



矩阵与运算

林胤榜

同济大学数学科学学院

主要内容

1 矩阵

2 矩阵运算

回顾：线性方程组和矩阵

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \quad \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

注意: 未知数个数不一定等于方程个数.

系数矩阵: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, 未知数矩阵 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

常数矩阵 $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. 上述方程可简写为 $Ax = b$.

线性方程组

定义

若 $b = 0 \in \mathbb{R}^m$, 即 b_1, \dots, b_m 均为 0, 则上述方程称为 n 元齐次线性方程组; 否则, 称为 n 元非齐次线性方程组. 若 $b = 0$, 则 $A0 = 0$, 即 0 是线性方程组的解, 称为它的零解.

线性方程组

定义

若 $b = 0 \in \mathbb{R}^m$, 即 b_1, \dots, b_m 均为 0, 则上述方程称为 n 元齐次线性方程组; 否则, 称为 n 元非齐次线性方程组. 若 $b = 0$, 则 $A0 = 0$, 即 0 是线性方程组的解, 称为它的零解.

它不一定有非零解.

线性方程组

定义

若 $b = 0 \in \mathbb{R}^m$, 即 b_1, \dots, b_m 均为 0, 则上述方程称为 n 元齐次线性方程组; 否则, 称为 n 元非齐次线性方程组. 若 $b = 0$, 则 $A0 = 0$, 即 0 是线性方程组的解, 称为它的零解.

它不一定有非零解.

基本问题:

- 1 是否有解 (主要对非齐次)?
- 2 存在时, 解是否唯一?
- 3 若有多个解, 如何求得?

定义

若两矩阵有相同的行数和相同的列数, 称它们为同型矩阵.
若矩阵的所有项均为 0, 则称它为零矩阵, 记为 O .

定义

若两矩阵有相同的行数和相同的列数, 称它们为同型矩阵.

若矩阵的所有项均为 0 , 则称它为零矩阵, 记为 O .

注意: 不同型的零矩阵是不一样的.

定义

若两矩阵有相同的行数和相同的列数, 称它们为同型矩阵.
若矩阵的所有项均为 0, 则称它为零矩阵, 记为 O .

注意: 不同型的零矩阵是不一样的.

定义 (对角阵)

形如

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}_{n \times n}$$

的矩阵称为对角矩阵, 其对角线上的元素有可能不为 0, 其余项均为 0. Λ 也记作 $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. (diagonal)

定义 (单位阵)

$$E_n = E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

称为 n 阶单位阵. 它的元

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

我们将会看到, $AE = A = EA$ (假设它们可以相乘).

定义 (同型矩阵相加)

给定两同型矩阵 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $A + B$ 表示第 (i, j) 项为 $a_{ij} + b_{ij}$ 的矩阵, 即

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

注意: 不同型矩阵不能相加.

定义 (同型矩阵相加)

给定两同型矩阵 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $A + B$ 表示第 (i, j) 项为 $a_{ij} + b_{ij}$ 的矩阵, 即

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

注意: 不同型矩阵不能相加.

定义 (数乘)

$A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{R}$, 定义数与矩阵相乘为

$$kA = (ka_{ij}).$$

定理

$(M_{m \times n}, +, \cdot)$ 构成线性空间.

定理

$(M_{m \times n}, +, \cdot)$ 构成线性空间.

定理包含的内容:

- “+” $\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \exists O, \\ (ii) \quad (A + B) + C = A + (B + C), \\ (iii) \quad \exists -A, \\ (iv) \quad A + B = B + A. \end{array} \right.$
- “ \cdot ” $\left\{ \begin{array}{l} (v) \quad 1 \cdot A = A, \\ (vi) \quad \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A. \end{array} \right.$
- “ \cdot ” 与 “+” $\left\{ \begin{array}{l} (vii) \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \\ (viii) \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B. \end{array} \right.$

定义 (矩阵相乘)

给定 $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$, $B = (b_{rs}) \in M_{n \times k}$. 定义 $AB \in M_{m \times k}$:
 AB 的 (i, s) 项是

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{js}.$$

左乘一个矩阵

矩阵 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ 给出线性映射

$$L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$
$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \mapsto AZ.$$

例子 (对角矩阵)

给定 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. 则线性映射

$$L_\Lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

对每个坐标向量作伸缩:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

例子 (单位矩阵)

$E = E_n = \text{diag}(1, \dots, 1)$, 则

$$\begin{aligned} L_E: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ X &\mapsto EX = X. \end{aligned}$$

所以称它为单位矩阵.

平面上的旋转

例子

令

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

则

$$L_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

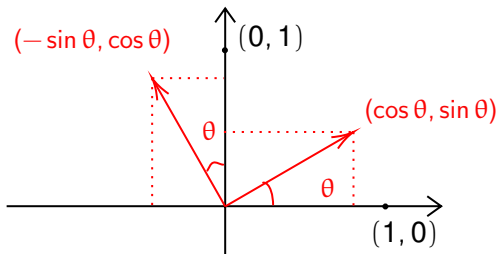
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}.$$

其中,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$



所以, L_A 将平面上的向量逆时针旋转 θ .



例子

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

求 AB 和 BA .

例子

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

求 AB 和 BA .

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -3 & -5 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意: $AB \neq BA$.

定义

若方阵 A 和 B 满足 $AB = BA$, 则称 A 和 B 是可交换的.

注意:

- 1 A 和 B 均不为 0, 但有可能 $AB = 0$. 换句话说,

$$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ 或 } B = 0.$$

- 2 $A(X - Y) = 0$ 且 $A \neq 0 \not\Rightarrow X = Y$.