\sigma_b^2}{2\,E} = \frac{M^2\,y^2}{2\,E\,I_z^2}, && (16)\\
&U = \int_0^L \Big(\int_A \frac{\sigma_b^2}{2\,E}\,dA\Big)\,dx = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2\,E\,I_z}\,dx. && (17)
\end{aligned}
$$

4. 组合工况总应变能

若杆件同时受轴向力 N、弯矩 $M(x)$、扭矩 T，且截面各参数视为常数，则应变能叠加：

$$U_{总} = \underbrace{\frac{N^2 L}{2AE}}_{U_{轴向}} + \underbrace{\int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI_z}\,dx}_{U_{弯曲}} + \underbrace{\frac{T^2 L}{2GI}}_{U_{扭转}}.$$

若截面沿长度变化，则保留积分形式：

$$U_{轴向} = \int_0^L \frac{N^2}{2A(x)E}\,dx, \tag{18}$$

$$U_{弯曲} = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI_z(x)}\,dx, \tag{19}$$

$$U_{扭转} = \int_0^L \frac{T^2}{2GI(x)}\,dx. \tag{20}$$

5. 常用截面参数（附录）

1. 矩形截面（宽 b，高 h）

$$A = bh, \tag{21}$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12}, \quad \text{（绕竖直 } y \text{ 轴的惯性矩），} \tag{22}$$

$$I_z = \frac{hb^3}{12}, \quad \text{（绕水平 } z \text{ 轴的惯性矩），} \tag{23}$$

$$W_y = \frac{I_y}{h/2} = \frac{bh^3}{12}\Big/\frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}, \quad \text{（绕 } y \text{ 轴的截面模数），} \tag{24}$$

$$W_z = \frac{I_z}{b/2} = \frac{hb^3}{12}\Big/\frac{b}{2} = \frac{hb^2}{6}, \quad \text{（绕 } z \text{ 轴的截面模数），} \tag{25}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{bh^3}{12}}{bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}}, \quad \text{（绕 } y \text{ 轴的回转半径），} \tag{26}$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{hb^3}{12}}{bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}}, \quad \text{（绕 } z \text{ 轴的回转半径）.} \tag{27}$$

2. 圆形截面（半径 R）

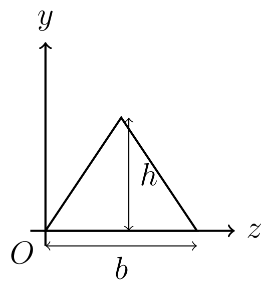
$$A = \pi R^2, \tag{28}$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{32}, \quad \text{（绕任意通过截面中心的直径方向）}, \tag{29}$$

$$W_y = W_z = \frac{I_y}{R} = \frac{\pi R^4}{4} \Big/ R = \frac{\pi R^3}{4}, \quad \text{（截面模数）}, \tag{30}$$

$$i_y = i_z = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi R^4}{4}}{\pi R^2}} = \frac{R}{2}. \tag{31}$$

这里给出三角形的惯性矩的推导:



首先我们知道了矩形的惯性矩公式：

$$I_y = \frac{h\, b^3}{12}, \quad I_z = \frac{b\, h^3}{12}.$$

对于三角形，两个三角形可以拼接为一个平行四边形，而平行四边形的惯性矩等于矩形。但是我们计算的三角形形心的惯性矩，这里要使用下平行轴定理:

$$2(I_{z\text{三角形}} + \frac{1}{2}bh \times (\frac{1}{6}h)^2) = \frac{1}{12}bh^3$$

解得$I_{z\text{三角形}} = \frac{1}{36}bh^3$:

3. 工字钢截面（示意）

工字钢截面形状较为复杂，一般分箱体域分段积分后求出：

$$I_y = \sum_{\text{翼缘、腹板}} I_{y,\text{分段}}, \quad I_z = \sum_{\text{翼缘、腹板}} I_{z,\text{分段}},$$

各分段按平行轴定理或差减法计算。截面模数：

$$W_y = \frac{I_y}{y_{\max}}, \quad W_z = \frac{I_z}{z_{\max}},$$

其中 $y_{\max}$ 为截面外缘距 y 轴的最大距离，$z_{\max}$ 为距 z 轴的最大距离。

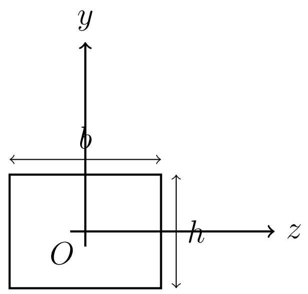


图 1: 矩形截面示意图：水平方向为 z 轴，竖直方向为 y 轴，中心为原点 O。

矩形截面与坐标轴示意图（TikZ）

6. 欧拉屈曲公式

6.1 临界屈曲载荷和应力

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E\, I}{(K\, L)^2}, \quad \text{（欧拉临界屈曲载荷）}, \tag{32}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E\, I}{A\,(K\, L)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad \text{其中 } \lambda = \frac{K\, L}{r},\ i = \sqrt{\frac{I}{A}}. \tag{33}$$

若 $\lambda \leq \lambda_0$，则柱在屈曲前可能先发生屈服，需比较 σ_{cr} 与材料屈服强度 σ_y。

$$\lambda_0 = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_y}}, \quad \text{（屈曲与屈服的分界长细比）}.$$

6.2 支撑条件与等效长度系数 K

在不同支撑条件下，柱的等效长度系数 K 如下表所示：

支撑条件	两端铰支	一端固接，一端自由	两端固接
K	1.0	2.0	0.7
示意图	铰支	一端固接 自由	两端固接

其中：

- **两端铰支**：两端可自由转动，无弯矩约束，此时 $K = 1.0$。折曲形状为半个正弦。
- **一端固接，一端自由**：一端固接，另一端自由悬臂，此时 $K = 2.0$。折曲形状为完整肘形。
- **两端固接**：两端均固定（无转动），此时 $K \approx 0.7$。精确值为 $K = 0.699\ldots$，常取 0.7。

6.4 屈曲长细比与失稳准则

- 屈曲长细比：$\lambda = \dfrac{K\,L}{i} = \dfrac{K\,L}{\sqrt{I/A}}$。当 λ 大于某临界值时，柱以屈曲方式失稳。
- 当 $\lambda \le \lambda_0 = \pi\sqrt{\dfrac{E}{\sigma_y}}$ 时，柱在压缩达到屈服前就会先屈服，此时不采用欧拉公式，而以材料屈服强度作为极限。
- 当 $\lambda > \lambda_0$ 时，柱会先发生弹性屈曲，临界载荷可用欧拉公式计算。

7. 纯弯曲挠度微分关系

7.1 符号说明

- x：梁的坐标轴，沿梁长度方向。
- $w(x)$：梁在 x 处的挠度（垂直位移），通常垂直于轴线，向下为正。
- $M(x)$：梁截面处的弯矩函数（关于中性轴）。
- E：材料杨氏模量。
- I_z：截面对中性轴的惯性矩。

7.2 挠度微分关系

在纯弯曲条件下（梁仅受弯矩作用，无轴向力、剪力或扭矩干扰），根据平截面假设和线性弹性，梁的挠度满足如下二阶微分方程：

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} \;=\; -\frac{M(x)}{E\,I}.$$

示例：简支梁上均布荷载的挠度

若梁两端简支，跨中受均布荷载 q，则弯矩函数为

$$M(x) \;=\; \frac{q\,L}{2}\,x - \frac{q}{2}\,x^2,$$

代入主方程可得：

$$\frac{d^2w}{dx^2} \;=\; \frac{q}{2\,E\,I}\big(L\,x - x^2\big).$$

对其两次积分并施加简支边界条件：

$$w(0) = 0, \quad w(L) = 0,$$

可求出跨中最大挠度：

$$w_{\max} = \frac{5\,q\,L^4}{384\,E\,I}.$$

8. 莫尔圆的知识点

8.1 平面应力下的应力变换方程

设某截面相对于 x 轴正方向逆时针旋转 θ 后，新的坐标轴为 x'–y'。此时在 x' 平面上的正应力 $\sigma_{x'}$ 和剪应力 $\tau_{x'y'}$ 表示为：

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\sin 2\theta, \tag{34}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\,\cos 2\theta. \tag{35}$$

同理，y' 面上的正应力为

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\,\sin 2\theta.$$

8.2 莫尔圆的构造要点

- 横坐标轴表示正应力 σ，纵坐标轴表示剪应力 τ，τ 轴正方向向上。
- 在 σ–τ 平面上作点 $A\big(\sigma_x,\,-\tau_{xy}\big)$ 和点 $B\big(\sigma_y,\,\tau_{xy}\big)$。
- 圆心 C 坐标为 $\big(\sigma_{\text{avg}},\,0\big)$：
$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}.$$
- 圆半径 R：
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$
- 过 A、B 两点作圆，即为莫尔圆。其上任一点 $(\sigma_n,\,\tau_n)$ 对应平面内倾角 θ 的截面应力：
$$\sigma_n = \sigma_{\text{avg}} + R\cos 2\phi, \quad \tau_n = R\sin 2\phi,$$
其中 2ϕ 是莫尔圆上该点与圆心连线与横轴的夹角，且 $\phi = \theta$（即平面内夹角对应莫尔圆上双倍角关系）。

8.3 主应力与最大剪应力

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{avg}} + R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \tag{36}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{\text{avg}} - R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \tag{37}$$

$$\tau_{\max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \tag{38}$$

主应力方向 θ_p（相对于 x 轴正向逆时针）满足：

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

最大剪应力平面方向 θ_s 满足：

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\,\tau_{xy}}.$$

8.4 莫尔圆示意图（TikZ）

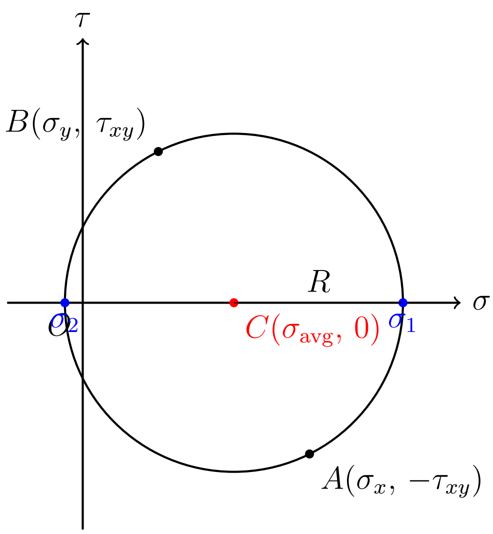


图 2: 莫尔圆示意图：点 $A(\sigma_x, -\tau_{xy})$ 与 $B(\sigma_y, \tau_{xy})$ 均在圆上，圆心 C 在 $(\sigma_{\text{avg}}, 0)$，主应力 σ_1, σ_2 分别对应最右、最左点。

9. 强度理论的分类及名称

9.1 第一类强度理论（脆性断裂的理论）

第一强度理论——最大拉应力理论：

$$\sigma_{r1} \;=\; \sigma_1.$$

第二强度理论——最大伸长线应变理论：

$$\sigma_{r2} \;=\; \sigma_1 \;-\; \nu\,(\sigma_2 + \sigma_3).$$

9.2 第二类强度理论（塑性屈服的理论）

第三强度理论——最大切应力理论：

$$\sigma_{r3} \;=\; \sigma_1 \;-\; \sigma_3.$$

第四强度理论——形状改变量能密度理论：

$$\sigma_{r4} \;=\; \sqrt{\frac{1}{2}\Big[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \;+\; (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \;+\; (\sigma_3 - \sigma_1)^2\Big]}.$$

10. 结构力学中的正对称与反对称

10.1 定义与基本分类

对于具有几何对称性的结构（例如梁、框架等），相对于其对称轴或对称面，可以将载荷、位移和内力分为两类：

- 正对称
  - **载荷、位移和内力沿对称轴（面）正对称分布。**
  - 载荷作用方向和大小在对称轴（面）两侧相同，变形形态关于对称轴（面）对称。
  - 内力如轴力和弯矩，沿对称轴分布且对称。
- 反对称
  - **载荷、位移和内力关于对称轴（面）反对称分布。**
  - 载荷方向相反或变号，变形关于对称轴（面）呈镜像反向。
  - 内力如剪力、扭矩沿对称轴反对称分布。

10.2 对称性对应的几何和物理特性

类别	**正对称位置**	**反对称位置**
荷载	沿对称轴	垂直于对称轴、弯矩
位移	沿对称轴	垂直于对称轴、转角
内力	轴力、垂直于对称轴的弯矩	剪力、沿对称轴的弯矩

表 1: 结构正对称与反对称载荷、位移和内力的分布特性

10.3 内力和变形特征

- 在 **正对称载荷**作用下，结构的内力和变形均呈正对称，即载荷、位移和内力分布在对称轴（面）两侧相同。
- 在 **反对称载荷**作用下，结构的内力和变形呈反对称，即载荷、位移和内力在对称轴（面）两侧大小相等但方向相反。
- 由于线性力学假设，结构的总响应可由正对称和反对称两部分叠加而成，彼此互不干扰。

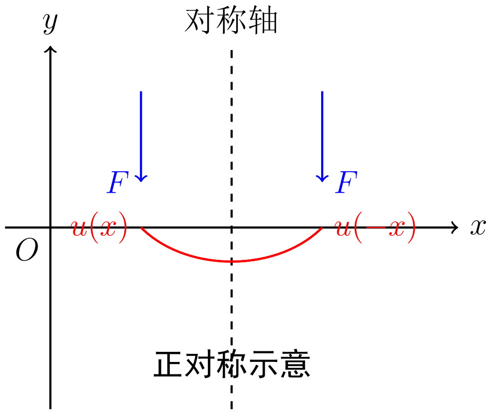


图 3: 正对称和反对称载荷与位移示意图：蓝色箭头表示载荷方向，红色曲线表示结构位移形态。

10.4 正对称与反对称示意图（TikZ）

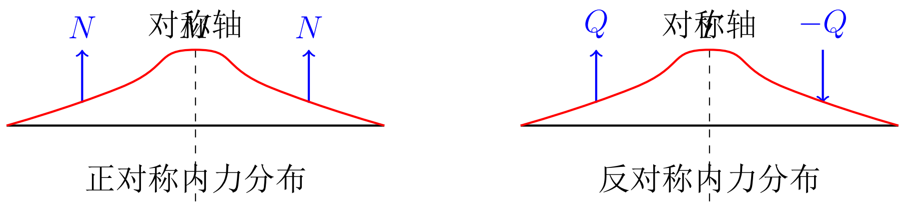


图 4: 结构内力的正对称与反对称分布示意图。蓝色箭头代表轴力、剪力，红色曲线代表弯矩、扭矩分布。

11. 问答题回答及知识点介绍

第一章绪论及基本概念

- **可变形固体的基本假设**：假设固体材料连续、均匀且各点位移连续，变形过程中体积变化很小，忽略材料内部微观结构对宏观力学行为的影响。

- **杆件变形的基本形式**：包括轴向变形（拉伸、压缩）、弯曲变形、扭转变形以及剪切变形。

第二章轴向拉伸和压缩

- **正应力、切应力、平均应力的定义**：

  – 正应力：垂直于截面的内力单位面积上的分布；

  – 切应力：平行于截面的内力单位面积上的分布；

  – 平均应力：内力除以截面面积的值，代表平均分布应力。

- **圣维南原理**：在杆件的某一截面处，截面以外的力及力矩对该截面的应力分布无影响。
- **胡克定律及其物理意义**：
  - 关系式：应力与应变成正比，线性弹性阶段有效；
  - 单轴应力状态下，$\sigma = E\varepsilon$，其中E为弹性模量。
- **低碳钢拉伸试验的应力应变曲线及四阶段**：
  - 四阶段：弹性阶段、屈服阶段、强化阶段、断裂阶段；
  - 比例极限：应力应变曲线开始偏离直线的点；
  - 弹性极限：最大弹性应力；
  - 上屈服强度：屈服曲线上升峰值；
  - 下屈服强度：屈服期间，不计初始瞬时效应的最小应力；
  - 屈服极限：材料开始发生塑性变形的应力；
  - 强度极限：材料能承受的最大应力；
  - 断后伸长率：断裂前伸长的长度与原始长度比；
  - 断面收缩率：断裂时横截面缩小面积与原始面积比。
- **应力集中的概念**：由于几何突变、缺口等造成的局部应力增大现象。

第三章扭转

- **扭转截面系数**：描述截面抗扭能力的参数。
- **切应力互等定理**：在纯扭转条件下，截面各点切应力大小相等。
- **翘曲的定义**：非圆截面扭转时截面出现的非平面变形。
- **形心、静矩、惯性矩、惯性半径、惯性积、主惯性矩、形心主惯性矩的定义**：
  - **形心**：截面面积的几何中心，即截面上所有微小面积元素的位置矢量的面积加权平均点。形心的位置使得截面对该点的静矩为零。
  - **静矩**（第一面积矩）：截面上某一部分面积相对于某轴的第一矩，计算公式为
    $$Q = \int y\,dA$$
    其中y是该面积元相对于参考轴的垂直距离。静矩用于计算截面受力时的弯矩作用。
  - **惯性矩**（第二面积矩）：截面面积对某轴的第二矩，定义为
    $$I = \int y^2\,dA$$
    表征截面抵抗弯曲变形的能力，数值越大，截面抗弯刚度越强。

- **惯性半径**：截面对某轴的惯性矩I与截面面积A的比值的平方根，表示截面面积相对于该轴的分布特征，计算公式为

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}.$$

惯性半径反映截面面积“离开”该轴的平均距离。

- **惯性积**（积矩）：截面对两个不同轴（如x轴和y轴）的混合二阶面积矩，定义为

$$I_{xy} = \int xy \, dA,$$

它描述截面相对于两个坐标轴的耦合性质，当惯性积不为零时，轴向的弯曲相互影响。

- **主惯性矩**：通过旋转坐标轴，找到一组坐标轴使惯性积为零时，这组坐标轴对应的惯性矩称为主惯性矩。主惯性矩代表截面在这组主轴方向上的最大和最小抗弯刚度。

- **形心主惯性矩**：是在形心坐标系下的主惯性矩，即通过形心且使惯性积为零的主轴上的惯性矩，常用于结构分析和设计中。

第四章弯曲应力

- **对称弯曲与非对称弯曲**：对称弯曲是弯矩与截面主惯性轴对应，非对称弯曲则不对应。
- **叠加原理**：线性系统中，总变形或应力等于各载荷单独作用的叠加。
- **纯弯曲与横力弯曲的区别**：纯弯曲无剪力，横力弯曲存在剪力。
- **纯弯曲时平面假设，中性轴及中性层定义**：
  - 平面假设：截面变形仍保持平面；
  - 中性轴：弯曲截面中无应力的轴线；
  - 中性层：截面内应变为零的层面。
- **梁截面上切应力两个假设**：
  - 剪应力分布较均匀；
  - 剪应力主要作用于中性层。
- **梁合理设计的工程措施**：截面合理选择，材料合理利用，加强局部支撑，减小应力集中等。

第五章梁弯曲时的位移

- **提高梁刚度的措施**：增加截面惯性矩，选用高模量材料，合理支撑及加劲等。

第六章简单的超静定问题

- **静定问题、超静定问题及相关定义：**
  - 静定问题：支持反力数等于平衡方程数；
  - 超静定问题：支持反力数超过平衡方程数，多余约束；
  - “多余”约束：超出平衡要求的约束；
  - 超静定次数：多余约束数；
  - 基本静定系：移除多余约束后的结构。
- **装配内力与装配应力：**因结构装配引起的内力和应力。
- **温度内力与温度应力：**温度变化引起的内力和应力。

第七章应力状态与强度理论

- **应力状态定义：**材料内部应力的分布形态，平面应力状态是二维应力状态，空间应力状态是三维应力状态。
- **应力圆方程及图示（莫尔圆）：**

$$(\sigma_x - \sigma_{\text{avg}})^2 + \tau_{xy}^2 = R^2,$$

  其中，$\sigma_{\text{avg}} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$，半径$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$。
- **主平面及主应力：**使切应力为零的平面上的正应力即为主应力。
- **四个常用强度理论及等效应力表达式：**
  - 最大正应力理论；
  - 最大剪应力理论；
  - 最大主应变能密度理论；
  - 最大扭转能理论（冯·米塞斯准则）。

第八章组合变形及连接部分的计算

- **组合变形与连接件定义：**多种变形方式同时存在，连接件为构件间连接部分。
- **偏心拉伸或压缩：**载荷作用线不通过截面形心导致弯矩。
- **截面核心定义：**截面内使偏心载荷仍产生纯压力不发生拉应力的区域。
- **螺栓连接三种破坏形式：**螺栓剪切破坏、螺栓拉断、连接板剪切破坏。
- **铆钉连接三种方式：**单铆钉连接、双铆钉连接及多排铆钉连接。

第九章压杆稳定

- **平衡三种状态**：稳定平衡、临界平衡、不稳定平衡。
- **临界平衡及临界力**：临界状态是系统处于边界平衡状态，临界力为使杆失稳的最小载荷。
- **欧拉公式及适用范围**：
$$P_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2},$$
其中E为弹性模量，I惯性矩，L有效长度，K长度系数。适用于长细比大的压杆。
- **提高压杆稳定性措施**：增加截面惯性矩，缩短有效长度，增加支撑等。

第一章弯曲问题的进一步研究

- **平面弯曲与斜弯曲**：平面弯曲弯矩作用在主惯性轴上，斜弯曲则不在主惯性轴上。
- **相当截面定义**：折算成等效截面以简化复杂截面分析。
- **弯曲中心定义**：作用力使梁弯曲而不产生扭转的点。

第二章考虑材料塑性的极限分析

- **永久变形及残余应力**：超过弹性极限的塑性变形，卸载后仍保留的应力。
- **简单加载及极限状态**：逐步加大载荷，直至结构失稳或破坏的状态。
- **弹性-理想塑性模型与刚性-理想塑性模型**：前者有弹性阶段，后者无弹性阶段直接塑性变形。
- **屈服荷载与极限荷载**：屈服荷载为材料开始屈服时载荷，极限荷载为极限承载能力。
- **屈服扭矩与极限扭矩**：对应于材料开始屈服和极限承载能力的扭矩。
- **屈服弯矩与极限弯矩**：对应于材料开始屈服和极限承载能力的弯矩。
- **塑性弯曲截面系数**：反映截面塑性承载能力的系数。
- **塑性铰定义**：构件发生塑性转动的铰接区域。

第三章能量法

- **几何非线性弹性问题与物理非线性弹性问题**：前者考虑大变形几何效应，后者考虑材料非线性。
- **卡氏第一定理、第二定理、余能定理及适用范围**：

  - 第一、二定理为虚功原理的不同表达；
  - 余能定理用于计算结构的变形能。

- **力法与位移法定义：**
  - 力法：选定多余力作为未知量；
  - 位移法：选定位移或转角作为未知量。

第六章动荷载·交变应力

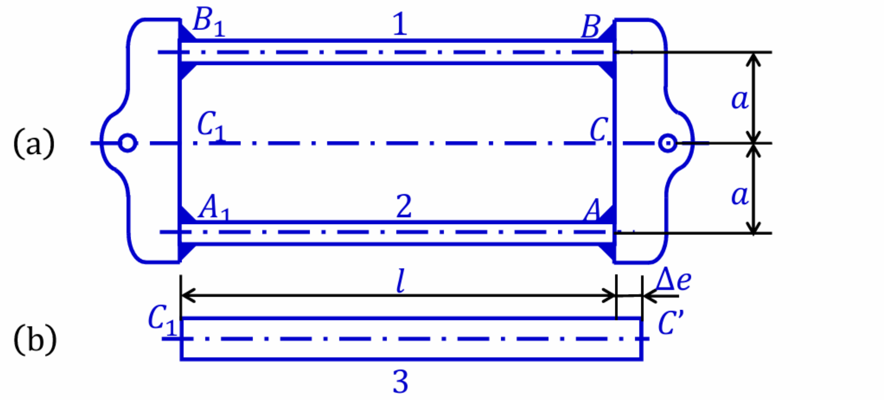
- **动荷载，交变应力，疲劳破坏及疲劳寿命定义：**
  - 动荷载：随时间变化的载荷；
  - 交变应力：正负交替变化的应力；
  - 疲劳破坏：材料因循环应力导致的破坏；
  - 疲劳寿命：材料在交变应力下能承受的循环次数。
- **冲击作用定义：**短时间内产生的大幅度载荷作用。
- **应力谱，应力循环，应力比，应力幅定义：**
  - 应力谱：某段时间内应力的变化范围；
  - 应力循环：一次完整的应力变化过程；
  - 应力比：最小应力与最大应力之比；
  - 应力幅：应力最大值与最小值差的一半。

第七章材料力学性能的进一步研究

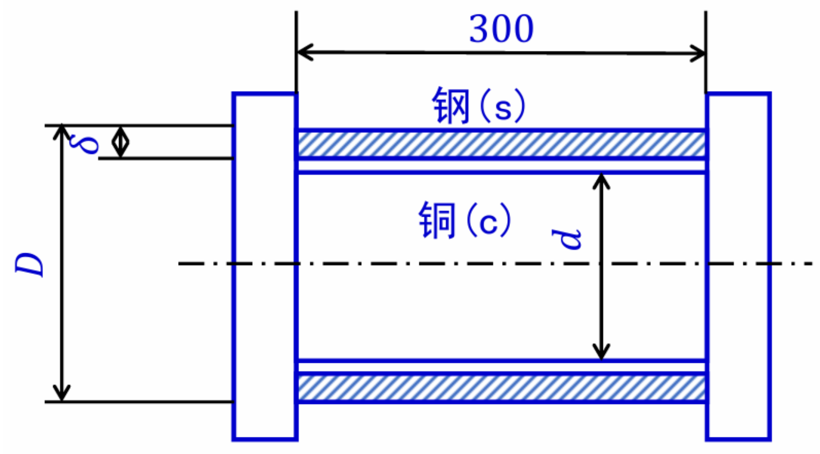
- **蠕变与松弛定义：**
  - 蠕变：恒定载荷下材料随时间缓慢变形；
  - 松弛：恒定应变下材料应力随时间减小。

习题（题目）

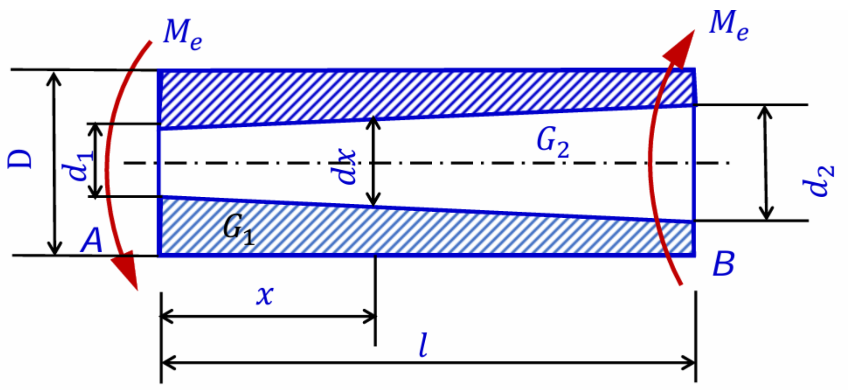
1. 两铸件用两钢杆1、2连接，其间距$l = 200mm$（图a）。现需将制造得过长（$\Delta e = 0.11mm$）的铜杆3（图b）装入铸件之间，并保持三杆的轴线平行且有等间距a。已知：钢杆直径$d = 10mm$，铜杆横截面为$20mm \times 30mm$的矩形，钢的弹性模量$E = 210GPa$，铜的弹性模量$E_3 = 100GPa$。铸件很厚，其变形可略去不计。试计算各杆内的装配应力。
   (**拉压超静定问题**)



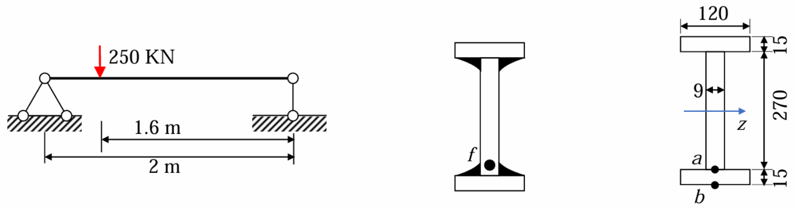
2. 两端直径分别为$d_1 = 40mm$和$d_2 = 80mm$，长度$l = 1m$的锥形圆杆，与外直径$D = 120mm$，中心具有相同锥形圆孔的空心圆杆配合成组合杆，如图所示。组合杆在两端承受扭转外力偶矩$M_e = 5kN \cdot m$作用。设两杆在接触面为紧密配合，不发生相对转动，且两杆的切变模量之比为$G_1/G_2 = 1/2$，试求实心锥形圆杆内的最大切应力。
   (**拉压超静定问题，带温度效应**)



3. 两端直径分别为$d_1 = 40mm$和$d_2 = 80mm$, 长度$l = 1m$的锥形圆杆, 与外直径$D = 120mm$, 中心具有相同锥形圆孔的空心圆杆配合成组合杆, 如图所示。组合杆在两端承受扭转外力偶矩$M_e = 5kN \cdot m$作用。设两杆在接触面为紧密配合, 不发生相对转动, 且两杆的切变模量之比为$G_1/G_2 = 1/2$, 试求实心锥形圆杆内的最大切应力。
   (**扭转超静定问题，配合切面转角相同**)

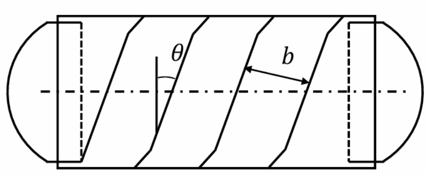


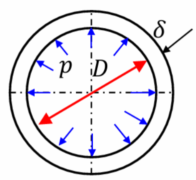
4. 两端简支的焊接工字钢梁及其荷载如图所示，梁的横截面尺寸示于图c中。试用应力圆求梁危险截面上a和b两点处的主应力，并绘出主应力单元体。
(**应力状态，莫尔圆**)



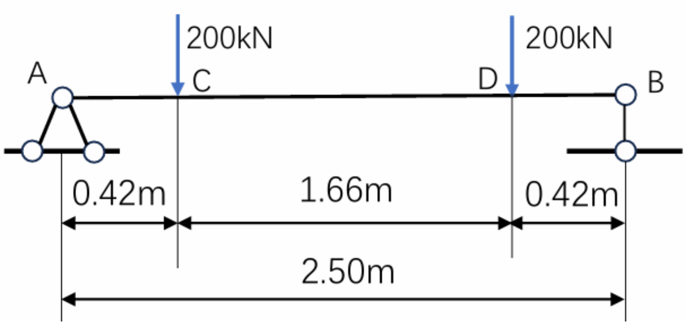
(a) (b) (c)

5. 一两端密封的圆柱形压力容器，圆筒部分由壁厚为δ，宽度为b的塑条滚压成螺旋状并熔接而成。圆筒的内直径为D，且$\delta \ll D$。容器承受的内压的压强为p，若熔接部分承受的拉应力不得超过塑条中最大拉应力的80%，试求塑条的许可宽度b。
(**应力状态，莫尔圆**)

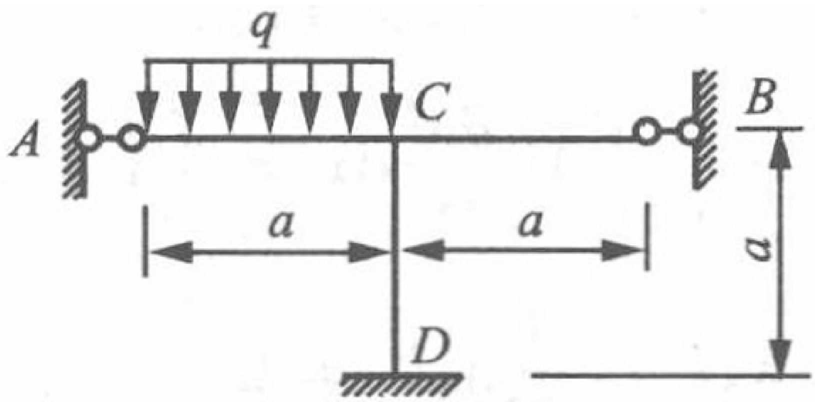


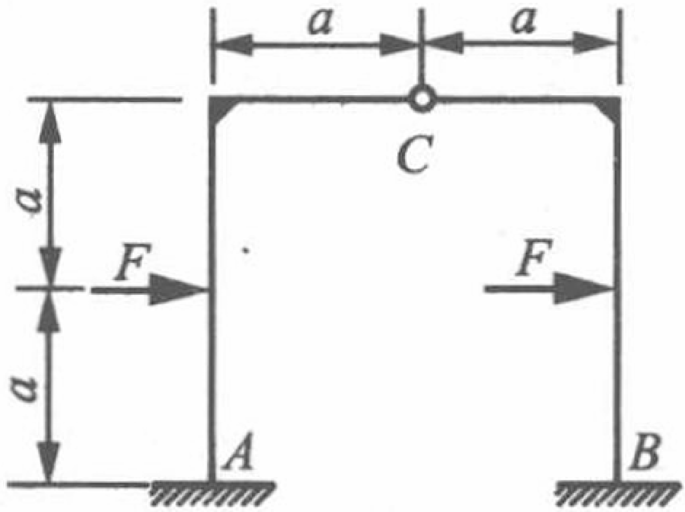


6. 两端简支的工字钢梁承受荷载如图所示。已知材料 Q235 钢的许用应力[σ]=170 MPa和[τ]=100MPa。试按强度条件选择工字钢的型号。
(**强度理论，强度条件**)

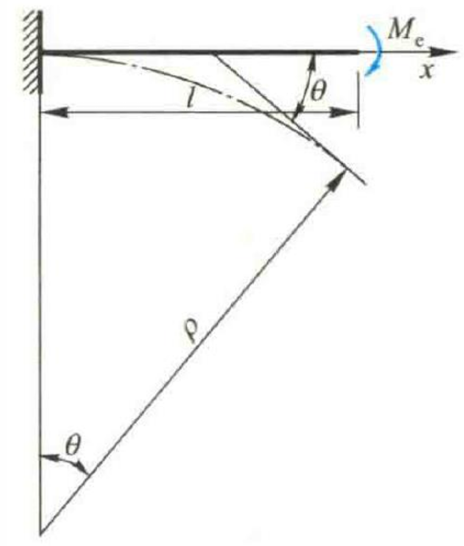


7. 材料为线弹性，弯曲刚度为 EI 的各超静定刚架分别如图所示，不计轴力和剪力的影响，试用卡氏第二定理求刚架的支反力。
(**超静定刚架，卡氏第二定理,注意变形关系，所以左右的水平力是相同的，第二个涉及对称性，看我前面笔记**)



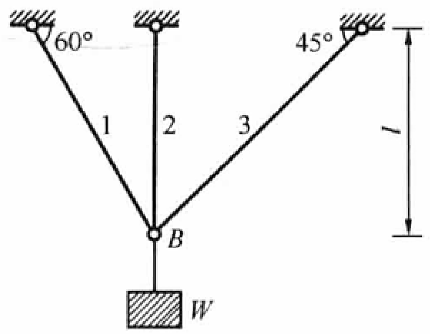


8. 刚度为EI的悬臂梁，见下图，已知其自由端的转角为θ。梁材料为线弹性，利用卡氏第一定理确定外力偶矩Me。
(**形变的几何关系，卡式第一定理**)



9. 图 8-42a 所示三杆支架，下部悬挂一重量为 W 的重物。已知三杆材料相同，1 杆和 2 杆的截面积均为 A。试确定 3 杆的截面积，以使重物只发生竖向位移而无水平位移，并计算此时三杆的内力。

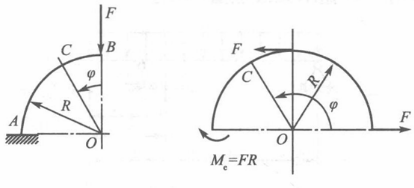
(超静定结构,结构力学,直接上几何条件)



(*a*)

10. 圆弧形曲杆受力如图所示。已知曲杆的轴线为圆弧，其半径为 R，试写出任意横截面 C 上剪力、弯矩和轴力的表达式(表示成 ϕ角的函数)，并作曲杆的剪力图、弯矩图和轴力图。

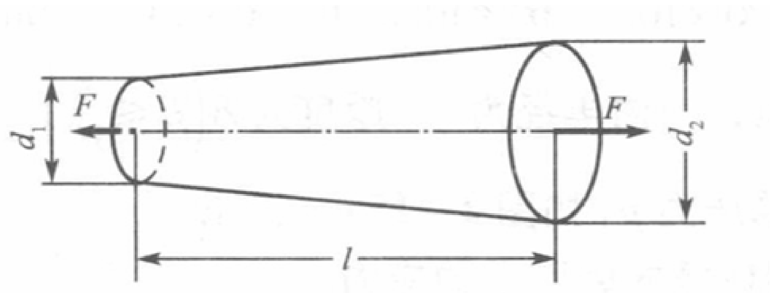
(曲杆受力分析,剪力图,弯矩图,轴力图、弯矩的方向判断)



(a) (b)

11. 如图所示圆锥形杆受轴向拉力作用，试求杆的伸长。

(轴向拉力,伸长计算)



12. 如图所示，一内半径为 r，厚度为 δ (δ ≤r/10)，宽度为 b 的薄壁圆环。在圆环的内表面承受均匀分布的压力 p(如图 2-15)，试求：

- 由内压力引起的圆环径向截面上的应力
- 由内压力引起的圆环半径的增大

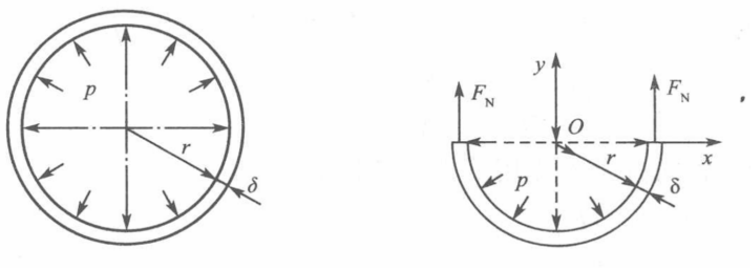
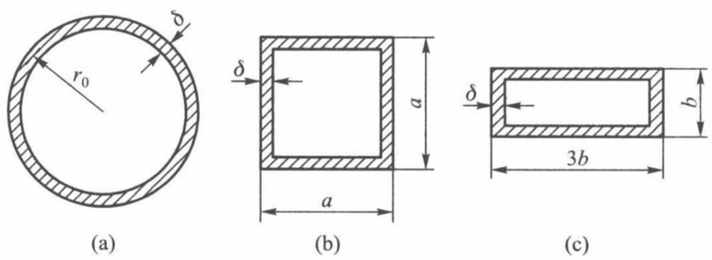


图 2 – 15　　图 2 – 16

13. 横截面面积A，壁厚δ，长度l和材料的切变模量均相同的三种截面形状的闭口薄壁杆，如下图所示。若分别在杆的两端承受相同的扭转外力偶矩 M_e 作用，试求三杆横截面上的切应力之比和单位长度扭转角之比。
(薄壁杆扭转,切应力,单位长度扭转角)

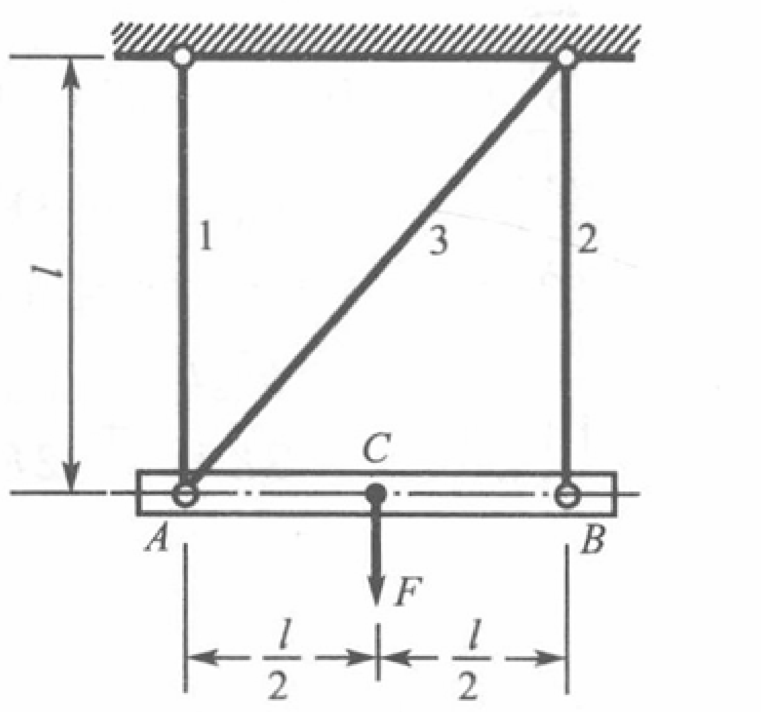


(a)　(b)　(c)

14.
- 试证明受轴向拉伸(压缩)的圆截面杆横截面沿圆周方向的线应变 ε_s 等于直径方向的线应变 ε_d。
- 一根直径为 $d = 10\,\mathrm{mm}$ 的圆截面杆，在轴向拉力 F 作用下，直径减小 $0.0025\,\mathrm{mm}$。如材料的弹性模量 $E = 210\,\mathrm{GPa}$，泊松比 $\nu = 0.3$。试求轴向拉力 F。
- 空心圆截面钢杆，外直径 $D = 120\,\mathrm{mm}$，内直径 $d = 60\,\mathrm{mm}$，材料的泊松比 $\nu = 0.3$。当其受轴向拉伸时，已知纵向线应变 $\varepsilon = 0.001$，试求其变形后的壁厚 δ。

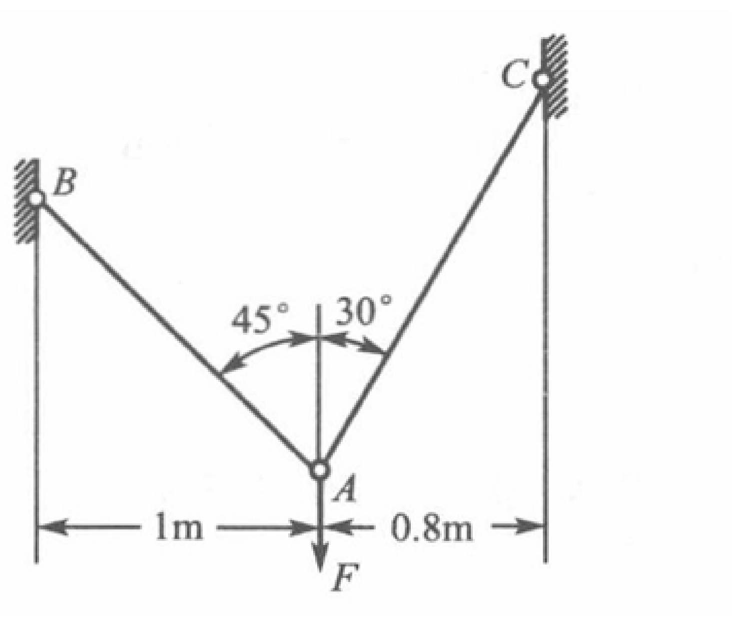
15．图2-18所示结构中，AB为水平放置的刚性杆，杆1，2，3材料相同，其弹性模量E=210GPa，已知l=1m，A1=A2=100mm2，A3=150mm2，F=20kN。试求C点的水平位移和铅垂位移。

(**超静定结构,水平位移,铅垂位移**)



16．图2-20所示实心圆钢杆AB和AC在A点以铰相连接，在A点作用有铅垂向下的力F=35kN。已知杆AB和AC的直径分别为d1=12mm和d2=15mm，钢的弹性模量E=210Gpa。试求A点在铅垂方向的位移。

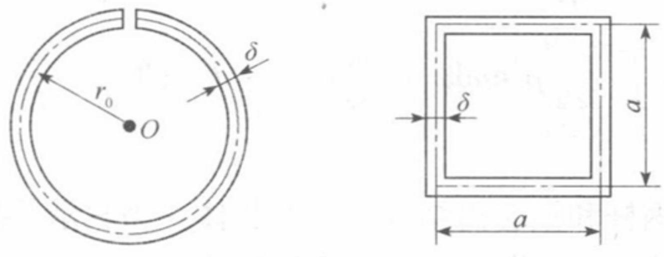
(**超静定结构,铰接连接,铅垂位移**)



17．如图所示，为薄壁杆的两种不同形状的横截面，其壁厚及管壁中线的周长均相同，两杆的

长度和材料也相同，当在两端承受相同的一对扭转外力偶矩时，试求：

- 最大切应力之比
- 相对扭转角之比



开口环形截面　　闭口箱形截面