



矩阵与线性方程组

林胤榜

同济大学数学科学学院

主要内容

我们曾经提到可以用矩阵改写线性方程组.

- 1 矩阵
- 2 矩阵的运算
- 3 矩阵诱导线性映射
- 4 线性方程组与矩阵

矩阵

定义

m 行 n 列矩阵, 或 $m \times n$ 矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

其中, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ 或 \mathbb{C} , $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. 有时将矩阵 A 记为

$$(a_{ij}) = (a_{ij})_{m \times n}.$$

称 a_{ij} 为矩阵的 (i, j) 元. 这样的矩阵的集合记成 $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ 或 $M_{m \times n}(\mathbb{C})$, 如无歧义, 简记为 $M_{m \times n}$. (M 代表 matrix.)

例子

行向量/行矩阵:

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

列向量/列矩阵:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

例子

行向量/行矩阵:

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

列向量/列矩阵:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

评述

- 1 矩阵和线性映射有着密切的联系, 矩阵是表达线性映射的一种方式. (矩阵 (方阵) 还有别的用途.)
- 2 矩阵是研究线性映射的有力工具.

矩阵的一些运算

1 (数乘) $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$,

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in M_{m \times n}.$$

矩阵的一些运算

1 (数乘) $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$,

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in M_{m \times n}.$$

2 (矩阵相乘) $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$. 记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}.$$

$$AB \in M_{m \times k}(\mathbb{R})$$

的 (i, j) 元等于 A 的第 i 行与 B 的第 j 列逐项分别相乘, 具

$$\text{体为 } a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{l=1}^n a_{il}b_{lj}.$$

矩阵相乘的例子

评述

- 只有当 A 的列数 $= B$ 的行数, 才能定义 AB .
- AB 有定义不代表 BA 有定义.

矩阵相乘的例子

评述

- 只有当 A 的列数 $= B$ 的行数, 才能定义 AB .
- AB 有定义不代表 BA 有定义.

例子

$A \in M_{m \times n}$, $X \in M_{n \times 1} (\cong \mathbb{R}^n)$, 则 $AX \in M_{m \times 1}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

矩阵诱导线性映射

定义 (左乘矩阵 A)

$A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, 定义映射 $L_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

命题

 L_A 是线性映射.

证明:

■ $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, $L_A(X + Y) = L_A(X) + L_A(Y)$, 这是因为

$$\begin{aligned} L_A(X + Y) &= A(X + Y) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + \cdots + a_{1n}(x_n + y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1 + y_1) + \cdots + a_{mn}(x_n + y_n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n \end{pmatrix} \\ &= AX + AY = L_A(X) + L_A(Y). \end{aligned}$$

■ $L_A(aX) = A(aX) = aAX = aL_A(X).$

矩阵乘法与映射复合

记号如前.

命题

$$L_A \circ L_B = L_{AB}.$$

- 1** 首先利用矩阵简写方程组: 系数矩阵 A , 未知数矩阵 X 和常数矩阵 b 如下:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

注意: 行数等于方程个数, 列数等于未知数个数.

- 2** (重新解释问题.) 求解方程 (1) 等价于以下两个问题:
- i** b 在映射 L_A 下是否有原象? ($L_A^{-1}(b) = \emptyset$?)
 - ii** $L_A^{-1}(b) = ?$

回顾: 一元一次方程

问题

$a, b \in \mathbb{R}$, 求解 x :

$$ax = b.$$

- 1 若 $a \neq 0$, 则 $a^{-1}ax = a^{-1}b$, 即 $x = \frac{b}{a}$.
- 2 若 $a = 0, b = 0$, 则任意实数 $x \in \mathbb{R}$ 均是解.
- 3 若 $a = 0, b \neq 0$, 无解.

回顾: 一元一次方程

问题

$a, b \in \mathbb{R}$, 求解 x :

$$ax = b.$$

- 1 若 $a \neq 0$, 则 $a^{-1}ax = a^{-1}b$, 即 $x = \frac{b}{a}$.
- 2 若 $a = 0, b = 0$, 则任意实数 $x \in \mathbb{R}$ 均是解.
- 3 若 $a = 0, b \neq 0$, 无解.

先研究第一种情形.

问题

- 1 第一种情形的关键是什么?
- 2 对一般方阵来讲, 合适的相应条件是什么?

逆矩阵

第一种情形的关键: 存在逆元, $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$ (么元).

定义

$A, B \in M_{n \times n}$, 若

$$AB = BA = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则称 A 是可逆矩阵, B 是 A 的逆矩阵, 记为 A^{-1} .

方程组的解

定理

在方程

$$Ax = b$$

中, 若 A 可逆, (记 A^{-1} 为 A 的逆矩阵,) 则

$$x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b.$$

判断方阵是否可逆的一个工具:

行列式.

这是接下来要介绍的内容.